

УДК 539.3

ЧИСЛЕННАЯ МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ ЗАДАЧ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВЫСОКОСКОРОСТНЫХ ГАЗОВЫХ СТРУЙ С УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИМИ ПРЕГРАДАМИ

М. Х. Абузьяров, Е. Г. Глазова, А. В. Кочетков, С. В. Крылов
(ННГУ им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород)

Излагается численная методика решения трехмерных задач взаимодействия высокоскоростных газовых струй с упругопластическими преградами. Методика построена на основе единого модифицированного разностного метода С. К. Годунова для расчета как энерговыделения при детонации и движения газа, так и динамического деформирования упругопластических преград. Методика реализует эйлерово-лагранжев подход с явным выделением подвижных контактных поверхностей с использованием многосеточных алгоритмов. Приводятся результаты численных исследований процесса образования газовой высокоскоростной струи в П-образных зарядах небольшого удлинения и ее взаимодействия с упругопластической стальной преградой. Численные результаты хорошо соответствуют известным экспериментальным данным.

Ключевые слова: численное моделирование, схема Годунова, повышенная точность, многосеточный подход, трехмерная задача, взрыв, детонация, высокоскоростные струи, упругопластическая преграда, взаимодействие, сравнение с экспериментом.

Введение

Газокумулятивные заряды находят применение в различных областях науки и техники. Так, например, они используются для разрушения тонкостенных элементов конструкций [1], разгона компактных тел до сверхвысоких скоростей [2–5] и пробивания преград различной природы [3, 6]. Изучение процессов, происходящих при детонации газокумулятивных зарядов, производилось ранее аналитическими и экспериментальными методами [3]. Однако в силу ограниченности возможностей как аналитических, так и экспериментальных подходов многие особенности протекающих процессов остаются невыясненными. Современные численные методы имеют гораздо больший потенциал и позволяют решать сложные нелинейные задачи, включающие генерацию и распространение ударных и детонационных волн (ДВ) в твердых телах и газах с возможными фазовыми переходами твердой фазы в газ и последующим ударно-волновым нагружением деформируемых тел и конструкций.

В данной работе для моделирования трехмерных быстропротекающих процессов и в газе, и в деформируемом теле используется единый численный метод — модифицированный метод С. К. Годунова [7–12]. Этот метод основан на интегрировании законов сохранения с использованием решения задачи распада разрыва в газе, деформируемом теле и на границе *газ — деформируемое тело*, имеет второй порядок аппроксимации на гладких решениях и обеспечивает монотонность на разрывных. Повышение точности достигается только за счет модификации решения задачи распада разрыва на шаге *предиктор* схемы путем сближения областей влияния разностной и дифференциальной задач.

Математическая постановка задачи

Постановка задачи (рис. 1, *a*) соответствует условиям проведения экспериментальных исследований [1]. На стальной массивной пластине находится П-образный заряд взрывчатого вещества (ВВ) небольшого удлинения. Инициирование детонации производится по верхней границе заряда. В расчетах использовались параметры ВВ ТГ50/50, близкие по плотности и скорости детонации к экспериментальным. Требуется описать в связанной постановке процессы распространения ДВ, формирования газокумулятивной струи в полости заряда и ее взаимодействия с упругопластической деформируемой преградой.

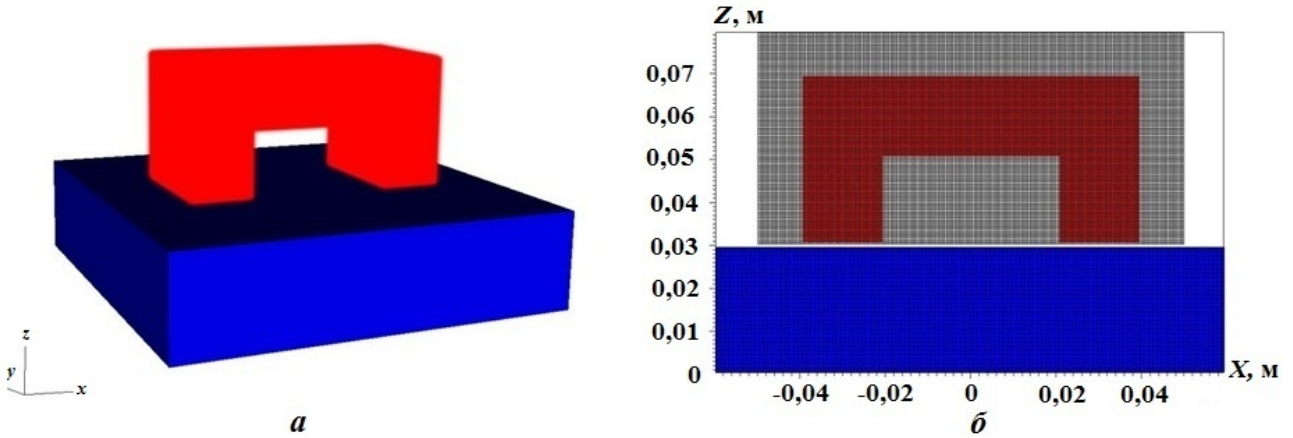


Рис. 1. Постановка задачи (*a*), расчетные области и сетки в сечении $Y = 0$ (*б*)

Для моделирования используются уравнения динамики сплошных сред в виде [13, 14]

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{f} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{g} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{h} = \mathbf{k}, \quad (1)$$

$$\text{где } \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ e \\ S_{xx} \\ S_{yy} \\ S_{zz} \\ S_{xy} \\ S_{xz} \\ S_{yz} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p - S_{xx} \\ \rho uv - S_{xy} \\ \rho uw - S_{xz} \\ (e + p - S_{xx})u - S_{xy}v - S_{xz}w \\ u \left(S_{xx} - \frac{4}{3}\mu \right) \\ u \left(S_{yy} + \frac{2}{3}\mu \right) \\ u \left(S_{zz} + \frac{2}{3}\mu \right) \\ u S_{xy} - \mu v \\ u S_{xz} - \mu w \\ u S_{yz} \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v w - S_{xy} \\ \rho v^2 + p - S_{yy} \\ \rho u w - S_{yz} \\ (e + p - S_{yy})v - S_{xy}u - S_{yz}w \\ v \left(S_{xx} + \frac{2}{3}\mu \right) \\ v \left(S_{yy} - \frac{4}{3}\mu \right) \\ v \left(S_{zz} + \frac{2}{3}\mu \right) \\ v S_{xy} - \mu u \\ v S_{xz} \\ v S_{yz} - \mu w \end{pmatrix}; \quad \mathbf{h} = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho v w - S_{xz} \\ \rho v w - S_{yz} \\ \rho w^2 + p - S_{zz} \\ (e + p - S_{zz})w - S_{yz}v - S_{xz}u \\ w \left(S_{xx} + \frac{2}{3}\mu \right) \\ w \left(S_{yy} + \frac{2}{3}\mu \right) \\ w \left(S_{zz} - \frac{4}{3}\mu \right) \\ w S_{xy} \\ w S_{xz} - \mu u \\ w S_{yz} - \mu v \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ S_{xx} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + S_{xy} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) + S_{xz} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \lambda S_{xx} \\ S_{xy} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + S_{yy} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + S_{yz} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \lambda S_{yy} \\ S_{xz} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) + S_{yz} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) + S_{zz} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \lambda S_{zz} \\ S_{xy} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \frac{1}{2} (S_{xx} - S_{yy}) \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} S_{xz} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} S_{yz} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \lambda S_{xy} \\ S_{xz} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \frac{1}{2} (S_{xx} - S_{zz}) \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} S_{xy} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{1}{2} S_{yz} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \lambda S_{xz} \\ S_{yz} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \frac{1}{2} (S_{yy} - S_{zz}) \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} S_{xz} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} S_{xy} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \lambda S_{yz} \end{pmatrix}.$$

Здесь ρ — плотность; p — давление; u, v, w — компоненты скорости по осям OX, OY, OZ ; e — полная механическая энергия единицы объема сплошной среды, $e = \rho(\varepsilon + 0,5(u^2 + v^2 + w^2))$; ε — внутренняя энергия единицы массы; $S_{xx}, S_{yy}, S_{zz}, S_{xy}, S_{xz}, S_{yz}$ — компоненты девиатора тензора истинных напряжений Эйлера; μ — модуль сдвига. Первые пять уравнений системы (1) представляют собой законы сохранения массы, импульса и энергии. Следующие шесть уравнений — физические соотношения упругости и пластичности с учетом поворота тензора напряжений в эйлеровых координатах (производная Яумана), записанные в дифференциальной форме.

