УДК 530.12:531.51
DOI 10.53403/02340763_2022_1_3

О ВЕКТОРЕ ВЕЙЛЯ И ВЕЙЛЕВСКИХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ

С. Ю. Седов

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

Рассмотрено понятие геодезической в общем пространстве Вейля и в вейлевской гравитации. Обсуждается идея переменной массы и ее интерпретация в вейлевской гравитации.

Вейлевская геометрия приводит к двум типам геодезических линий – инвариантным и ковариантным. Ковариантные геодезические можно интерпретировать как экстремали действия для точечной частицы с переменной массой. Соответственно, уравнения свободного движения для точечной частицы в вейлевской геометрии содержат дополнительный член, который можно назвать вейлевской силой.

Рассмотрен вопрос о том, как совместить такую интерпретацию со стандартной физикой, избежав парадоксального эффекта вторых часов. Предложено два варианта: 1) неинтегрируемый вектор Вейля имеет малую норму на макроскопических масштабах и меняется хаотически, так что усреднение по векторному полю приводит лишь к стохастизации движения частицы; 2) ненулевое значение вектора Вейля имеет место только в области малых масштабов, в аналогах вихревых колец.

Ключевые слова: геометрия Вейля, связность Вейля, вектор Вейля, вейлевская гравитация.

Введение

В последние годы рассматриваются различные варианты применения вейлевской локальной масштабной симметрии к гравитации. Идеи Вейля, сформулированные в начале 20 века [1], продолжают интенсивно обсуждаться и в 21 веке, сто лет спустя. В качестве относительно недавних примеров сошлемся на публикации [2, 3].

Особенно актуальна идея вейлевской симметрии в космологии, в которой физика частиц объединяется с альтернативными теориями гравитации. Поскольку логически последовательной теории квантовой гравитации нет, то такое, феноменологическое по существу, объединение разнородных областей физики названо нами гибридным [4].

Есть методические вопросы, относящиеся к пространству Вейля, которые в физической литературе изложены, на наш взгляд, недостаточно ясно. В этой публикации рассмотрим некоторые аспекты определения геодезических в пространстве Вейля. Рассмотрим также понятие массы точечной частицы и понятие силы в вейлевской гравитации.

1. Основы вейлевской геометрии

Геометрия Вейля изложена в физической литературе достаточно подробно (см., например, [1, 5, 6–8]). Здесь мы рассмотрим только основные понятия.

Объектом изучения в вейлевской геометрии является дифференцируемое многообразие M с заданной билинейной невырожденной дифференциальной 2-формой (метрической функцией) g и дифференциальной 1-формой A. Этот геометрический объект называется пространством Вейля, его можно обозначить как (M, g, A). Для определенности следует задать конкретную сигнатуру метрики g. Новым по сравнению с римановой геометрией является введение дополнительной 1-формы A. Эта 1-форма является замкнутой, если $dA = 0$, и точной, если существует такая 2-форма σ, что $A = d\sigma$. Здесь d – оператор внешнего дифференцирования. Проще говоря, точная форма A соответствует случаю, когда вектор A_α представим как градиент некоторого скаляра $A_\alpha = \dfrac{\partial\varphi(x)}{\partial x^\alpha}$. Замкнутая форма соответствует случаю, когда $F_{\alpha\beta} = \dfrac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha} - \dfrac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta} \equiv 0$. В общем случае вейлевской геометрии A не является замкнутой формой.

Вейлевское (локальное масштабное) преобразование задано соотношениями:

$$g \to \tilde{g} = \Omega^2 g,\ \ A \to \tilde{A} = A - d\log\Omega, \qquad (1)$$

где Ω – строго положительная дифференцируемая вещественная функция. В координатном виде эти преобразования выглядят так:

$$g_{\mu\nu}(x) \to \tilde{g}_{\mu\nu}(x) = \Omega^2(x) g_{\mu\nu}(x),\ \ \Omega(x) = \exp(\sigma(x)), \quad (2)$$

$$A_\mu \to \tilde{A}_\mu = A_\mu - \frac{\partial\sigma}{\partial x^\mu} = A_\mu - \nabla_\mu\sigma,\ \ \sigma = \ln\Omega(x). \quad (3)$$

Здесь преобразованные величины обозначаются волнистой чертой вверху. Коэффициенты вейлевской связности $\breve{\Gamma}$ определяются с помощью метрики $g_{\alpha\beta}(x)$ и вектора Вейля $A_\nu(x)$. В координатном виде они выглядят следующим образом [6–9]:

$$\breve{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\alpha}\left(\breve{\partial}_\mu g_{\alpha\nu} + \breve{\partial}_\nu g_{\alpha\mu} - \breve{\partial}_\alpha g_{\mu\nu}\right) = \\ = \Gamma^\lambda_{\mu\nu} + \delta^\lambda_\mu A_\nu + \delta^\lambda_\nu A_\mu - g_{\mu\nu}A^\lambda, \qquad (4)$$

где

$$\breve{\partial}_\mu g_{\alpha\beta} = \left(\partial_\mu + 2A_\mu\right) g_{\alpha\beta}, \qquad (5)$$

$$\left\{\begin{matrix}\lambda \\ \mu\,\nu\end{matrix}\right\} = \Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\alpha}\left(\partial_\mu g_{\alpha\nu} + \partial_\nu g_{\alpha\mu} - \partial_\alpha g_{\mu\nu}\right) \quad (6)$$

– обычные символы Кристоффеля связности Леви-Чивита. Выпуклой чертой вверху («шляпкой») обозначены вейлевские аналоги величин римановой геометрии. Обычная ковариантная производная ∇_λ произвольного тензора $B_{\mu\nu}$ в римановом пространстве имеет вид:

$$\nabla_\lambda B_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\lambda} B_{\mu\nu} - \Gamma^\alpha_{\lambda\mu} B_{\alpha\nu} - \Gamma^\alpha_{\lambda\nu} B_{\mu\alpha}. \qquad (7)$$

В случае вейлевской ковариантной производной для произвольного тензора $B_{\mu\nu}$ по аналогии с римановым случаем имеем:

$$\breve{\nabla}_\lambda B_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\lambda} B_{\mu\nu} - \breve{\Gamma}^\alpha_{\lambda\mu} B_{\alpha\nu} - \breve{\Gamma}^\alpha_{\lambda\nu} B_{\mu\alpha}, \qquad (8)$$

поэтому для метрического тензора получаем:

$$\breve{\nabla}_\lambda g_{\alpha\beta} = -2A_\lambda g_{\alpha\beta}. \qquad (9)$$

Аналогично определяется $\breve{\nabla}_\lambda$ в общем случае с заменой связности Леви-Чивита на вейлевскую: Γ на $\breve{\Gamma}$.

