

УДК 519.6

## МЕТОДИКА "ЛОГОС-ВОЛНА" РАСЧЕТА ДВУМЕРНЫХ ЗАДАЧ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ С УЧЕТОМ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ НА ПОДВИЖНЫХ НЕСТРУКТУРИРОВАННЫХ СЕТКАХ

Е. А. Веселова, Ю. Н. Дерюгин, Д. К. Зеленский  
(ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области)

Представлена методика параллельного расчета двумерных задач газовой динамики с теплопроводностью на геометрически адаптивных неструктурированных сетках. Геометрическая адаптация связана с выделением в решении основных особенностей, таких как ударные волны и контактные разрывы. Скорость движения разрывов и параметры на разрывах определяются из решения задачи Римана о распаде разрыва. Смещение внутренних узлов сетки определяется методом интерполяции по смещению граничных узлов.

Численный метод основан на методе расщепления, решении уравнений Эйлера явным методом на подвижной сетке и решении уравнения теплопроводности неявным методом на неподвижной сетке. Разностные уравнения получены дискретизацией исходных уравнений в интегральной форме квадратурными формулами прямоугольников. При решении уравнений Эйлера численные конвективные потоки определяются на основе решения задачи о распаде разрыва. Для повышения точности моделирования предраспадные параметры потока определяются с использованием линейной либо квадратичной реконструкции решения. В задачах со сферической симметрией с целью уменьшения немонотонности в численном решении применяется алгоритм доворота вектора скорости у предраспадных параметров потока. Тепловые потоки на гранях аппроксимируются по верхнему временному слою центральными разностями. Для решения неявных разностных уравнений используется итерационный метод Ньютона. Получающаяся в результате аппроксимации система линейных алгебраических уравнений относительно приращения температуры решается с использованием параллельных решателей из библиотеки PMLP. Возможности методики проиллюстрированы на ряде тестовых задач.

*Ключевые слова:* газовая динамика, теплопроводность, схема расщепления, разностная схема, подвижные сетки, распараллеливание вычислений, тестовые расчеты.

### Введение

Данная работа посвящена созданию методики параллельного расчета двумерных задач газовой динамики с теплопроводностью на геометрически адаптивных неструктурированных сетках. Математическая модель, используемая для описания процессов распространения ударных волн, как и в работах, опубликованных в сборнике [1], основана на уравнениях многокомпонентной газовой динамики и уравнении переноса излучения в диффузионном приближении [2]. Расчетная методика построена на основе использования неструктурированных подвижных сеток, метода расщепления по физическим процессам, явного метода интегрирования уравнений Эйлера и неявного метода решения уравнения теплопереноса.

Счетный шаг состоит из расчета деформации сетки, которая связана с движением выделенных разрывов, и решения двумерных уравнений газовой динамики с теплопроводностью. Граничные

условия на выделенных разрывах разрешаются методом распада разрыва, в результате определяется скорость смещения граней. По изменению положения выделенных разрывов затем производится перестройка сетки. На первом этапе решения уравнений интегрируются уравнения Эйлера на подвижной сетке. Разностные уравнения получены дискретизацией исходных уравнений в интегральной форме квадратурными формулами прямоугольников. Численно конвективные потоки определяются на основе решения задачи о распаде разрыва [3]. Для повышения точности моделирования предраспадные параметры потока определяются с использованием линейной либо квадратичной реконструкции решения. В задачах со сферической симметрией с целью уменьшения немонотонности в численном решении применяется алгоритм доворота вектора скорости у предраспадных параметров потока [4]. На втором этапе решения уравнений учитывается источник энергодвыделения. На третьем, заключительном, этапе решается уравнение теплопроводности на неподвижной неструктурированной сетке.

Расчетные формулы получаются путем интегрирования уравнений теплопроводности по контрольному объему ячейки. Тепловые потоки на гранях аппроксимируются по верхнему временному слою центральными разностями. Для решения неявных разностных уравнений используется итерационный метод Ньютона. Получающаяся в результате аппроксимации система линейных алгебраических уравнений относительно приращения температуры решается с использованием параллельных решателей из библиотеки PMLP [5]. Организация параллельных вычислений основана на алгоритмах пакета программ "Логос" [6].

Приводятся результаты расчета тестовых и модельных задач, принятых для тестирования двумерных методик [7–9].

### Математическая модель

Рассматривается двумерное движение сплошной среды с учетом переноса лучистой энергии. Исходные уравнения в виде законов сохранения в декартовых ( $\nu = 0$ ) и цилиндрических ( $\nu = 1$ ) координатах имеют вид [2]:

– уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial y^\nu \rho v}{y^\nu \partial y} = 0; \quad (1)$$

– уравнение неразрывности  $\alpha$ -компонента среды

$$\frac{\partial C_\alpha \rho}{\partial t} + \frac{\partial C_\alpha \rho u}{\partial x} + \frac{\partial y^\nu C_\alpha \rho v}{y^\nu \partial y} = 0, \quad (2)$$

где  $C_\alpha = \frac{\rho_\alpha}{\rho}$  – массовая концентрация  $\alpha$ -компонента;

– уравнение сохранения количества движения, записанное для компонент скорости  $(u, v)$ :

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^2 + p)}{\partial x} + \frac{\partial \rho u v}{y^\nu \partial y} = 0; \quad (3)$$

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial \rho u v}{\partial x} + \frac{\partial y^\nu \rho v^2}{y^\nu \partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} = 0; \quad (4)$$

– уравнение сохранения энергии

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u E + p u)}{\partial x} + \frac{\partial y^\nu (\rho v E + p v)}{y^\nu \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \chi \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{y^\nu \partial y} \left( y^\nu \chi \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \rho Q(x, y, t). \quad (5)$$

Уравнения (1)–(5) замыкаются уравнениями состояния

$$p = p(\rho, T); \quad \varepsilon = \varepsilon(\rho, T); \quad \chi = \frac{4\sigma c}{3} \ell T^3,$$

где  $\sigma$  — постоянная Стефана—Больцмана;  $c$  — скорость света;  $\ell = \ell(\rho, T)$  — Росселандов пробег в веществе.

В расчетной области находится смесь  $N$  веществ. Уравнения состояния смеси берутся в виде

$$p = \sum_{\alpha=1}^N C_{\alpha} p_{\alpha}(\rho, T); \quad \varepsilon = \sum_{\alpha=1}^N C_{\alpha} \varepsilon_{\alpha}(\rho, T).$$

Росселандов пробег в смеси веществ определяется по формуле

$$\ell = \sum_{\alpha=1}^N \left( \frac{C_{\alpha}}{\ell_{\alpha}(\rho, T)} \right)^{-1}.$$

Границами расчетной области являются: 1) границы симметрии потока; 2) жесткий поршень, на котором задается нормальная скорость границы; 3) мягкий поршень, когда задано давление; 4) ударная волна (УВ), на которой выполняются соотношения Ренкина—Гюгоню [2].

В задачах с учетом теплопроводности на границах области может быть дополнительно задана либо температура, либо тепловой поток. В частности, на УВ по теплопроводности задается условие отсутствия теплового потока. Хорошим приближением постановки граничного условия на внешних границах является условие излучения абсолютно черного тела, в котором тепловой поток определяется по формуле

$$q(t) = \frac{\sigma c}{4} T^4. \quad (6)$$

### Сетка

Построение вычислительного алгоритма основано на конечно-объемном методе. Контрольные объемы (ячейки сетки) в плоском случае являются произвольными многоугольниками, покрывающими расчетную область без зазоров и наложений. В осесимметричном случае ячейкой сетки является тор, образованный вращением многоугольника вокруг оси  $OX$ . Многоугольник ограничен произвольным числом граней. При описании структур и алгоритмов будем использовать следующие обозначения:  $P$  — рассматриваемая ячейка;  $E$  — соседняя ячейка;  $f$  — грань;  $k$  — узел;  $\sigma$  — площадь ячейки;  $\partial\sigma$  — периметр (совокупность ребер с обходом против часовой стрелки);  $\Omega$  — объем ячейки;  $\partial\Omega$  — поверхность, ограничивающая объем ячейки. Общий вид ячейки показан на рис. 1.