Система (1) замыкается уравнением состояния (УРСом) в форме

$$\varepsilon = \varepsilon(p, \rho). \quad (2)$$

К системе (1), (2) добавляются начальные и краевые условия. В случае отсутствия сдвиговых напряжений система (1) переходит в уравнения Эйлера для движения сжимаемого газа [3]. Для

описания процессов в плотных сжимаемых средах (металл) применяется баротропный УРС вида $p = p(\rho)$, позволяющий избежать интегрирования уравнения сохранения энергии. Для металлической пластины плотностью ρ_0 это будет УРС идеального упругопластического тела: $p = K\varepsilon_V$, где K — модуль объемного сжатия, $\varepsilon_V = 1 - \rho_0/\rho$ — объемная деформация. Критерием перехода из упругого напряженно-деформированного состояния в пластическое является условие текучести Мизеса: $J_2 = 1/2 S_{ij} S_{ij} \geq 1/3 \sigma_T^2$, где J_2 — второй инвариант девиатора тензора напряжений; σ_T — предел текучести. В соответствии с [14] в этом случае происходит коррекция компонент девиатора напряжений умножением на $\lambda = \sigma_T/\sqrt{3J_2}$. Для воздуха и газообразных продуктов взрыва (ПВ) $S_{xx} = S_{yy} = S_{zz} = S_{xy} = S_{xz} = S_{yz} = 0$; $\varepsilon = p/\rho(\gamma - 1)$. В силу близости термодинамических свойств воздуха и ПВ зависимость показателя адиабаты γ от ρ принимается единой для обеих сред в виде

$$\gamma(\rho) = \frac{R_1 \rho_0 / \rho A \exp(-R_1 \rho_0 / \rho) + R_2 \rho_0 / \rho B \exp(-R_2 \rho_0 / \rho) + C(1 + \omega)(\rho / \rho_0)^{1 + \omega}}{A \exp(-R_1 \rho_0 / \rho) + B \exp(-R_2 \rho_0 / \rho) + C(\rho / \rho_0)^{1 + \omega}}, \quad (3)$$

полученном в предположении равенства скоростей звука для ПВ с использованием УРСа идеального газа и УРСа типа JWL [3]. Для ТГ50/50 константы из выражения (3) приведены в таблице.

Параметры ВВ

ВВ	ρ_0 , г/см ³	D , км/с	p_H , ГПа	R_1	R_2	ω	A , ГПа	B , ГПа	C , ГПа
ТГ50/50	1,670	7,61	25,8	4,94	1,35	0,28	708,6	13,165	1,058

Интегральная форма системы (1), на базе которой строится разностная схема, имеет вид

$$\iiint_{\omega} \mathbf{u} dx dy dz + \mathbf{f} dy dz dt + \mathbf{g} dx dz dt + \mathbf{h} dx dy dt = \iiint_{\Omega} \mathbf{k} dx dy dz dt, \quad (4)$$

где Ω — любой замкнутый объем, поверхность ω которого — гомеоморфная сфера в четырехмерном пространстве (X, Y, Z, t) .

На границах контакта ВВ и газа с пластиной ставится условие непроникания и отсутствия трения. В этом случае на контактной поверхности отсутствуют сдвиговые напряжения и полагаются равными нормальные компоненты скоростей взаимодействующих сред. В начальный момент времени все среды покоятся, напряжения и деформации отсутствуют, $p_0 = 0,1$ МПа.

Для моделирования процесса распространения детонации в заряде ВВ применяется гидродинамическая теория детонации [3]. Согласно этой модели ДВ является ударной волной, на фронте которой за счет химических реакций происходит мгновенное энерговыделение, поддерживающее процесс ее распространения в соответствии с принципом Гюйгенса (каждая точка ВВ, до которой доходит ДВ, становится источником детонации и независимо излучает сферическую ДВ). Скорость $D_{ВВ}$ распространения ДВ постоянна, и детонация от источника распространяется по лучам. Вызванное химическими реакциями энерговыделение задается путем увеличения энергии на $\Delta e = \rho_{ВВ} Q$ в тех точках ВВ, которые располагаются на фронте ДВ [3]. Здесь Q — калорийность ВВ.

Метод численного решения

Решение уравнений (1), (2), (4) производится методом Годунова повышенной точности [8–12], единым как для газодинамических, так и упругопластических течений, который модифицирован для решения задач динамики сжимаемых сред с необратимыми сдвиговыми деформациями на эйлерово-лагранжевых сетках. Данная модификация позволяет повысить порядок аппроксимации схемы до второго на гладких решениях, сохранив монотонность на разрывных, без изменения разностного шаблона явной двухшаговой схемы [7], модифицировав только шаг *предиктор*.

Модификация задачи распада разрыва в газах (воздух и ПВ). В классической схеме Годунова [7] для решения системы (1), (2), (4) применяется расщепление по пространственным переменным. Для каждой грани в нормальном направлении решается одномерная задача распада разрыва

для давлений, плотностей и скоростей, определенных в центрах соседних ячеек. В модифицированной схеме [8–10], позволяющей проводить расчеты с повышенной точностью, эта одномерная задача решается при предварительно интерполированных параметрах. Параметры интерполируются из центров рассматриваемой и соседней с ней ячеек на границы области влияния течения для грани рассматриваемой ячейки на момент времени $\Delta t/2$, где Δt — временной шаг интегрирования (рис. 2). Фактически сближаются области влияния дифференциальной и разностной задач. Интерполируются давления, плотности, скорости. Предполагается линейное распределение параметров течения между центрами ячеек, т. е. отсутствие разрыва на общей грани ячеек.

В декартовых координатах для ячейки с центром в точке (x_i, y_j, z_k) и гранями по оси OX $(x_{i-1/2}, y_j, z_k)$, $(x_{i+1/2}, y_j, z_k)^*$ для временного слоя t^n это будет следующее распределение параметров течения в виде векторной функции $U(p, \rho, u, v, w)$ вдоль оси OX :

$$U(x, y_j, z_k) = \begin{cases} U(x_{i-1}, y_j, z_k) + \frac{U(x_i, y_j, z_k) - U(x_{i-1}, y_j, z_k)}{x_i - x_{i-1}}(x - x_{i-1}) & \text{при } x_{i-1} \leq x \leq x_i; \\ U(x_i, y_j, z_k) + \frac{U(x_{i+1}, y_j, z_k) - U(x_i, y_j, z_k)}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i) & \text{при } x_i \leq x \leq x_{i+1}. \end{cases}$$

Шаг сетки вдоль оси OX $h_i = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$. Для направлений Y, Z — аналогично.

Задача распада разрыва для ячейки с центром в точке (x_i, y_j, z_k) решается для грани $(x_{i-1/2}, y_j, z_k)$ между параметрами $U(x_{i-1}^+, y_j, z_k)$ и $U(x_i^-, y_j, z_k)$ и грани $(x_{i+1/2}, y_j, z_k)$ между параметрами $U(x_i^+, y_j, z_k)$ и $U(x_{i+1}^-, y_j, z_k)$. Координаты точек (x_{i-1}^+, y_j, z_k) , (x_i^-, y_j, z_k) и (x_i^+, y_j, z_k) , (x_{i+1}^-, y_j, z_k) варьируются. Для других граней аналогично. Первое дифференциальное приближение линеаризованной системы (1), (2) в зависимости от координат варьируемых точек позволяет осуществить выбор этих точек [10], обеспечивающий второй порядок аппроксимации в области гладких решений и монотонность на разрывных решениях.

В случае уравнений Эйлера координаты этих точек имеют очевидный физический смысл. Они ограничивают область влияния на решение задачи распада разрыва для грани интегрируемой ячейки на момент $\Delta t/2$. То есть на момент $\Delta t/2$, когда определяются потоки через соответствующую грань из решения задачи распада разрыва, возмущения могут быть только из области, ограниченной крайними характеристиками, приходящими на эту грань. Размер области влияния для всех случаев составляет $c_0 \Delta t$ и совпадает с областью влияния дифференциальной задачи. На рис. 3 приведена

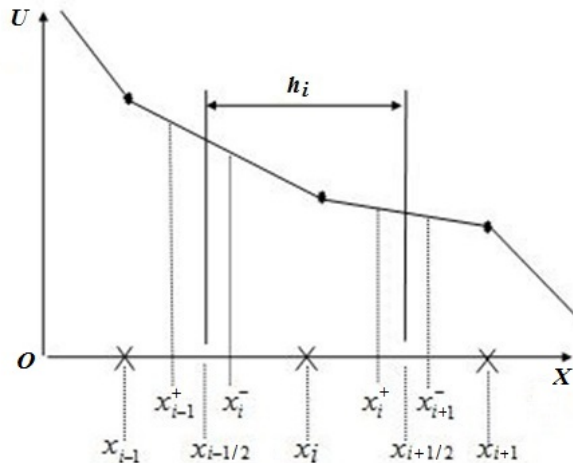


Рис. 2. Линейное распределение параметров между центрами ячеек

*Здесь и далее параметры с целыми нижними индексами будут указывать значения в центрах ячеек на нижнем временном слое; полуцелые индексы будут относиться к граням ячеек и *распадным* (на промежуточном слое) значениям параметров на этих гранях.

