

УДК 625.033.37

## МОДЕЛЬ ДЕФОРМИРУЕМОСТИ ГРУНТОВОГО ОСНОВАНИЯ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ПУТИ ПРИ ПРОПУСКЕ БОЛЬШОГО КОЛИЧЕСТВА ПОЕЗДОВ С РАЗЛИЧНОЙ НАГРУЗКОЙ

А. В. Анисин, И. М. Анисина, С. С. Надёжин, В. О. Певзнер, В. П. Соловьёв,  
В. В. Третьяков, И. В. Третьяков  
(ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области; ВНИИЖТ, г. Москва)

Проведено исследование применимости модели стандартного линейного твердого тела к описанию деформации земляного полотна под поездной нагрузкой. Ранее было показано, что в частном случае циклической синусоидальной нагрузки на рельс модель стандартного линейного твердого тела хорошо описывает как деформацию грунта под нагрузкой, так и релаксацию грунта после снятия нагрузки. В настоящей работе проанализированы экспериментальные данные, полученные сотрудниками ВНИИЖТ на перегоне Ковдор—Пинозеро. Модель стандартного линейного твердого тела обобщена на случай произвольного вида функции нагрузки. Доказана применимость этой модели при неоднородной по глубине нагрузке. Предложены простые оценочные формулы для деформации грунта при прохождении одного или нескольких поездов в зависимости от количества и массы проходящих составов, а также релаксации пути после прохождения поезда. Полученная методика позволяет прогнозировать рост динамических отступлений в вертикальной плоскости при прохождении длинносоставных поездов, что необходимо для планирования выправочных работ.

*Ключевые слова:* железнодорожный путь, подбалластное основание, осадка пути, модель стандартного линейного твердого тела, вязкость.

### Введение

В последнее время на железных дорогах наблюдается все большее усложнение перевозочной работы из-за недостаточной пропускной способности ряда направлений в сочетании с ростом осевых нагрузок и весов поездов. Обеспечение безопасного и бесперебойного движения поездов с установленными скоростями в таких условиях требует постоянного совершенствования системы технического обслуживания пути. Одним из важнейших элементов этой системы является прогноз изменения состояния пути и, в частности, скорости роста неровностей в вертикальной продольной плоскости. Информация по этому вопросу является необходимой для определения потребности в проведении выправочных работ.

Для получения прогнозов состояния пути требуются методики, позволяющие вычислить скорость роста амплитуд неровностей в вертикальной продольной плоскости в зависимости от конструкции верхнего строения пути, характеристик подбалластного основания и уровня нагруженности пути поездной нагрузкой. Помимо методик, основанных на обработке статистических данных о наличии и параметрах неровностей в различных условиях эксплуатации с построением вероятностных моделей по ансамблю данных с различных участков, несомненный интерес представляют детерминированные расчеты на базе математического моделирования физических процессов, приводящих к развитию неровностей. Одним из направлений инновационного развития железнодорожного транспорта является математическое моделирование процесса жизненного цикла эталонной конструкции пути с учетом динамического воздействия поездной нагрузки.

В работах [1, 2] были проанализированы реологические модели вязкоупругого тела, пригодные для описания поведения грунта, обладающего вязкоупругими свойствами. Из этих моделей были получены решения для случая, когда функция нагрузки имеет вид синусоиды. На примере экспериментальных работ ВНИИЖТ на перегоне Ковдор—Пиозеро для длиннооставных поездов [2] было показано, что модель стандартного линейного твердого тела корректно описывает релаксацию пути после снятия поездной нагрузки.

В настоящей работе модель обобщена на случай произвольного вида функции нагрузки. Получены простые оценочные формулы для зависимости осадки пути от количества и массы проходящих составов.

### Математическая модель

На рис. 1 приведена схема модели стандартного линейного твердого тела, предложенной для описания деформации вязкоупругого грунта в работах [1, 2].

