УДК 530.12:531.51
DOI 10.53403/02340763_2022_1_13

КОНФОРМНЫЕ ЛАГРАНЖИАНЫ В ГРАВИТАЦИИ ВЕЙЛЯ

С. Ю. Седов

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

Обсуждаются модели конформной гравитации с лагранжианами, линейными по скалярной кривизне и неминимальной связью со скалярным полем. Подробно освещена теория гравитации Вейля–Дирака. На основе анализа приведенных примеров предложен вариант конформного лагранжиана с двумя скалярными полями, в котором вектор Вейля заменен на вектор, преобразующийся как и вектор Вейля, но не входящий в вейлевскую связность. Пространством такой модели является интегрируемое пространство Вейля.

Ключевые слова: конформная гравитация, конформные лагранжианы, геометрия Вейля, вектор Вейля.

Введение

Столетие назад Г. Вейль предложил свою теорию гравитации, основанную на локальной симметрии относительно калибровки измерений [1]. Идеи Г. Вейля являются актуальными и сейчас. Количество публикаций, основанных на этих идеях, постоянно увеличивается.

В последние годы рассматриваются различные варианты применения вейлевской (локальной конформной) симметрии к гравитации с точки зрения модификации общей теории относительности (ОТО) для описания темной материи, темной энергии, эволюции ранней Вселенной [2–7]. Модификации ОТО с учетом локальной конформной инвариантности исследуются в течение долгого времени как попытки решения различных проблем, в частности: способов перенормировок в квантовой гравитации, перенормировки тензора энергии-импульса, динамики инфляции в ранней Вселенной и появления массы у элементарных частиц [8–11].

Обычный лагранжиан ОТО конформно не инвариантен. Но авторы отмечают, что конформная симметрия для больших энергий может иметь место в более общей теории гравитации, чем ОТО [12, 13]. Отмечается также, что стандартную модель физики частиц можно трактовать как приближенно конформную при энергиях частиц, много больших массы бозона Хиггса (вакуумное среднее поля Хиггса имеет значение 246 ГэВ). Если положить равной нулю массу бозона Хиггса, то стандартная модель конформно-инвариантна. Идея конформности является привлекательной как в гравитации, так и в физике частиц.

При определенных условиях (при низких энергиях, например) конформная симметрия нарушается и осуществляется переход к ОТО. Нарушение конформной симметрии в различных моделях может происходить различными способами. Нарушение конформной симметрии может происходить перед нарушением электрослабой симметрии $SU(3)\otimes SU(2)\otimes U(1)$ [2, 3], может происходить перед нарушением симметрии $SU(5)$ [14] и может происходить еще раньше. Нарушение конформной симметрии обычно рассматривают с привлечением дилатонного поля (поля, связанного с локальными растяжениями метрики).

В этой публикации рассматривается применение идей Г. Вейля к построению конформных лагранжианов гравитации. Имеется в виду случай только линейных по кривизне R лагранжианов. После нарушения конформности лагранжиан должен соответствовать лагранжиану ОТО. Отметим, что мы не делали попытку представить сколько-нибудь широкий обзор множества моделей конформной гравитации. Выбрано небольшое их число. Но можно надеяться, что и на основании рассмотренных примеров можно получить представление о значительной роли геометрии Вейля в альтернативных моделях гравитации.

В разделе 1 рассматривается теория гравитации Вейля-Дирака [15]. Эта теория формулируется как естественное обобщение гравитации на случай пространства Вейля. В разделе 2 приведены уравнения теории Вейля–Дирака. При нарушении конформной инвариантности у векторного поля Вейля появляется масса и возникает понятие вейлона как частицы этого поля [5, 6, 14]. В связи с вейлоном упоминается об «эффекте вторых часов». В разделе 3 нами предложен способ сохранить общие свойства теории Вейля–Дирака, но избежать «эффекта вторых часов». В разделе 4 рассмотрен лагранжиан с одним комплексным скалярным полем, как непосредственное обобщение лагранжиана теории Вейля-Дирака. В разделе 5 очень кратко рассмотрен конформный случай для теории гравитации Бранса-Дикке [16–18]. В разделе 6 описана модель [19] с одним дилатонным комплексным скалярным полем, которое имеет правильный знак кинетического члена. Раздел 7 посвящен общему описанию лагранжиана, содержащего дилатонное и физическое скалярное поля. Разделы 8–10 содержат три примера конформных лагранжианов с двумя скалярными полями. И, наконец, в разделе 11 подводится краткий итог обсуждению различных конформных лагранжианов. На основе проделанного обзора предлагается наша версия конформного лагранжиана.

Отметим, что мы старались придерживаться следующих нотаций в римановой геометрии (как в [20]): сигнатура метрики $(+,-,-,-)$, тензор кривизны $R^{\lambda}_{\mu\nu\sigma} = \partial_\nu \Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma} - \partial_\sigma \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} + \Gamma^{\lambda}_{\nu\rho}\Gamma^{\rho}_{\mu\sigma} - \Gamma^{\lambda}_{\sigma\rho}\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$, тензор Риччи $R_{\mu\sigma} = R^{\lambda}_{\mu\lambda\sigma}$, скалярная кривизна $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$.

Вейлевская связность определяется с учетом вектора Вейля:

$$\breve{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} + \delta^{\lambda}_{\mu}A_\nu + \delta^{\lambda}_{\nu}A_\mu - g_{\mu\nu}A^{\lambda}. \qquad (1)$$

Вейлевская кривизна задается соотношением

$$\breve{R} = R - 6\nabla_\alpha A^\alpha - 6A_\alpha A^\alpha. \qquad (2)$$

Вейлевские величины, в отличие от римановых, обозначены «шляпками». Здесь A^α – вектор Вейля. При вейлевских (локально-конформных) преобразованиях метрика и вектор Вейля меняются следующим образом:

$$g_{\alpha\beta} \to \tilde{g}_{\alpha\beta} = \Omega^2 g_{\alpha\beta}, \;\; A^\alpha \to \tilde{A}^\alpha = A^\alpha - \partial^\alpha \ln\Omega(x). \qquad (3)$$

Здесь $\Omega(x)$ – положительная гладкая функция (конформный фактор). Вейлевским весом геометрической величины H называют число $k = W(H)$, которое является степенью в вейлевском преобразовании: $H \to \tilde{H} = \Omega^k H$.