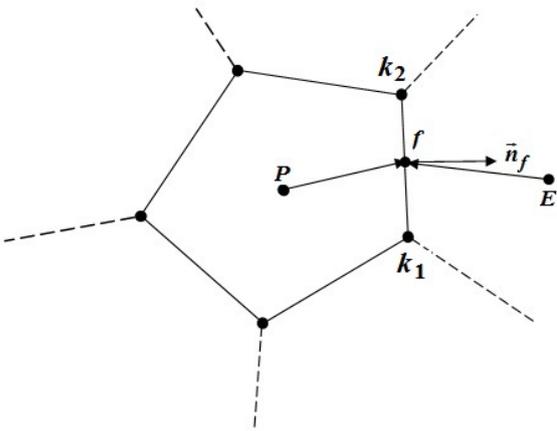


Рис. 1 Общий вид ячейки неструктурированной сетки

Сеточная модель делится на регионы в зависимости от способа построения и алгоритмов деформации сетки. Способ хранения информации о сеточной модели единообразен для всех регионов. Описание сетки содержит списки граней (*Face*), ячеек сетки (*Cell*) и узлов сетки (*Node*).

Грани подразделяются на внутренние (*Face\_Eternal*) и внешние (*Face\_External*). Каждая внутренняя грань разделяет две ячейки  $P$  и  $E$  (см. рис. 1). Считается, что нормаль к грани направлена от ячейки  $P$  с меньшим номером к ячейке  $E$  с большим номером. Для внешней грани нормаль направлена из ячейки. В описание грани также входят номера узлов, образующих грань, единичный вектор нормали, внешний относительно ячейки  $P$ , длина грани, площадь грани и координаты геометрического центра грани. В декартовой системе координат длина и площадь грани совпадают. Внешние грани сортируются по типам граничных условий.

В списке ячеек указываются тип ячейки, число и номера граней, образующих ячейку, координаты геометрического центра ячейки, объем ячейки, а также список определяющих расчетных параметров, которые относятся на каждый момент времени к центру ячейки.

Список узлов содержит тип узла (внешний, граница региона или внутренний), номер региона, в котором находится узел, и координаты узла.

### Деформация сетки

Для определения нового положения сетки сначала разрешаются граничные условия на границах регионов методом распада разрыва [3]. В результате на гранях, описывающих эти границы, определяются так называемые *большие величины*  $(R, U, V, P, E)$  и вектор скорости движения самих граней  $(\vec{W})$ , по которому определяется вектор сдвига граней  $(\Delta\vec{R}_f = \tau\vec{W})$ . Для определения нового положения узлов производится интерполяция вектора сдвига из центров граней в узлы по массовому расходу:

$$\Delta\vec{R}_k = \frac{\Delta\vec{R}_f (RU_n\Delta S)_f + \Delta\vec{R}_{f+1} (RU_n\Delta S)_{f+1}}{(RU_n\Delta S)_f + (RU_n\Delta S)_{f+1}},$$

где  $U_n$  — нормальная составляющая скорости вещества на грани;  $\Delta S$  — площадь грани.

Как и в работе [3], сформированная последовательность узлов  $(\vec{R}_k = \vec{R}_k^n + \Delta\vec{R}_k, k = 1, 2, \dots, K)$  анализируется на *перехлест*. Окончательно новые значения координат узлов границ регионов определяются по заданному закону их расстановки на начальный момент времени. В качестве параметра закона расстановки используется расстояние от начала границы.

Новое положение внутренних узлов в регионе определяется по методу из работы [10]. В этом методе для вычисления перемещений всех внутренних узлов производится интерполяция функции смещения по вычисленным значениям координат граничных точек  $\vec{R}_k$ . Наиболее простая реализация метода заключается в стандартной интерполяции через весовые функции:

$$\Delta\vec{R}_j = \frac{\sum_k \omega(\vec{R}_j, \vec{R}_k) \Delta\vec{R}_k}{\sum_k \omega(\vec{R}_j, \vec{R}_k)}.$$

Здесь для каждого внутреннего узла  $j$  производится суммирование по всем граничным узлам  $k$ , а в качестве весовой функции  $\omega(\vec{R}_j, \vec{R}_k)$  берется выражение вида

$$\omega(\vec{R}_j, \vec{R}_k) = \|R_k - R_j\|^p, \quad p < 0. \quad (7)$$

В соответствии с рекомендациями работы [10] в качестве весовой функции используется также более общее по сравнению с (7) выражение в виде суммы двух степенных членов, что позволяет более качественно рассчитывать приграничные деформации и сглаживать интерполяционную функцию вдали от границы расчетной области:

$$\omega(\vec{R}_j, \vec{R}_k) = A_j \left[ \left( \frac{L}{\|R_k - R_{b_j}\|} \right)^a + \left( \frac{\alpha L}{\|R_k - R_{b_j}\|} \right)^b \right],$$

где  $A_j$  — вес узла, пропорциональный площади окружающих его граней;  $L$  — характерный размер области;  $\alpha L$  — масштаб приграничной области;  $\alpha$  и  $b$  — некоторые показатели степени. Численный эксперимент показывает [10], что значения  $\alpha = 3$ ,  $b = 5$  дают хорошее качество сеток в широком диапазоне деформаций. Оптимальное значение параметра  $L$  также может варьироваться для разных задач, но в общем случае может быть автоматически определено как максимальное расстояние между узлами сетки.

В частном случае, когда сетка структурирована, для расчета координат внутренних узлов в регионах используются, как и в [3], алгоритмы одномерной интерполяции по лучам и метод трансфинитной интерполяции.

### Численный метод

В соответствии с принципом расщепления по физическим процессам решение двумерных уравнений газовой динамики с теплопроводностью разбивается на три шага: 1) решение уравнений газовой динамики на подвижной неструктурированной сетке; 2) определение нового значения внутренней энергии за счет источников энерговыделения; 3) решение уравнения теплопроводности на неподвижной сетке.

Для описания методики решения уравнений Эйлера представим систему уравнений в следующем векторном виде:

$$\frac{\partial y^\nu \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial y^\nu \mathbf{F}_x}{\partial x} + \frac{\partial y^\nu \mathbf{F}_y}{\partial y} + y^\nu \frac{\partial \tilde{\mathbf{F}}}{\partial y} = 0, \quad (8)$$

где  $\nu = 0$  и  $\nu = 1$  соответственно для плоской и цилиндрической геометрий;  $\mathbf{Q}$  — вектор консервативных переменных;  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_x \vec{e}_x + \mathbf{F}_y \vec{e}_y$  — вектор потока,  $\vec{e}_x, \vec{e}_y$  — единичные базисные векторы ортогональной декартовой или цилиндрической системы координат. Векторы  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{F}_x$ ,  $\mathbf{F}_y$  и  $\tilde{\mathbf{F}}$  имеют следующие компоненты:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \\ \rho C_\alpha \end{pmatrix}; \quad \mathbf{F}_x = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho v u \\ \rho u E + p u \\ \rho u C_\alpha \end{pmatrix}; \quad \mathbf{F}_y = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho u v \\ \rho v^2 \\ \rho v E + p v \\ \rho v C_\alpha \end{pmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{F}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Интегрируя уравнения (8) по подвижной площади ячейки, используя формулу Гаусса—Остроградского и правило Лейбница, получаем следующий вид уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \mathbf{Q} dV + \oint_{\partial\Omega} (\mathbf{F}_n - \mathbf{Q} W_n) dS + \int_{\Omega} \frac{\partial \tilde{\mathbf{F}}}{\partial y} dV = 0, \quad (9)$$

где  $W_n$  — нормальная составляющая скорости грани;  $dV = y^\nu dx dy$  — объем ячейки;  $dS = y^\nu \sqrt{dx^2 + dy^2}$  — площадь грани.