Для риманова пространства имеет место условие метричности

$$\nabla_\lambda g_{\alpha\beta} = 0. \qquad (10)$$

Вейлевское многообразие неметрическое вследствие наличия соотношения (9). Рассматривают также и другие неметрические пространства аффинной связности, например, пространства с кручением [10], но они здесь не понадобятся. Как видно из выражений (2), (3), вектор Вейля A отвечает за локальные масштабные преобразования.

Вейлевским весом геометрической величины H называют число $k = W(H)$, которое является степенью в вейлевском преобразовании:

$$H \to \tilde{H} = \Omega^k H. \qquad (11)$$

Можно определить вейлевскую инвариантную производную метрического тензора $g_{\alpha\beta}$ с вейлевским весом $W = 2$:

$$\breve{D}_\mu g_{\alpha\beta} = \left(\breve{\nabla}_\mu + W(g_{\alpha\beta})A_\mu\right) g_{\alpha\beta} = 0. \qquad (12)$$

Это соотношение является аналогом соотношения метричности $\nabla_\mu g_{\alpha\beta} = 0$ в римановой геометрии.

В общем виде для скаляра h, вектора h_α и тензора $h_{\alpha\beta}$ вейлевские ковариантные производные определяются так:

$$\breve{\partial}_\mu h = \partial_\mu h + W(h) A_\mu h, \qquad (13)$$

$$\breve{D}_\mu h(x) = \left[\breve{\nabla}_\mu + W(h)A_\mu\right] h(x) = \breve{\partial}_\mu h(x), \qquad (14)$$

$$\breve{D}_\mu h_\alpha \equiv \left[\breve{\nabla}_\mu + W(h_\alpha)A_\mu\right] h_\alpha, \qquad (15)$$

$$\breve{D}_\mu h_{\alpha\beta} \equiv \left[\breve{\nabla}_\mu + W(h_{\alpha\beta})A_\mu\right] h_{\alpha\beta}. \qquad (16)$$

Величины (11), преобразующиеся с вейлевским весом W, называют вейлевски ковариантными, а если $W(H) = 0$, то вейлевски инвариантными. В частности, действие для вейлевской гравитации S_g должно быть вейлевски инвариантным: $\tilde{S}_g = S_g$. Соответственно, лагранжиан гравитации L_g должен быть вейлевски ковариантным с весом $W(L_g) = -4$, так как

$$W\left(\sqrt{|\det g|}\right) = 4, \tag{17}$$

и

$$S_g = \int d^4x \sqrt{|\det g|} L_g. \tag{18}$$

Отметим, что с точностью до вейлевского преобразования (M, g, A) и $(M, \tilde{g}, \tilde{A})$ совпадают, т. е. локальное масштабное преобразование не меняет пространство Вейля. Все экземпляры $(M, \tilde{g}, \tilde{A})$ равнозначны. Их объединяют в класс эквивалентности по отношению к калибровке Ω.

В связи с определением пространства Вейля (M, g, A) заметим здесь, что физическое пространство-время (M, g_1, A_1) уникально по отношению к выбору калибровки, то есть среди набора всех вейлевских эквивалентных экземпляров из класса (M, g, A) выделен один экземпляр при фиксировании калибровочной функции $\Omega = \Omega_1$. По этому поводу будем говорить, что произошло нарушение вейлевской инвариантности. Такое нарушение связано с тем, что в физической гравитации четко определены масштабы времени расстояния и массы. Характерными единицами обычно служат планковская длина, планковское время и планковская масса.

Отметим, что, когда в объекте (M, g, A) A является точной 1-формой, можно подобрать калибровку Ω такую, что $\tilde{A}_\mu$ обратится в нуль на всем пространстве M:

$$A_\mu \to \tilde{A}_\mu = A_\mu - \frac{\partial \sigma}{\partial x^\mu} = 0. \tag{19}$$

Такое вейлевское пространство называется интегрируемым вейлевским пространством. Для интегрируемого вейлевского пространства $A = d\sigma$, а калибровка Ω, приводящая к $\tilde{A}_\mu = 0$, называется эйнштейновской. Объект $(M, g, d\sigma)$ в литературе называют IWG (Integrable Weylian Geometry, [6–8]) или WIST (Weyl Integrable SpaceTime, см. [11]). При выборе конкретной эйнштейновской калибровки получается конкретный экземпляр риманова пространства. Таким образом, интегрируемое вейлевское пространство представляет собой класс эквивалентности различных римановых пространств, находящихся в конформном соответствии между собой. Оно характеризуется единственной, инвариантной к выбору калибровки, вейлевской связностью $\breve{\Gamma}$ в отличие от римановых экземпляров с различными связностями Леви-Чивита Γ.

В литературе вектор Вейля A у разных авторов определяется с точностью до знака и с точностью до множителя 2. Кроме того, сигнатура метрики g также выбирается по-разному, как $(-,+,+,+)$ и как $(+,-,-,-)$. Выберем здесь последнюю сигнатуру. Она соответствует выбору в [12–15]. Кривизна R, тензор Риччи $R_{\alpha\beta}$ и тензор кривизны $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ также определяются различным образом с точностью до знака. Так, например, тензор кривизны в [12–15] имеет обратный знак в сравнении с выражением для него, приведенным в [16]. Тензор Риччи в [13, 15] имеет обратный знак по сравнению с выражением из [12, 14, 16]. Мы будем придерживаться, в основном, соглашений [14]:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = g_{\alpha\rho} R^{\rho}{}_{\beta\gamma\delta}, \quad R_{\mu\nu} = R_{\mu\alpha\nu}{}^{\alpha} = R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu},$$
$$R = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}. \tag{20}$$

Вейлевский тензор кривизны определяется аналогично случаю римановой геометрии:

$$R_{\mu\nu\rho}{}^{\alpha} = \partial_\nu \Gamma^{\alpha}_{\mu\rho} - \partial_\mu \Gamma^{\alpha}_{\nu\rho} + \Gamma^{\alpha}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\mu\rho} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\rho}, \tag{21}$$

$$\breve{R}_{\mu\nu\rho}{}^{\alpha} = \partial_\nu \breve{\Gamma}^{\alpha}_{\mu\rho} - \partial_\mu \breve{\Gamma}^{\alpha}_{\nu\rho} + \breve{\Gamma}^{\alpha}_{\nu\lambda}\breve{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\rho} - \breve{\Gamma}^{\alpha}_{\mu\lambda}\breve{\Gamma}^{\lambda}_{\nu\rho}, \tag{22}$$

$$\breve{R} = R - 6\nabla A - 6A^2. \tag{23}$$

Приведем выражение для тензора Эйнштейна $\breve{G}_{\mu\nu} = \breve{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \breve{R}$ из [17]:

$$\breve{G}_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} + 2A_\mu A_\nu + g_{\mu\nu}A^2 + 2g_{\mu\nu}\nabla A - 3\nabla_\mu A_\nu + \nabla_\nu A_\mu. \tag{24}$$

