

## АЛГОРИТМ УДАЛЕНИЯ МАЛЫХ РЕБЕР ВЫПУКЛЫХ МНОГОГРАННЫХ ЯЧЕЕК В ГЕНЕРАТОРЕ СЕТОК МЕТОДОМ ОТСЕЧЕНИЯ

*Тимаева Татьяна Евгеньевна (tetimaeva@vniief.ru), Смолкина Дина Николаевна*

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», г. Саров Нижегородской обл.

Настоящий доклад посвящен описанию алгоритма. Введено определение малых ребер, приведено описание выбранного подхода для удаления малых ребер из ячеек многогранной сетки и представлены результаты метода.

**Ключевые слова:** препроцессор пакета программ ЛОГОС, генератор сеток методом отсечения, улучшение качества сетки, малые ребра, неструктурированные сетки.

## THE ALGORITHM FOR REMOVING SMALL EDGES FROM CONVEX POLYHEDRAL CELLS IN CUT MESH GENERATION METHOD

*Timaeva Tatyana Yevgenievna (tetimaeva@vniief.ru), Smolkina Dina Nikolayevna*

FSUE «RFNC-VNIIEF», Sarov Nizhny Novgorod region

The report is devoted to the description of the algorithm. The definition of small edges has been introduced, the description of the chosen approach is given for small edges removing from convex polyhedral cells and the results of the method are presented.

**Key words:** preprocessor of the LOGOS software package, cut mesh generation method, grid quality improvement, small edges, unstructured grid.

### Введение

Построение качественной расчетной сетки для проведения расчетов реальных трехмерных задач является одним из наиболее трудоемких и затратных по времени этапов подготовки численной модели, поскольку успешность дальнейшего расчета напрямую зависит от качества подготовленной расчетной сетки. В программном комплексе ЛОГОС [1] для подготовки расчетных сеток для решения задач аэрогидромеханики разрабатывается автоматический генератор неструктурированных объемных сеток с многогранными элементами методом отсечения [2].

Данная работа посвящена описанию алгоритма удаления малых ребер в выпуклых многогранных ячейках, реализованного в генераторе неструктурированных многогранных сеток методом отсечения. Качество отсеченных ячеек напрямую влияет на качество призматических ячеек, поскольку они формируются на основе поверхностных граней отсеченных ячеек. Пример восстановления призматических ячеек показан на рис. 1. В подавляющем большинстве случаев в ячейках сложной формы присутствуют ребра малой длины и малые поверхностные грани, образо-

ванные малыми ребрам. Данные грани приводят к появлению малых призматических ячеек.

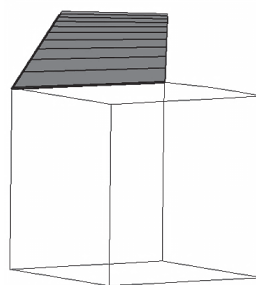


Рис. 1. Пример восстановления призматических слоев

### Формулировка подхода удаления малых ребер

Результатом работы генератора сеток методом отсечения является многогранная сетка, ячейки которой можно разделить на два типа. Ячейки, которые находятся вблизи моделируемого объекта, и те, которые заполняют остальной объем. Вдали от границ модели ячейки сетки (дробные) имеют форму куба, но могут состоять и более чем из шести граней рис. 2,а. Вблизи границы модели формируются ячейки

в виде многогранных призм. Ячейки на стыке дробных ячеек и призм являются многогранниками произвольной формы. Такие ячейки будем называть отсеченными ячейками сетки рис. 2,б.

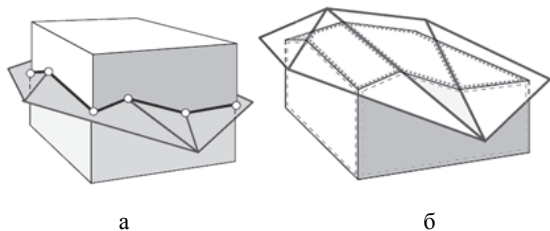


Рис. 2. Ячейки: а – исходная ячейка восьмигранного дерева с набором треугольников; б – ячейка с отброшенной внешней частью относительно сетки из треугольников

Построение отсеченных ячеек проводится с учетом характерных кривых, проходящих вдоль особенностей геометрической модели. Так как в основе метода лежит поиск пересечений треугольников с ячейками восьмигранного дерева с учетом характерных кривых, то при построении многогранных сеток методом отсечения могут возникать ячейки с малым объемом ( $< 1e-20$ ), «плохим» отношением длин сторон ( $> 1000$ ), малыми площадями граней ( $< 1e-20$ ) и т. д. В таких ячейках присутствуют ребра малой длины.