1. Лагранжиан гравитации Вейля-Дирака

Действие для гравитации в ОТО [20, 21] имеет вид:

$$S_g = -\int \frac{M_P^2 c^2}{2\hbar} R\sqrt{|g|}\,d^4x. \qquad (4)$$

Обычно полагают

$$M_P = \sqrt{\frac{\hbar c}{8\pi G_N}}, \;\; \hbar = 1, \;\; c = 1, \;\; G_N = 1. \qquad (5)$$

Здесь M_P – *приведенная* масса Планка, G_N – ньютоновская постоянная тяготения. Приведенная масса Планка зачастую удобней обычной, так как позволяет не выписывать множитель 8π.

Для действия гравитационного поля в пространстве Вейля попробуем использовать инвариантный относительно локальных масштабных преобразований аналог (4) с переменной массой Планка $\breve{M}_P = M_P\psi$, зависящей от вектора Вейля:

$$\breve{S}_A = -\int \frac{c^2}{2} M_P^2 \psi^2 \breve{R}\sqrt{|g|}\,d^4x, \qquad (6)$$

где

$$\psi(x) = \exp\left(\int\limits_{\gamma(x_0,x)} A_\lambda dx^\lambda\right), \qquad (7)$$

$\gamma(x_0,x)$ – произвольная гладкая кривая, соединяющая фиксированную точку x_0 и текущую точку x на гладком многообразии M, $\breve{R}$ – вейлевская кривизна. Однако такое геометризованное действие (6), зависящее только от метрики $g_{\mu\nu}$ и вектора Вейля A_λ, накладывает следующее ограничение на вектор Вейля A:

$$F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu = 0, \tag{8}$$

приводя к интегрируемой вейлевской геометрии (IWG). Действительно, поскольку можно записать

$$\psi^2 \breve{R} = \psi^2 R - 6\psi^2 A^2 - 6\psi^2 \nabla A, \tag{9}$$

то следует вычислить вариацию величины I, где

$$I = I_1 - 6I_2 - 6I_3, \tag{10}$$

$$I_1 = \int \psi^2 R\sqrt{-g}\,d^4x,\ \ I_2 = \int \psi^2 A^2\sqrt{-g}\,d^4x,$$
$$I_3 = \int \psi^2 \nabla A\sqrt{-g}\,d^4x. \tag{11}$$

Вариация I_1 по $\delta g^{\mu\nu}$ дает:

$$\delta I_1 = \int d^4x\sqrt{-g}\left(\psi^2 G_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\Box\psi^2 - \nabla_\mu\nabla_\nu\psi^2\right)\delta g^{\mu\nu}. \tag{12}$$

Для I_3 можно записать:

$$I_3 = \int \psi^2 \partial_\lambda\left(A^\lambda\sqrt{-g}\right)d^4x =$$
$$= \int d^4x\left[\partial_\lambda\left(\psi^2 A^\lambda\sqrt{-g}\right) - A^\lambda\sqrt{-g}\,\partial_\lambda\psi^2\right]. \tag{13}$$

Предполагая, что $\psi^2 A^\lambda$ на бесконечности убывает, получаем, что вариация

$$\delta I_3 = -2\delta I_2, \tag{14}$$

так как

$$\delta I_2 = \int \delta\left(\psi^2 A^2\sqrt{-g}\right)d^4x =$$
$$= \int d^4x\sqrt{-g}\,\psi^2\left(A_\mu A_\nu - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}A^2\right)\delta g^{\mu\nu}, \tag{15}$$

$$\psi(x) = \exp\left(\int A_\lambda dx^\lambda\right), \tag{16}$$

$$\delta I_3 = -\int d^4x\,\delta\left[A^\lambda\sqrt{-g}\,\partial_\lambda\psi^2\right] =$$
$$= -\int d^4x\,\delta\left(2\psi^2 A^\lambda A_\lambda\sqrt{-g}\right) =$$
$$= -2\int d^4x\,\delta\left(\psi^2 A^2\sqrt{-g}\right). \tag{17}$$

Учтем, что

$$\frac{\Box\psi^2 - \nabla_\mu\nabla_\nu\psi^2}{\psi^2} =$$
$$= 4g_{\mu\nu}A^2 + 2g_{\mu\nu}\nabla A - 2\nabla_\mu A_\nu - 4A_\mu A_\nu. \tag{18}$$

Полагая вариацию $\delta I = 0$ и собирая все результаты, получаем уравнения, следующие из вариации $\breve{S}_A$ по метрике $\delta g^{\mu\nu}$:

$$G_{\mu\nu} + 2A_\mu A_\nu + g_{\mu\nu}A^2 + 2g_{\mu\nu}\nabla A - 2\nabla_\mu A_\nu = 0. \tag{19}$$

Так как тензор Эйнштейна $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$ – симметричный, то уравнения (19) могут удовлетворяться только при условии

$$\nabla_\mu A_\nu = \nabla_\nu A_\mu. \tag{20}$$

Это обстоятельство связано с несимметричностью вейлевского аналога тензора Риччи $\breve{R}_{\mu\nu}$ в общем случае.

Итак, действие для гравитации (6), с линейным относительно кривизны $\breve{R}$ лагранжианом, зависящее только от геометрических атрибутов пространства Вейля – метрики g и вектора Вейля A, не относится к общему случая пространства Вейля, а имеет в виду только интегрируемую вейлевскую геометрию (IWG). Чтобы использовать действие (6), в выражении (7) мы должны положить $A_\nu = \dfrac{\partial_\nu\sigma(x)}{\sigma}$, где $\sigma(x)$ – некоторое вещественное скалярное поле.

