

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ В РЕЗОНАНСНО-ПОГЛОЩАЮЩЕЙ СРЕДЕ, СОСТОЯЩЕЙ ИЗ ПАРОВ НАТРИЯ

Ямщиков Виталий Михайлович (oefimova@otd13.vniief.ru)

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», г. Саров Нижегородской обл.

Приведено теоретическое исследование кинетики заселенности двухуровневой системы с учетом переноса спонтанного излучения при непрерывной оптической накачке. Показано, что в случае, когда длина пробега фотона в резонансно-поглощающей среде меньше или сравнима с характерным размером этой среды, спонтанное излучение может быть дополнительным источником накачки. При рассмотрении влияния вклада спонтанных фотонов в кинетику уровней использовались два подхода. Первый подход заключается в решении уравнения переноса излучения в диффузионном приближении. Второй связан с решением уравнения Бибермана-Холстейна.

Ключевые слова: кинетика уровней, перенос спонтанного излучения, двухуровневая система, увеличение прозрачности среды, диффузионное приближение, уравнение Бибермана-Холстейна.

ANALYTICAL SOLUTION OF THE RADIATIVE TRANSFER EQUATION IN RESONANT-ABSORBING SODIUM VAPOUR ENVIRONMENT

Yamshchikov Vitaly Mihailovich (oefimova@otd13.vniief.ru)

FSUE «RFNC-VNIIEF», Sarov Nizhny Novgorod region

The paper presents theoretical research of kinetics of population of a two-level system with regard to transfer of spontaneous radiation (TSR) under continuous optical pumping. Spontaneous radiation may be an extra pumping source when a photon path length in the resonant-absorbing environment is less than or comparable with the characteristic size of this environment. Two approaches were used to consider the influence of contribution of spontaneous photons into kinetics of levels. The first approach consists in solution of the radiative transfer equation in diffusive approximation. The second addresses solution of the Bibermann-Holstein equation.

Key words: kinetics of levels, transfer of spontaneous radiation, two-level system, increase in transparency of the environment, diffusive approximation, Bibermann-Holstein equation.

Введение

Перенос излучения в резонансно поглощающей среде является нелинейной задачей. Следовательно, для нахождения решения для большинства рассматриваемых задач используются численные подходы. При создании численных методик возникает проблема, связанная с их тестированием. При тестировании методик в качестве модельных задач желательнее выбирать задачи, которые имеют аналитические решения [1, 2].

Для случая, когда рассматривается одномерная задача переноса излучения для двухуровневого ато-

ма без учета спектральной зависимости коэффициентов поглощения и переизлучения, можно получить аналитическое решение. Такая задача является сильно упрощенной и ее решение, скорее всего, не описывает реальные поля излучений, возникающие в резонансно-поглощающих средах. Зато ее решение можно использовать для тестирования одно-, двух- и трехмерных задач для двух и более уровней атомов со спектральной зависимостью коэффициентов поглощения и переизлучения.

В работе описано аналитическое решение одномерной задачи переноса излучения накачки и люминесцентного излучения для среды, состоящей из

двухуровневых атомов. Перенос люминесцентного излучения учитывался с помощью диффузионного приближения. На примере среды, состоящей из атомов натрия, приведен анализ получившегося решения. Также проведено тестирование численно решенных задач. В первой задаче перенос излучения учитывался с помощью уравнения Бибермана-Холстейна [3] для одномерной задачи. Во второй использовалось диффузионное приближение для двумерной задачи.

Аналитическое решение уравнения переноса спонтанного излучения

Рассмотрим резонансное поглощение квантов накачки в двухуровневой схеме. В данной задаче энергетический уровень под номером 2 может быть любым из уровней тонкой структуры n^2P .

В кинетике учитываются следующие процессы:

- 1) Заселение уровня 2 фотонами накачки, P_{12} ;
- 2) Вынужденное испускание фотонов с уровня 2 на уровень 1 под действием излучения накачки, P_{21} ;
- 3) Радиационный распад уровня 2, S_{21} ;
- 4) Заселение уровня 2 люминесцентными фотонами, PS_{12} ;
- 5) Вынужденное испускание фотонов с уровня 3 на уровень 1 под действием люминесцентного излучения, PS_{21} .

Схематично перечисленные выше процессы кинетики представлены на рис. 1.