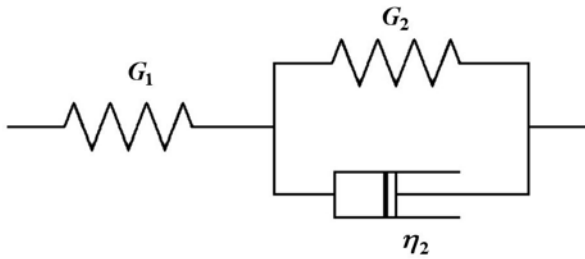


Рис. 1. Модель стандартного линейного твердого тела ( $G_1, G_2$  — упругие элементы;  $\eta_2$  — вязкий элемент)

Согласно [3] уравнение для модели стандартного твердого тела имеет вид

$$\frac{d\varepsilon}{dt} + \tau_2\varepsilon = \frac{G_1 + G_2}{G_1\eta_2}\sigma + \frac{1}{G_1}\frac{d\sigma}{dt}, \quad (1)$$

где  $\sigma(t)$  — функция, задающая поездную нагрузку на шпалу от времени;  $\varepsilon$  — относительная деформация, вызываемая нагрузкой  $\sigma(t)$ ;  $G_1$  и  $G_2$  — модули упругости;  $\eta_2$  — вязкость;  $\tau_2 = G_2/\eta_2$ .

В уравнении модели учитывается только поездная нагрузка на грунтовое основание пути; поскольку вес грунта, а также вес рельсов и шпал постоянны, то деформация грунтового основания под воздействием веса грунта и верхнего строения пути присутствует всегда и является постоянной величиной. Фактически нагрузка при прохождении поезда добавляется к имеющейся и вызывает дополнительную деформацию грунтового основания, которая обозначена как  $\varepsilon(t)$ .

В работах [1, 2] было показано, что для случая, когда нагрузка на рельсы описывается синусоидальной функцией, предложенная модель корректно описывает релаксацию пути после снятия поездной нагрузки.

Рассмотрим общий случай, когда функция нагрузки на шпалу не представляется синусоидой. Пусть поезд проходит над шпалой за время  $T$ , тогда функция нагрузки  $\sigma(t) \neq 0$  при  $t \leq T$ , и  $\sigma(t) = 0$  при  $t > T$ .

Решение уравнения (1) имеет вид

$$\varepsilon(t) = \exp(-\tau_2 t) \int_0^t F(t') \exp(\tau_2 t') dt', \quad (2)$$

где

$$F(t) = \begin{cases} \frac{G_1 + G_2}{G_1\eta_2}\sigma + \frac{1}{G_1}\frac{d\sigma}{dt} & \text{при } t \leq T; \\ 0 & \text{при } t > T. \end{cases} \quad (3)$$

Решение уравнения (1) с учетом (3) принимает вид

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} \exp(-\tau_2 t) \frac{1}{\eta_2} \int_0^t \sigma(t') \exp(\tau_2 t') dt' + \frac{1}{G_1} \left( \sigma(t) - \sigma(0) \exp(-\tau_2 t) \right) & \text{при } t \leq T; \\ \varepsilon_T \exp(-\tau_2 t) & \text{при } t > T, \end{cases} \quad (4)$$

где  $\varepsilon_T = \frac{1}{\eta_2} \int_0^T \sigma(t') \exp(\tau_2 t') dt'$  — остаточная деформация грунта в момент после прохождения поезда.

На рис. 2 приведена временная зависимость осадки грунта, полученная с помощью численного решения уравнения (1). Для сравнения приведены экспериментальные значения осадки уровня головки рельса (УГР), полученные во ВНИИЖТ на перегоне Ковдор—Пинозеро для длинносоставных поездов [2] в предположении, что осадка УГР соответствует осадке земляного полотна. В расчете был смоделирован поезд из 30 одинаковых вагонов, для каждого из которых функция нагрузки имела вид, показанный на рис. 3. Поезд двигался со скоростью 40 км/ч. Параметры вязкоупругой модели для расчетов:  $G_1 = 40$  МПа;  $G_2 = 6,2$  МПа;  $\eta_2 = 2$  ГПа·с.