Дирак [15] предложил другое вейлевское инвариантное действие, введя в лагранжиан гравитации с линейной зависимостью от кривизны R дополнительное скалярное поле $\beta(x)$, не связанное с вектором A, которое имеет нужный вейлевский вес $W(\beta) = -1$:

$$\breve{S}_g = -\int \frac{c^3}{16\pi G_N}\beta^2(x)\breve{R}\sqrt{|g|}\,d^4x =$$
$$= -\frac{1}{2}\int M_P^2\beta^2(x)\breve{R}\sqrt{|g|}\,d^4x,\ \ \hbar = 1,\ \ c = 1. \tag{21}$$

Вариация $\delta\breve{S}_g$ по метрике $\delta g^{\mu\nu}$ приводит к приемлемому симметричному тензору:

$$G_{\mu\nu} = -\frac{1}{\beta^2}\left(4\beta^\mu\beta^\nu - g^{\mu\nu}\beta^\lambda\beta_\lambda\right) -$$
$$-\frac{2}{\beta^2}\left(g^{\mu\nu}\beta\beta^\lambda{}_{;\lambda} - \beta\beta^\nu{}_{;\lambda}g^{\lambda\nu}\right), \tag{22}$$

как это следует из выражения (12) для δI_1 при замене в нем $\psi \to \beta(x)$. Это также следует из соотношения (19) при подстановке $A_\nu = \dfrac{\beta_\nu}{\beta}$.

Действие для гравитационного поля в виде (21) за счет введения дополнительной функции Дирака $\beta(x)$ является конформно-инвариантным. Поле $\beta(x)$ можно интерпретировать не как переменную массу Планка, а как переменный параметр связи гравитации и материи:

$$\frac{1}{G_\beta}=\frac{\beta^2(x)}{G_N}. \tag{23}$$

Итак,

$$\beta^2\breve{R}=\beta^2 R-6\beta^2 A^2-6\beta^2\nabla A, \tag{24}$$

причем член $-6\beta^2\nabla A$ можно заменить в лагранжиане (24) на $+12\beta\beta_\lambda A^\lambda$ с помощью интегрирования поверхностного члена, т. е. приема, использованного при выводе выражения (13), с заменой ψ на β. Таким образом,

$$\breve{S}_g=-\frac{1}{2}\int M_P^2\left(\beta^2 R-6\beta^2 A_\lambda A^\lambda+12\beta\beta_\lambda A^\lambda\right)\sqrt{|g|}d^4x. \tag{25}$$

Отметим, что в гравитации Вейля–Дирака вектор A_ν, вообще говоря, это неинтегрируемый вектор Вейля. Кроме того, Дирак включил в лагранжиан L_β вейлевскую инвариантную связь скалярного поля β и вектора A:

$$\alpha\breve{\partial}_\mu\beta\breve{\partial}^\mu\beta=\alpha g^{\mu\nu}\left(\beta A_\mu-\beta_\mu\right)\left(\beta A_\nu-\beta_\nu\right), \tag{26}$$

а также напряженность $F^{\mu\nu}$ векторного поля A и член $\sim\beta^4$:

$$\omega^2 F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}+2\lambda\beta^4. \tag{27}$$

Здесь α – параметр, $\omega\sim\dfrac{1}{e_A}$ – произвольная неотрицательная величина, определяющая вклад напряженности $F_{\lambda\rho}$ вектора Вейля A в тензор энергии-импульса, e_A – безразмерный вейлевский «заряд», λ – безразмерный параметр. Окончательно получается вейлевски инвариантный лагранжиан гравитации Дирака в виде:

$$\breve{S}_\beta=-\frac{M_P^2}{2}\int L_\beta\sqrt{|g|}d^4x=-\frac{1}{16\pi}\int L_\beta\sqrt{|g|}d^4x, \tag{28}$$

где L_β записывается как:

$$L_\beta=\beta^2 R-6\beta^2 A_\lambda A^\lambda+12\beta\beta_\lambda A^\lambda+$$
$$+\alpha\left(\beta_\mu-A_\mu\beta\right)\left(\beta^\mu-A^\mu\beta\right)+2\lambda\beta^4+\omega^2F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}, \tag{29}$$

или

$$L_\beta=\beta^2 R+6\beta_\lambda\beta^\lambda+(\alpha-6)\left(\beta_\mu-A_\mu\beta\right)\times$$
$$\times\left(\beta^\mu-A^\mu\beta\right)+2\lambda\beta^4+\omega^2F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}. \tag{30}$$

Знак кривизны R в выражении (30) и в публикации [6] разный (из-за разности выбора соглашений о свертывании индексов в тензоре Римана).

При $\alpha=6$, $\lambda=0$, $\omega=0$ получается конформно-инвариантный лагранжиан (см. также [8, 22])

$$L_0=R\beta^2+6\beta^\lambda\beta_\lambda, \tag{31}$$

приводящий к конформному уравнению Пенроуза–Тагирова–Черникова [22]:

$$\Box\beta-\frac{R}{6}\beta=0. \tag{32}$$

При $\alpha=0$, $\lambda=0$, $\omega=0$ получаем вейлевский инвариантный лагранжиан

$$L_g=\breve{R}\beta^2(x) \tag{33}$$

с действием (21).

Дирак, приведя в [15] сначала полный лагранжиан (30), затем подробно разобрал частный случай $\alpha=6$. Но с точки зрения изучения влияния поля β и вейлевского вектора A на динамику гравитации более интересен случай отрицательных значений $\alpha<0$ [6]. Действительно, с учетом знака в (28) кинетическая энергия скалярного поля $\beta(x)$ будет положительной в (30), если $\alpha<0$. Поэтому при значениях $\alpha<0$ это поле может играть физическую роль в данной модели, если оно не исчезло после нарушения свойства конформности.