После работы метода отсечения в областях могут возникать ячейки выпуклые и невыпуклые, которые могут иметь сложную форму. На рис. 3 приведены данные ячейки.

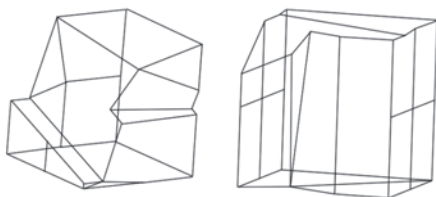


Рис. 3. Пример ячеек многогранной сетки

В работе [3] приводится условие допустимости многогранной ячейки сетки, пример которой изображен на рис. 4. А именно, многогранная ячейка считается допустимой, если:

- ячейка является звездной относительно центра тяжести своих узлов;
- центр тяжести каждой грани лежит внутри конуса, натянутого на ребра грани и с узлом в точке  $C$  центра тяжести многогранника.

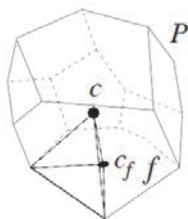


Рис. 4. Допустимая многогранная ячейка

Координаты центра тяжести грани  $f$  определяется по формуле (1):

$$C_f = \frac{1}{N_{fN}} \sum_{i=1}^{N_{fN}} faceNode_i, \quad (1)$$

где  $N_{fN}$  – количество узлов грани,  $faceNode_i$  – координата узла грани.

Координата центр тяжести ячейки определяется по формуле (2):

$$C = \frac{1}{N_f} \sum_{i=1}^{N_f} C_{f_i}, \quad (2)$$

где  $N_f$  – количество граней ячейки,  $C_{f_i}$  – координата центра грани.

Таким образом, автором работы [1] делается вывод, что многогранная ячейка является допустимой, если каждый из тетраэдров вида, показанного на рис. 4, имеет положительный объем. Исходя из такого определения допустимости многогранной ячейки, можно сделать вывод: при удалении малого ребра из ячейки достаточно проверить положительность объема тетраэдров модифицированной ячейки. Если объемы всех тетраэдров, полученных после удаления ребра, остаются положительными, то удаление ребра – является допустимой операцией над сеткой, в противном случае – недопустимой. Причем данное правило справедливо только для выпуклых многогранных ячеек. Выпуклость ячейки определяется формулой (3), рис. 5:

$$\alpha = \begin{cases} a \cos(-(\vec{N}_1, \vec{N}_2)), & \text{если } [N, (\vec{N}_1, \vec{N}_2)] > 0 \\ 2\pi - a \cos(-(\vec{N}_1, \vec{N}_2)) \end{cases}, \quad (3)$$

где  $\vec{N}_1$  – нормаль к первой поверхностной грани,  $\vec{N}_2$  – нормаль ко второй поверхностной грани. При  $\alpha \geq \pi$  – ячейка выпуклая, при  $\alpha < \pi$  – невыпуклая.

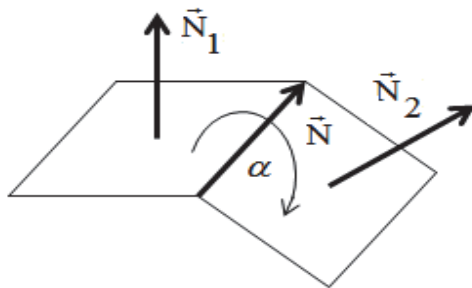


Рис. 5. Разбиение ячеек на тетраэдры

В генераторе сеток методом отсечения реализован алгоритм разрезания невыпуклых многогранных ячеек на множество выпуклых, поэтому разработанный алгоритм удаления ребер в выпуклых ячейках, обобщен на все ячейки многогранной сетки.