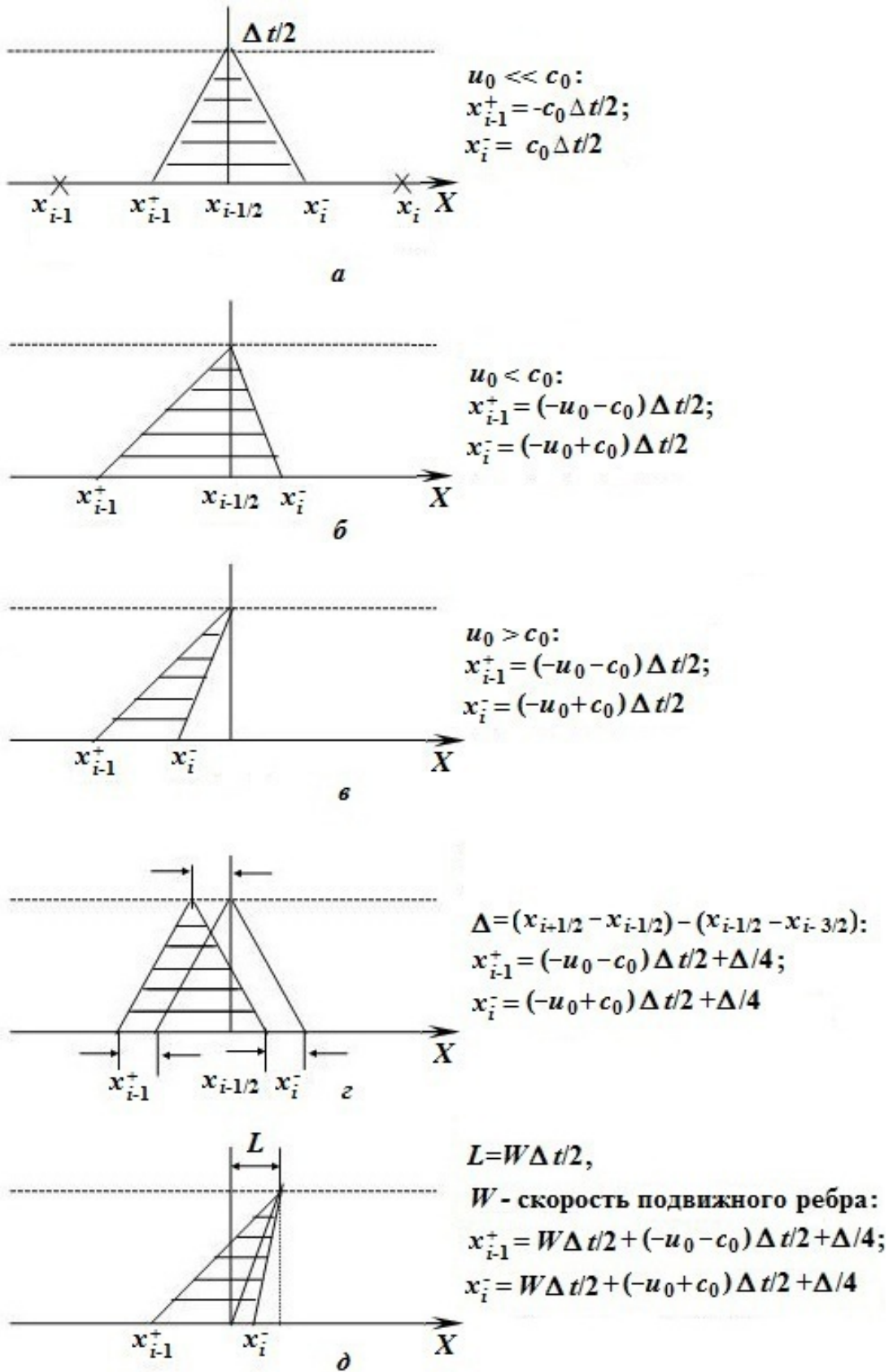


Рис. 3. Области влияния на решение задачи распада разрыва для грани интегрируемой ячейки на момент $\Delta t/2$ в частных случаях: *a* – акустика; *б* – дозвуковое течение; *в* – сверхзвуковое течение; *г* – неравномерная сетка, сдвиг к большей ячейке; *д* – подвижная неравномерная сетка

геометрическая интерпретация поведения характеристик для грани ячейки с координатой $x = x_{i-1/2}$ (частные случаи):

- акустический случай (см. рис. 3, а): область влияния $c_0\Delta t = x_i^- - x_{i-1}^+ = x_{i+1}^- - x_i^+$ и соответственно точки интерполяции симметричны относительно грани;
- дозвуковой случай (см. рис. 3, б): смещение $c_0\Delta t$ вверх по потоку;
- сверхзвуковой случай (см. рис. 3, в): смещение $c_0\Delta t$ вверх по потоку на одну ячейку;
- неравномерная сетка (см. рис. 3, г): смещение $c_0\Delta t$ в сторону большей ячейки;
- подвижное ребро (см. рис. 3, д): точки интерполяции и область влияния $c_0\Delta t$ определяются относительно положения грани в момент $\Delta t/2$.

В схеме первого порядка область влияния не зависит от времени и определяется размером ячейки $h_i \geq c_0\Delta t$.

Построенная таким образом схема имеет второй порядок аппроксимации по времени и пространству на эйлеровых и эйлерово-лагранжевых сетках на гладких решениях и монотонна на разрывных. Сохраняя достоинства классической схемы, она не требует увеличения разностного шаблона при практически тех же вычислительных затратах. Таким образом, по сравнению с классической схемой [7] в области гладких решений модифицированная схема имеет второй порядок аппроксимации при соответствующем выборе координат точек интерполяции в предположении линейного изменения параметров между центрами ячеек. Этот же принцип (решение задачи распада разрыва на момент времени $\Delta t/2$) используется для повышения точности при реализации различного типа граничных условий. Этап *корректор* численного интегрирования уравнений (4) остается неизменным и совпадает с классической схемой [7].

Модификация задачи распада разрыва в деформируемом твердом теле. В работе [14] В. Н. Кукуджановым было показано, что для численного моделирования динамических упруго-пластических уравнений со вторым порядком аппроксимации для схем типа *предиктор–корректор* на этапе *предиктор* достаточно решения уравнений упругости со вторым порядком аппроксимации с использованием линеаризованных уравнений (1), (2). При этом учет пластического поведения среды происходит на этапе *корректор* после интегрирования линеаризованных уравнений и сводится к "посадке" девиаторов на поверхность текучести [14]. В соответствии с этим решение задачи распада разрыва проводится на основе упрощенной системы уравнений в упругом приближении, получаемой из (1), если положить $\lambda = 0$. Исходную систему (1), (2) линеаризуем в окрестности некоторого состояния и предполагаем, что движение происходит вдоль оси OX и все неизвестные функции зависят только от x . Получим систему из одиннадцати уравнений. После введения автономной переменной $\xi = x/t$ система преобразуется к системе обыкновенных дифференциальных уравнений [15]. Нетривиальные решения этой системы:

$$\begin{aligned} \xi_1 = u + a; \quad \xi_2 = u - a; \quad \xi_3 = u + \beta_y; \quad \xi_4 = u - \beta_y; \quad \xi_5 = u + \beta_z; \\ \xi_6 = u - \beta_z; \quad \xi_7 = u; \quad \xi_8 = u; \quad \xi_9 = u; \quad \xi_{10} = u; \quad \xi_{11} = u. \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} a^2 = c^2 + \frac{4/3\mu - fS_{xx}}{\rho}, \quad c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s, \quad f = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial p}\right)_\rho; \\ \beta_y = \sqrt{\frac{\mu + 3/4S_{xx}}{\rho} - 0,5\sqrt{\frac{0,25(S_{yy} - S_{zz})^2 + S_{yz}^2}{\rho^2}}}; \\ \beta_z = \sqrt{\frac{\mu + 3/4S_{xx}}{\rho} + 0,5\sqrt{\frac{0,25(S_{yy} - S_{zz})^2 + S_{yz}^2}{\rho^2}}}. \end{aligned}$$

Решения представляют собой скорости разрывов, образующих устойчивую конфигурацию (рис. 4).

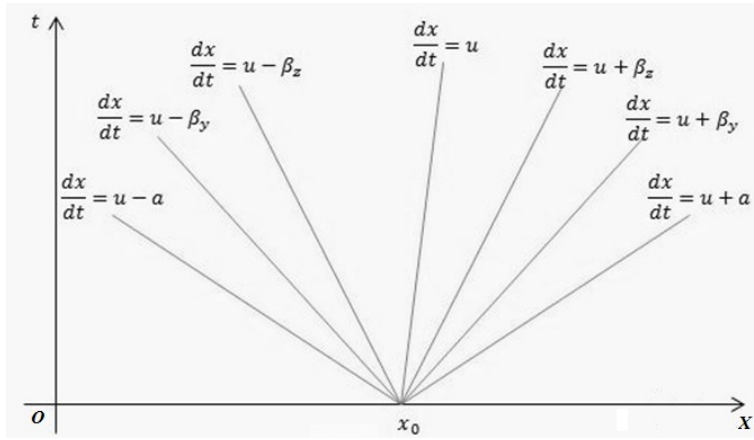


Рис. 4. Конфигурация разрывов для упругого распада разрыва

В плоскости (X, t) траектории разрывов (характеристики) изображаются лучами, исходящими из точки $x = x_0$, и делят полуплоскость $t > 0$ на восемь зон.