2. Уравнения гравитации Вейля–Дирака

Рассмотрим гравитацию Вейля–Дирака. Уравнения движения получаются варьированием действия (28) с лагранжианом (30) по метрике $\delta g_{\mu\nu}$, по полю $\delta\beta$ и по вектору δA^ν. Следуя [4–6], получаем при вариации действия по метрике $\delta g_{\mu\nu}$:

$$R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\equiv G^{\mu\nu}=T^{\mu\nu}=T^{(\beta)\mu\nu}+T^{(A)\mu\nu}+$$
$$+T^{(F)\mu\nu}+\frac{8\pi T^{(m)\mu\nu}}{\beta^2}-g^{\mu\nu}\lambda\beta^2(x). \tag{34}$$

где

$$T^{(\beta)\mu\nu}=\frac{1}{\beta^2}\left(-2+\frac{\alpha}{2}\right)g^{\mu\nu}\beta_\alpha\beta^\alpha+\frac{1}{\beta^2}(2-\alpha)\beta^{\mu\nu}-$$
$$-\frac{2}{\beta^2}g^{\mu\nu}\beta\beta^\alpha_{;\alpha}+\frac{2}{\beta^2}\beta\beta^{\mu;\nu}, \tag{35}$$

$$T^{(A)\mu\nu}=(\alpha-6)\left(-A^\mu A^\nu+\frac{g^{\mu\nu}}{2}A^\lambda A_\lambda\right)+$$
$$+\frac{(\alpha-6)}{\beta}\left(\beta^\mu A^\nu+\beta^\nu A^\mu-g^{\mu\nu}\beta_\lambda A^\lambda\right), \tag{36}$$

$$T^{(F)\mu\nu} = \omega^2 \frac{8\pi}{\beta^2}\left[\frac{1}{16\pi} g^{\mu\nu} F^{\lambda\rho} F_{\lambda\rho} - \frac{1}{4\pi} F^{\mu}_{\lambda} F^{\nu\lambda}\right] = \frac{\omega^2}{\beta^2}\left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} F^{\lambda\rho} F_{\lambda\rho} - 2F^{\mu}_{\lambda} F^{\nu\lambda}\right]. \quad (37)$$

Здесь введен $T^{(m)\mu\nu}$ – тензор энергии-импульса обычной материи. Величины $T^{(m)\mu\nu}$, ψ и J^{μ} входят в выражение для вариации лагранжиана L_{matter} обычной материи:

$$S_m = \int d^4 x L_{matter} \sqrt{-g}, \quad (38)$$

$$\delta\left(L_{matter}\sqrt{-g}\right) = 8\pi T^{(m)\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \sqrt{-g} + 16\pi J^{\lambda} \delta A_{\lambda} \sqrt{-g} + \Psi \delta\beta \sqrt{-g}. \quad (39)$$

Это плотность вейлевского заряда обычной материи и плотность вейлевского тока обычной материи. Вариация по полю $\delta\beta$ дает уравнение:

$$R = \alpha \frac{\beta^{\lambda}{}_{;\lambda}}{\beta} - 4\beta^2\lambda - (\alpha - 6)\left(A^{\lambda} A_{\lambda} + A^{\lambda}{}_{;\lambda}\right) - \frac{\psi}{2\beta}. \quad (40)$$

Вариация по вектору δA^{ν} дает уравнение:

$$4\omega^2 F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 16\pi J^{\mu} - 2(\alpha - 6)\beta\left(\beta^{\mu} - \beta A^{\mu}\right). \quad (41)$$

Далее положим

$$T^{(m)\mu\nu} = 0, \ J^{\lambda} = 0, \ \Psi = 0. \quad (42)$$

Вейлевский ток обычной материи J^{μ} полагаем равным нулю. Итак, из (41) с учетом определения

$$F^{\nu}_{\mu} = \partial_{\mu} A^{\nu} - \partial_{\nu} A^{\mu} \quad (43)$$

получаем:

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu;\mu} = 0, \quad (44)$$

то есть:

$$\left(\beta\beta^{\mu} - \beta^2 A^{\mu}\right)_{;\mu} = 0. \quad (45)$$

Соотношения (34) – (41) инвариантны относительно преобразований Вейля при условии (42). Величины β и A_{α} определены с точностью до преобразований Вейля

$$g_{\alpha\beta} \to g_{\alpha\beta}\Omega^2(x),$$

$$\beta \to \beta\Omega^{-1}(x) \ A_{\alpha} \to A_{\alpha} - \partial_{\alpha} \ln\Omega(x). \quad (46)$$

Пусть произошло нарушение вейлевской инвариантности: полагаем $\beta(x) = 1$, что соответствует ОТО. Тогда из (41) следует, что

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 4\pi J^{\mu} + \frac{1}{2\omega^2}(\alpha - 6) A^{\mu}. \quad (47)$$

Воспользуемся далее рассуждениями из [6]. Пусть $(\alpha - 6) < 0$. Если положить $\frac{1}{2\omega^2}(\alpha - 6) = -k_A^2 < 0$, $J^{\mu} = 0$, $\beta(x) = 1$, то получаем:

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu} + k_A^2 A^{\mu} = 0. \quad (48)$$

Из (44) следует, что

$$A^{\mu}{}_{;\mu} = 0. \quad (49)$$

Отсюда

$$\nabla_{\nu}\nabla^{\nu} A^{\mu} + k_A^2 A^{\mu} = 0, \quad (50)$$

то есть получаются уравнения Прока (49), (50) для свободного векторного поля вейлонов со спином 1 и массой $m_A = \frac{\hbar k_A}{c}$ [5, 6]. При этом скалярная кривизна, связанная с космологической постоянной и наличием вейлонов (свободного от обычной материи пространства), равна

$$R = -4\lambda + 2k_A^2\left(A^{\lambda} A_{\lambda} + A^{\lambda}{}_{;\lambda}\right) = -4\lambda + 2k_A^2 A^{\lambda} A_{\lambda}. \quad (51)$$

Заметим, что в ранней вселенной флуктуации векторного поля вейлонов могут приводить к флуктуации кривизны в соответствии с соотношением (51).