Воспользуемся теоремой о среднем, будем аппроксимировать интегралы в (9) с помощью квадратурной формулы прямоугольников. В качестве среднего значения функции в ячейке примем ее значение в центре ячейки, а в качестве среднего значения функции на грани — ее значение в центре грани. В этом случае получим полудискретный аналог уравнений (9):

$$\frac{(\mathbf{Q}\Delta V)_P^{n+1} - (\mathbf{Q}\Delta V)_P^n}{\tau} + \sum_f (\mathbf{F}_n - \mathbf{Q}W_n)_f^n \Delta S_f + \int_{\Omega} \frac{\partial \tilde{\mathbf{F}}}{\partial y} dV = 0. \quad (10)$$

Определим  $\frac{\partial p}{\partial y}$  в ячейке  $P$  на основании формулы Грина:

$$\left( \frac{\partial p}{\partial y} \right)_P = \frac{\oint p n_y dl}{\Delta \sigma} = \frac{\sum_f p_f (n_y)_f \Delta l_f}{\Delta \sigma_P}. \quad (11)$$

Проинтегрировав (11) по площади ячейки  $P$ , получим приближенно

$$\int_{\sigma} \frac{\partial p}{\partial y} dV = \frac{\sum_f p_f (n_y)_f \Delta l_f}{\Delta \sigma_P} \Delta V_P.$$

В результате получим окончательный дискретный аналог уравнений (10):

$$(\mathbf{Q}\Delta V)_P^{n+1} = \mathbf{Q}_P^n \frac{\Delta V_P^n}{\Delta V_P^{n+1}} - \frac{\tau}{\Delta V_P^{n+1}} \sum_f [(\mathbf{F}_n - \mathbf{Q}W_n) \Delta S + y_P^{\nu} \tilde{\mathbf{F}} n_y \Delta l]_f = 0. \quad (12)$$

Для осесимметричной геометрии значение  $y_P^{\nu}$  центра ячейки определяется по формуле:  $y_P^{\nu} = \frac{\Delta V_P}{\Delta \sigma_P}$ .

Неизвестные газодинамические величины на боковых гранях криволинейных объемов, появляющиеся в (12) при определении конвективных потоков, определяются методом распада разрыва [3]. Для повышения порядка аппроксимации конвективных слагаемых используется одномерная линейная или квадратичная реконструкция решения относительно примитивных переменных.

Для одномерной реконструкции параметров на неструктурированной сетке строится шаблон из четырех точек (рис. 2), которые определяются на прямой, ортогональной грани ячейки  $P$  и проходящей через центр этой грани. Координаты точек шаблона определяются пересечением данной прямой с ортогональными линиями, проведенными через центры ячеек. Значения параметров в точках шаблона находятся с использованием вычисления градиентов от параметров в центрах ячеек:

$$q_{P'} = q_P + (\nabla q)_P \cdot \Delta \vec{R}_{PP'},$$

где через  $q$  обозначены примитивные переменные.

В линейной реконструкции [11] параметры в точках  $f^-$  и  $f^+$  слева и справа от грани  $f$  определяются по формулам

$$q_{f^-} = q_{P'} + \frac{(\Delta q)_{P'}^+}{2}; \quad q_{f^+} = q_{E'} - \frac{(\Delta q)_{E'}^-}{2},$$

где

$$\begin{aligned} (\Delta q)_{P'}^+ &= \min \text{mod} \left( (q_{E'} - q_{P'}), \frac{l_{P'E'}}{l_{W'P'}} (q_{P'} - q_{W'}) \right); \\ (\Delta q)_{E'}^- &= \min \text{mod} \left( (q_{E'} - q_{P'}), \frac{l_{P'E'}}{l_{F'E'}} (q_{F'} - q_{E'}) \right). \end{aligned}$$

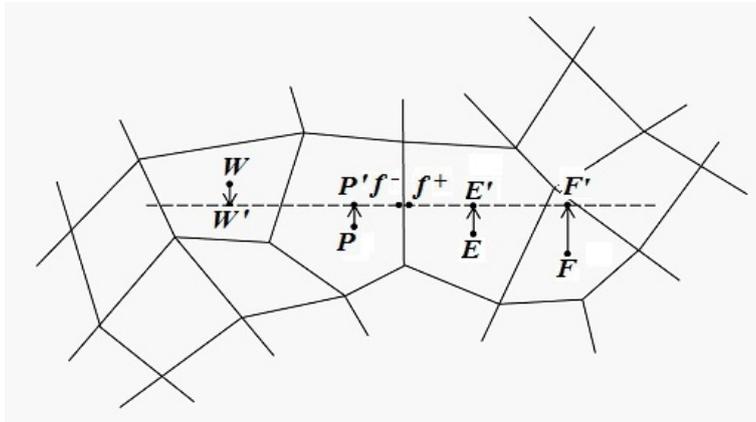


Рис. 2. Шаблон точек для реконструкции параметров на неструктурированной сетке

Здесь  $l$  — расстояние между точками, указанными в нижнем индексе; функция  $\min \text{mod}$  определяется следующим образом:

$$\min \text{mod}(a, b) = \begin{cases} \min(|a|, |b|) \text{sign}(a), & \text{если } \text{sign}(a) = \text{sign}(b); \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В квадратичной реконструкции [12] параметры слева и справа от грани  $f$  определяются по формулам

$$q_{f-} = q_{P'} + \frac{1}{6} [2(\Delta q)_{P'}^+ + (\Delta q)_{P'}^-]; \quad q_{f+} = q_{E'} - \frac{1}{6} [2(\Delta q)_{E'}^- + (\Delta q)_{E'}^+],$$

где

$$\begin{aligned} (\Delta q)_{P'}^+ &= \min \text{mod} \left( (q_{E'} - q_{P'}), 2 \frac{l_{P'E'}}{l_{W'P'}} (q_{P'} - q_{W'}) \right); \\ (\Delta q)_{P'}^- &= \min \text{mod} \left( 2 (q_{E'} - q_{P'}), \frac{l_{P'E'}}{l_{W'P'}} (q_{P'} - q_{W'}) \right); \\ (\Delta q)_{E'}^- &= \min \text{mod} \left( (q_{E'} - q_{P'}), 2 \frac{l_{P'E'}}{l_{F'E'}} (q_{F'} - q_{E'}) \right); \\ (\Delta q)_{E'}^+ &= \min \text{mod} \left( 2 (q_{E'} - q_{P'}), \frac{l_{P'E'}}{l_{F'E'}} (q_{F'} - q_{E'}) \right). \end{aligned}$$

Течение, возникающее в средах за фронтом УВ на больших расстояниях от эпицентра взрыва, приближается к сферически-симметричному. Вследствие того, что скорости в соседних ячейках, находящихся на одинаковом расстоянии от эпицентра, различаются по направлениям, при проецировании скоростей на нормаль к грани появляются нормальные составляющие векторов скоростей. При решении задачи о распаде разрыва это приводит к формированию потоков через грани и нарушению симметрии течения. Для уменьшения возникающей счетной ошибки при формировании предраспадных параметров на гранях производится доворот вектора скорости при его проецировании на грань [4]. Для определения доворота вектора скорости вводится полярная система координат  $(r, \varphi)$  с заданной точкой начала координат. Поворот вектора скорости осуществляется на угол  $\Delta\varphi$  между центром ячейки и центром грани.

После решения уравнений газовой динамики определяется изменение энергии за счет источников энерговыделения (шаг 2). Поскольку энерговыделение связано с конкретным физическим веществом, то новое значение энергии определяется по формуле

$$\bar{\varepsilon}_P = \tilde{\varepsilon}_P + \tau \frac{(\rho_\alpha)_P}{\rho_P} Q(t^{n+1/2}),$$

где  $\tilde{\varepsilon}_P$  — значение удельной внутренней энергии после шага 1 (газодинамического). По найденному значению энергии определяется значение температуры, которое находится из уравнения состояния по итерационной формуле Ньютона.

На заключительном шаге 3 находится новое значение температуры и внутренней энергии из решения уравнения теплопроводности на неподвижной сетке:

$$\frac{\partial y^\nu \rho \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( y^\nu \chi \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( y^\nu \chi \frac{\partial T}{\partial y} \right). \quad (13)$$

Проинтегрируем (13) по площади ячейки, используя формулу Гаусса—Остроградского, и перейдем к объему ячейки. Тогда интегральный закон сохранения энергии представляется в виде

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial t} dV = \oint_{\partial \Omega} \chi \frac{\partial T}{\partial n} dS, \quad (14)$$

где введено обозначение  $\chi \frac{\partial T}{\partial n} = \chi \text{grad } T \cdot \vec{n}$ .