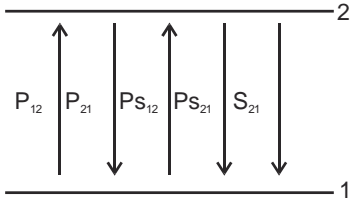


Рис. 1. Схема двухуровневой системы

Система уравнений кинетики и уравнений переноса для данной задачи выглядит следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\sigma_{12}}{E_{12}} \left(n_1 - \frac{g_1}{g_2} n_2 \right) [I_p + cU] - A_{21} n_2 = 0, \\ \frac{d}{dz} \left(l' \frac{dU}{dz} \right) = \frac{3U}{l'} - \frac{3A_{21} n_2 E_{12}}{c}, \\ l' = 1 / \sigma_{12} \left(n_1 - \frac{g_1}{g_2} n_2 \right), \\ \frac{dI_p}{dz} = - \frac{I_p}{l'}, \\ n_1 + n_2 = N_0. \end{array} \right. \quad (1)$$

Рассматривается одномерная стационарная задача. На рис. 2, ось z совпадает с направлением падающего излучения. Поглощающая среда имеет толщину вдоль оси z равную b . Вдоль оси x и y размеры среды предполагаются бесконечно большими.

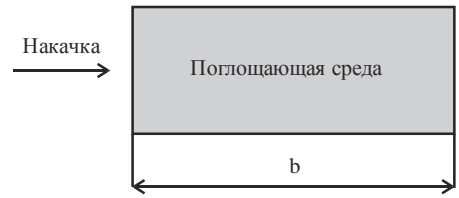


Рис. 2. Принципиальная схема задачи переноса излучения в поглощающей среде

Для получения аналитического решения системы (1) введем параметр, имеющий название «оптическая толщина слоя»:

$$\mu = \int_0^z \frac{d\bar{z}}{l'}. \quad (2)$$

Тогда уравнения переноса излучения накачки и люминесцентного излучения запишутся в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dI_p}{I_p} = d\mu \\ \frac{d^2U}{d\mu^2} = - \frac{3I_p}{c} \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} I_p = I_{p0} e^{-\mu} \\ U = - \frac{3I_{p0}}{c} e^{-\mu} + C_1 \mu + C_2 \end{array} \right., \quad (3)$$

где I_{p0} – интенсивность накачки на входе в среду (при $z = 0$); C_1 и C_2 – константы интегрирования.

Для определения констант C_1 и C_2 воспользуемся граничными условиями. Поглощающая среда занимает пространство от $0 \leq z \leq b$. При $z < 0$ и $z > 0$ поглощающей среды нет. На границах воспользуемся условиями третьего рода.

Для границы слева ($z = 0$):

$$S = - \frac{cU}{2} \Rightarrow - \frac{l'c}{3} \frac{dU}{dz} = - \frac{cU}{2} \Rightarrow \left(\frac{dU}{d\mu} \right)_{\mu=0} = \frac{3}{2} U_{\mu=0}. \quad (4)$$

Для границы справа ($z = b$):

$$S = \frac{cU}{2} \Rightarrow - \frac{l'c}{3} \frac{dU}{dz} = \frac{cU}{2} \Rightarrow \left(\frac{dU}{d\mu} \right)_{\mu=\mu_0} = - \frac{3}{2} U_{\mu=\mu_0}, \quad (5)$$

$$\mu_0 = \sigma_{12} \int_0^b \left(n_1 - \frac{g_1}{g_2} n_2 \right) dz.$$

Из условий (4) и (5) выражаем константы C_1 и C_2 :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 = \frac{3I_{p0}}{c} \cdot \frac{(e^{-\mu_0} - 5/2)}{(4 + 3\mu_0)}, \\ C_2 = \frac{3I_{p0}}{c} \left(\frac{2e^{-\mu_0} + 15\mu_0 + 15}{4 + 3\mu_0} \right). \end{array} \right. \quad (6)$$

Из (6) видно, что константа C_1 всегда отрицательна, а константа C_2 всегда положительна.