Соотношения на этих характеристиках для инвариантов Римана R_l , $l = \overline{1, 11}$, имеют следующий вид:

$$R_1 = [\rho a] u - \left[a(1+f) \frac{S_{xy}(a^2 - b_3^2) - 0,5S_{xz}S_{yz}/\rho}{(a^2 - b_2^2)(a^2 - b_3^2) - 0,25S_{yz}^2/\rho^2} \right] v - \left[a(1+f) \frac{S_{xz}(a^2 - b_2^2) - 0,5S_{xy}S_{yz}/\rho}{(a^2 - b_2^2)(a^2 - b_3^2) - 0,25S_{yz}^2/\rho^2} \right] w +$$

$$+ p - S_{xx} + \left[(1+f) \frac{\rho S_{xy}(a^2 - b_3^2) - 0,5S_{xz}S_{yz}}{\rho^2(a^2 - b_2^2)(a^2 - b_3^2) - 0,25S_{yz}^2} \right] S_{xy} + \left[(1+f) \frac{\rho S_{xz}(a^2 - b_2^2) - 0,5S_{xy}S_{yz}}{\rho^2(a^2 - b_2^2)(a^2 - b_3^2) - 0,25S_{yz}^2} \right] S_{xz},$$

$$b_2^2 = (\mu + 0,5(S_{xx} - S_{yy}))/\rho, \quad b_3^2 = (\mu + 0,5(S_{xx} - S_{zz}))/\rho;$$

$$R_2 = [-\rho a] u + \left[\rho a(1+f) \frac{\rho S_{xy}(a^2 - b_3^2) - 0,5S_{xz}S_{yz}}{\rho^2(a^2 - b_2^2)(a^2 - b_3^2) - 0,25S_{yz}^2} \right] v + \left[\rho a(1+f) \frac{\rho S_{xz}(a^2 - b_2^2) - 0,5S_{xy}S_{yz}}{\rho^2(a^2 - b_2^2)(a^2 - b_3^2) - 0,25S_{yz}^2} \right] w +$$

$$+ p - S_{xx} + \left[(1+f) \frac{\rho S_{xy}(a^2 - b_3^2) - 0,5S_{xz}S_{yz}}{\rho^2(a^2 - b_2^2)(a^2 - b_3^2) - 0,25S_{yz}^2} \right] S_{xy} + \left[(1+f) \frac{\rho S_{xz}(a^2 - b_2^2) - 0,5S_{xy}S_{yz}}{\rho^2(a^2 - b_2^2)(a^2 - b_3^2) - 0,25S_{yz}^2} \right] S_{xz};$$

$$R_3 = [\beta_y \rho] v - [\beta_y \rho C] w - S_{xy} + [C] S_{xz}; \quad R_4 = -[\beta_y \rho] v + [\beta_y \rho C] w - S_{xy} + [C] S_{xz};$$

$$R_5 = [\beta_z \rho C] v - [\beta_z \rho] w - [C] S_{xy} + S_{xz}, \quad C = \sqrt{1 - 2 / \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4S_{yz}^2}{(S_{yy} - S_{zz})^2}} \right)}, \quad 0 \leq C \leq 1;$$

$$R_6 = -[\beta_z \rho C] v + [\beta_z \rho] w - [C] S_{xy} + S_{xz};$$

$$R_7 = [a^2] \rho - p + S_{xx} + \left[\frac{(1+f)(S_{xy}\rho b_3^2 + 0,5S_{xz}S_{yz})}{\rho b_2^2 \rho b_3^2 - 0,25S_{yz}^2} \right] S_{xy} + \left[\frac{(1+f)(\rho b_2^2 S_{xz} + 0,5S_{xy}S_{yz})}{\rho b_2^2 \rho b_3^2 - 0,25S_{yz}^2} \right] S_{xz};$$

$$R_8 = \left[\frac{4}{3} \frac{\mu}{\rho} \right] \rho + S_{xx} + \left[\frac{S_{xy}\rho b_3^2 + 0,5S_{xz}S_{yz}}{\rho b_2^2 \rho b_3^2 - 0,25S_{yz}^2} \right] S_{xy} + \left[\frac{\rho b_2^2 S_{xz} + 0,5S_{xy}S_{yz}}{\rho b_2^2 \rho b_3^2 - 0,25S_{yz}^2} \right] S_{xz};$$

$$R_9 = \left[-\frac{2}{3} \frac{\mu}{\rho} \right] \rho + S_{yy} + \left[\frac{-S_{xy}\rho b_3^2}{\rho b_2^2 \rho b_3^2 - 0,25S_{yz}^2} \right] S_{xy} + \left[\frac{-0,5S_{xy}S_{yz}}{\rho b_2^2 \rho b_3^2 - 0,25S_{yz}^2} \right] S_{xz};$$

$$R_{10} = \left[-\frac{2}{3} \frac{\mu}{\rho} \right] \rho + S_{zz} + \left[\frac{-0,5S_{xz}S_{yz}}{\rho b_2^2 \rho b_3^2 - 0,25S_{yz}^2} \right] S_{xy} + \left[\frac{-\rho b_2^2 S_{xz}}{\rho b_2^2 \rho b_3^2 - 0,25S_{yz}^2} \right] S_{xz};$$

$$R_{11} = \left[\frac{-0,5S_{xz}\rho b_3^2 - 0,25S_{xy}S_{yz}}{\rho b_2^2 \rho b_3^2 - 0,25S_{yz}^2} \right] S_{xy} + \left[\frac{-0,5\rho b_2^2 S_{xy} - 0,25S_{xz}S_{yz}}{\rho b_2^2 \rho b_3^2 - 0,25S_{yz}^2} \right] S_{xz} + S_{yz}.$$

Здесь величины в квадратных скобках представляют собой коэффициенты линеаризации, определяемые по усредненным параметрам в ячейках. В отличие от уравнений газовой динамики в данном случае для получения схемы второго порядка аппроксимации из центров ячеек линейно интерполируются сами инварианты Римана [11, 12]. Координаты точек интерполяции определяются как координаты точек, из которых приходят соответствующие инварианты на грань в момент времени $\Delta t/2$, где w — скорость грани (обозначена пунктиром на рис. 5), следующим образом:

$$x_n = \frac{(x_{i-1} + x_i)}{2} - \frac{(c_n - w)\Delta t}{2}, \quad n = 1, \dots, 11,$$

где

$$\begin{aligned} c_1 &= u + a; & c_2 &= u - a; & c_3 &= u + \beta_y; & c_4 &= u - \beta_y; & c_5 &= u + \beta_z; \\ c_6 &= u - \beta_z; & c_7 &= c_8 = c_9 = c_{10} = c_{11} = u. \end{aligned}$$

Обозначив интерполированные инварианты индексом m , получим

$$R_n^m = R_n^{i-1} + \frac{(R_n^i - R_n^{i-1})(x_n - x_{i-1})}{(x_i - x_{i-1})}, \quad n = 1, \dots, 11.$$

Полученные значения инвариантов используются для определения *распадных* и *поточковых* значений, в зависимости от того, в какую зону попадает грань ячейки (рис. 5). Этап численного интегрирования уравнений (этап *корректор*) остается неизменным [7].

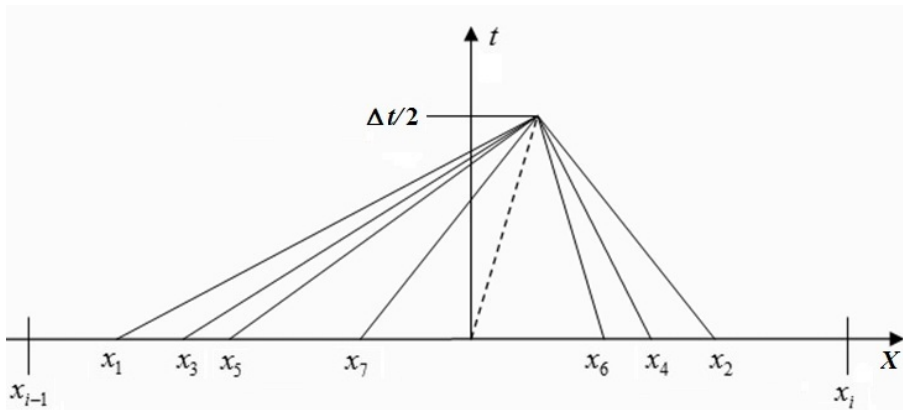


Рис. 5. Координаты проходящих инвариантов для грани интегрируемой ячейки на момент $\Delta t/2$