## Разбиение ячеек на тетраэдры, удаление ребер из сетки

Под малыми ребрами в данном методе рассматриваются ребра ячейки, длина которых меньше 30 % минимальной длины ребра базовой шаблонной ячейки. Из данных ребер формируется список ребер-кандидатов на удаление из ячейки. При работе данного алгоритма рассматриваются все выпуклые ячейки с топологией. Все ячейки, в окрестности которых есть невыпуклые ячейки, не участвуют в модификации. Под окрестностью ячейки понимаются соседи текущей рассматриваемой ячейки через узел, который содержится в ребре-кандидате на удаление. Если список ребер-кандидатов пуст, то происходит переход к следующей ячейке по списку, иначе, текущая рассматриваемая ячейка разбивается на множество тетраэдров. Разбиение ячейки проводится так, как это было показано на рис. 4. Каждый тетраэдр натянут на центр тяжести многогранника  $C$ , центр тяжести одной из граней  $C_f$ , а также на одно из ребер этой грани. Окрестность рассматриваемой ячейки также разбивается на тетраэдры аналогичным образом. В результате получаем фрагмент сетки, состоящей из тетраэдров. Пример такой сетки изображен на рис. 6.

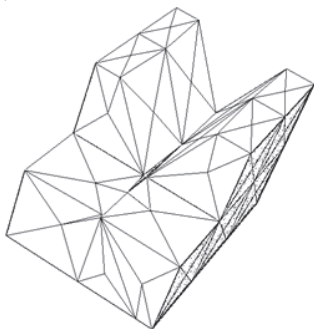


Рис. 6. Разбиение ячеек на тетраэдры

В алгоритме удаления малых ребер все ребра-кандидаты рассматриваемой ячейки нумеруются. Затем из этих номеров формируются все возможные комбинации для удаления (сочетания без повторов). Все картежи сортируются по количеству удаляемых ребер из ячейки. Самым первым рассматривается картеж из максимального количества удаляемых ребер. Далее производится удаление всех ребер картежа из тетраэдральной сетки. Таким образом, вместо исходной сетки получается модифицированная сетка из тетраэдров. После чего оценивается объем всех тетраэдров модифицированной сетки, в которые входят концы удаляемых ребер, формула (4).

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix} > 0, \quad \text{вектора } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ образуют} \quad (4)$$

правую тройку,  
где  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  вектора, на которые натянут тетраэдр.

Пример тетраэдральной сетки до модификации рис. 7,а и рис. 7,б.

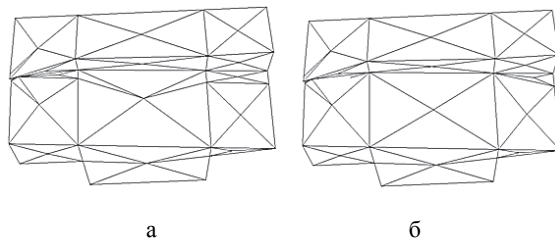


Рис. 7. Тетраэдральная сетка: а – до удаления малых ребер; б – после удаления малых ребер из сетки

Отдельно следует отметить, что на измененные многогранные ячейки также накладывается ряд ограничений:

- Удаление малых ребер из сетки не должно приводить к образованию вырожденных многогранных ячеек (ячеек, состоящих менее чем из четырех граней), содержащих внутренние точки. Данное ограничение формируется из следующих соображений: вырожденная ячейка должна быть удалена из сетки. При удалении ячейки все внутренние узлы проецируются на поверхность. Что именно будет происходить с окрестностью рассматриваемой ячейки в данном модуле, не оценивается.

- Удаление малых ребер из сетки не должно приводить к образованию вырожденных многогранных ячеек, которые не планарные.

Однако удаление малых ребер не всегда приводит к укрупнению элементов на поверхности отсеченной сетки. Часто данная операция приводит к образованию сильно-вытянутых треугольных граней. Пример данной грани показан на рис. 8,а.