Используя квадратурные формулы, заменим интегральные выражения разностными. Производную по времени будем аппроксимировать по схеме первого порядка:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\varepsilon^{n+1} - \bar{\varepsilon}}{\tau^n}.$$

Тогда уравнение (14) в полудискретном виде запишется как

$$(\rho \Delta V)_P \left( \frac{\varepsilon^{n+1} - \bar{\varepsilon}}{\tau^n} \right)_P - \sum_f \left( \chi \frac{\partial T}{\partial n} \right)_f \Delta S_f = 0. \quad (15)$$

Будем аппроксимировать  $\sum_f \left( \chi \frac{\partial T}{\partial n} \right)_f \Delta S_f$  в каждой ячейке сетки по верхнему временному слою, тогда получим систему нелинейных разностных уравнений. Ее решение будем искать методом итераций по Ньютону. Для этого проведем линеаризацию внутренней энергии

$$\varepsilon^{n+1} - \bar{\varepsilon} = \varepsilon^{\gamma+1} - \varepsilon^\gamma + \varepsilon^\gamma - \bar{\varepsilon} = \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial T} \right)^\gamma \Delta T + (\varepsilon^\gamma - \bar{\varepsilon}) \quad (16)$$

и потока тепла

$$\sum_f \left( \chi \frac{\partial T}{\partial n} \right)_f^{n+1} \Delta S_f = \sum_f \chi_f^\gamma \left( \frac{\partial \Delta T}{\partial n} \right)_f^\gamma \Delta S_f + \sum_f \chi_f^\gamma \left( \frac{\partial T}{\partial n} \right)_f^\gamma \Delta S_f, \quad (17)$$

где  $\gamma$  — номер итерации.

С учетом (16) и (17) уравнение (15) преобразуется к виду

$$\frac{1}{\tau^n} (\rho \Delta V)_P \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial T} \right)_P^\gamma \Delta T_P - \sum_f \chi_f^\gamma \left( \frac{\partial \Delta T}{\partial n} \right)_f^\gamma \Delta S_f = -\frac{(\varepsilon_P^\gamma - \bar{\varepsilon}_P)}{\tau^n} (\rho \Delta V)_P + \sum_f \chi_f^\gamma \left( \frac{\partial T}{\partial n} \right)_f^\gamma \Delta S_f.$$

Поток тепла на гранях ячеек определяется из условия равенства односторонних потоков и непрерывности температуры в центре грани. На равномерной ортогональной сетке данная схема имеет второй порядок аппроксимации по пространству и первый порядок по времени.

Для построения аппроксимации потока тепла через внутреннюю грань рассмотрим произвольную  $f$ -ю грань, которая является общей для ячеек  $P$  и  $E$  (рис. 3). Обозначим как  $f$  также центр грани. Проведем через центры ячеек  $P$  и  $E$  линии, перпендикулярные нормальной линии к  $f$ -й грани. Определим точки  $P'$  и  $E'$  пересечения этих линий с нормальной прямой.

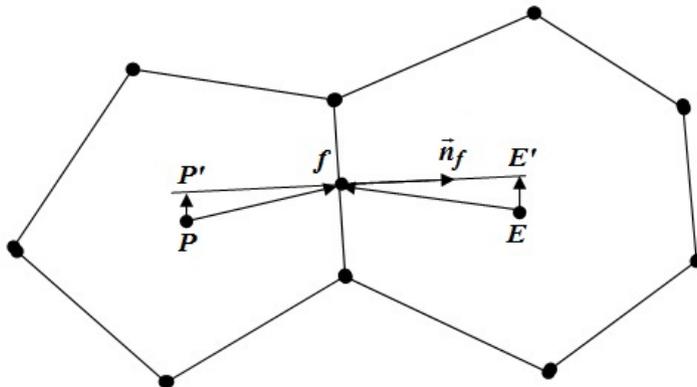


Рис. 3. Шаблон точек для аппроксимации  $\chi \frac{\partial T}{\partial n}$  на внутренних гранях

Векторы  $\Delta\vec{R}_{PP'}$  и  $\Delta\vec{R}_{EE'}$  с учетом ориентации вектора нормали определяются по следующим формулам:

$$\begin{aligned}\Delta\vec{R}_{PP'} &= \vec{R}_{P'} - \vec{R}_P = \Delta\vec{R}_{Pf} - \vec{n}_f \left( \vec{n}_f \cdot \Delta\vec{R}_{Pf} \right), & \Delta\vec{R}_{Pf} &= \vec{R}_f - \vec{R}_P; \\ \Delta\vec{R}_{EE'} &= \vec{R}_{E'} - \vec{R}_E = \Delta\vec{R}_{Ef} - \vec{n}_f \left( \vec{n}_f \cdot \Delta\vec{R}_{Ef} \right), & \Delta\vec{R}_{Ef} &= \vec{R}_f - \vec{R}_E.\end{aligned}$$

Считая, что в точках  $P'$ ,  $E'$  и центре грани  $f$  известны значения температуры, поток тепла в направлении нормали можно определить из условия его непрерывности:

$$\left( \chi \frac{\partial T}{\partial n} \right)_f = \chi_P \frac{T_f - T_{P'}}{\left| \Delta\vec{R}_{P'f} \right|} = \chi_E \frac{T_{E'} - T_f}{\left| \Delta\vec{R}_{E'f} \right|}. \quad (18)$$

Исключив из (18) значение температуры на грани ( $T_f$ ), получим выражение для потока тепла через единичную поверхность:

$$\left( \chi \frac{\partial T}{\partial n} \right)_f \approx \chi_f \frac{T_{E'} - T_{P'}}{\left| \Delta\vec{R}_{E'f} \right| + \left| \Delta\vec{R}_{P'f} \right|}, \quad (19)$$

где значение коэффициента теплопроводности в центре грани  $\chi_f$  определяется как среднее гармоническое значение:

$$\chi_f = \frac{\chi_P \chi_E \left( \left| \Delta\vec{R}_{P'f} \right| + \left| \Delta\vec{R}_{E'f} \right| \right)}{\chi_P \left| \Delta\vec{R}_{E'f} \right| + \chi_E \left| \Delta\vec{R}_{P'f} \right|}. \quad (20)$$

Значения  $T_{P'}$  и  $T_{E'}$  определяются с использованием  $\text{grad } T$ , вычисленного в центрах ячеек:

$$T_{P'}^\gamma = T_P^\gamma + (\text{grad } T)_P^\gamma \cdot \Delta\vec{R}_{PP'}; \quad T_{E'}^\gamma = T_E^\gamma + (\text{grad } T)_E^\gamma \cdot \Delta\vec{R}_{EE'}. \quad (21)$$

Подставив (21) в (19), получим окончательное выражение для потока тепла через внутреннюю грань:

$$\left( \chi \frac{\partial T}{\partial n} \right)_f^\gamma \Delta S_f = \lambda_f^\gamma \left( T_E^\gamma - T_P^\gamma + (\text{grad } T)_E^\gamma \cdot \Delta\vec{R}_{EE'} - (\text{grad } T)_P^\gamma \cdot \Delta\vec{R}_{PP'} \right),$$

где

$$\lambda_f = \frac{\chi_P \chi_E \Delta S_f}{\left| \Delta\vec{R}_{E'f} \right| \chi_P + \left| \Delta\vec{R}_{P'f} \right| \chi_E}. \quad (22)$$

Следуя построению явной аппроксимации потока тепла, приращение теплового потока представим следующим образом:

$$\left( \chi \frac{\partial \Delta T}{\partial n} \right)_f \approx \chi_f^\gamma \frac{\Delta T_{E'} - \Delta T_{P'}}{\left| \Delta\vec{R}_{P'E'} \right|}, \quad (23)$$

где значение коэффициента теплопроводности в центре грани  $\chi_f$  определяется как среднее гармоническое значение (20), вычисленное по параметрам с предыдущей итерации.