Масса вейлона в модели Розена–Израэлита [6]

$$m_A = \frac{k_A \hbar}{c} = \frac{\hbar}{c}\sqrt{\frac{1}{2\omega^2}(6 - \alpha)} \sim \frac{1}{\omega}, \quad (52)$$

то есть произвольна, если параметр ω произволен.

Пусть пробная макрочастица движется по геодезической, причем можно принять в некоторой ее окрестности в геодезической системе координат $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = 0$. Тогда 4-скорость пробной частицы меняется как

$$\frac{du^{\lambda}}{ds} = -\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} u^{\mu} u^{\nu} + A^{\lambda} - \left(A_{\alpha} u^{\alpha}\right) u^{\lambda} = A^{\lambda} - \left(A_{\alpha} u^{\alpha}\right) u^{\lambda}, \quad (53)$$

а ее масса m как ([23])

$$\frac{1}{m}\frac{dm}{ds} = \left(A_{\alpha} u^{\alpha}\right). \quad (54)$$

Здесь $ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta}$, $u^{\lambda} = \frac{dx^{\lambda}}{ds}$. Такое изменение массы, если оно происходит при ненулевой напряженности $F_{\alpha\beta}$ вектора Вейля A_{α}, связано с парадоксальным «эффектом вторых часов» в геометрии Вейля [24, 25].

По замечанию А. Эйнштейна, в пространстве-времени, описываемой геометрией Вейля, существование резких спектральных линий в излучении от звезд невозможно из-за того, что скорость хода атомных часов зависит от их прошлой истории. Или иначе говоря, двое различных часов, пропутешествовавших по Вселенной различными путями и вернувшихся в первоначальную точку, будут иметь разную скорость хода.

В [23] мы отмечали, что проявление «эффекта вторых часов» в виде соотношения (54) может быть интересно в качестве способа «необратимого» изменения массы частицы при переходе через микроскопические области ненулевой напряженности F^{λ}_{μ} вектора Вейля A_{μ}. Но такое изменение массы должно быть обязательно дискретным; т. е. поле вектора Вейля и его напряженность должны быть квантованными. Кроме того, такая возможность не должна противоречить экспериментальным фактам и общим концепциям физики частиц. Проблема реализации такой возможности заключается в том, что вектор Вейля будет менять массу у любой массивной частицы.

Допустим тогда в связи с этим, что в выражение (54) входит не вектор Вейля, а вектор Вейля, умноженный на вейлевский заряд, т. е. $q_W A_{\mu}$, причем этот вейлевский заряд q_W (ничего общего не имеющий с электрическим зарядом) ненулевой только для некоторых типов частиц. Но такое допущение приводит к тому, что свободные классические массивные частицы с нулевым вейлевским зарядом будут двигаться по геодезическим пространства Римана

$$\frac{dp^{\lambda}}{ds}+\frac{1}{mc}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}p^{\mu}p^{\nu}=0, \qquad (55)$$

а классические частицы с ненулевым вейлевским зарядом и переменной массой будут двигаться с учетом геометрии Вейля в одном и том же физическом пространстве-времени. Кроме того, на частицу в пространстве Вейля будет действовать сила $q_W F^{\lambda}_{\mu}\frac{dx^{\mu}}{ds}$, так что изменение 4-импульса p^{μ} классической вейлевской частицы будет определяться соотношением

$$\frac{dp^{\lambda}}{ds}+\frac{1}{mc}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}p^{\mu}p^{\nu}=mcq_W A^{\lambda}+q_W F^{\lambda}_{\mu}\frac{dx^{\mu}}{ds}. \qquad (56)$$

Если поле вейлонов $A_{\alpha}(x)$, определяемое как решение уравнений Прока (50), мало по амплитуде, то масса пробной частицы m практически не меняется при движении. В этом случае проявления «эффекта вторых часов» практически нет. Его нет также, если частицы безмассовые. Если мы рассматриваем современную эпоху, то для нее условие малости амплитуды можно взять в виде $\left|A_{\alpha}A^{\alpha}\right|<\frac{H^2}{c^2}\sim 10^{-52}\,\mathrm{m}^{-2}$. Здесь H – постоянная Хаббла.

Допустимо считать $\beta(x)$ переменной величиной и после нарушения локальной конформной инвариантности, как считал Дирак [15] и считают другие авторы; см., например, [4]. Если $\beta(x)$ – функция, то она соответствует переменному параметру у силы гравитации $G_{\beta}=\frac{G_N}{\beta^2(x)}$, где $G_N=6{,}67\cdot 10^{-14}\ m^3c^{-2}g^{-1}$ – постоянная Ньютона. Разумеется, изменение гравитационного параметра должно быть достаточно малым, чтобы не противоречить результатам астрономических наблюдений. Переменность величины $\beta(x)$ успешно применялась некоторыми авторами для объяснения наблюдаемых скоростей звезд в галактиках.

3. Наша модификация лагранжиана гравитации Вейля–Дирака

В принципе, можно использовать векторное поле в лагранжиане, аналогичное вектору Вейля, и при этом вообще избежать «эффекта вторых часов». Для этого следует модифицировать гравитацию Вейля–Дирака, введя два векторных поля. Вектор Вейля A в определении пространства Вейля (M,g,A) будет чисто градиентным, если положить его равным

$$A_{\nu}=\frac{\partial_{\nu}\beta(x)}{\beta}, \qquad (57)$$

где $\beta(x)$ – функция Дирака. Функция β при вейлевском преобразовании меняется как:

$$\beta\to\tilde{\beta}=\beta\Omega^{-1}. \qquad (58)$$

Введем также другой вектор $C_{\mu}(x)$, который при вейлевском преобразовании меняется как и вектор Вейля A_{μ}:

$$C_{\mu}\to\tilde{C}_{\mu}=C_{\mu}-\frac{\partial\ln\Omega(x)}{\partial x^{\mu}}. \qquad (59)$$