Для нахождения параметрического решения данной задачи осталось найти зависимость координаты z от параметра μ . Для этого возьмем следующий определенный интеграл:

$$\int_0^z d\tilde{z} = \int_0^\mu \frac{d\tilde{\mu}}{\sigma_{21}N_o} + \int_0^\mu \frac{(1+g_1/g_2)}{A_{21}E_{12}N_o} \left[c \cdot C_2 + c \cdot C_1\tilde{\mu} - 2I_{po}e^{-\tilde{\mu}} \right] d\tilde{\mu} \quad (7)$$

$$z = \frac{\mu}{\sigma_{21}N_o} + \frac{(1+g_1/g_2)c\mu}{A_{21}E_{12}N_o} \left(C_2 + \frac{C_1\mu}{2} \right) - \frac{2I_{po} \left(1 + \frac{g_1}{g_2} \right)}{A_{21}E_{12}N_o} (1 - e^{-\mu}).$$

Для того чтобы найти неизвестную константу μ_0 необходимо в уравнении (7) подставить значение $z = b$, при этом $\mu = \mu_0$.

Окончательное решение имеет вид:

$$\begin{cases} I_p = I_{po}e^{-\mu}, \\ U = C_2 + C_1\mu - \frac{3I_{po}}{c}e^{-\mu}, \\ z = \frac{\mu}{\sigma_{21}N_o} + \frac{(1+g_1/g_2)c\mu}{A_{21}E_{12}N_o} \left(C_2 + \frac{C_1\mu}{2} \right) - \frac{2I_{po}(1+g_1/g_2)}{A_{21}E_{12}N_o} (1 - e^{-\mu}), \\ n_2 = \frac{\sigma_{21}}{E_{12}} \cdot \frac{[I_p + cU]}{[A_{21} + (\sigma_{21}/E_{12}) \cdot (1+g_1/g_2)(I_p + cU)]} N_o, \\ n_1 = N_o - n_2. \end{cases} \quad (8)$$

В итоге, имеем параметрическую зависимость от числа μ всех переменных.

Решение задачи переноса спонтанного излучения с помощью уравнения Бибермана-Холстейна

Рассмотрим такую же задачу, что и выше, для случая, когда перенос спонтанного излучения и его вклад в кинетику описывается уравнением Бибермана-Холстейна, которое в случае резонансного поглощения имеет вид:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = A_{21} \int_V n(r') \frac{1}{4\pi l' |r-r'|^2} \exp\left(-\int_{r'}^r \frac{dx}{l'}\right) dV, \quad (9)$$

где dV – объем элементарной ячейки среды, которая является источником спонтанных фотонов; χ' – коэффициент поглощения; r – координата точки в которой рассчитывается кинетика; r' – координата объема dV ; $\exp\left(-\int \chi' dx\right)$ – представляет долю дошедшего из точки r' в точку r излучения.

В направлениях x и y среда является бесконечной, значит, относительно оси z задача обладает симметрией. Объем dV можно выразить через объем кольца:

$$dV = 2\pi r dr dz' = \frac{(z-z')^2}{\cos^2(\theta)} \text{tg}(\theta) d\theta dz'. \quad (10)$$

Решаемые уравнения имеют вид:

$$\begin{cases} n_1 + n_2 = N_o, \\ \frac{\partial n_2}{\partial t} = \left(n_1 - \frac{g_1}{g_2} n_2 \right) \frac{I_p \sigma_{12}}{E_{12}} + \frac{A_{21}}{2l'} [F_1(z) + F_2(z)], \\ F_1(z) = \int_0^z n_2(z') E_1 \left(\int_{z'}^z \frac{dz''}{l'(z'')} \right) dz', \\ F_2(z) = \int_z^b n_2(z') E_1 \left(\int_z^{z'} \frac{dz''}{l'(z'')} \right) dz', \\ I_p = I_{po} \exp\left(-\int_0^z \frac{d\tilde{z}}{l'(\tilde{z})}\right). \end{cases} \quad (11)$$

Функция F_1 отвечает за спонтанные фотоны, которые прибывают в точку z из левой части пространства, а функция F_2 отвечает за спонтанные фотоны, которые прибывают в точку z из правой части пространства (рис. 3). E_1 – интегральная экспонента.

Систему (15) можно свести к интегродифференциальному уравнению:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_2}{\partial t} = & \left(N_o - n_2 - \frac{g_1}{g_2} n_2 \right) \times \\ & \times \left[\frac{I_p \sigma_{12}}{E_{12}} + \frac{A_{21} \sigma_{12}}{2} F_1(z) + \frac{A_{21} \sigma_{12}}{2} F_2(z) \right] - A_{21} n_2. \end{aligned} \quad (12)$$

Уравнение (12) решаем численным методом. Поглощающая среда по направлению z разбивается на N слоев, каждый толщиной b/N . Тогда уравнение (12) разобьется на N дифференциальных уравнений, каждое из которых описывает временную эволюцию концентрации на втором уровне в своей точке пространства. Расчет продолжается до некоторого характерного времени, после которого все параметры задачи перестают зависеть от времени (т. е. принимают стационарные значения). Характерное время определяется из графиков, в которых концентрация, зависящая от времени, выходит на постоянное значение.