При построении неявной аппроксимации для приращения потока тепла будем учитывать в (23) только главные члены разложения, полагая  $\Delta T_{P'} = \Delta T_P$ ,  $\Delta T_{E'} = \Delta T_E$ . Тогда разностная аппроксимация для приращения потока тепла запишется в виде

$$\left( \chi \frac{\partial \Delta T}{\partial n} \right)_f \Delta S_f \approx \lambda_f^\gamma (\Delta T_E - \Delta T_P),$$

где коэффициент  $\lambda_f^\gamma$  определяется по формуле (22).

При таком способе определения приращения потока тепла матрица будет симметрической с диагональным преобладанием и шириной ленты, определяемой только числом граней. Граничные условия в этом случае разрешаются только в явном операторе. В частности, если по теплопроводности задано условие излучения абсолютно черного тела (6), то тепловой поток и температура на грани определяются локальными итерациями из следующей аппроксимации граничного условия:

$$\chi T_f^{\nu-1} \frac{T_f^\nu - T_P^\gamma - (\text{grad } T)_P^\gamma \cdot \Delta \vec{R}_{PP'}}{\Delta \ell_{P'f}} = -\frac{\sigma c}{4} (T_f^\nu)^4,$$

где  $\nu$  — номер локальной итерации.

Решение системы линейных алгебраических уравнений осуществляется с использованием решателей из библиотеки PMLP [5]. Сходимость итераций определяется в ячейках, в которых выполняется условие  $T_P^\gamma > 10^{-5}$ . Итерации ведутся до тех пор, пока не выполнится условие  $|T_P^{\gamma+1} - T_P^\gamma| \leq \varepsilon_1 T_P^\gamma + \varepsilon_2$  ( $\varepsilon_1 < 10^{-4}$ ,  $\varepsilon_2 < 10^{-8}$ ) во всех ячейках разностной сетки.

### Распараллеливание вычислений

Для проведения параллельного расчета проводится декомпозиция расчетной модели на заданное число процессоров. При этом каждая ячейка расчетной сетки отображается на конкретный процессор и выстраивается топология обменов значениями расчетных величин в ячейках между процессорами. Общепринятым подходом в случае декомпозиции неструктурированной многоугольной сетки считается ее отображение тем или иным образом на неориентированный граф. В данной работе применяется развитый аппарат теории графов для разбиения полученного графа за заданное число частей [13, 14], а для декомпозиции расчетной модели по процессорам используются возможности пакета Chaco [15].

После декомпозиции расчетной модели по процессорам для каждого фрагмента сетки формируются обменные слои ячеек. Обменными являются ячейки, не принадлежащие текущему процессору, но имеющие хотя бы один общий узел с рассчитываемыми на нем счетными ячейками (рис. 4).

В конце каждого расчетного этапа выполняет обмен данными между процессорами: расчетные данные из счетных ячеек текущего процессора пересылаются в обменные слои соседних, и соответственно происходит прием данных соседними процессорами. Для расчета деформации сетки на всех процессорах формируются массивы смещения границ регионов.

Межпроцессорное взаимодействие осуществляется с помощью асинхронных функций библиотеки MPI — *MPI\_Irecv*, *MPI\_Isend*.

По завершении расчетного шага выполняются коллективные операции при вычислении невязок решения, расчете интегральных величин и определении расчетного шага по времени.

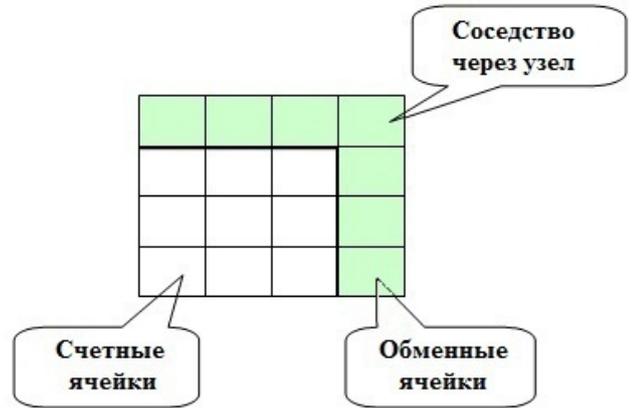


Рис. 4. Схема формирования обменных слоев

### Результаты расчетов

**Сходящаяся сферическая УВ.** Рассматривается задача о сходимости сферической автомодельной УВ и последующем отражении ее от центра [7, тест № 5]. В шаре радиусом  $R_0 = 1$  заданы начальная плотность  $\rho_0 = 1$  и начальная внутренняя энергия  $E_0 = 0$ . Уравнение состояния — для идеального газа с  $\gamma = 5/3$ . На внешней границе задана зависимость давления от времени  $P(t)$ .

Для проведения расчетов на сходимость были построены три сгущающиеся расчетные сетки. В центральной области  $R < 0,2$  строилась неструктурированная сетка, во внешней области  $0,2 \leq R \leq$

$\leq R_0$  — лучевая сетка с числом ячеек  $20 \times 24$ ,  $40 \times 48$  и  $60 \times 96$ . Расчет проводился в осесимметричной постановке.

На рис. 5 показано распределение давления на самой подробной сетке на момент времени  $t = 0,59$ , который близок к моменту фокусировки УВ.

На рис. 6 показаны распределения давления и модуля скорости вдоль радиуса, полученные на последовательно сгущающихся сетках, в сравнении с точным решением на момент времени  $t = 0,59$ .

В табл. 1 сравниваются точные значения моментов фокусировки и выхода отраженной УВ на свободную поверхность с расчетными значениями, полученными на сгущающихся сетках. Для самой подробной сетки разница с точным решением не превышает  $\Delta \approx 0,9\%$  на момент фокусировки УВ и  $\Delta \approx 0,1\%$  на момент выхода отраженной УВ на свободную поверхность.

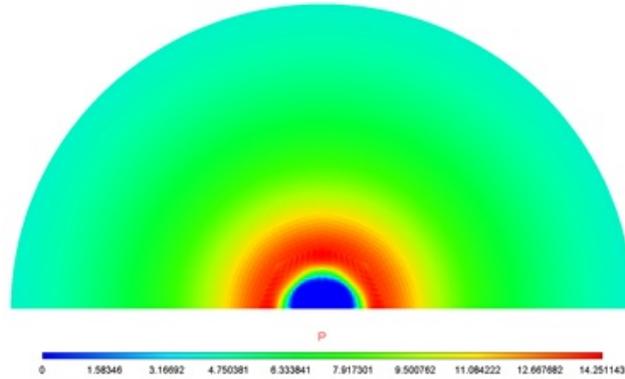


Рис. 5. Распределение давления на момент времени  $t = 0,59$  на самой подробной сетке

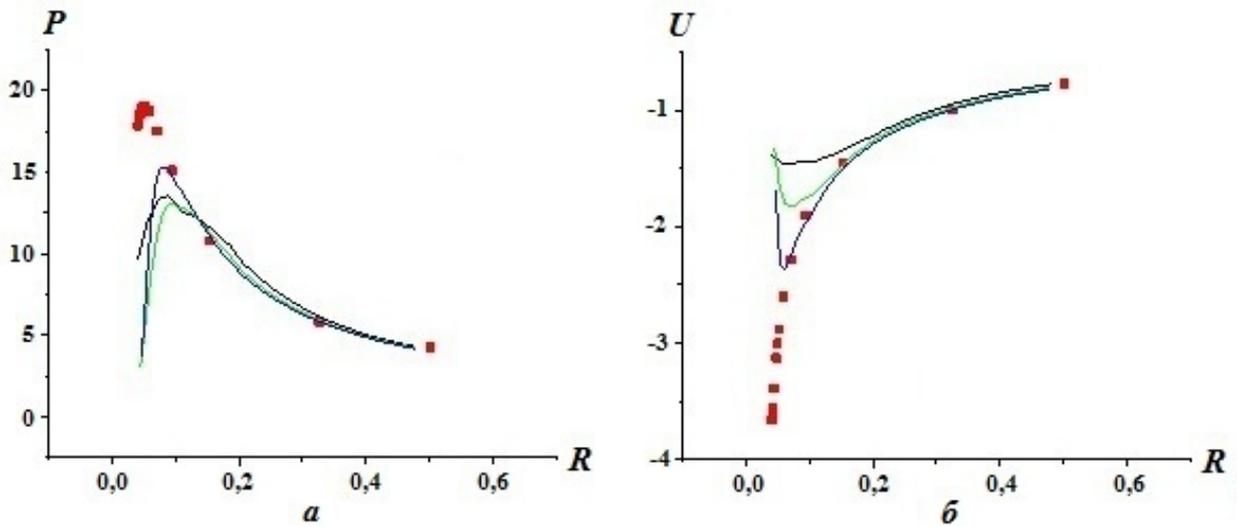


Рис. 6. Распределения давления (а) и модуля скорости (б) на момент времени  $t = 0,59$  на сгущающихся сетках в сравнении с точным решением: ■ — точное решение; — — сетка  $30 \times 24$ ; — — сетка  $60 \times 48$ ; — — сетка  $120 \times 96$