Пусть поезд состоит из  $N_V$  одинаковых вагонов, тогда каждый вагон проходит над шпалой за время  $T_1 = T/N_V$ . В этом случае  $\sigma(t)$  будет периодической функцией с периодом  $T_1$ . Тогда величину  $I(t) = \int_0^t \sigma(t') \exp(\tau_2 t') dt'$  из верхней строки выражения (4) можно записать в виде

$$I(t) = \sum_{k=1}^{n(t)} \int_{T_1(k-1)}^{T_1 k} \sigma(t') \exp(\tau_2 t') dt',$$

где  $n(t)$  — количество вагонов, прошедших над шпалой за время  $t$ .

В каждом интеграле делаем замену  $t' = \xi + (k-1)T_1$  и, учитывая, что в рассматриваемых условиях  $\tau_2 T_1$  мало, а, значит, экспонента слабо меняется за период  $T_1$  и ее можно приближенно считать равной константе на каждом периоде прохождения одного вагона, получаем

$$I(t) = \sum_{k=1}^{n(t)} \exp\left(\tau_2 [\xi^* + (k-1)T_1]\right) \int_0^{T_1} \sigma(t') dt,$$

где  $\xi^*$  — некоторое значение в интервале  $[0, T_1)$ .

Перепишем

$$I(t) = S(t) \int_0^{T_1} \sigma(t') dt',$$

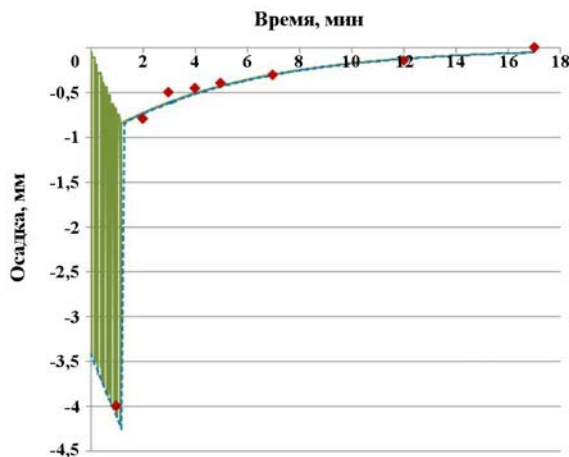


Рис. 2. Осадка грунта после прохождения длинносоставного поезда, полученная при численном (—) и приближенном полуаналитическом (---) решении уравнения модели стандартного твердого тела (1), а также экспериментальные данные из работы [2] (♦)

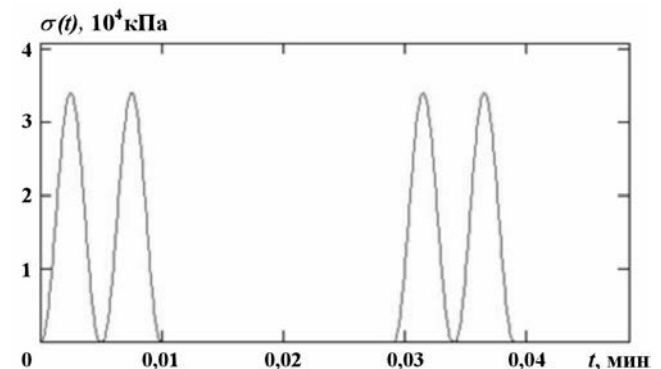


Рис. 3. Вид функции нагрузки на грунт при прохождении одного вагона с четырьмя осями со скоростью 40 км/ч

где

$$S(t) = \sum_{k=1}^{n(t)} \exp\left(\tau_2 [\xi^* + (k-1)T_1]\right) \approx \frac{1}{T_1} \int_0^t \exp(\tau_2 t') dt' = \frac{1}{T_1} \frac{1}{\tau_2} \left(\exp(\tau_2 t) - 1\right).$$

Тогда

$$I(t) = \frac{1}{\tau_2} \left(\exp(\tau_2 t) - 1\right) \langle \sigma \rangle,$$

где  $\langle \sigma \rangle = \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} \sigma(t') dt'$  — средняя по времени интегральная нагрузка на грунт при прохождении одного вагона.