Тогда

$$\beta^2\breve{R} = \beta^2 R - 6\beta^2 A_\lambda A^\lambda + 12\beta\beta_\lambda A^\lambda = \beta^2 R + 6\beta_\lambda\beta^\lambda, \quad (60)$$

и модифицированный лагранжиан принимает вид:

$$\breve{L}_\beta = \beta^2 R + 6\beta_\lambda\beta^\lambda + \alpha\left(\beta_\mu - C_\mu\beta\right)\left(\beta^\mu - C^\mu\beta\right) +$$

$$+2\lambda\beta^4 + \omega^2 E^{\mu\nu}E_{\mu\nu}, \quad (61)$$

$$E_{\mu\nu} = \partial_\mu C_\nu - \partial_\nu C_\mu, \quad (62)$$

где вектор Вейля A в лагранжиан (61) уже не входит, а из α не вычитается число 6. Еще раз подчеркнем, что A_μ и C_μ – совершенно разные векторы, но лагранжианы (30) и (61) формально совпадают. Заметим здесь, что только вектор A_μ используется в определении вейлевской связности:

$$\breve{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\mu\nu} + \delta^\lambda_\mu A_\nu + \delta^\lambda_\nu A_\mu - g_{\mu\nu}A^\lambda. \quad (63)$$

При $\alpha + 6 < 0$ кинетическая энергия поля $\beta(x)$ будет положительная. Если рассматривать массу у частицы до нарушения конформной инвариантности, то эта масса должна быть переменная:

$$m = m_0\beta(x). \quad (64)$$

Это – случай интегрируемой геометрии Вейля (IWG). При фиксировании $\beta(x) = 1$ вектор $A_\nu = \dfrac{\beta_\nu}{\beta}$ в связности Вейля (63) исчезает, и эта связность становится римановой связностью Леви–Чивита $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$. Вектор C_μ и его напряженность $E_{\mu\nu}$ в лагранжиане остаются, но локального эффекта «вторых часов» после нарушения конформной симметрии нет из-за использования интегрируемой геометрии Вейля. Пусть два электрона на разных концах вселенной имеют разные массы вследствие переменности $\beta(x)$. При сведении их в одну точку у них теперь будут одинаковые массы. Векторные частицы со спином 1, связанные с векторным полем C_μ, лучше называть не вейлонами, как принято в [5, 6], а как-то иначе, например вектонами [26]. Собственно вейлоны в такой модификации лагранжиана уже не существуют, поскольку вектор C_μ уже не имеет геометрической интерпретации вектора Вейля A_μ.

4. Конформный лагранжиан с одним комплексным скалярным полем

Поскольку вещественное скалярное поле $\beta(x)$ нужно только для соблюдения конформности лагранжиана (29), но само по себе не определяет геометрию пространства Вейля, то его можно заменить на комплексное скалярное поле χ: $\beta^2 \to \chi\chi^*$. Произведение $\chi\chi^*$ должно преобразовываться с вейлевским весом $W = -2.$. Такое поле использовалось рядом авторов, см. например, [19, 27, 28]. Комплексность поля χ означает, что ему можно приписать электрический заряд и ввести взаимодействие с электромагнитным потенциалом B. Таким образом, введем комплексный вектор w, объединяющий вещественный вектор Вейля A и вещественный электромагнитный потенциал B:

$$w = A + iB. \quad (65)$$

В вектор электромагнитного потенциала B мы включили электрический заряд, и он обратно пропорционален параметру δ (см. ниже). Введем обозначение:

$$\chi(x) = \beta(x)\exp\left(i\eta(x)\right). \quad (66)$$

Тогда можно определить комплексную вейлевскую производную:

$$\hat{\breve{\partial}}_\mu\chi = \partial_\mu\chi - w_\mu\chi = \left(\frac{\beta_\mu}{\beta} - A_\mu\right)\chi + i\left(\eta_\mu - B_\mu\right)\chi. \quad (67)$$

Лагранжиан вейлевской гравитации с действием

$$\breve{S}_\chi = -\frac{c^2}{2}M_P^2\int L_\chi\sqrt{|g|}d^4x \quad (68)$$

запишем так:

$$L_\chi = |\chi|^2 R + 6g^{\mu\nu}\left(\partial_\mu\chi\right)^*\partial_\nu\chi +$$

$$+\left(\alpha - 6\right)g^{\mu\nu}\left(\hat{\breve{\partial}}_\mu\chi\right)^*\hat{\breve{\partial}}_\nu\chi +$$

$$2\lambda|\chi|^4 + \omega^2 F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \delta^2 H^{\mu\nu}H_{\mu\nu}, \quad (69)$$

где δ – параметр связи электромагнитного поля, $H_{\mu\nu}$ – напряженность электромагнитного поля B_ν:

$$H_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu. \quad (70)$$

В системе Гаусса

$$\frac{M_P^2c^2}{2\hbar}\delta^2 = \frac{1}{16\pi ce^2}, \quad (71)$$

где e – электрический заряд. Отметим, что векторы A (вектор Вейля) и B (электромагнитный потенциал) входят в лагранжиан (69) похожим образом, но первый связан с абелевой некомпактной группой, второй – с абелевой компактной группой. Кроме того, в отличие от электромагнитного потенциала B, вектор Вейля A входит также в связность Вейля (63).

Полагая формально $\chi = \exp\left(i \ln \beta(x)\right)$ и $A = 0$, получаем из (69) лагранжиан:

$$L_\chi = R + \frac{1}{\beta^2} 6 g^{\mu\nu} \partial_\mu \beta \partial_\nu \beta + \frac{1}{\beta^2} (\alpha - 6) g^{\mu\nu} \left(\beta_\mu - B_\mu \beta\right) \times$$
$$\times \left(\beta_\nu - B_\nu \beta\right) + 2\lambda + \delta^2 H^{\mu\nu} H_{\mu\nu}. \qquad (72)$$

Заметим, что лагранжиан (72) конформно не инвариантен, но сохраняет свой вид при преобразовании $\beta \to l\beta$, где l – вещественный параметр. Если потребовать, чтобы при этом преобразовании сохраняло вид исходное поле $\chi = \exp\left(i \ln \beta\right)$, то $l = \exp\left(2\pi n\right)$, где n – целое число.