Если к этому выражению прибавить антисимметричный тензор

$$F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu, \tag{25}$$

получим

$$\breve{G}'_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} + 2A_\mu A_\nu + g_{\mu\nu}A^2 + 2g_{\mu\nu}\nabla A - 2\nabla_\mu A_\nu. \tag{26}$$

2. Геодезические в пространстве Вейля

Геодезические линии $\gamma(t)$ в пространстве Вейля, как и в пространстве Римана определяют условием, что касательные векторы должны переноситься параллельно самим себе. Автопараллельные инвариантные геодезические в пространстве Вейля определяются соотношениями, аналогичными римановым геодезическим, но с заменой связности Леви-Чивита Γ на вейлевскую связность $\breve{\Gamma}$:

$$\breve{\nabla}_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = 0, \;\; \ddot{\gamma}^\lambda + \breve{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu} \cdot \dot{\gamma}^\mu \dot{\gamma}^\nu = 0, \;\; \dot{\gamma}^\alpha = \frac{dx^\alpha}{dt}, \tag{27}$$

где t – аффинный вейлевский инвариантный параметр кривой γ. Действительно, применяя формулу параллельного переноса к касательному вектору $\dot{\gamma}^{\alpha}$ в пространстве Вейля, имеем:

$$d\left(\frac{dx^{\alpha}}{dt}\right) = -\breve{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma}\frac{dx^{\beta}}{dt}dx^{\gamma}, \qquad (28)$$

откуда и вытекают соотношения (27). Эти геодезические в пространстве Вейля не являются линиями со стационарным расстоянием, так как при параллельном перенесении не сохраняется длина вектора. Отметим, что на кривой $\gamma(t)$

$$\frac{d}{dt}\left(dx^{\alpha}dx_{\alpha}\right) = -\left(dx^{\alpha}dx_{\alpha}\right)\left(2A_{\beta}\frac{dx^{\beta}}{dt}\right), \qquad (29)$$

что согласуется с выражением $\breve{\nabla}_{\lambda}g_{\alpha\beta} = -2A_{\lambda}g_{\alpha\beta}$. Длины геодезических зависят от калибровки в силу соотношения (29).

При вейлевских преобразованиях вейлевская связность инвариантна:

$$\breve{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu} \to \tilde{\breve{\Gamma}}^{\lambda}_{\mu\nu} = \breve{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu}, \qquad (30)$$

и для инвариантных вейлевских геодезических [6]

$$\dot{L}_t = \sqrt{g_{\alpha\beta}\dot{\gamma}^{\alpha}\dot{\gamma}^{\beta}} \to \tilde{\dot{L}}_t = \Omega\dot{L}_t, \quad W\left(\dot{L}_t\right) = 1,$$
$$\gamma(t) \to \tilde{\gamma}(t) = \gamma(t). \qquad (31)$$

Введем 4-скорость u. Для нее имеют место соотношения:

$$u^{\alpha} = \frac{dx^{\alpha}}{ds}, \quad ds = \sqrt{\left|g_{\alpha\beta}dx^{\alpha}dx^{\beta}\right|}, \quad \left|u_{\alpha}u^{\alpha}\right| = 1,$$
$$W(u) = -1. \qquad (32)$$

Можно определить вейлевскую ковариантную геодезическую $\gamma(s)$ на основе выражения:

$$\breve{D}_u u^{\lambda} = du^{\lambda} + \breve{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu}u^{\mu}dx^{\nu} + W(u)\left(A_{\mu}dx^{\mu}\right)u^{\lambda} =$$
$$= du^{\lambda} + \breve{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu}u^{\mu}dx^{\nu} - \left(A_{\mu}dx^{\mu}\right)u^{\lambda} = 0. \qquad (33)$$

Такая ковариантная геодезическая, определена как решение уравнения (33) с учетом конкретной параметризации (32) [6]. При вейлевском преобразовании:

$$\dot{L}_s = \sqrt{\left|g_{\alpha\beta}u^{\alpha}u^{\beta}\right|} = 1 \to \tilde{\dot{L}}_s = \sqrt{\left|\tilde{g}_{\alpha\beta}\tilde{u}^{\alpha}\tilde{u}^{\beta}\right|} = 1,$$
$$W\left(\dot{L}_s\right) = 0. \qquad (34)$$

Для такой ковариантной геодезической можно определить соответствующую связность [6]:

$$\breve{\breve{\Gamma}}^{\lambda}_{\mu\nu} = \breve{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\delta^{\lambda}_{\nu}A_{\mu} - \frac{1}{2}\delta^{\lambda}_{\mu}A_{\nu} =$$
$$= \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\delta^{\lambda}_{\nu}A_{\mu} + \frac{1}{2}\delta^{\lambda}_{\mu}A_{\nu} - g_{\mu\nu}A^{\lambda}, \qquad (35)$$

так что уравнение ковариантной геодезической $\gamma(s)$ принимает вид:

$$\breve{D}_u u^{\lambda} = du^{\lambda} + \breve{\breve{\Gamma}}(A)^{\lambda}_{\mu\nu}u^{\mu}dx^{\nu} = 0. \qquad (36)$$

Итак, для пространства Вейля существует два определения геодезических линий – инвариантные геодезические (27) и ковариантные геодезические (33). Вейлевские инвариантные геодезические заданы уравнениями:

$$\breve{u}^{\nu} = \frac{dx^{\nu}}{dt}, \quad \breve{u}^{\nu}\breve{\nabla}_{\nu}\,\breve{u}^{\mu} = 0, \qquad (37)$$

а вейлевские ковариантные геодезические – уравнениями

$$u^{\nu} = \frac{dx^{\nu}}{ds}, \quad \frac{\breve{D}_u u^{\mu}}{ds} = 0, \quad ds = \sqrt{\left|g_{\alpha\beta}dx^{\alpha}dx^{\beta}\right|}. \qquad (38)$$