Отсюда выражение (4) можно приближенно записать в виде

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{G_2} \left(1 - \exp(-\tau_2 t)\right) \langle \sigma \rangle + \frac{1}{G_1} \left(\sigma(t) - \sigma(0) \exp(-\tau_2 t)\right) & \text{при } t \leq T; \\ \varepsilon_T^0 \exp\left(-\tau_2(t-T)\right) & \text{при } t > T, \end{cases} \quad (5)$$

где

$$\varepsilon_T^0 = \frac{1}{G_2} \left(1 - \exp(-\tau_2 T)\right) \langle \sigma \rangle - \quad (6)$$

остаточная деформация грунта в момент после прохождения поезда.

В выражении (5) второе слагаемое в верхней строке, пропорциональное  $1/G_1$ , отвечает за упругую деформацию грунта, которая проходит мгновенно после снятия нагрузки. Первое слагаемое отвечает за вязкоупругую деформацию, которая остается после прохождения поезда и для релаксации которой требуется значительное время.

Из рис. 2 видно, что деформация грунта  $\varepsilon(t)$  во время прохождения поезда является быстро осциллирующей функцией (изменяется так же, как  $\sigma(t)$ , с  $T_1 \ll T$ ), а после прохождения поезда  $\varepsilon(t)$  меняется плавно по экспоненциальному закону. Для практических расчетов быстроизменяющуюся часть функции  $\varepsilon(t)$  можно заменить на огибающую функцию максимального прогиба грунта под вагонами, не учитывающую осцилляции функции нагрузки под каждой осью:

$$\varepsilon_{\max}(t) = \begin{cases} \frac{1}{G_2} \left(1 - \exp(-\tau_2 t)\right) \langle \sigma \rangle + \frac{\sigma_0}{G_1} & \text{при } t \leq T; \\ \varepsilon_T^0 \exp\left(-\tau_2(t-T)\right) & \text{при } t > T. \end{cases} \quad (7)$$

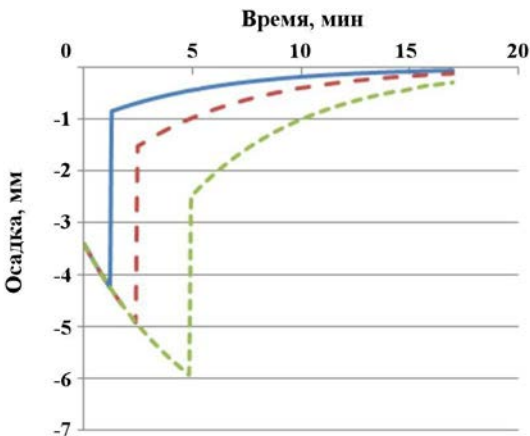


Рис. 4. Сравнение осадки грунта при прохождении поезда со скоростями 40 (—), 20 (---) и 10 км/ч (---)

Здесь быстроосциллирующая функция нагрузки  $\sigma(t)$  заменена на  $\sigma_0$  — максимальное значение функции  $\sigma(t)$  за время прохождения одного вагона. Огибающая функция  $\varepsilon_{\max}(t)$  показана на рис. 2 пунктирной линией.

Из выражения (7) видно, что остаточная деформация грунта после прохождения поезда зависит от времени прохождения поезда и средней интегральной нагрузки  $\langle \sigma \rangle$ . От конкретного профиля функции  $\sigma(t)$  остаточная деформация не зависит.

На рис. 4 приведены графики осадки грунта под одинаковыми поездами, двигающимися с разными скоростями: 40, 20, 10 км/ч. Видно, что при одной и той же массе поезда осадка пути увеличивается при уменьшении скорости поезда, т. е. при увеличении продолжительности нагрузки на грунт.

### Случай воздействия нескольких поездов

Рассмотрим случай, когда с некоторым интервалом времени проходят несколько поездов. Если этот интервал меньше времени релаксации грунта, то следующий поезд попадает на уже деформированный грунт и увеличивает деформацию.