Монотонность на разрывных решениях. Решение по схеме второго порядка будет испытывать дисперсионные колебания на разрывах. Чтобы обеспечить монотонность, необходимо строить решение следующим образом: в областях гладкости — по соотношениям, обеспечивающим второй порядок аппроксимации, а на разрывах — по соотношениям схемы первого порядка. Критерии оценки области перехода для газов изложены в работах [8–10]. Для упругопластических течений, в отличие от задач газовой динамики, где необходимо анализировать поля давлений и плотностей, для получения монотонных решений достаточно анализа поля нормальных напряжений [11, 12]. Критерии перехода основаны на анализе квадратичных сплайнов. Например, при расчете задачи распада разрыва на ребре $x_{i-1/2}$ строится левый квадратичный сплайн по давлениям p_{i-2} , p_{i-1} , p_i и правый — по давлениям p_{i-1} , p_i , p_{i+1} . Несмотря на то, что численная функция монотонна, сплайны могут быть как монотонными, так и иметь экстремумы. В случае монотонных сплайнов применяется схема второго порядка. Если левый сплайн имеет максимум между центрами ячеек с координатами x_{i-2} и x_i или правый сплайн имеет максимум между центрами ячеек с координатами x_{i-1} и x_{i+1} , то для решения задачи распада разрыва берутся параметры из центров ячеек и определяется решение этой задачи, как в классической схеме Годунова. Можно ослабить этот критерий

и брать параметры из центров только слева или справа, анализируя положение соответствующего экстремума. При этом можно добиться размазывания на разрыве на 2—3 ячейки.

Контакт на границе газ — деформируемое тело. Контактные условия между газом и упругопластической средой реализуются на этапе *предиктор* схемы Годунова, т. е. на этапе решения задачи распада разрыва. Со стороны деформируемого тела используются восемь инвариантов, приходящих на границу, и три граничных условия. Со стороны газа используются три соотношения на нелинейных волнах сжатия и разряжения. Для повышения точности в области гладких решений используется экстраполяция параметров из граничной и предграничной ячеек.

Разработан итерационный алгоритм получения совместного решения, который в общем случае выглядит следующим образом [16]:

1. Для параметров газа реализуются граничные условия типа *подвижная жесткая стенка* [7], нормальная скорость которой равна скорости в примыкающей ячейке деформируемого тела. В результате получаем давление на границе *газ — деформируемое тело*.
2. Для параметров граничной ячейки деформируемого тела реализуются граничные условия с заданным нормальным напряжением, которое равно давлению, полученному на шаге 1, с противоположенным знаком и нулевыми касательными напряжениями.
3. Определенная на шаге 2 новая нормальная скорость на границе циклически используется на шаге 1 как нормальная скорость жесткой стенки. Процесс продолжается до сходимости по этой нормальной скорости. Как правило, достаточно 3—4 итераций до сходимости с относительной точностью 0,001.

Многосеточный алгоритм для расчета контактных задач

Эйлерово-лагранжевы подходы, описывающие взаимодействие сред и конструкций, основанные на использовании подвижных криволинейных сеток, отслеживающих движение лагранжевых контактных границ, с соответствующими перестройками эйлеровых сеток внутри однородной области широко используются в решении двумерных задач [17, 18]. Однако они оказались практически непригодными для решения трехмерных задач этого класса. Причиной является сложность построения трехмерных подвижных эйлерово-лагранжевых сеток, связанных с деформируемыми контактными лагранжевыми поверхностями. Кроме того, большое влияние на точность решения оказывает точность вычисления интегралов по подвижным пространственно-временным ячейкам, особенно для деформируемых твердых тел. Поэтому в данной работе используется эйлерово-лагранжев подход на сетках типа *химера* [19, 20].

Подход является многосеточным и использует три типа расчетных сеток [21]: 1) лагранжевы сетки в виде STL-файлов, задающие и сопровождающие деформируемые поверхности тел; 2) неподвижные регулярные эйлеровы сетки с кубическими ячейками, используемые внутри однородных областей; 3) вспомогательные локальные подвижные эйлерово-лагранжевы сетки, связанные с поверхностями тел.

В целом, алгоритм расчета контактного взаимодействия сред и конструкций состоит из следующих этапов:

1. Конструкции и среды задаются поверхностями из наборов треугольников с необходимой точностью в виде файлов STL-формата, содержащих внешние нормали и координаты вершин треугольников. На рис. 6 приведен случай контакта двух объектов, отмеченных красным и синим цветами.
2. Каждая расчетная область (газ, твердое тело) с криволинейными границами заключается в окаймляющий прямоугольный параллелепипед и покрывается декартовой сеткой. На рис. 7, а приведено сечение такой расчетной области (черная сплошная кривая) с окаймляющим параллелепипедом. Получаем четыре вида ячеек: 1) секущиеся треугольниками поверхности граничные ячейки (окрашены зеленым); 2) снаружи поверхности; 3) внутри поверхности, для интегрирования которых хватает разностного шаблона из целых ячеек, находящихся внутри

поверхности (светло-коричневого цвета); 4) внутри поверхности, для интегрирования которых не хватает указанного шаблона (отмечены черными точками).

- На каждом треугольнике поверхности строится вспомогательная локальная декартова сетка с размерами $3 \times 3 \times 3$ внутрь объема по нормали от этой поверхности (на рис. 6 это сетки светло-коричневого цвета). Размеры ячеек этой локальной трехмерной сетки берутся близкими к размерам ячеек внутренней сетки. В случае контакта с другой подобластью или граничных условий, требующих дополнительных параметров, локальная сетка симметрично достраивается и в эту подобласть от плоскости треугольника (на рис. 6 отмечена зеленым цветом). На рис. 8, *а* показана вспомогательная сетка для одного треугольника. На рис. 8, *б* приведены треугольник и примыкающие к нему центральные ячейки вспомогательной сетки; центры граней этих ячеек совпадают с центром треугольника. Значения параметров в построенной локальной сетке определяются интерполяцией параметров с предыдущей локальной и основной сеток.

Данного шаблона достаточно для интегрирования центральных ячеек, примыкающих к лагранжевой контактной поверхности (на рис. 8, *а* они выделены темным цветом, а на рис. 9 приведены отдельно и помечены крестиками), с повышенной точностью по модифицированной схеме С. К. Годунова. Для центральных ячеек (см. рис. 8, *б*) решается задача распада

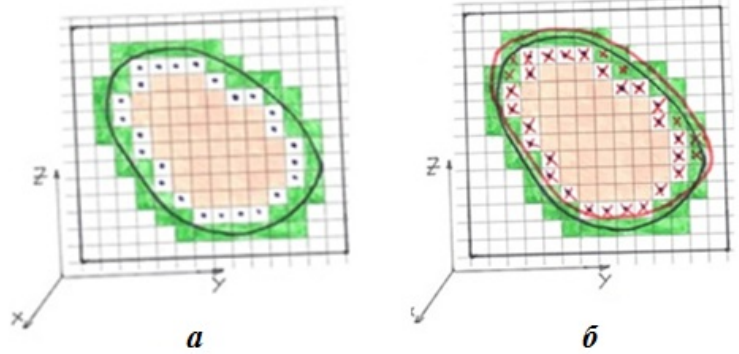
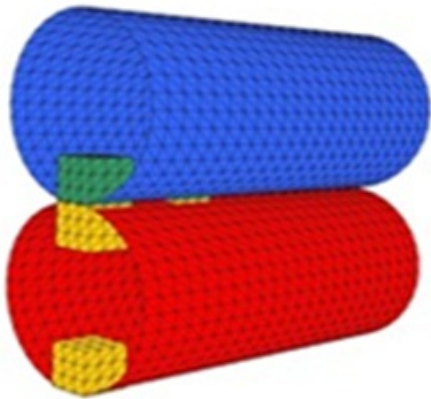


Рис. 6. Поверхности объектов и вспомогательные локальные сетки для каждого треугольника поверхности

Рис. 7. Сечение поверхности и виды ячеек до (*а*) и после (*б*) ее передвижения

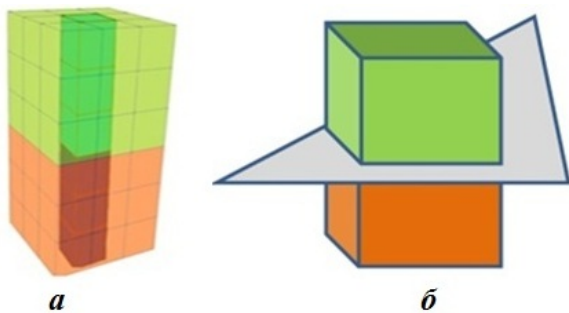


Рис. 8. Вспомогательная локальная сетка в случае контакта (*а*) и ее центральные ячейки, примыкающие к треугольнику контактной поверхности (*б*)

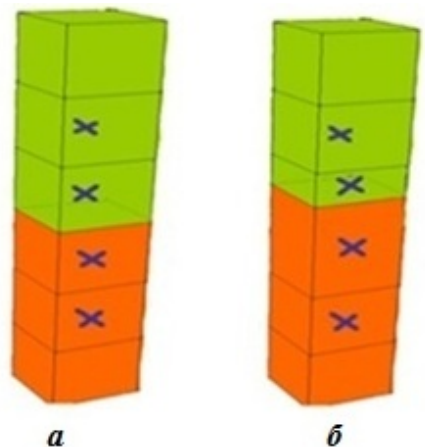


Рис. 9. Центральные ячейки локальной сетки до (*а*) и после (*б*) передвижения контактной поверхности и интегрирования

разрыва на контактных границах сред. Результатом ее решения являются скорости и силы на половинном временном слое в центре соответствующего треугольника.