Отметим, что они отличаются параметризацией, но на многообразии M множества инвариантных и ковариантных геодезических совпадают [6]

$$\{\gamma(t)\} = \{\gamma(s)\}, \qquad (39)$$

так как

$$\left(\breve{\breve{\Gamma}}^{\lambda}_{\mu\nu} - \breve{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu}\right)u^{\mu}u^{\nu} = -\left(A_{\mu}dx^{\mu}\right)u^{\lambda} \sim u^{\lambda}. \qquad (40)$$

Длины геодезических, определяемые с помощью соотношения

$$L_{\gamma} = \int_{\gamma} ds = \int_{\gamma}\sqrt{\left|g_{\alpha\beta}dx^{\alpha}dx^{\beta}\right|}, \qquad (41)$$

зависят от калибровки Ω. Но можно определить вейлевскую инвариантную длину геодезической $\breve{L}(\gamma)$ посредством соотношения [6]

$$\breve{L}^2(\gamma) = \int_{\gamma[x_0,x_1]} \exp\left(2\int_{\gamma[x_0,x]\subset\gamma[x_0,x_1]} A_{\alpha}dx^{\alpha}\right)ds^2. \quad (42)$$

Экспоненциальный множитель, зависящий от вектора Вейля A, компенсирует изменение длины кривой при перенесении ее масштаба вдоль γ.

3. Движение свободной частицы в геометрии Вейля

Рассмотрим материальную точку с массой m. В общей теории относительности (ОТО) свободное движение точки (пробной массы) выводится из вариации действия [12]:

$$S_m = -\int m_0 c ds, \tag{43}$$

и при этом получается уравнение геодезической в римановом пространстве:

$$\frac{du^\lambda}{ds} + \Gamma^\lambda_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = 0. \tag{44}$$

Какой аналог этого действия в вейлевской геометрии? В вейлевской геометрии масштаб длины L_m при переносе по некоторой кривой γ меняется по соотношению:

$$dL_m = -\left(A_\beta dx_\beta\right) L_m. \tag{45}$$

Так как частица точечная, то ее размер при движении не может меняться, а меняться может только масса $m \sim \dfrac{1}{L_m}$ вследствие свойств геометрии Вейля. Поэтому считаем, что переменная масса m при параллельном переносе материальной частицы вдоль геодезической γ вейлевского пространства меняется как

$$m(\gamma) = m_0 \exp\left(\int_\gamma A_\alpha dx^\alpha\right). \tag{46}$$

Таким образом, аналог действия для точечной частицы в случае геометрии Вейля возьмем в виде:

$$\breve{S}_m = -\int mcds = -\int m_0 c \exp\left(\int_{\gamma[x_0,x]} A_\lambda dx^\lambda\right) ds = \\ = -m_0 c \int \mathrm{d}\breve{s}, \tag{47}$$

где

$$\mathrm{d}\breve{s} = \sqrt{\psi^2(x)\left|g_{\alpha\beta}(x) dx^\alpha dx^\beta\right|}, \\ \psi(x) = \exp\left(\int_{\gamma(x_0,x)} A_\lambda dx^\lambda\right). \tag{48}$$

Такое определение вейлевского инвариантного действия S_m для материальной точки соответствует определению (42) вейлевской инвариантной длины геодезической $\breve{L}$, когда изменение масштаба длины для интервала ds компенсируется соответствующим множителем ψ, зависящим от вектора Вейля A.

Рассмотрим вариацию $\mathrm{d}\breve{s}^2$. Воспользуемся методом решения задачи о вычислении геодезической в ОТО (см. например, [12], с. 320):

$$\delta\left(\mathrm{d}\breve{s}^2\right) \sim dx^\alpha dx^\beta \frac{\partial(\psi^2 g_{\alpha\beta})}{\partial x^\gamma}\delta x^\gamma + 2g_{\alpha\beta}\psi^2 dx^\alpha d\delta x^\beta. \tag{49}$$

Итак,

$$\delta S = -m_0 c \int \mathrm{d}\breve{s}\left[\frac{1}{2}\frac{dx^\alpha}{\mathrm{d}\breve{s}}\frac{dx^\beta}{\mathrm{d}\breve{s}}\frac{\partial(\psi^2 g_{\alpha\beta})}{\partial x^\gamma}\delta x^\gamma - \frac{d}{\mathrm{d}\breve{s}}\left(\psi^2 g_{\alpha\gamma}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\right)\delta x^\gamma\right]. \tag{50}$$

Полагая вариацию $\delta\left(\mathrm{d}\breve{s}\right) = 0$, $\breve{u}^\beta = \dfrac{dx^\beta}{\mathrm{d}\breve{s}}$ и $\dfrac{d}{\mathrm{d}\breve{s}} = \breve{u}^\beta \dfrac{\partial}{\partial x^\beta}$, получаем:

$$\frac{1}{2}\breve{u}^\alpha\breve{u}^\beta\psi^2\left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} + 2A_\gamma\right) - \psi g_{\alpha\gamma}\frac{d\breve{u}^\alpha}{\mathrm{d}\breve{s}} - \\ -\psi^2\breve{u}^\alpha\breve{u}^\beta\left(\frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta} + 2A_\beta\right) = 0. \tag{51}$$

С учетом равенства

$$\breve{u}^\alpha\breve{u}^\beta\left(\frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta} + 2A_\beta\right) = \\ = \frac{1}{2}\breve{u}^\alpha\breve{u}^\beta\left(\frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha} + 2A_\beta + 2A_\alpha\right), \tag{52}$$

сокращая (51) на ψ^2 и поднимая индекс γ умножением выражения (51) на $g^{\lambda\gamma}$, получаем выражение:

$$\frac{d\breve{u}^\nu}{\mathrm{d}\breve{s}} + \breve{u}^\alpha\breve{u}^\beta\left[\frac{1}{2}g^{\lambda\gamma}\left(\partial_\alpha g_{\gamma\beta} + \partial_\beta g_{\gamma\alpha} - \partial_\gamma g_{\alpha\beta}\right) + \delta^\lambda_\alpha A_\beta + \delta^\lambda_\beta A_\alpha - g_{\alpha\beta}A^\lambda\right] = 0. \tag{53}$$

Итак, линия движения частицы с переменной массой m задается уравнением вейлевской инвариантной геодезической (27):

$$\frac{d\breve{u}^\lambda}{\mathrm{d}\breve{s}} + \breve{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}\breve{u}^\mu\breve{u}^\nu = 0. \tag{54}$$

Введем 4-скорость $u^\lambda = \dfrac{dx^\lambda}{ds}$. Учтя связь производных

$$\frac{d}{ds} = \psi\frac{d}{\mathrm{d}\breve{s}} \tag{55}$$

и выражение для ψ из (48), получаем уравнение для вейлевской ковариантной геодезической:

$$\frac{du^\lambda}{ds} + \breve{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}u^\mu u^\nu - \left(A_\alpha u^\alpha\right)u^\lambda = 0, \tag{56}$$

или

$$\frac{du^\lambda}{ds} + \breve{\breve{\Gamma}}^\lambda_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = 0. \tag{57}$$

Это уравнение совпадает с уравнением (33). В зависимости от использованной параметризации (инвариантной) $\breve{s}$ или (ковариантной) s получаются два различных уравнения (54) и (56), описывающие один и тот же набор кривых.