Таблица 1

**Точные и расчетные значения моментов фокусировки и выхода отраженной УВ на свободную поверхность**

Момент времени	Точное значение	Сетка $30 \times 24$	Сетка $60 \times 48$	Сетка $120 \times 96$
Фокусировка УВ	0,5958	0,6037; $\Delta \approx 1,3\%$	0,6035; $\Delta \approx 1,3\%$	0,6013; $\Delta \approx 0,9\%$
Выход УВ на границу	0,7895	0,7907; $\Delta \approx 0,2\%$	0,7907; $\Delta \approx 0,2\%$	0,7902; $\Delta \approx 0,1\%$

**Точечный взрыв.** Рассматривается задача о сферически-симметричном движении газа, возникающем в результате взрыва в однородном веществе без противодействия [7, тест № 4]. В шаре радиусом  $R_{01} = 0,1$  задана начальная внутренняя энергия  $E_{01} = 10^7$ , в сферическом слое  $0,1 \leq R \leq 0,2$   $E_{02} = 0$ . Начальная плотность в обеих областях  $\rho_0 = 1$ . Уравнение состояния — для идеального газа с  $\gamma = 1,4$ . Закон движения фронта УВ описывается соотношением [16]  $R(t) = \alpha (E_{\text{в}}/\rho_0)^{1/5} t^{2/5}$ , где  $E_{\text{в}} = 4/3\pi R_0^3 \rho_0 E_{01} = 4,189 \cdot 10^4$  — энергия взрыва;  $\alpha$  — константа, равная 1,0328 для случая  $\gamma = 1,4$ .

Для проведения расчетов на сходимость были построены три сгущающиеся расчетные сетки. В центральной области  $R < 0,1$  строилась неструктурированная сетка, во внешней области  $0,1 < R < 0,2$  — лучевая сетка с числом ячеек  $90 \times 16$ ,  $180 \times 32$  и  $360 \times 64$ . На рис. 7 показаны распределения газодинамических величин на самой подробной сетке на момент времени  $t = 3,5$ , когда УВ прошла примерно 140 начальных радиусов  $R_{01}$ .

В табл. 2 сравниваются расчетные значения полной энергии ( $E_{\text{tot}}$ ) и величины  $R^5/t^2$  (должна сохраняться при автомодельном течении) на начальный ( $t = 0$ ) и конечный ( $t = 9$ ) моменты времени. На момент времени  $t = 9$  УВ прошла примерно 200 начальных радиусов  $R_{01}$ . Из табл. 2 видно, что на сетке  $250 \times 96$  величины сохраняются с точностью  $\approx 0,8\%$ .

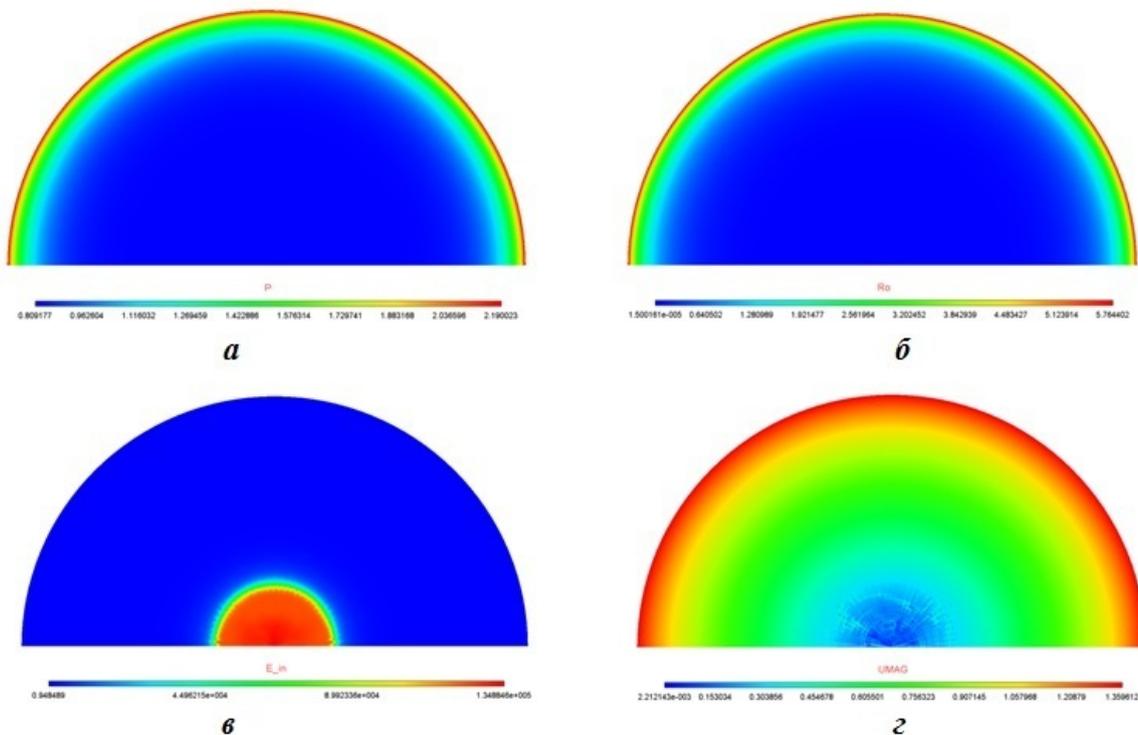


Рис. 7. Распределения давления (а), плотности (б), внутренней энергии (в) и модуля скорости (г) на самой подробной сетке на момент времени  $t = 3,5$

Таблица 2

Расчетные значения полной энергии ( $E_{\text{tot}}$ ) и величины  $R^5/t^2$  на моменты времени  $t = 0$  и  $t = 9$  (сетка  $250 \times 96$ )

Время и радиус	$E_{\text{tot}}$	$R^5/t^2$
$t = 0; R = R_{01}$	$6,61 \cdot 10^3$	$4,83 \cdot 10^4$
$t = 9; R \approx 200R_{01}$	$6,56 \cdot 10^3$	$4,81 \cdot 10^4$
Точность, %	$\approx 0,8$	$\approx 0,8$

Радиус фронта УВ на момент времени  $t = 9$  на экваторе  $R_{\text{э}} = 20,95$ , на полюсе  $R_{\text{п}} = 20,93$ . Погрешность в определении радиуса фронта УВ  $\Delta \approx 0,09\%$ .

**Изменение формы фронта УВ от времени для сферической гармонике Y8,0.** Рассматривается сферическая область с радиусом  $R_0 = 1$ . В начальный момент времени на поверхности области задаются возмущения в виде сферической гармонике Y8,0. В качестве начальных данных задаются расчетные поля задачи о распространении УВ от точечного взрыва ( $\rho_0 = 1$ ;  $E_0 = 10^7$ ;  $\gamma = 1,4$ ) на момент выхода решения на автомодельный режим. На рис. 8 показано изменение фронта УВ за период. На месте впадин образуются "холмы" (1/2 периода), затем на месте холмов опять образуются впадины (период). Амплитуда возмущений для наглядности увеличена в 3 раза.

На рис. 9 показана нормированная зависимость амплитуды возмущений от логарифма среднего радиуса в сравнении с аналитическим решением.