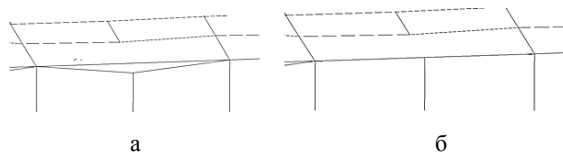


Рис. 8. Пример фрагмента сетки: а – до модификации; б – после модификации

В данном случае условие положительности объемов тетраэдров в окрестности ячейки выполнено, но фактически удаление малых ребер грани привело к ухудшению качества сетки. Поэтому поверхностные и внутренние грани вырождаются, если удаление малых ребер делает из нее сильно-вытянутую грань, т. е. грань, в которой периметр ребер много больше площади грани. Критерий для определений таких граней рассчитывается в формуле (5):

$$\text{коэффициент вытянутости грани} = \frac{P^2}{4\pi S}, \quad (5)$$

где  $P$  – периметр грани,  $S$  – площадь грани.

Если значение коэффициента вытянутости грани больше 18, то грань считается плохой. Помимо образования сильно-вытянутых граней при удалении ма-

лых ребер необходимо избегать образования граней, все узлы которых принадлежат одному топологическому ребру. Такие грани также необходимо подвергать операции удаления.

Если в ячейке удалилось ребро или грань, то данную ячейку и ее соседей, которых коснулась модификация, заносим в контейнер. После того как на первой итерации рассмотрены все ячейки поверхностной сетки переходим к следующей итерации, рассматривая те ячейки, которые были занесены в контейнер. Продолжаем до тех пор, пока все возможные ребра и грани не удалятся.

На приведены фрагменты сетки до модификации рис. 9,а и рис. 10,а и после модификации в многогранной сетке рис. 9,б и рис. 10,б.

## Результаты

При тестировании разработанного алгоритма на 72 моделях, переданных представителями предприятий разных отраслей промышленности, была получена следующая статистика. Предложенный алгоритм позволяет удалять до 70 % малых ребер из многогранной сетки.

На основании результатов данного тестирования в отчете приведена статистика, которая показывает, что рассмотренный подход позволяет сократить количество малых ребер и количество ячеек с плохим соотношением объемов и площадей более чем в 3 раза, количество малых граней – более чем в 2 раза.

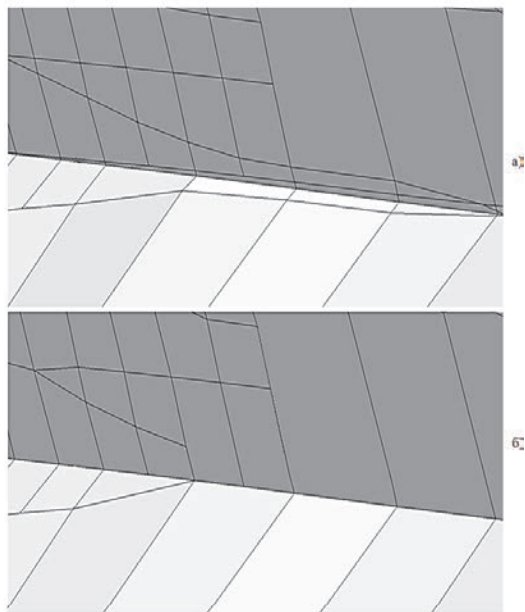


Рис. 9. Пример работы алгоритма удаления малых ребер: а – до; б – после

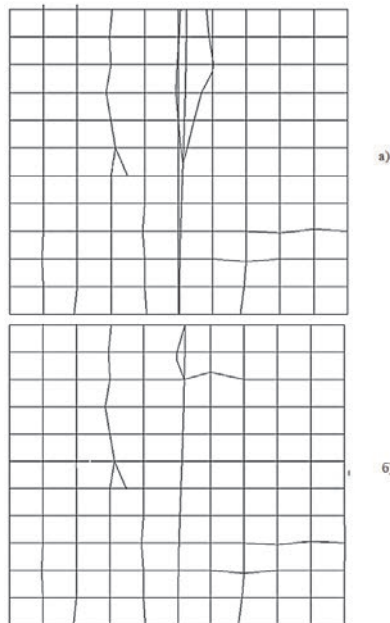


Рис. 10. Пример работы алгоритма: а – до удаления малых ребер; б – после удаления малых ребер

В табл. 1 приведены примеры некоторых моделей, где представлены данные по удалению малых ребер.