Рассмотрим 4-импульс $p^{\lambda} = mcu^{\lambda}$. Его производная удовлетворяет соотношению

$$\frac{dp^{\lambda}}{ds} = mc\frac{du^{\lambda}}{ds} + mcu^{\lambda}\left(A_{\alpha}u^{\alpha}\right). \qquad (58)$$

При этом

$$\frac{d(p^{\lambda}p_{\lambda})}{ds} = \frac{d\left(m^2c^2\right)}{ds} = m^2c^2\left(2A_{\nu}x^{\nu}\right), \qquad (59)$$

и на петле происходит изменение Δm массы материальной точки:

$$\Delta m = m_0 \exp\left(\oint A_{\alpha}dx^{\alpha}\right). \qquad (60)$$

Изменение 4-импульса вдоль ковариантной геодезической пространства Вейля, как это следует из (58), удовлетворяет равенству

$$\frac{dp^{\lambda}}{ds} - mc\frac{du^{\lambda}}{ds} - mcu^{\lambda}\left(A_{\alpha}u^{\alpha}\right) = 0, \qquad (61)$$

то есть на ковариантной геодезической линии (56) выполняется уравнение для 4-импульса с переменной массой:

$$\frac{dp^{\lambda}}{ds} + \frac{1}{mc}\breve{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu}p^{\mu}p^{\nu} - \frac{2}{mc}p^{\lambda}\left(A_{\alpha}p^{\alpha}\right) = 0. \qquad (62)$$

Отметим, что в литературе имеется достаточно много вариантов гравитации для случая интегрируемой геометрии Вейля. Так, например, в публикации [20] рассматривался вопрос о переменной массе и геодезических в интегрируемой вейлевской геометрии, и их анализ согласуется с нашим. В [20] утверждается, что масса – переменная величина в вейлевской гравитации. Импульс в [20] определяется как

$$p^{\mu} = m(\varphi)\frac{dx^{\mu}}{ds}, \qquad (63)$$

а уравнение для импульса имеет вид:

$$\frac{dp^{\mu}}{ds} + \breve{\Gamma}^{\mu}_{\sigma\lambda}\frac{dx^{\sigma}}{ds}p^{\lambda} - \partial_{\lambda}\varphi\frac{dx^{\lambda}}{ds}p^{\mu} = 0, \qquad (64)$$

что согласуется с нашим выражением (62) для случая интегрируемого вектора Вейля $\partial_{\lambda}\varphi = 2A_{\lambda}$, где $\varphi = \varphi(x)$ – скалярное поле.

В работе [21] используются вейлевские ковариантные геодезические, которые у нас определены выражением (56). В [13, 15, 22] вводится переменная масса: $m = m_0\beta$, где $\beta(x)$ – поле Дирака, так что совпадение с нашим выражением (56) достигается только при $\frac{\beta^{\alpha}}{\beta} = A^{\alpha}$, т. е., опять же в случае интегрируемого вектора Вейля. Отметим, что у Дирака [15] действие для свободной частицы в геометрии Вейля выбрано в виде

$$I_1 = -m_0\int\beta ds. \qquad (65)$$

Соответственно, введенные Дираком геодезические свободного движения частицы имеют вид [15] (инвариантные геодезические Дирака):

$$\frac{d\left(m_0\beta u^{\mu}\right)}{ds} + \Gamma^{\mu}_{\rho\sigma}u^{\rho}u^{\sigma} - m_0\beta^{\mu} = 0, \qquad (66)$$

что соответствует нашему выражению (62) только в случае $A^{\alpha} = \frac{\beta^{\alpha}}{\beta}$ и $m = m_0\beta(x)$, т. е. в случае интегрируемого пространства Вейля. Такое определение геодезических линий не соответствует геометрическому определению ковариантных геодезических (33) в случае общего пространства Вейля. Отметим, тем не менее, что Дирак в своей теории гравитации [15] использует неинтегрируемый вектор Вейля с ненулевой напряженностью поля вектора Вейля.

В публикации [3] действие для свободной частицы до нарушения конформной инвариантности записывается в виде:

$$S = \frac{1}{2}\int dt\left[\frac{1}{\lambda}\frac{dx^{\mu}}{dt}\frac{dx_{\mu}}{dt} - m_0^2\lambda\right]. \qquad (67)$$

При этом до нарушения конформности в [3] полагается $m_0 = 0$. Здесь λ – лагранжевый множитель, который при вейлевских преобразованиях ведет себя как $\lambda \to \tilde{\lambda} = \Omega^2\lambda$. Отметим, что t –произвольный параметр. После нарушения вейлевской инвариантности для действия частицы авторы [3] используют другое выражение, совпадающее с принятым в ОТО:

$$S = -m_0\int dt\sqrt{-\dot{x}^{\mu}\dot{x}_{\mu}}, \qquad (68)$$

что дает уравнение движения свободной частицы как в ОТО, если не учитывать специфического вейлевского заряда частицы:

$$\ddot{x}^{\mu} + \Gamma^{\mu}_{\nu\rho}\dot{x}^{\nu}\dot{x}^{\rho} = 0. \qquad (69)$$

На наш взгляд, подход, примененный в [3], логически непоследователен. Если после нарушения конформной инвариантности в лагранжиане учитывается ненулевой вектор Вейля, то он должен учитываться и в уравнениях для геодезической, т. е., в уравнениях для движения свободной частицы.

Итак, даже при наличии, вообще говоря, неинтегрируемого вектора Вейля в своей модели, авторы [3, 13, 15] предпочитают не использовать вектор Вейля в уравнении движения свободной частицы, несмотря на то, что он входит в вейлевскую связность (4). Вместо этого в [15], к примеру, используется функция Дирака $\beta(x)$.

4. Вейлевская сила в геометрии Вейля

До нарушения конформной инвариантности гравитации масштабы длины и массы в вейлевской геометрии не заданы, поэтому изменение массы на классическом уровне рассмотрения допустимо в вейлевской модели гравитации.