В случае прохождения нескольких поездов выражение (7) примет вид

$$\varepsilon_{\max}(t) = \begin{cases} S_k \exp(\tau_2 [T + D(k-1) - t]) + f(t - Dk), & Dk < t < Dk + T; \\ S_{k+1} \exp(\tau_2 (T + Dk - t)), & Dk + T < t < D(k+1). \end{cases} \quad (8)$$

Здесь  $D$  — временной интервал между поездами;  $T$  — время прохождения поезда, т. е. время релаксации грунта между поездами равно  $dt = D - T$ ;  $f(t) = \frac{\sigma_0}{G_1} + \frac{\langle \sigma \rangle}{G_2} (1 - \exp(-\tau_2 t))$  — функция, описывающая воздействие на грунт поезда, проходящего над участком грунта в данный момент  $t$ ;  $S_k$  — остаточная деформация после прохождения  $k$ -го поезда:

$$S_k = \begin{cases} 0, & k = 0; \\ \varepsilon_T \sum_{i=0}^{k-1} e_D^i, & k > 0, \end{cases} \quad (9)$$

где  $\varepsilon_T = \varepsilon(T) \approx \frac{\langle \sigma \rangle}{G_2} (1 - \exp(-\tau_2 T))$ ;  $e_D = \exp(-\tau_2 D)$ .

На рис. 5 приведен полученный при численном решении уравнения (1) график осадки грунта при прохождении трех поездов по 60 вагонов с интервалом в 5 мин; время прохождения каждого поезда 2,9 мин. Функция нагрузки имеет вид, показанный на рис. 3. На рис. 5 также показано приближенное решение с использованием выражения (8), дающего максимумы функции деформации грунта.

Если пускать поезда друг за другом без перерыва, т. е. положить  $D = T$ , то график осадки грунта будет выглядеть, как на рис 6.

Из выражения (6) следует, что максимально возможная остаточная деформация грунта достижима при  $t \rightarrow \infty$  (т. е. при прохождении подряд без перерыва бесконечного числа поездов или одного бесконечного поезда) и с учетом (9) равна

$$S_{\max \text{ ost}} = \frac{\langle \sigma \rangle}{G_2}.$$

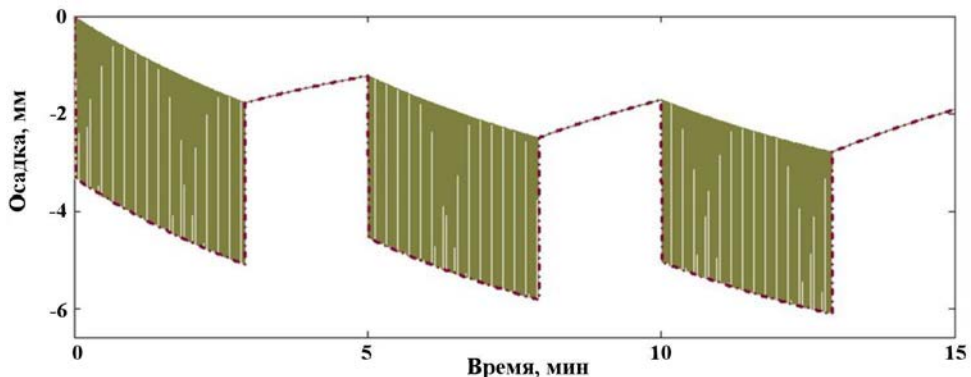


Рис. 5. Осадка грунта при прохождении трех поездов по 60 вагонов, интервал между поездами 5 мин, время прохождения одного поезда 2,9 мин: — численное решение; - - - максимальная просадка

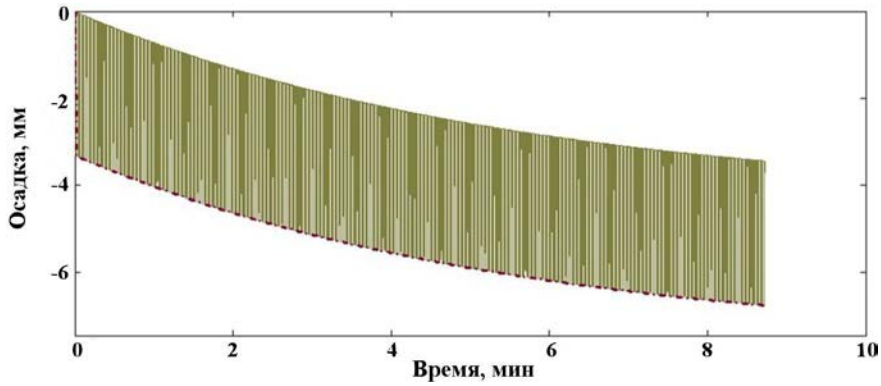


Рис. 6. Осадка грунта при  $D = T = 2,9$  мин при прохождении трех поездов подряд: — — численное решение; - - - — максимальная осадка