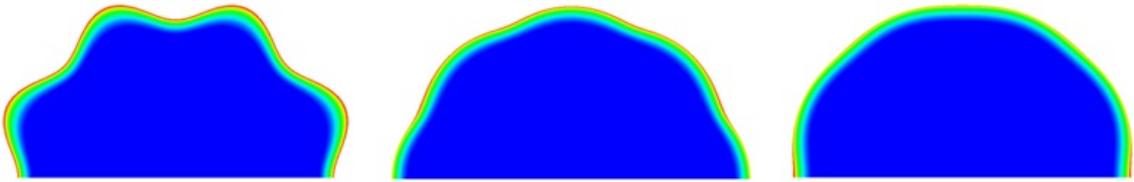


Рис. 8. Изменение фронта УВ за период

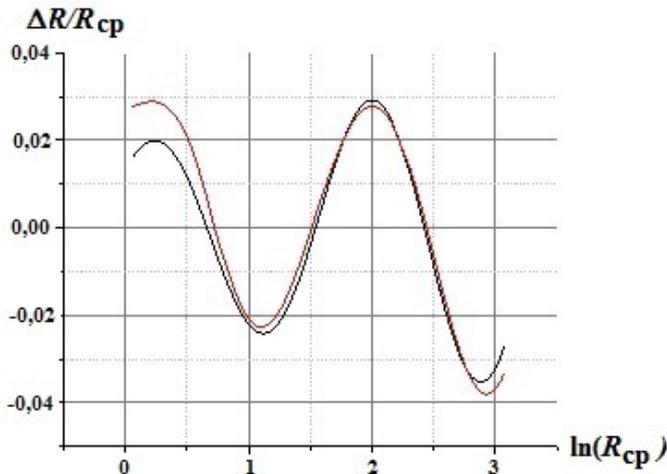


Рис. 9. Нормированная зависимость амплитуды возмущений от логарифма среднего радиуса: — — расчет; — — точное решение

**Задача об остывании бесконечного бруса с квадратным сечением.** Рассматривается задача об остывании бесконечного бруса с квадратным сечением [8], внутри которого в начальный момент времени задана температура  $T_0 = 1$ , а на внешней границе во все последующие моменты времени поддерживается нулевая граничная температура  $T_{\text{bound}} = 0$ . Сечение бруса представляет собой единичный квадрат. Точное решение имеет вид [17]

$$T(x, y, t) = \psi(x, t)\psi(y, t),$$

$$\text{где } \psi(x, t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\pi^2(2k+1)^2 t}}{2k+1} \sin \pi(2k+1)x.$$

Для проведения расчетов на сходимость были построены три сгущающиеся четырехугольные сетки с числом ячеек  $20 \times 20$ ,  $40 \times 40$ ,  $80 \times 80$  и три сгущающиеся треугольные сетки с числом ячеек 440, 1814, 7746. На рис. 10, 11 показаны зависимости температуры от длины вдоль прямой  $y = x$  в сечении бруса на момент времени  $t = 0,1$  для расчетов на сгущающихся четырехугольных и треугольных сетках в сравнении с аналитическим решением. Погрешность решения на самых грубых сетках не превышает  $\approx 0,7\%$ .

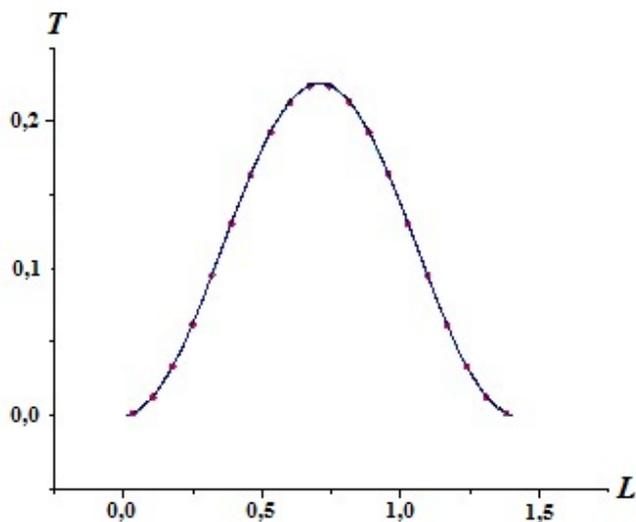


Рис. 10. Зависимость температуры от длины вдоль прямой  $y = x$  в сечении бруса на момент времени  $t = 0,1$  для расчетов на сгущающихся четырехугольных сетках в сравнении с аналитическим решением:  $\bullet$  — точное решение; — — сетка  $20 \times 20$ ; — — сетка  $40 \times 40$ ; — — сетка  $80 \times 80$

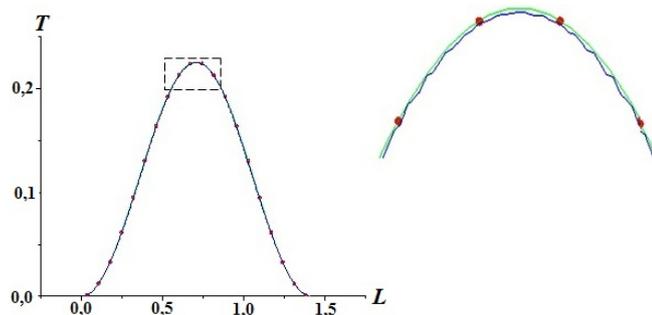


Рис. 11. Зависимость температуры от длины вдоль прямой  $y = x$  в сечении бруса на момент времени  $t = 0,1$  для расчетов на самой подробной четырехугольной и треугольной сетках в сравнении с аналитическим решением:  $\bullet$  — точное решение; — — квадратная сетка  $80 \times 80$ ; — — треугольная сетка 7746 ячеек

**Распространение тепла от постояннодействующего источника.** Рассматривается задача распространения сферической тепловой волны от постоянного действующего источника  $Q(t, T) = \frac{3T}{2t}$ . Уравнение состояния  $\varepsilon = c_v T$ ,  $c_v = 1$ . Коэффициент теплопроводности  $\chi = T^\sigma$ ,  $\sigma = 4$ . Плотность среды  $\rho = 1$ . Аналитическое решение данной задачи имеет следующий вид [18]:

$$T(r, t) = 1,21921 \cdot \left( 1 - \left( \frac{r}{r_\Phi} \right)^2 \right)^{0,25},$$

где  $r_\Phi = 1,48647\sqrt{t}$  — радиус фронта тепловой волны.

Задача решается в осесимметричной постановке. В области, представляющей собой квадрат  $0 \leq z, r \leq 2,5$ , задана начальная температура  $T_0 = 1,1629541$ ; во внешней области температура равна нулю. Строятся три сгущающиеся четырехугольные сетки с числом ячеек  $25 \times 20$ ,  $50 \times 40$ ,  $100 \times 80$ . Расчеты проводятся до момента времени  $t = 1,5$ . На рис. 12 показано распределение температуры вдоль оси  $Or$ . Разница между точным и расчетным значениями на подробной сетке не превышает  $\approx 0,7\%$ .

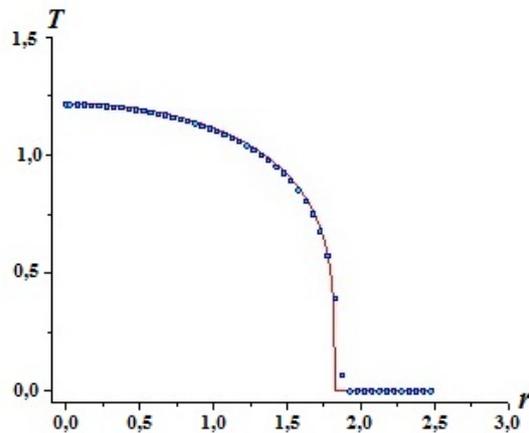


Рис. 12. Графики распределения температуры вдоль оси: — — точное решение; ■ — расчет на сетке  $25 \times 20$

## Заключение

Разработана методика параллельного расчета двумерных уравнений газовой динамики с теплопроводностью на подвижной неструктурированной сетке. Методика основана на расщеплении по физическим процессам, методе контрольного объема для аппроксимации исходных уравнений, явном методе интегрирования по времени уравнений газовой динамики и неявном методе интегрирования уравнения теплопроводности. Для решения уравнения теплопроводности построена схема относительно приращения температуры. Получающаяся в результате аппроксимации система линейных алгебраических уравнений решается с использованием параллельных решателей PMLP. Выполнен ряд тестовых расчетов, подтверждающих работоспособность методики. Показано хорошее согласие численных решений с аналитическими.