Анализ, получившихся выше решений, проводится на примере двухуровневой газовой среды, состоящей из паров Na. Выбор Na связан с тем, что этот атом достаточно хорошо изучен (известны все необходимые для расчета константы).

Рассматривается переход валентного электрона из основного состояния $3S_{1/2}$ в состояние $3P_{3/2}$. Энергетическое расстояние между данными уровнями $E = 2,1$ эВ. Время жизни уровня $3P_{3/2}$ составляет $\tau = 16,25$ нс. Масса атома Na равна $21,63$ ГэВ. Длина волны перехода $3S_{1/2} \rightarrow 3P_{3/2}$ равна $\lambda_0 = 589$ нм.

В данной постановке можно считать, что спектральная линия имеет Доплеровскую форму:

$$a_\omega = \frac{1}{\omega_0} \left(\frac{m_{Na} c^2}{2\pi T} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left[-\frac{m_{Na} c^2 (\omega - \omega_0)^2}{2\omega_0^2 T} \right]. \quad (13)$$

Здесь $\omega_0 = 2\pi c / \lambda_0$; λ_0 – длина волны света в максимуме линии.

Сечение поглощения перехода $3S_{1/2}$ в $3P_{3/2}$ рассчитывается по формуле [11]:

$$\sigma_{21} = \frac{g_2}{g_1} \left(\frac{\pi c}{\omega} \right)^2 A_{21} a_\omega, \quad (14)$$

где g_2 – кратность вырождения уровня $3P_{3/2}$ равная 4; g_1 – кратность вырождения уровня $3S_{1/2}$ равная 2.

При резонансном поглощении фотонов из формул (13) и (14) получается, что $\sigma_{21} = 1,07 \cdot 10^{-11} \text{ см}^2$.

Приведем пример для интенсивности накачки $I_p(0) = 1 \text{ Вт/см}^2$. Концентрация атомов Na равна $n_0 = 5 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-3}$. Толщину области, заполненную поглощающим газом, примем равной $b = 5 \text{ см}$. На рис. 3,а и рис. 3,б представлены три кривые. Пунктирная кривая соответствует аналитическому решению задачи (4). Сплошная кривая соответствует численному решению уравнения (12). Точечная кривая соответствует решению, в котором не учитывается перенос спонтанного излучения. На рис. 3,в изображены распределения плотности спонтанного излучения вдоль координаты z для двух приближений. Из этих графиков видно, что оба приближения при заданных параметрах имеют удовлетворительное согласие.

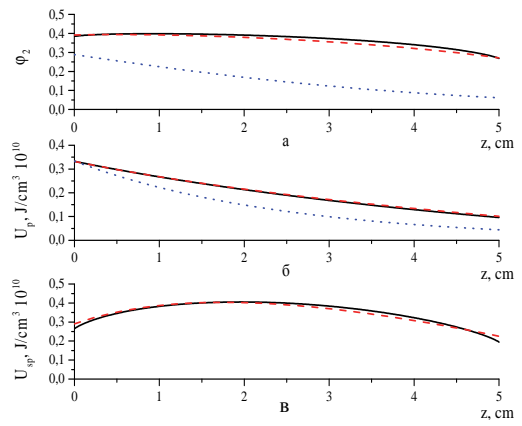


Рис. 3. Сравнение аналитического решения (8) и численного решения (12): а – распределение концентрации атомов в возбужденном состоянии, б – плотность энергии накачки, в – плотность энергии спонтанного излучения

Как видно из результатов, приведенных на рис. 3,а и рис. 3,б, вклад спонтанных фотонов в накачку среды является важным. На рис. 3,в представлена зависимость плотности спонтанного излучения. Это и есть те самые «плененные» спонтанные кванты, которые из-за малых пробегов (по сравнению с размерами среды) покидают среду не сразу. Сравнивая рис. 3,б и рис. 3,в можно заметить, что плотность спонтанного излучения превосходит плотность энергии накачки, что приводит к дополнительной накачке среды. Численный эксперимент показывает, что если понизить концентрацию поглощающих центров (атомов натрия), то тем самым увеличится длина свободного пробега в среде и вклад в кинетику спонтанных квантов станет намного меньше, чем вклад квантов накачки. Увеличение интенсивности накачки приводит к опрозрачиванию вещества (длина свободного пробега фотона увеличится). Спонтанные фотоны будут легко покидать поглощающую среду, что приведет к уменьшению их вклада в кинетику среды. Таким образом, можно заключить, что параметром, который определяет вклад спонтанного излучения в кинетику, является длина свободного пробега.