С нормальной скоростью двигаем контактную границу и получаем локальную сетку на новом временном слое. На рис. 9 приведены центральные ячейки до и после передвигания контактной границы. Проводим стандартное интегрирование параметров этих центральных ячеек подвижных сеток. Так как движение локальной сетки одномерное, объемные и поверхностные интегралы по ячейкам при этом считаются точно.

4. Используя скорости в центре каждого треугольника, полученные из решения задачи распада разрыва на этапе 3, вычисляем скорости в вершинах треугольников STL-файла с весами, пропорциональными площадям треугольников. С этими скоростями двигаем вершины и получаем положение поверхности на новом временном слое (новый STL-файл).
5. Производим перестройку окаймляющего параллелепипеда с возможным добавлением или уменьшением слоев ячеек в соответствии с новым положением поверхности (красная кривая на рис. 7, б). К ячейкам четвертого вида (см. этап 2), оставшимся в расчетной области на новом временном слое (отмечены крестиками на белом фоне), добавляем непроинтегрированные ячейки, захваченные при передвигании поверхности (отмечены крестиками на зеленом фоне).
6. В ячейки четвертого вида (на рис. 7, б отмечены крестиками на белом и зеленом фоне) интерполируем параметры из проинтегрированных ячеек третьего вида и проинтегрированных ячеек локальных сеток, таким образом завершив расчетный шаг.

Алгоритм распространения установившейся детонации

Согласно используемой математической модели распространения ДВ в численной реализации процесса применялся следующий алгоритм [16, 22]. Все ячейки, располагающиеся в области, занимаемой ВВ, разделяются на протетонировавшие и непротетонировавшие. На каждом шаге по времени для каждой непротетонировавшей (интегрируемой) ячейки шестигранной кубической сетки анализируется окрестность из соседних 26 ячеек (для краткости *sosedei*).

Если сосед принадлежит области ВВ и уже протетонировал, то определяется время прихода ДВ из центра инициирования для соседа в центр интегрируемой ячейки по прямой линии (лучу). Если такой луч провести нельзя (например, для невыпуклых областей), то соседняя протетонировавшая ячейка сама становится источником и момент детонации интегрируемой ячейки рассчитывается как момент детонации соседа плюс время, необходимое для прихода ДВ из центра соседа в ее центр.

После анализа всех соседей выбирается наименьшее время, которое и является моментом детонации интегрируемой ячейки. Если физическое время процесса превышает данный момент, то ячейка считается протетонировавшей и к энергии в этой ячейке добавляется энергосвыделение ВВ. Иначе ячейка остается непротетонировавшей и добавление энергии на этом шаге не производится.

Ограничения на шаг интегрирования изложенной методики аналогичны ограничениям явной схемы Годунова для многомерных задач [7]. Ограничения на шаг по времени для данной модификации схемы Годунова второго порядка аппроксимации менее жесткие, чем для схемы первого порядка. Расчетный шаг выбирается минимальным из допустимых шагов по всем ячейкам для всех типов сеток.

Разработанная методика основана на явных численных схемах типа Годунова повышенной точности, программно реализована на языке Фортран и распараллелена по технологии OpenMP. Использование неподвижных регулярных эйлеровых сеток и STL-файлов для описания движения лагранжевых контактных и граничных поверхностей в рамках данного многосеточного подхода позволяет избежать трудоемких и снижающих точность процедур пошагового перестроения расчетных сеток по расчетным областям с подвижными границами. Использование стандартных STL-файлов при задании границ расчетных областей и для построения всех типов сеток позволяет сильно упростить подготовку начальных данных как для решения сложных задач, так и для выделения и сопровождения контактных границ в процессе решения.

Результаты численного исследования взаимодействия газокумулятивных зарядов с упругопластической преградой

Постановка трехмерной задачи показана на рис. 1, а. На рис. 1, б показаны расчетные области и сетки в сечении $Y = 0$. Красным цветом выделен П-образный заряд ВВ, белым — воздух, синим — металлическая преграда. В процессе расчета контактные поверхности между ПВ и воздухом не выделяются. На внешних границах воздуха реализуются условия *свободного вытока* [7]. На внешних границах металлической преграды выполняются условия, как на *свободной границе* с заданным давлением $p = 0,1$ МПа. Решается трехмерная задача взаимодействия двух подобластей — газа и деформируемой пластины — на неподвижных эйлеровых сетках с выделением подвижной лагранжевой контактной поверхности. В начальный момент времени все среды предполагаются невозмущенными, кроме заряда, в котором верхний слой ячеек считается прореагировавшим. Размеры заряда: длина по оси OX равна 8 см, по оси OY — 4 см, по оси OZ — 4 см. Размеры полости: длина по оси OX равна 4 см, по оси OY — 4 см, по оси OZ — 2 см [1]. Параметры пластины: длина по оси OX — 12 см, по оси OY — 12 см, толщина по оси OZ — 3 см; материал — сталь-20 со следующими механическими характеристиками: плотность $\rho = 7,8$ г/см³; модуль объемной деформации $K = 1,67 \cdot 10^5$ МПа; модуль сдвига $\mu = 7,69 \cdot 10^4$ МПа; предел текучести $\sigma_T = 250$ МПа.

Данная задача также рассчитывалась авторами по модифицированной схеме Годунова в двумерной плоской постановке по эйлерово-лагранжевой методике с совмещением контактных границ с линиями лагранжевых разностных сеток (см. [16]). С учетом анализа на сходимость решения, полученного в работе [16], размеры ячеек по газу брались 0,05 см, по преграде — 0,1 см, что потребовало ~ 6 млн ячеек в целом. Расчеты производились до момента времени 140 мкс, когда в преграде уже сформирована остаточная каверна, а сама преграда движется по инерции как жесткое тело.

Результаты трехмерного численного моделирования по изложенной методике показывают, что процессы распространения детонации и формирования кумулятивной струи в полости заряда качественно аналогичны рассмотренным ранее двумерным решениям [16]. На рис. 10 приведены распределения давления в газе на плоскости симметрии заряда $Y = 0$ в три момента времени: $t = 4,9$ мкс соответствует окончанию детонации заряда и формированию отраженной от преграды ударной волны, $t = 8$ мкс — максимальным давлениям при воздействии сформировавшейся кумулятивной струи на преграду, $t = 12,2$ мкс — прекращению действия кумулятивного потока на преграду и интенсивному разлету ПВ в окружающее пространство. Поля плотностей и вертикальных скоростей в газе, показанные на рис. 11, 12, подтверждают характер происходящих процессов в эти моменты времени. В формирующейся кумулятивной струе газ разгоняется до скоростей выше 10 км/с. Разработанный алгоритм распространения детонации обеспечивает сходимость численного решения за фронтом ДВ и при выбранной дискретизации дает значения в ячейках на фронте волны 23,5 ГПа (точное значение 25,8 ГПа).

На рис. 13 приведены зависимости от времени давления, скорости и перемещения в некоторых лицевых точках преграды. Красным цветом обозначены зависимости в центре преграды на пересечении плоскостей симметрии, зеленым цветом — в точке под "ножкой" П-образного заряда, синим цветом — в угловой точке преграды. Максимальные давления на преграду возникают под ножками заряда (42 ГПа) и превышают давление Чепмена—Жуге на фронте ДВ (25,8 ГПа). К моменту времени 25 мкс заканчивается передача энергии от ПВ к преграде, давление на преграду становится малым и пластина продолжает деформироваться фактически инерционно, совершая колебания под действием упругих волн и их отражений от границ пластины. На момент $t = 140$ мкс разница вертикальных скоростей в различных точках пластины не превышает 40 м/с.

На рис. 14 приведены формы преграды, близкие к остаточным, и распределения вертикальной скорости на поверхности плиты при $t = 140$ мкс.

Максимальная глубина каверны составляет 1,28 см, что близко к эксперименту [1], где максимальная глубина составила 1,3 см. Отметим, что решение данной задачи в двумерной плоской постановке дало 1,6 см [16].