Полагая $\chi = \exp\left(\ln \beta\right) = \beta$ и $B = 0$, получаем из (69) лагранжиан (30):

$$\frac{L_\beta}{\beta^2} = R + \frac{1}{\beta^2} 6 \beta_\lambda \beta^\lambda + \frac{1}{\beta^2} (\alpha - 6) g^{\mu\nu} \left(\beta_\mu - A_\mu \beta\right) \times$$
$$\times \left(\beta_\mu - A_\mu \beta\right) + 2\lambda \beta^2 + \frac{1}{\beta^2} \omega^2 F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}. \qquad (73)$$

Рассмотрим случай, когда

$$\beta\left(x\right) = 1 + \mu\left(x\right), \ |\mu| << 1,, \qquad (74)$$

то есть когда произошло нарушение вейлевской симметрии, но есть малые флуктуации поля β. Тогда при подстановках

$$\beta \approx 1, \ B \to A, \ \delta^2 H^{\mu\nu} H_{\mu\nu} \to \omega^2 F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \ \beta_\nu = \mu_\nu \qquad (75)$$

выражения (72) и (73) практически совпадают.

Сделаем еще одно замечание. Если обобщить результаты раздела 3 на комплексный случай и определить:

$$w_\mu = C_\mu + i B_\mu, \ \ A_\mu = \frac{\partial_\mu |\chi|^2}{2|\chi|^2}, \ \hat{\hat{\partial}}_\mu \chi = \partial_\mu \chi - w_\mu \chi, \qquad (76)$$

$$E_{\mu\nu} = \partial_\mu C_\nu - \partial_\nu C_\mu, \qquad (77)$$

то лагранжиан скалярного поля χ

$$L_\chi = |\chi|^2 R + 6 g^{\mu\nu} \left(\partial_\mu \chi\right)^* \partial_\nu \chi + \alpha g^{\mu\nu} \left(\hat{\hat{\partial}}_\mu \chi\right)^* \hat{\hat{\partial}}_\nu \chi +$$
$$+ 2\lambda |\chi|^4 + \omega^2 E^{\mu\nu} E_{\mu\nu} + \delta^2 H^{\mu\nu} H_{\mu\nu}. \qquad (78)$$

будет соответствовать интегрируемой геометрии Вейля (IWG), причем при преобразованиях Вейля

$$C_\alpha \to C_\alpha - \partial_\alpha \ln \Omega(x) \qquad (79)$$

плотность лагранжиана $\sqrt{-g} L_\chi$ будет инвариантной.

Рассмотрим теперь вариант лагранжиана (78), когда напряженность $E_{\mu\nu}$ векторного поля C_μ в лагранжиан не входит. Это может быть только в случае, когда не только вектор Вейля A_μ градиентный в соответствии с (78), но и вектор C_μ градиентный. Причем калибровка конформного фактора в выражении (79) должна быть фиксирована условием: $C_\alpha = 0$ при оставшемся ненулевом поле $\chi(x)$. Тогда лагранжиан (78) сводится к лагранжиану:

$$L_\chi = |\chi|^2 R + 6 g^{\mu\nu} \left(\partial_\mu \chi\right)^* \partial_\nu \chi + \alpha g^{\mu\nu} \left(\hat{\partial}_\mu \chi\right)^* \hat{\partial}_\nu \chi +$$
$$+ 2\lambda |\chi|^4 + \delta^2 H^{\mu\nu} H_{\mu\nu}, \qquad (80)$$

где

$$\hat{\partial}_\mu \chi = \partial_\mu \chi - i B_\mu \chi, \ \ H_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu. \qquad (81)$$

Напомним здесь, что B_μ – электромагнитный потенциал. В такой калибровке конформного фактора $\Omega(x)$ лагранжиан (80) является лагранжианом заряженного скалярного поля с неминимальной связью с гравитацией.

5. Конформный лагранжиан в модели Бранса–Дикке

Лагранжиан и действие для гравитации Бранса–Дикке [16–18] выглядит так:

$$L_{BD} = \varphi(x) R - \frac{\omega}{\varphi(x)} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \varphi(x) \partial_\beta \varphi(x),$$

$$S_{BD} = -\frac{1}{16\pi} \int d^4 x \sqrt{-g} L_{BD}. \qquad (82)$$

Здесь φ – вещественное скалярное поле Бранса–Дикке, ω – параметр теории. Если сделать подстановку $\varphi = \beta^2$, то лагранжиан будет имет вид:

$$L_{BD} = \beta^2 R - 4\omega \partial^\mu \beta \partial_\mu \beta. \qquad (83)$$

Сравнивая это выражение с (31), видим, что лагранжиан (83) будет конформно=инвариантным, если

$$\omega = -\frac{3}{2}. \qquad (84)$$

Полевые уравнения модели Бранса–Дикке имеют вид [17,18]:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi}{\varphi} T^{(\mathrm{m})}_{\mu\nu} + \frac{\omega}{\varphi^2} \left(g_{\mu\nu} \partial^\alpha \varphi \partial_\alpha \varphi\right) +$$
$$+ \frac{1}{\varphi} \left(\partial_\mu \partial_\nu \varphi - g_{\mu\nu} \Box \varphi\right), \qquad (85)$$

$$8\pi T_{\alpha}^{(m)\alpha} = (3+2\omega)\Box\varphi. \quad (86)$$

Здесь $T_{\mu\nu}^{(m)}$ – тензор энергии-импульса обычной материи. Случай ОТО имеет место, когда $\omega \to \infty$.

Тензор энергии-импульса должен быть бесследовым в конформном случае, т. е. при $3+2\omega = 0$. При этом поле φ перестает быть динамическим.