Вейлевская гравитация рассматривается во многих публикациях для случая интегрируемого вектора Вейля (см., например, [20]). Можно считать, что у элементарных частиц изначально была нулевая масса, а ненулевое ее значение возникает уже после нарушения вейлевской симметрии, как, например, принято в [3]. Можно упомянуть также соображения Р. Пенроуза в [17] о конформной стадии развития вселенной в связи с его идеей о переменной массе частиц. Когда энергия частиц крайне велика, массой покоя можно пренебречь.

Необычные свойства геометрии Вейля в неинтегрируемом случае вызвало у Эйнштейна возражение, см. для примера обсуждение Паули в [5], которое получило название «эффекта вторых часов». Действительно, если перенести часы вдоль замкнутой траектории (петли), вернув в прежнюю точку, то скорость их хода изменится по сравнению с теми, которые не перемещались. Масса элементарной частицы при обходе вдоль петли изменится тоже. Это противоречит представлениям стандартной физики. Если же вектор Вейля интегрируемый, то на петле изменение массы равно нулю.

Дискуссионным выглядит вопрос о возможности использования неинтегрируемого вектора Вейля после нарушения конформной инвариантности. Наличие такого вектора – экзотическая ситуация. Но в связи с примерами использования вектора Вейля в лагранжианах с неминимальной связью скалярного поля с гравитацией (см. для примера публикации [3, 13, 18, 19]) такой вопрос достаточно актуален, хотя бы с методической точки зрения.

Для одной частицы, движущейся в поле вектора Вейля с нулевым вейлевским зарядом в случае ковариантных геодезических имеем уравнения:

$$\frac{du^\lambda}{ds}+\Gamma^\lambda_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = A^\lambda-\left(A_\alpha u^\alpha\right)u^\lambda=0, \qquad (70)$$

$$\frac{dp^\lambda}{ds}+\frac{1}{mc}\Gamma^\lambda_{\mu\nu}p^\mu p^\nu = mcA^\lambda. \qquad (71)$$

Сравнивая выражения (70) и (71) с соответствующими выражениями ОТО (т. е., при $A^\lambda \equiv 0$), мы видим, что наличие вектора Вейля приводит к наличию специфической вейлевской силы. Причем, как это следует из (59), действие этой силы приводит к изменению массы частицы. В нерелятивистском случае изменение импульса мы могли бы записать так:

$$\Delta\vec{p}=\Delta\left(m\vec{v}\right)=m\Delta\vec{v}+\Delta m\vec{v}, \qquad (72)$$

то есть импульс частицы меняется не только за счет изменения скорости, но и за счет изменения массы.

Отметим, что из-за ненулевой напряженности вектора Вейля имеется еще одна сила, связанная с вектором Вейля, которая полностью аналогичная силе, действующей на электрический заряд в электромагнитном поле. Эта сила связана с ненулевым вейлевским зарядом частицы q_W, если таковой у нее есть. Отметим, что этот заряд – особый и не совпадает с электрическим зарядом q. Тогда к действию для свободной частицы (47) надо добавить член

$$S_q=-q_W\int ds A_\mu\frac{dx^\mu}{ds}, \qquad (73)$$

что дает выражение для изменения импульса

$$\frac{dp^\lambda}{ds}+\frac{1}{mc}\Gamma^\lambda_{\mu\nu}p^\mu p^\nu = mcA^\lambda+q_W F^\lambda_\mu\frac{dx^\mu}{ds}, \qquad (74)$$

где

$$F_{\mu\nu}=\nabla_\mu A_\nu-\nabla_\nu A_\mu. \qquad (75)$$

Сила $q_W F^\lambda_\mu\dfrac{dx^\mu}{ds}$, действующая на частицу вследствие вейлевского заряда, не меняет массы частицы.

С неинтегрируемым случаем вектора Вейля авторы статей по вейлевской гравитации по понятным причинам (возражения Эйнштейна) предпочитают не иметь дело, но мы рассматриваем здесь именно этот любопытный вариант. В связи с ним возникает вопрос – как можно было бы обойти эффект «вторых часов»?

Способ 1. Стохастизация поля вектора Вейля. Пусть влияние случайного векторного поля

Вейля A^{λ} на движение частицы достаточно мало, а само поле A^{λ} не имеет выделенных направлений и изотропно. Будем исходить из уравнения движения частицы в соответствии с ковариантной вейлевской геодезической

$$du^{\mu} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} u^{\alpha} u^{\beta} ds = -\left[\left(A^{\alpha} u_{\alpha} \right) u^{\lambda} - A^{\lambda} \right] ds. \quad (76)$$

Рассмотрим величину

$$\xi^2 = -\left(A^{\lambda} - \left(A^{\alpha} u_{\alpha} \right) u^{\lambda} \right) \left(A_{\lambda} - \left(A^{\alpha} u_{\alpha} \right) u_{\lambda} \right) = \\ = \left(A^{\alpha} u_{\alpha} \right)^2 - A^{\lambda} A_{\lambda}. \quad (77)$$

Эта величина – инвариант. Пусть частица движется по стационарной траектории. В системе отчета покоящейся частицы, где $u^{\lambda} = (1,0,0,0)$, в окрестности частицы ξ^2 неотрицательна:

$$\xi^2 = \left(A^1 \right)^2 + \left(A^2 \right)^2 + \left(A^3 \right)^2 \geq 0, \quad (78)$$

поскольку

$$A^{\lambda} A_{\lambda} = \left(A^0 \right)^2 - \left(A^1 \right)^2 - \left(A^2 \right)^2 - \left(A^3 \right)^2. \quad (79)$$

Поэтому мы можем ввести вероятностное распределение нормального типа для случайной величины

$$\xi = \sqrt{-g_{\alpha\beta}(x) A^{\alpha}_{\perp}(x) A^{\beta}_{\perp}(x)}, \quad (80)$$

где

$$A^{\lambda}_{\perp} = A_{\lambda} - \left(A^{\alpha} u_{\alpha} \right) u^{\lambda}. \quad (81)$$

Плотность вероятности w запишем как:

$$w(\xi) = \frac{1}{\sigma^2 \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2\sigma^2} \right), \quad (82)$$

где σ^2 – дисперсия распределения случайной величины ξ.

Этот результат обобщается на случай произвольного движения частицы следующим образом. Вводится уравнение Ланжевена с собственным временем частицы $d\tau = ds$,

$$du^{\mu} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} u^{\alpha} u^{\beta} d\tau = \sigma A^{\mu}_{\perp} d\tau, \quad (83)$$

где

$$\left\langle A^{\lambda}_{\perp}(\tau) \right\rangle = 0, \ \left\langle A^{\lambda}_{\perp}(\tau_1) A_{\perp\mu}(\tau_2) \right\rangle = -\sigma^2 \delta^{\lambda}_{\mu} \delta\left(\tau_1 - \tau_2 \right). \quad (84)$$

Получили уравнение, описывающее броуновский процесс. Фактически, имеют место флуктуации около классической траектории ОТО.