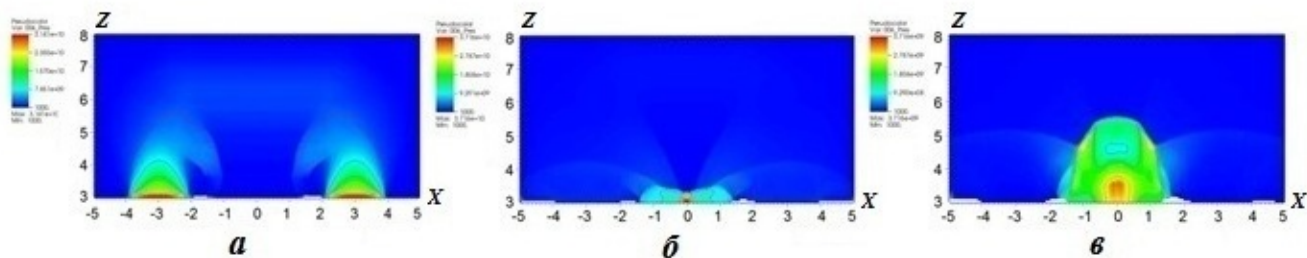


Рис. 10. Поля давлений (в Па) в газе в сечении $Y = 0$: $a - t = 4,9$ мкс; $b - t = 8$ мкс; $v - t = 12,2$ мкс

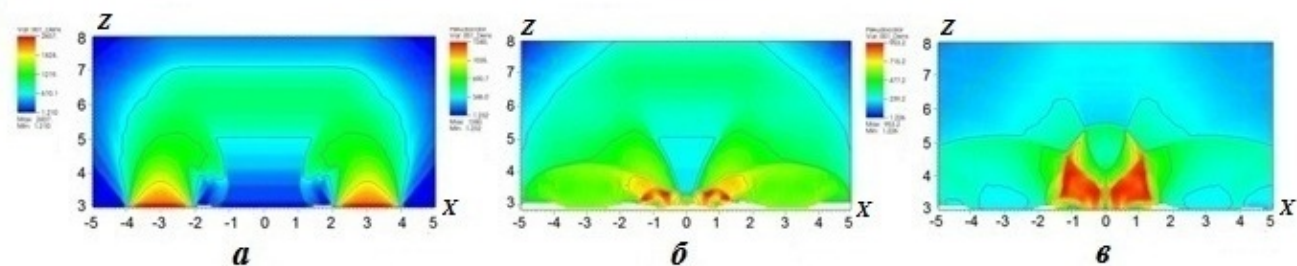


Рис. 11. Поля плотностей (в $\text{кг}/\text{м}^3$) в газе в сечении $Y = 0$: $a - t = 4,9$ мкс; $b - t = 8$ мкс; $v - t = 12,2$ мкс

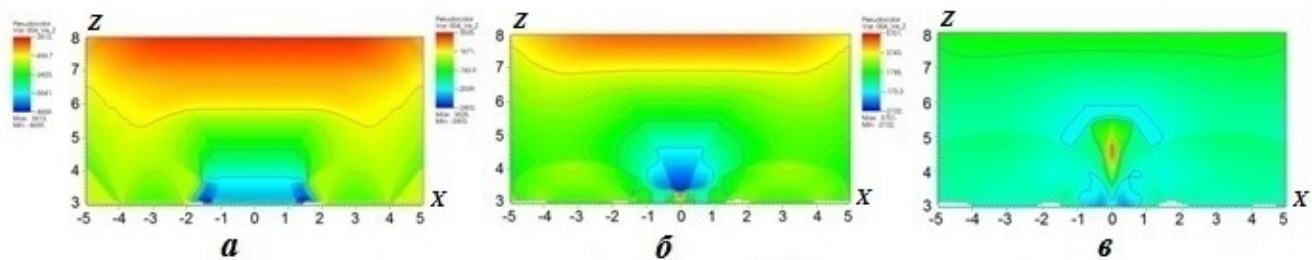


Рис. 12. Поля вертикальных скоростей (в м/с) в газе в сечении $Y = 0$: $a - t = 4,9$ мкс; $b - t = 8$ мкс; $v - t = 12,2$ мкс

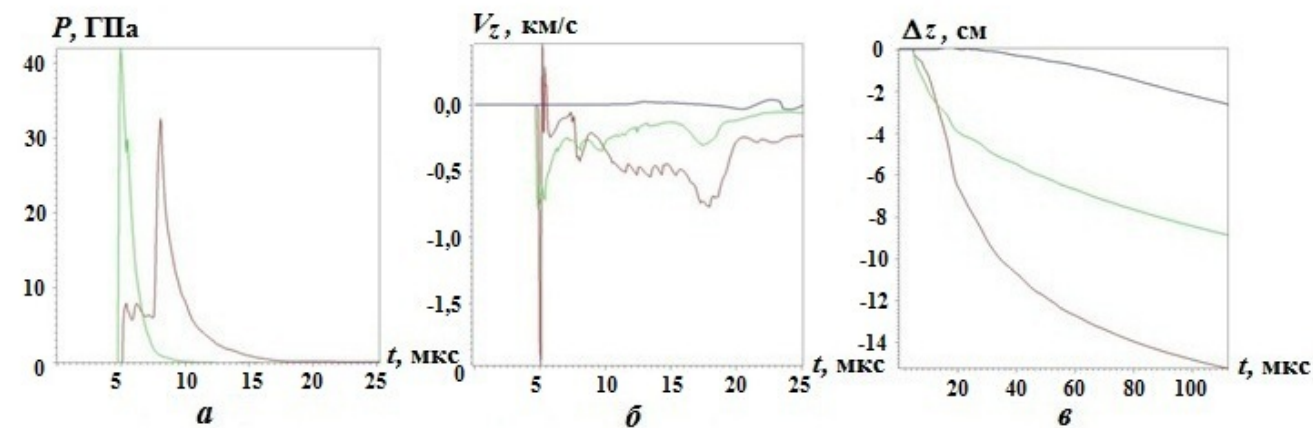


Рис. 13. Зависимости от времени давлений (a), скоростей (b) и перемещений (v) в лицевых точках преграды

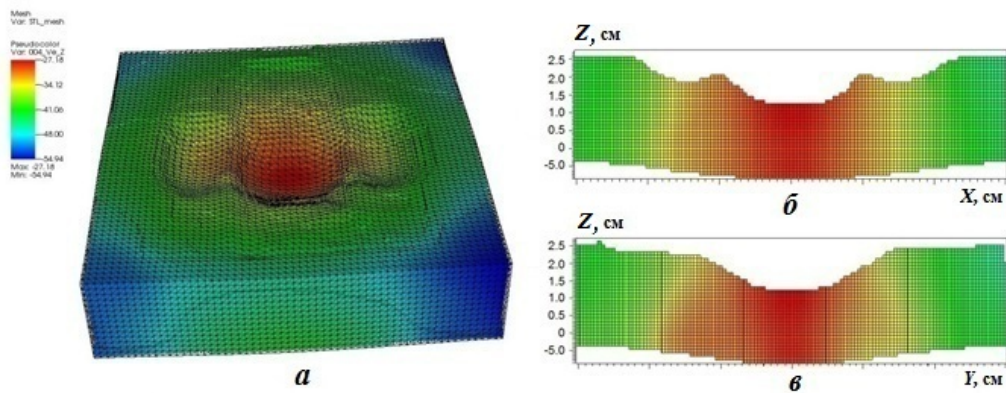


Рис. 14. Вид каверны в преграде при $t=140$ мкс: a — 3D изображение; b — сечение $Y = 0$; c — сечение $X = 0$; цветом показаны распределения вертикальной скорости

Заключение

Разработанная и описанная в статье численная методика решения трехмерных задач взаимодействия высокоскоростных газовых струй с упругопластическими преградами позволяет получать достоверные результаты с высокой точностью, хорошо согласующиеся с известными экспериментальными данными. Изложенная методика обладает заметными преимуществами при решении нелинейных задач с большими перемещениями и деформациями. Использование STL-файлов для построения всех типов сеток и описания движения лагранжевых контактных и граничных поверхностей в рамках данного многосеточного подхода, а также применение регулярных неподвижных эйлеровых сеток позволяют резко упростить подготовку начальных данных для решения сложных задач и повысить эффективность и точность расчетов за счет исключения искажений и перестроенных расчетных сеток в традиционных эйлерово-лагранжевых методиках.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №19-08-00320).