Перенос спонтанного излучения в круглом цилиндре

Рассмотрим плоский слой толщины b_z , состоящий из атомов натрия. Пучок излучения, имеющий диаметр D , облучает поверхность слоя. Облучаемый слой представлен на рис. 4.

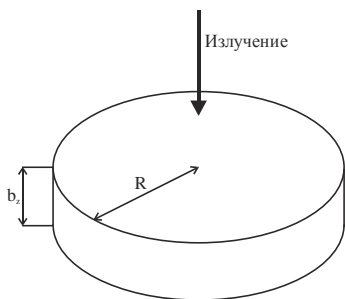


Рис. 4. Облучаемый слой, состоящий из атомов натрия и гелия

Для описания кинетики населенностей используются скоростные уравнения для двухуровневого атома (1). Уравнение переноса спонтанного излучения в силу цилиндрической геометрии будет иметь вид:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{l'c}{3r} \cdot \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{l'c}{3} \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{l'c}{3} \frac{\partial U}{\partial z} \right) + A_2 n_2 E_{12} - \frac{cU}{l'} \quad (15)$$

Получение аналитического решения для уравнения (15) невозможно, следовательно, оно решалось численно с помощью продольно-поперечной прогонки [4]. Для проверки численного решения использовалось полученное аналитическое решение. Чтобы свести двумерную задачу о переносе спонтанного излучения в цилиндре к одномерной задаче необходимо, чтобы отношение $R/b_z \gg 1$. Параметры задачи следующие: $I_p(0) = 1 \text{ Вт/см}^2$, $n_o = 3 \cdot 10^{12} \text{ см}^{-3}$, $b = 0,3 \text{ см}$, $R = 20 \text{ см}$. На рис. 5 представлено численное решение задачи (15) и аналитическое решение задачи (1).

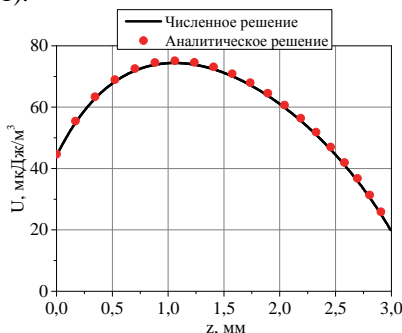


Рис. 5. Зависимость плотности энергии спонтанных фотонов от координаты z при $r = 0$

Из рис. 5 следует, что алгоритм численного решения составлен правильно, так как результат численного и аналитического решения совпадают с относительной точностью меньше 1 %.

Заключение

Представлено аналитическое решение задачи переноса спонтанного излучения. Для описания переноса спонтанного излучения использовалось диффузионное приближение.

Решение этой же задачи получено с помощью численного расчета интегро-дифференциального уравнения, в котором перенос спонтанного излучения описывался уравнением Бибермана-Холстейна. Показано, что результат аналитического решения, полученное с помощью диффузионного приближения, и численное решение уравнения Бибермана-Холстейна удовлетворительно согласуются.

Проведен расчет двумерной задачи переноса спонтанного излучения в диффузионном приближении. Для проверки правильности результатов этого расчета, использовано аналитическое решение.

Список литературы

1. Завьялов В. В., Козманов М. Ю., Селезнев В. Н., Черняков В. Е., Шестаков А. А. Результаты численных расчетов одномерных тестовых задач переноса излучения//ВАНТ. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2005. Вып. 3. С. 26.
2. Андреев Е. С., Думкина Г. В., Козманов М. Ю. О некоторых точных решениях уравнений спектрального нестационарного переноса излучения, Ж. вычисл. Матем. И матем. Физ. 1981. Т. 21, № 4. С. 1054–1055.
3. Крайнов В. П., Смирнов Б. М. Квантовая теория излучения атомных частиц // Учебное пособие. Крайнов В. П., Смирнов Б. М. Долгопрудный: Издательский дом «Интеллект», 2015. С. 296.
4. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики // Учебник. 7-е изд. М.: МГУ; Наука, 2004.