## Список литературы

1. Брод Г. Механика. № 3. Расчеты взрывов на ЭВМ. Подземные взрывы. М.: Мир, 1975.  
*Broud G. Mekhanika. № 3. Raschetu vzryvov na EVM. Podzemnye vzryvy. M.: Mir, 1975.*
2. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука, 1966.  
*Zeldovich Ya. B., Rayzer Yu. P. Fizika udarnykh voln i vysokotemperaturnykh gidrodynamiceskikh yavleniy. M.: Nauka, 1966.*
3. Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я., Крайко А. Н., Прокопов Г. П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976.  
*Godunov S. K., Zabrodin A. V., Ivanov M. Ya., Krayko A. N., Prokopov G. P. Chislennoe reshenie mnogomernykh zadach gazovoy dinamiki. M.: Nauka, 1976.*
4. Матяш С. В. Новый метод использования принципа минимальных приращений в численных схемах второго порядка аппроксимации // Ученые записки ЦАГИ. 2005. Т. 36, № 3–4. С. 42–50.  
*Matyash S. V. Novy metod ispolzovaniya printsipa minimalnykh prirashcheniy v chislennykh skhemakh vtorogo poriyadka approksimatsii // Uchenye zapiski TsAGI. 2005. T. 36, № 3–4. S. 42–50.*
5. Бартнев Ю. Г., Ерзунов В. А., Карпов А. П., Петров Д. А., Пищулин И. А., Стаканов А. Н., Щаникова Е. Б., Капорин И. Е., Миллюкова О. Ю., Харченко С. А., Коншин И. Н., Сысоев А. В., Мееров И. Б. Комплекс библиотек параллельных решателей SLAU LParSol версии 3 // Сб. докл. XV межд. конф. "Супервычисления и математическое моделирование". Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2014. С. 102–110.  
*Bartnev Yu. G., Erzunov V. A., Karpov A. P., Petrov D. A., Pishchulin I. A., Stakanov A. N., Shchanikova E. B., Kaporin I. E., Milyukova O. Yu., Kharchenko S. A., Konshin I. N., Sysoev A. V., Meerov I. B. Kompleks bibliotek parallelnykh reshateley SLAU LParSol versii 3 // Sb. dokl. XV mezhhd. konf. "Supervychysleniya i matematicheskoe modelirovanie". Sarov: RFYaTs-VNIIEF, 2014. S. 102–110.*
6. Дерюгин Ю. Н., Козелков А. С., Спиридонов В. Ф., Циберева К. В., Шагалиев Р. М. Многофункциональный высокопараллельный пакет программ ЛОГОС для решения задач тепломассообмена и прочности // Сб. тез. докл. Санкт-Петербургского науч. форума "Наука и общество". С.-Пб., 2012. С. 102.  
*Deryugin Yu. N., Kozelkov A. S., Spiridonov V. F., Tsibereva K. V., Shagaliev R. M. Mnogofunktsionalny vysokoparallelny paket programm LOGOS dlya resheniya zadach teplomassoperenosa i prochnosti // Sb. tez. dokl. Sankt-Peterburgskogo nauch. foruma "Nauka i obshchestvo". S-Pb.: 2012. S. 102.*
7. Бондаренко Ю. А., Воронин Б. Л., Делов В. И., Зубов Е. Н., Ковалёв Н. П., Соколов С. С., Шемарулин В. Е. Описание системы тестов для двумерных газодинамических методик и программ. Ч. 1. Требование к тестам. Тесты 1–7 // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1991. Вып. 2. С. 3–9.

- Bondarenko Yu. A., Voronin B. L., Delov V. I., Zubov E. N., Kovalev N. P., Sokolov S. S., Shemarulin V. E.* Описание системы тестов для двумерных газодинамических методик и программ. Ч. 1. Требования к тестам. Тесты 1-7 // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1991. Вып. 2. С. 3–9.
8. *Бондаренко Ю. А., Воронин Б. Л., Делов В. И., Зубов Е. Н., Ковалёв Н. П., Соколов С. С., Шемарулин В. Е.* Описание системы тестов для двумерных газодинамических методик и программ. Ч. 2. Требования к тестам. Тесты 8–15 // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1991. Вып. 2. С. 10–14.
- Bondarenko Yu. A., Voronin B. L., Delov V. I., Zubov E. N., Kovalev N. P., Sokolov S. S., Shemarulin V. E.* Описание системы тестов для двумерных газодинамических методик и программ. Ч. 2. Требования к тестам. Тесты 8-15 // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1991. Вып. 2. С. 10–14.
9. *Бондаренко Ю. А., Воронин Б. Л., Горев В. В., Делов В. И., Зубов Е. Н., Матвеев Ю. М., Моренко А. И., Соколов С. С., Шемарулин В. Е.* Описание системы тестов для методик и программ, предназначенных для решения двумерных задач теплопроводности // Там же. 1992. Вып. 2. С. 14–20.
- Bondarenko Yu. A., Voronin B. L., Gorev V. V., Delov V. I., Zubov E. N., Matveev Yu. M., Morenko A. I., Sokolov S. S., Shemarulin V. E.* Описание системы тестов для методик и программ, предназначенных для решения двумерных задач теплопроводности // Там же. 1992. Вып. 2. С. 14–20.
10. *Luke E., Collins E., Blades E.* A fast mesh deformation method using explicit interpolation // J. Comp. Phys. 2012. Vol. 231. P. 586–601.
11. *Колган В. П.* Применение принципа минимальных значений производной к построению конечно разностных схем для расчета разрывных решений газовой динамики // Ученые записки ЦАГИ. 1972. Т. 3, № 6. С. 68–77.
- Kolgan V. P.* Primenenie printsipa minimalnykh znacheniy proizvodnoy k postroeniyu konechno raznostnykh skhem dlya rascheta vzyrnykh resheniy gazovoy dinamiki // Uchenye zapiski TsAGI. 1972. Т. 3, № 6. С. 68–77.
12. *Hirsch Ch.* Numerical Computation of Internal & External Flows. V. 2. Computational Methods for Inviscid and Viscous Flows. Wiley series in numerical methods in engineering, A Wiley-Interscience publication, 1988.
13. *Якововский М. В.* Обработка сеточных данных на распределенных вычислительных системах // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2004. Вып. 2. С. 40–53.
- Yakovovskiy M. V.* Obrabotka setochnykh dannykh na raspredelennykh vychislitelnykh sistemakh // Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov. 2004. Вып. 2. С. 40–53.
14. *Евстигнеев В. А.* Применение теории графов в программировании / Под ред. А. П. Ершова. М.: Наука, 1985.
- Evistigneev V. A.* Primenenie teorii grafov v programmirovanii / Pod red. A. P. Ershova. M.: Nauka, 1985.
15. *Hendrickson B., Leland R.* The Chaco User's Guide: Version 2.0: Tech. Rep. SAND95-2344. Sandia National Laboratories, 1995.
16. *Седов А. И.* Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1972.
- Sedov A. I.* Metody podobiya i razmernosti v mekhanike. M.: Nauka, 1972.
17. *Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М.* Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высшая школа, 1970.
- Koshlyakov N. S., Gliner E. B., Smirnov M. M.* Uravneniya v chastnykh proizvodnykh matematicheskoy fiziki. M.: Vysshaya shkola, 1970.

18. *Тихомиров Б. П.* Автомодельные тепловые волны от сосредоточенного или объемного источника в среде с неоднородными теплофизическими параметрами // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2010. Вып. 2. С. 40–50.  
*Tikhomirov B. P.* Avtomodelnye teplovye volny ot sosredotochennogo ili obyemnogo istochnika v srede s neodnorodnymi teplofizicheskimi parametrami // Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov. 2010. Vyp. 2. S. 40–50.

Статья поступила в редакцию 07.04.21.

---