Список литературы

1. Батюков Ю. В., Ковтун А. Д., Новиков С. А., Скоков В. И., Толстикова Л. А. О механизме формирования газовой высокоскоростной струи // ФГВ. 2001. Т. 37, № 5. С. 98–103.
Batkov Yu. V., Kovtun A. D., Novikov S. A., Skokov V. I., Tolstikova L. A. O mekhanizme formirovaniya gazovoy vysokoskorostnoy strui // FGV. 2001. T. 37, № 5. S. 98–103.
2. Мерзиевский Л. А., Титов В. М., Фадеев Ю. И., Швецов Г. А. Высокоскоростное метание твердых тел // Там же. 1987. Т. 23, № 5. С. 77–91.
Merzhievskiy L. A., Titov V. M., Fadeenko Yu. I., Shvetsov G. A. Vysokoskorostnoe metanie tverdykh tel // Tam zhe. 1987. T. 23, № 5. S. 77–91.
3. Физика взрыва: в 2 т. / Под ред. Л. П. Орленко. Изд. 3-е, испр. Т. 2. М.: Физматлит, 2004.
Fizika vzryva: v 2 T. / Pod red. L. P. Orlenko. Izd. 3-e, ispr. T. 2. M.: Fizmatlit, 2004.
4. Федоров С. В., Баянова Я. М., Ладов С. В. Численный анализ влияния геометрических параметров комбинированной кумулятивной облицовки на массу и скорость формируемых взрывом компактных элементов // ФГВ. 2015. Т. 51, № 1. С. 150–164.
Fedorov S. V., Bayanova Ya. M., Ladov S. V. Chislenny analiz vliyaniya geometricheskikh parametrov kombinirovannoy kumulyativnoy oblitsovki na massu i skorost formiruemykh vzryvom kompaktnykh elementov // FGV. 2015. T. 51, № 1. S. 150–164.
5. Абузьяров К. М., Абузьяров М. Х., Глазова Е. Г., Кочетков А. В., Крылов С. В., Маслов Е. Е., Романов В. И. Численное моделирование трехмерных процессов разгона упругопластических тел взрывом // Проблемы прочности и пластичности. 2018. Вып. 80, № 2. С. 255–266.
Abuzyarov K. M., Abuzyarov M. Kh., Glazova E. G., Kochetkov A. V., Krylov S. V., Maslov E. E., Romanov V. I. Chislennoe modelirovaniye trekhmernykh protsessov razgona uprugoplasticheskikh tel vzryvom // Problemy prochnosti i plastichnosti. 2018. Vyp. 80, № 2. S. 255–266.

- Romanov V. I.* Chislennoe modelirovanie trekhmernykh protsessov razgona uprugoplasticheskikh tel vzryvom // Problemy prochnosti i plastichnosti. 2018. Вып. 80, № 2. С. 255—266.
6. *Федоров С. В.* Численное моделирование формирования кумулятивных струй полусферическими облицовками дегрессивной толщины // ФГВ. 2016. Т. 52, № 5. С. 116—130.
Fedorov S. V. Chislennoe modelirovanie formirovaniya kumulyativnykh struy polusfericheskimi oblitsovkami degressivnoy tolshchiny // FGV. 2016. Т. 52, № 5. С. 116—130.
7. *Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я., Крайко А. Н., Прокопов Г. П.* Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976.
Godunov S. K., Zabrodin A. V., Ivanov M. Ya., Kraiko A. N., Prokopov G. P. Chislennoe reshenie mnogomernykh zadach gazovoy dinamiki. М.: Nauka, 1976.
8. *Абузьяров М. Х., Баженов В. Г., Кочетков А. В.* О новом эффективном подходе к повышению точности схемы Годунова // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Методы решения. Всесоюз. межвуз. сб. Горький: Изд-во ГГУ, 1987. С. 43—49.
Abuzyarov M. Kh., Bazhenov V. G., Kochetkov A. V. O novom effektivnom podkhode k povysheniyu tochnosti skhemy Godunova // Prikladnye problemy prochnosti i plastichnosti. Metody resheniya. Vsesoyuz. mezhvuz. sb. Gorkiy: Izd-vo GGU, 1987. С. 43—49.
9. *Абузьяров М. Х., Баженов В. Г., Кочетков А. В.* О монотонизации схемы Годунова второго порядка точности введением схемной вязкости // Там же. Исследование и оптимизация конструкций. С. 85—90.
Abuzyarov M. Kh., Bazhenov V. G., Kochetkov A. V. O monotonizatsii skhemy Godunova vtorogo poriyadka tochnosti vvedeniem skhemnoy vyazkosti // Tam zhe. Issledovanie i optimizatsiya konstruktsey. С. 85—90.
10. *Абузьяров М. Х.* О повышении точности схемы Годунова для решения задач гидрогазодинамики // XIII конф. молодых ученых Московского физ.-тех. ин-та. 1988. Т. 2. С. 30—37.
11. *Abouziarov M., Aiso H.* An application of retroactive characteristic method to conservative scheme for structure problems (elastic-plastic flows) // 10 Int. Conf. Hyperbolic Problems, Theories, Numerics, Applications. Osaka, September 2004. Yokohama Publishers, Inc., 2006. P. 223—230.
12. *Abouziarov M., Aiso H., Takahashi T.* An application of conservative scheme to structure problems // Mathematical Analysis in Fluid and Gas Dynamics. Research Institute of Mathematics of Kyoto University, 2004. No 1353. P. 192—201.
13. *Годунов С. К.* Элементы механики сплошной среды. М.: Наука, 1978.
Godunov S. K. Elementy mekhaniki sploshnoy sredy. М.: Nauka, 1978.
14. *Кукуджанов В. Н.* Метод расщепления упругопластических уравнений // Механика твердого тела. 2004. № 1. С. 98—108.
Kukudzhanov V. N. Metod rasshchepleniya uprugoplasticheskikh uravneniy // Mekhanika tverdogo tela. 2004. № 1. С. 98—108.
15. *Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978.
Rozhdestvenskiy B. L., Yanenko N. N. Sistemy kvazilineynykh uravneniy i ikh prilozheniya k gazovoy dinamike. М.: Nauka, 1978.
16. *Абузьяров М. Х., Кочетков А. В., Крылов С. В., Цветкова Е. В.* Численное моделирование детонации и воздействия газокумулятивных зарядов на преграды // Выч. мех. сплош. сред. 2008. Т. 1, № 2. С. 5—15.
Abuzyarov M. Kh., Kochetkov A. V., Krylov S. V., Tsvetkova E. V. Chislennoe modelirovanie detonatsii i vozdeystviya gazokumulyativnykh zaryadov na pregrady // Vych. mekh. splosh. sred. 2008. Т. 1, № 2. С. 5—15.
17. *Баженов В. Г., Зефирова С. В., Кочетков А. В., Крылов С. В., Фельдгун В. Р.* Пакет программ "Динамика-2" для решения плоских и осесимметричных задач нестационарного взаимодействия конструкций со сжимаемыми средами // Мат. моделирование. 2000. Т. 12, № 6.

С. 67–72.

Vazhenov V. G., Zefirov S. V., Kochetkov A. V., Krylov S. V., Feldgun V. R. Paket programmi "Dinamika-2" dlya resheniya ploskikh i osesimmetrichnykh zadach nestatsionarnogo vzaimodeystviya konstruksiy so szhimaemyimi sredami // *Mat. modelirovanie*. 2000. T. 12, № 6. S. 67–72.

18. *Абузяров М. Х., Крылов С. В., Цветкова Е. В.* Моделирование упругопластического взаимодействия с помощью программного комплекса UPSGOD // *Проблемы прочности и пластичности*. 2013. Вып. 75(1). С. 25–32.
Abuzayarov M.Kh., Krylov S. V., Tsvetkova E. V. Modelirovanie uprugoplasticheskogo vzaimodeystviya s pomoshchyu programmnoy kompleksa UPSGOD // *Problemy prochnosti i plastichnosti*. 2013. Вып. 75(1). С. 25–32.
19. *Дерюгин Ю. Н., Саразов А. В., Жучков В. Н.* Особенности построения методики расчета на сетках типа "химера" для неструктурированных сеток // *Mat. modelirovanie*. 2017. T. 29, № 2, С. 106–118.
Deryugin Yu. N., Sarazov A. V., Zhuchkov V. N. Osobennosti postroyeniya metodiki rascheta na setkakh tipa "khimera" dlya nestrukturirovannykh setok // *Mat. modelirovanie*. 2017. T. 29, № 2, S. 106–118.
20. *Меньшов И. С., Корнев М. А.* Метод свободной границы для численного решения уравнений газовой динамики в областях с изменяющейся геометрией // Там же. 2014. T. 26, № 5, С. 99–112.
Menshov I. S., Kornev M. A. Metod svobodnoy granitsy dlya chislennogo resheniya uravneniy gazovoy dinamiki v oblastiakh s izmenyayushcheysya geometriey // Там же. 2014. T. 26, № 5, S. 99–112.
21. *Abuziarov K. M., Abuziarov M. H., Kochetkov A. V.* 3D fluid structure interaction problem solving method in euler variables based on the modified Godunov scheme // *Materials Physics and Mechanics*. 2016. T. 28, No 1–2. P. 1–5.
22. *Янилкин Ю. В., Карпенко И. И., Гаврилова Е. С., Дегтяренко Л. И., Маврина Е. А., Топорова О. О.* Методы численного моделирования детонации и горения ВВ в эйлеровых газодинамических расчетах // *Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов*. 2011. Вып. 3. С. 16–28.
Yanilkin Yu. V., Karpenko I. I., Gavrilova E. S., Degtyarenko L. I., Mavrina E. A., Toporova O. O. Metody chislennogo modelirovaniya detonatsii i goreniya VV v eylerovykh gazodinamicheskikh raschetakh // *Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov*. 2011. Вып. 3. S. 16–28.

Статья поступила в редакцию 11.03.21.