Из выражения (7) следует, что максимальная осадка грунта под поездом равна (с учетом упругой осадки)

$$S_{\max} = \frac{\langle \sigma \rangle}{G_2} + \frac{\sigma_0}{G_1}.$$

Из (8) следует, что остаточная деформация при прохождении  $k$ -го поезда равна

$$s_{ost} = S_k = \frac{\langle \sigma \rangle}{G_2} (1 - \exp(-\tau_2 T)) \sum_{i=0}^k e_D^i. \quad (10)$$

Сумма в выражении (10) представляет собой геометрическую прогрессию. При бесконечном числе поездов, проходящих с временным интервалом  $D$ , выражение (10) будет стремиться к

$$s_{ost} = \frac{\langle \sigma \rangle}{G_2} \frac{1 - \exp(-\tau_2 T)}{1 - \exp(-\tau_2 D)}.$$

Соответственно максимальная осадка грунта (с учетом упругой осадки) под поездами, проходящими с интервалом  $D$ , равна

$$s_{max} = \frac{\langle \sigma \rangle}{G_2} \frac{1 - \exp(-\tau_2 T)}{1 - \exp(-\tau_2 D)} + \frac{\sigma_0}{G_1}.$$

### Неоднородная по глубине нагрузка

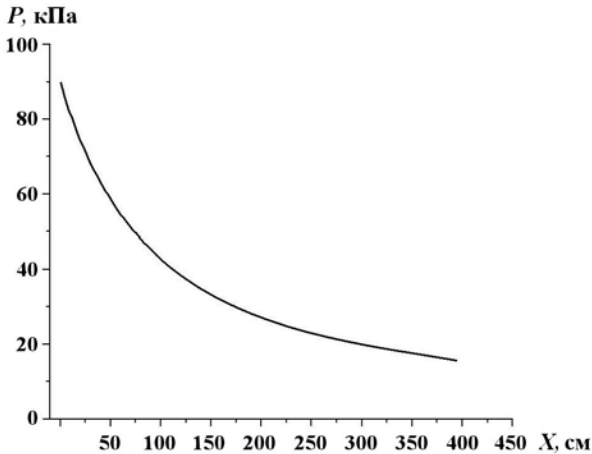


Рис. 7. Пример распределения нагрузки по глубине

На практике напряжение  $\sigma$  в уравнении (1) зависит не только от времени, но и от глубины слоя грунта, поскольку нагрузка распределяется вглубь неравномерно (рис. 7).

В работе [1] было показано, что при синусоидальной форме функции нагрузки ее зависимость от глубины слоя грунта можно учесть, проинтегрировав функцию нагрузки по глубине. Обобщим этот результат на любой вид функции нагрузки от времени.

Рассмотрим толстый массив однородного грунта, в котором не меняются по глубине параметры упругости и вязкости, но меняется нагрузка. Можно мысленно разделить массив грунта на слои, нагрузку на каждый из которых

по глубине можно считать постоянной. Полная осадка такого массива под нагрузкой равна

$$r(t) = \sum_k \varepsilon_k(t) dz_k,$$

где  $\varepsilon_k$  — деформация  $k$ -го слоя;  $dz_k$  — толщина  $k$ -го слоя.