Способ 2. Трубки из вейлонов. Предположим, что поле вектора Вейля при квантовании приводит к очень массивным частицам – вейлонам [4, 18, 24, 25]. Вейлоны взаимодействуют с обычными частицами на очень малых расстояниях. Рассмотрим нерелятивистское движение очень тяжелых вейлонов. Если вейлоны образуют структуры в виде замкнутых хаотически ориентированных трубок, то получается аналогия со сверхтекучими вихревыми линиями в гелии [26]. Более реалистично было бы рассмотреть модель вихревых нитей в виде аналогов вортонов [27]. В данном случае имеются в виду релятивистские вихревые кольца из вейлонов. При хаотической ориентации этих вортонов средний вклад в изменение массы частиц при пролете через область из вортонов нулевой. Если масса вейлона близка планковской массе, то процессы рассеяния частиц на вортонах существенны только на малых (планковских) расстояниях. Таким образом, эффект вторых часов на макроскопических расстояниях не наблюдается, а на малых (планковских) расстояниях частицы должны описываться квантовой теорией и могут менять массу дискретным образом, взаимодействуя с вейлонными вортонами – аналогами ротонов [26]. Эти процессы могли бы иметь место на ранней стадии существования Вселенной при очень высоких температурах.

5. Движение частицы по геодезической в цилиндрически симметричном гравитационном поле

Рассмотрим задачу о движении частицы в статическом гравитационном поле с учетом вектора Вейля. Пусть имеется в виду цилиндрическая симметрия. В цилиндрических координатах (t, r, φ, z) вектор Вейля зададим в виде

$$A = (0, A^r(r), A^{\varphi}(r), 0). \quad (85)$$

Рассмотрим движение частицы по геодезической в плоскости $z = 0$. В соответствии с выражением (56) получаем два уравнения:

$$\ddot{r} + \Gamma^{r}_{\sigma\nu} \frac{dx^{\sigma}}{ds} \frac{dx^{\nu}}{ds} - A^r + \left(A_r \dot{r} + A_{\varphi} \dot{\varphi} \right) \dot{r} = 0, \quad (86)$$

$$\ddot{\varphi} + \Gamma^{\varphi}_{\sigma\nu} \frac{dx^{\sigma}}{ds} \frac{dx^{\nu}}{ds} - A^{\varphi} + \left(A_r \dot{r} + A_{\varphi} \dot{\varphi} \right) \dot{\varphi} = 0. \quad (87)$$

Здесь

$$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{ds}, \ \dot{r} = \frac{dr}{ds}, \ \ddot{\varphi} = \frac{d^2\varphi}{ds^2}, \ \ddot{r} = \frac{d^2 r}{ds^2}, \ \dot{t} = \frac{dt}{ds}. \quad (88)$$

Можно рассмотреть изотропную статическую цилиндрическую метрику данной задачи в виде

$$ds^2 = \exp\left(\nu(r)\right)dt^2 - \exp\left(\lambda(r)\right)\left(dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2\right). \tag{89}$$

Здесь $\nu(r)$ и $\lambda(r)$ – две функции, которые находятся из решения уравнений для гравитации. Тогда

$$\ddot{r} + \Gamma^r_{t\,t}\dot{t}^2 + \Gamma^r_{\varphi\,\varphi}\dot{\varphi}^2 - A^r + \left(A_r\dot{r} + A_\varphi\dot{\varphi}\right)\dot{r} = 0, \tag{90}$$

$$\ddot{\varphi} - A^\varphi + \left(A_r\dot{r} + A_\varphi\dot{\varphi}\right)\dot{\varphi} = 0, \tag{91}$$

где $\Gamma^r_{\varphi\,\varphi}$ и $\Gamma^r_{\varphi\,\varphi}$ – функции только от r.

Итого есть два уравнения второго порядка, которые приводят к спиральной траектории движения пробной частицы.

Если $A_r \equiv 0$, то

$$\ddot{r} + \Gamma^r_{t\,t}\dot{t}^2 + \Gamma^r_{\varphi\,\varphi}\dot{\varphi}^2 + g_{\varphi\varphi}A^\varphi\dot{\varphi}\dot{r} = 0, \tag{92}$$

$$\ddot{\varphi} = A^\varphi\left(r\right)\left(1 - g_{\varphi\varphi}\dot{\varphi}^2\right) = A^\varphi g_{t\,t}\dot{t}^2. \tag{93}$$

Квадрат обычной 3-скорости частицы $\vec{v}$ находится из соотношения (при $c = 1$)

$$\vec{v}^2 = -\frac{g_{\varphi\varphi}\dot{\varphi}^2}{g_{tt}\dot{t}^2}, \tag{94}$$

тогда

$$\ddot{\varphi} = \frac{A^\varphi\left(r\right)}{1 - \vec{v}^2}. \tag{95}$$

Если в (92) положить $\dot{r} \equiv 0$, то

$$\Gamma^r_{t\,t}\dot{t}^2 + \Gamma^r_{\varphi\,\varphi}\dot{\varphi}^2 = 0, \tag{96}$$

откуда

$$\vec{v}^2 = \frac{g_{\varphi\varphi}\Gamma^r_{tt}}{\Gamma^r_{\varphi\,\varphi}} = \text{const}, \tag{97}$$

что противоречит (95). Таким образом, при $A^r \equiv 0$ и $A^\varphi\left(r\right) \neq 0$ реализуется спиральное движение (r и φ меняются у частицы в процессе движения).

Пусть теперь $A^\varphi \equiv 0$ и $A^r\left(r\right) \neq 0$. Эта задача подробно разобрана в [23]. Положим в (90) и (91) $\dot{r} \equiv 0$ и $A^\varphi \equiv 0$. Тогда $\ddot{\varphi} \equiv 0$. Это соответствует случаю интегрируемого вектора Вейля и стационарного движения по орбите с постоянным радиусом r. Величина 3-скорости кругового движения находится из (97). При этом z-компонента углового момента M – сохраняющаяся величина. Она находится так. Рассматривается лагранжиан пробной частицы с учетом поля Вейля [23]:

$$L = m_0 \exp\left(\int A_r dr\right)\sqrt{g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu}, \tag{98}$$

который приводит при $r = \text{const}$ к соотношению для углового момента:

$$M = -\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = m_0 \exp\left(\int_{r_0}^{r} A_r(r')dr'\right) g_{\varphi\,\varphi}\dot{\varphi} = \text{const}. \tag{99}$$

Заключение

Вейлевская геометрия приводит к двум типам геодезических линий – инвариантным и ковариантным. Ковариантные геодезические можно интерпретировать как экстремали действия для точечной частицы с переменной массой. Соответственно, уравнения свободного движения для точечной частицы в вейлевской геометрии содержат дополнительный член, который можно назвать вейлевской силой. Этот член просто меняет масштаб массы до нарушения конформной инвариантности, но после нарушения локальной конформной инвариантности приводит к реальному изменению массы физической частицы. Под нарушением конформной инвариантности мы имеем в виду выбор конкретного экземпляра пространства Вейля из класса эквивалентности по отношению к преобразованиям (1).