Таблица 1

Данные по количеству малых ребер

Модель	Количество малых ребер в многогранной сетке до удаления малых ребер	Количество малых ребер в многогранной сетке после удаления малых ребер	% удаленных ребер в многогранной сетке
Модель 1	667	8	98,8
Модель 2	10745	1539	85,68
Модель 3	8877	944	89,4
Модель 4	54	7	87
Модель 5	4225	411	90,3
Модель 6	11708	1464	87,5
Модель 7	22	0	100
Модель 8	24040	3427	85,7
Модель 9	12261	3603	70,6
Модель 10	2793	810	70,9
Модель 11	20287	4395	78,3
Модель 12	18050	4042	77,6

Улучшение качества ячеек по изменению соотношений объемов наблюдалось на всех моделях, где такие ячейки были найдены. В табл. 2 приведены данные по некоторым моделям.

Таблица 2

Данные по количеству ячеек с плохим соотношением объемов

Модель	Количество ячеек с плохим соотношением объемов до удаления малых ребер	Количество ячеек с плохим соотношением объемов после удаления малых ребер	Сокращение количества ячеек с плохим соотношением объемов (разы)
Модель 1	1218	130	9,37
Модель 2	325	92	3,5
Модель 3	208	61	3,4
Модель 4	3237	396	8,17
Модель 5	3252	460	7,07

Улучшение по соотношению площадей было выявлено на всех моделях из базы тестирования, в табл. 3 представлены результаты некоторых моделей.

Таблица 3

Данные по количеству ячеек с плохим соотношением площадей

Модель	Количество ячеек с плохим соотношением площадей до удаления малых ребер	Количество ячеек с плохим соотношением площадей после удаления малых ребер	Сокращение количества ячеек с плохим соотношением площадей (разы)
Модель 1	223	32	6,97
Модель 2	139	38	3,66
Модель 3	17	5	3,4
Модель 4	214	24	8,92
Модель 5	223	27	8,26

Улучшение по количеству маленьких граней было выявлено на всех моделях, где такие грани были отмечены еще до модификации. В табл. 4 приведены данные по некоторым из этих моделей.

Таблица 4

Данные по количеству маленьких граней

Модель	Количество малых граней до удаления малых ребер	Количество малых граней после удаления малых ребер	Сокращение количества малых граней (разы)
Модель 1	829	167	4,96
Модель 2	1258	478	2,63
Модель 3	193	52	3,71
Модель 4	19755	2754	7,17
Модель 5	165628	80077	2,07

Из табл. 5 видно, что размерность сеток сократилась, поэтому, для проведения расчета потребуется меньше вычислительных ресурсов.

Таблица 5

Данные по размерности сетки

Модель	Размерность сетки до удаления малых ребер	Размерность сетки после удаления малых ребер
Модель 1	2940899	2906008
Модель 2	3954089	3950778
Модель 3	925118	922210
Модель 4	2219899	2147518
Модель 5	2596149	2527406

**Список литературы**

1. Козелков А. С., Дерюгин Ю. Н., Зеленский Д.К., Полищук С. Н., Лашкин С. В., Жучков Р. Н., Глазунов В. А., Яцевич С. В., Курулин В. В. Многофункциональный пакет программ ЛОГОС: Физико-математические модели расчета задач аэро-, гидродинамики и теплопереноса. Препринт № 111. ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 2013.

2. Смолкина Д. Н., Борисенко О. Н., Черенкова М. В., Гиниятуллина А. Г., Кузьменко М. В., Чухманов Н. В., Потехина Е. В., Попова Н. В., Турусов М. Р. Автоматический генератор неструктурированных многогранных сеток в препроцессоре пакета программ ЛОГОС // ВАНТ. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2018. Вып. 2. С. 25–39.

3. Гаранжа В. А. Численная геометрия и построение расчетных сеток. Сборник лекций. 1995. С. 675.