При бесконечном количестве слоев

$$r(t) = \int_0^H \varepsilon(z, t) dz,$$

где  $H$  — толщина всего слоя грунта. Подставив выражения (2) и (3), получим

$$\begin{aligned} r(t) &= \exp(-\tau_2 t) \int_0^t \int_0^H \left( \frac{G_1 + G_2}{G_1 \eta_2} \sigma + \frac{1}{G_1} \frac{d\sigma}{dt} \right) dz \exp(\tau_2 t') dt' = \\ &= \exp(-\tau_2 t) \int_0^t \left( \frac{G_1 + G_2}{G_1 \eta_2} \int_0^H \sigma(z, t) dz + \frac{1}{G_1} \frac{d}{dt} \int_0^H \sigma(z, t) dz \right) \exp(\tau_2 t') dt'; \\ \varepsilon(t) &= \exp(-\tau_2 t) \int_0^t \hat{F}(t') \exp(\tau_2 t') dt', \end{aligned}$$

$$\text{где } \hat{F}(t) = \begin{cases} \frac{G_1 + G_2}{G_1 \eta_2} \langle \sigma \rangle_z + \frac{1}{G_1} \frac{d}{dt} \langle \sigma \rangle_z & \text{при } t \leq T; \\ 0 & \text{при } t > T; \end{cases}$$

$\langle \sigma \rangle_z(t) = \frac{1}{H} \int_0^H \sigma(z, t) dz$  — интегральное среднее функции нагрузки по толщине грунта, которое зависит только от  $t$ .

Таким образом, чтобы вычислить полную осадку грунта при однородных параметрах упругости и вязкости, но при неоднородной по глубине нагрузке, достаточно вместо функции  $\sigma(z, t)$  брать  $\langle \sigma \rangle_z(t)$ .

Если имеется несколько слоев с различными параметрами упругости и вязкости, то суммарная деформация всего массива грунта будет равна

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= \sum_k \exp(-\tau_{2k} t) \int_0^t F_k(t') \exp(\tau_{2k} t') dt', \\ F_k(t) &= \frac{G_{1k} + G_{2k}}{G_{1k} \eta_{2k}} \langle \sigma \rangle_{z_k}(t) + \frac{1}{G_{1k}} \frac{d}{dt} \langle \sigma \rangle_{z_k}(t), \end{aligned}$$

где  $k$  — номер слоя;  $G_{1k}$ ,  $G_{2k}$ ,  $\eta_{2k}$  — параметры упругости и вязкости  $k$ -го слоя;  $\tau_{2k} = G_{2k}/\eta_{2k}$ ;  $\langle \sigma \rangle_{z_k}(t)$  — интегральное среднее функции  $\sigma(z, t)$  по глубине для  $k$ -го слоя.

Выражение для максимальной деформации массива грунта:

$$\varepsilon_{\max}(t) = \sum_k \varepsilon_{k \max}(t).$$

Здесь  $\varepsilon_{k \max}(t)$  — максимальная деформация  $k$ -го слоя грунта:

$$\varepsilon_{k \max}(t) = \begin{cases} \frac{1}{G_{2k}} (1 - \exp(-\tau_{2k} t)) \langle \langle \sigma \rangle_{z_k} \rangle_t + \frac{\sigma_{0k}}{G_{1k}} & \text{при } t \leq T; \\ \varepsilon_{T_k}^0 \exp(-\tau_{2k} (t - T)) & \text{при } t > T; \end{cases} \quad (11)$$

$\langle \langle \sigma \rangle_{z_k} \rangle_t = \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} \langle \sigma \rangle_{z_k} (t') dt'$  — интегральное среднее от  $\langle \sigma \rangle_{z_k} (t)$  по времени прохождения одного вагона;  $\sigma_{0_k}$  — максимальное значение  $\langle \sigma \rangle_{z_k} (t)$  за время прохождения одного вагона.

Для примера рассмотрим задачу о прохождении поезда в 60 вагонов за время 2,9 мин. Для профиля давления в подбалластном слое от поезда нагрузки, показанного на рис. 7, интегральное среднее функции нагрузки по глубине  $\langle \sigma \rangle_z (t) = 33,5$  кПа. Тогда для вагона с четырьмя осями функция нагрузки от времени будет выглядеть, как на рис. 3. Интегральное среднее функции  $\sigma (z, t)$  по глубине и времени прохождения поезда  $T$  равно  $\langle \langle \sigma \rangle_{z_k} \rangle_t = 6740$  Па. Подставив это значение в выражение (11), получим зависимость осадки грунта под поездом в данной точке от времени (рис. 8).