Подчеркнем, что вектор Вейля A^μ в отличие от электромагнитного потенциала, действует на частицу не только при наличии вейлевского заряда и ненулевой напряженности, но и сам по себе, через вейлевскую связность (4).

Некоторые авторы вместо вектора Вейля в геодезических используют градиент скалярной функции, несмотря на то, что в лагранжиане у них присутствует ненулевая напряженность вектора Вейля. На наш взгляд, это непоследовательно. Конечно, это позволяет избавиться от эффекта вторых часов, но не соответствует духу геометрии Вейля.

В неинтегрируемом случае вектора Вейля мы предложили два выхода. А именно: 1) неинтегрируемый вектор Вейля имеет малую норму на макроскопических масштабах и меняется хаотически, так что усреднение по векторному полю приводит лишь к некоторой стохастизации движения частицы; 2) ненулевое значение вектора Вейля имеет место только в области планковских масштабов, в аналогах вортонов – вихревых колец. При этом изменение массы у других частиц при взаимодействии с вейлевскими аналогами вортонов происходит дискретным образом.

Эти варианты вейлевской гравитации нуждаются в развитии. Следует показать, могут ли они быть реализованы в физике частиц таким образом, чтобы с одной стороны не противоречить надежно установленным экспериментальным фактам, а с другой – объяснить или предсказать новые эффекты.

Список литературы

1. Weyl, Hermann. *Space – Time – Matter.* Translated from the 4th German edition by H. Brose. London: Methuen. Reprint New York: Dover (1952).

2. Itzhak Bars, Paul Steinhardt, Neil Turok. *Local conformal symmetry in physics and cosmology. Physical Review D* . 2014. N89, P043515(1-15).

3. Marco de Cesare, John W. Moffat, and Mairi Sakellariadou. *Local conformal symmetry in non-Riemannian geometry and the origin of physical scales* //arXiv:1612.08066v2 [hep-th] 3 Sep 2017.

4. Седов С. Ю. *Вейлевская гравитация и вейлоны* // ВАНТ. Сер. Теор. и прикл. физика. 2019. Вып. 4. С. 14–24.

5. Pauli W. *Theory of relativity*. Pergamon Press. 1958.

6. Erhard Scholz. *Gauging the spacetime metric – looking back and forth a century later//* arXiv:1911.01696v1 [physics.hist-ph] 5 Nov 2019.

7. Erhard Scholz. *Weyl's scale gauge geometry in late 20th century physics.* Preprint submitted to: "*Beyond Einstein: Perspectives on Geometry, Gravitation, and Cosmology*", ed. David Rowe. Einstein Studies Basel: Birkhäuser. 2011. ArXiv:1111.3220 [gr-qc].

8. Erhard Scholz. *Paving the way for transitions - a case for Weyl geometry//* ArXiv:1206.1559v6 [gr-qc] 27 Jul 2015.

9. Jose Beltran Jimenez and Tomi S. Koivisto. *Extended Gauss-Bonnet gravities in Weyl geometry* //ArXiv:1402.1846v1 [gr-qc], 8 Feb 2014.

10. Бабурова О. В., Фролов Б. Н. *Математические основы современной теории гравитации:* Монография. М.: Прометей, 2012.

11. Carlos Romero. *Is Weyl unified theory wrong or incomplete?* //ArXiv:1508.03766v2 [gr-qc] 25 Aug 2015.

12. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Теория поля.* М.: Наука, 1988.

13. Rosen N. *Weyl's Geometry and Physics.* Foundation of physics. 1982. Vol. 12, N3. P. 213–235.

14. Вергелес С .Н. *Лекции по теории гравитации.* М.: МФТИ, 2001.

15. Dirac, P.A.M. *Long range forces and broken symmetries*//Proceedings of Royal Society London 1973. A. N 333.P 403–418.

16. Биррелл Н., Девис П. *Квантованные поля в искривленном пространстве-времени.* М.: Мир, 1984.

17. Пенроуз Р. *Циклы времени.* М.: БИНОМ. Лаборатория знаний. 2014.

18. Smolin, Lee. *Towards a theory of spacetime structure at very short distances* // Nuclear Physics B. 1979, N 160. P 253–268.

19. Cheng, Hung. *Possible existence of Weyl's vector meson* // Physical Review Letters. 1988, N 61. P 2182–2184.

20. Israel Quiros. *Scale invariance and broken electroweak symmetry may coexist together* // ArXiv:1312.1018v3 [gr-qc], 3 Jan 2014.

21. Carlos Castro. *The cosmological constant and Pioneer anomaly from Weyl spacetimes and Mach's principle.* 2009. Physics Letters B, N 675. P. 226–230.

22. S. Mirabotalebi, S. Jalalzadeh, M. Sadegh Movahedand H. R. Sepangi. *Weyl-Dirac theory predictions on galactic scales* // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society.2008.Vol. 385, Issue 2. P. 986–994. arXiv: 0504117v3 [gr-qc].

23. Ronaldo S. S. Vieira, Patricio S. Letelier. *Thin-disk models in an Integrable Weyl-Dirac theory* // ArXiv:1305.2662v2 [gr-qc]. 11 Feb 2014.

24. Mark Israelit. *A Weyl-Dirac cosmological model with DM and DE* // Arxiv: 1008.0767 [gr-qc]. 2009.

25. Cheng, Hung. *Possible existence of Weyl's vector meson //* Physical Review Letters.1988, N 61. P. 2182–2184.

26. Grigory E.Volovik. *Tнe Universe in a Helium Droplet*. Clarendon Press. Oxford. 2003. P. 1–507.

27. Carter B., Martin X. *Dynamic Instability criterion for Circular String Loops* // Ann. of Phys. 1993. Vol. 227. P. 151–171.

Статья поступила в редакцию 10.01.2022