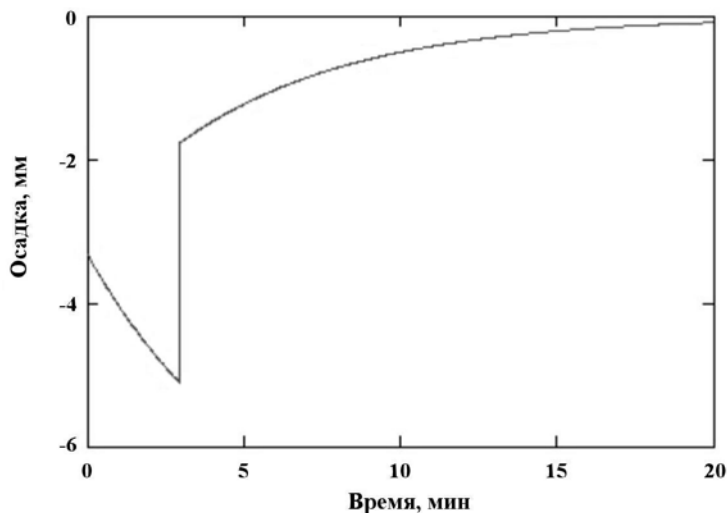


Рис. 8. Осадка грунта при прохождении поезда в 60 вагонов за 2,9 мин, полученная с помощью выражения (11)

### Заключение

В работе рассмотрено обобщение модели стандартного линейного твердого тела для расчета деформации земляного полотна в случае произвольного вида функции поезда нагрузки. Доказана применимость этой модели при неоднородной по глубине нагрузке. Предложены простые оценочные формулы для деформации грунта при прохождении одного или нескольких поездов, а также релаксации пути после прохождения поезда. Полученная методика позволяет прогнозировать рост динамических отступлений в вертикальной плоскости при прохождении длинносоставных поездов. Для вязкоупругих грунтов возможна ситуация, когда динамические отступления превышают нормативные значения.

Данная работа выполнена в рамках проекта ориентированных фундаментальных исследований Российского фонда фундаментальных исследований по актуальным междисциплинарным темам в интересах ОАО "РЖД" (конкурс офи-м-РЖД № 17-20-01152 "Научное обоснование методов определения физико-математических закономерностей развития деформаций пути в зависимости от частотного состава и длительности приложения нагрузок применительно к пропуску тяжеловесных поездов различной длины и с различными скоростями, сформированных из вагонов с повышенными осевыми нагрузками").

### Список литературы

1. Соловьёв В. П., Анисин А. В., Анисина И. М., Надёжин С. С., Железнов М. М., Певзнер В. О., Третьяков И. В. Модель деформируемости грунтового основания железнодорожного пути при



пропуске длинносоставных поездов // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2019. Вып. 3. С. 84–89.

*Solovev V. P., Anisin A. V., Anisina I. M., Nadezhin S. S., Zheleznov M. M., Pevzner V. O., Tretyakov I. V.* Model deformiruemosti gruntovogo osnovaniya zheleznodorozhnogo puti pri propuske dlinnosostavnykh poezdov // Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov. 2019. Вып. 3. С. 84–89.

2. *Железнов М. М., Певзнер В. О., Соловьёв В. П., Анисин А. В., Анисина И. М., Надежин С. С., Третьяков И. В.* Влияние длительности и частоты приложения нагрузки на напряженно-деформированное состояние пути // Вестник НИИЖТ. 2018. Т. 77, № 6. С. 364–367.

*Zheleznov M. M., Pevzner V. O., Solovev V. P., Anisin A. V., Anisina I. M., Nadezhin S. S., Tretyakov I. V.* Vliyaniye dlitelnosti i chastoty prilozheniya nagruzki na napryazhenno-deformirovannoye sostoyaniye puti // Vestnik VNIIZhT. 2018. Т. 77, № 6. С. 364–367.

3. *Мейз Дж.* Теория и задачи механики сплошных сред. М.: Мир, 1974.  
*Meiz Dzh.* Teoriya i zadachi mekhaniki sploshnykh sred. М.: Mir, 1974.

Статья поступила в редакцию 24.02.21.

---