Здесь следует сделать замечание. Если ввести конформные преобразования метрики

$$g_{\alpha\beta} \to \Omega^2(x) g_{\alpha\beta} \quad (87)$$

при условии (84), то тем самым осуществляется переход к интегрируемой геометрии Вейля. Соответствующие римановы пространства с различными $g_{\alpha\beta}$ и φ находятся в конформном соответствии и образуют класс эквивалентности (пространство Вейля) по преобразованиям (87). В этом случае вектор Вейля градиентный. Обычно называют (см., например, [29]) фреймом Эйнштейна (или эйнштейновской калибровкой) выбор $\Omega(x)$, когда $\varphi \equiv \mathrm{const}$, и фреймом Иордана (или римановой калибровкой), когда φ – некоторая функция, как в выражении (82). При этом, конечно, аффинные связности будут разными, отличаясь друг от друга вейлевским преобразованием. Если же преобразовывать лагранжиан (83) при произвольном параметре $\omega \neq -\frac{3}{2}$, то после преобразования (87) он будет описывать «различную физику».

Итак, теория Бранса–Дикке [16–18] для конформного выбора параметра (84) сводится к уже рассмотренному варианту – лагранжиану (31), частному случаю теории Вейля–Дирака [15].

6. Модель Hans Ohanian

Автором [19] предлагается использовать комплексное поле $\tilde{\chi}(x)$ на основе общей геометрии Вейля в лагранжиане для гравитации. Взаимодействие вектора Вейля A_μ со скалярным полем позволяет привлечь механизм спонтанного нарушения локальной конформной симметрии.

В [19] отмечается общий факт, что неправильный знак у кинетического члена дилатонного поля в лагранжиане приводит к «духам» (ghosts) и нестабильности системы. Пропагатор Фейнмана с неправильным знаком приводит к нарушению унитарности при квантовании теории. Поэтому если дилатонное поле с неправильным знаком не исчезает после нарушения локальной конформной инвариантности, это приведет к трудностям при квантовании скалярного поля. Однако если это поле исчезло при выборе калибровки, то проблем со знаком поля нет, но и конформности уже нет; а квантование неконформной модели гравитации имеет свои трудности [8]. Поэтому желательно иметь как правильный знак кинетического члена у скалярного поля, так и возможность квантования конформно инвариантной классической модели. По мнению [19], использование вектора Вейля в лагранжиане решает проблему неправильного знака кинетического члена и дает также динамический механизм нарушения конформной симметрии.

Выпишем лагранжиан (69) L_χ для случая нулевого электромагнитного потенциала $B_\mu = 0$ и лагранжиан $\tilde{L}_\chi$ модели [19]:

$$\begin{aligned} -\frac{c^2}{2}M_P^2 L_\chi = &-\frac{c^2}{2}M_P^2 |\chi|^2 R - \\ &-\frac{c^2}{2}M_P^2 6 g^{\mu\nu}\left(\partial_\mu\chi\right)^* \partial_\nu\chi - \\ &-\frac{c^2}{2}M_P^2(\alpha-6) g^{\mu\nu}\left(\breve{\partial}_\mu\chi\right)^* \breve{\partial}_\nu\chi - \\ &-\frac{c^2}{2}M_P^2 2\lambda|\chi|^4 - \frac{c^2}{2}M_P^2\omega^2 F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (88)$$

$$\begin{aligned} \tilde{L}_\chi = &-\frac{\sinh^2\Theta}{6}\tilde{\chi}\tilde{\chi}^* R - \sinh^2\Theta g^{\mu\nu}\partial_\mu\tilde{\chi}\partial_\nu\tilde{\chi}^* + \\ &+\cosh^2\Theta g^{\mu\nu}\left(\breve{\partial}_\mu\tilde{\chi}\right)^*\breve{\partial}_\nu\tilde{\chi} - \\ &-\frac{\tilde{\lambda}}{24}\cosh^2\Theta|\tilde{\chi}|^4 - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (89)$$

Здесь A_μ – вектор Вейля,

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad \breve{\partial}_\mu\chi = \partial_\mu\chi - A_\mu\chi,$$
$$\breve{\partial}_\mu\tilde{\chi} = \partial_\mu\tilde{\chi} - A_\mu\tilde{\chi}. \quad (90)$$

Приравнивая $-\frac{c^2}{2}M_P^2 L_\chi = \tilde{L}_\chi$, получаем связи в выражениях (88) и (89):

$$|\chi(x)|^2 = \frac{\sinh^2\Theta}{3M_P^2c^2}|\tilde{\chi}(x)|^2, \quad \sinh^2\Theta = -\frac{6}{\alpha} > 0,$$
$$\cosh^2\Theta = \frac{\alpha-6}{\alpha} > 0, \quad (91)$$

$$\tilde{\lambda} = \frac{24}{9}\frac{\lambda}{M_P^2c^2}\sinh^4\Theta, \quad \omega^2 = \frac{1}{2M_P^2c^2}. \quad (92)$$

Мы видим, что при выборе $\alpha < 0$ получается правильный знак кинетической энергии. С точностью до обозначений лагранжиан (88) и лагранжиан (89) модели [19] совпадают при выборе знака параметра $\alpha < 0$..

Плотность конформного тока в случае лагранжиана (89) записывается как:

$$\frac{\partial \tilde{L}_\chi}{\partial A_\mu} = -\cosh^2\Theta\left[\tilde{\chi}\breve{\partial}^\mu\tilde{\chi}^* + \tilde{\chi}^*\breve{\partial}^\mu\tilde{\chi}\right]. \qquad (93)$$

Автор [19] выбрал комплексное поле $\tilde{\chi}$, а не вещественное, мотивируя это несколькими обстоятельствами. Два из них таковы.

1) Фаза скалярного поля конформно-инвариантна, а свобода выбора амплитуды скалярного поля реализует конформную симметрию.

2) Введение комплексного скалярного поля позволяет имитировать модель Коулмена–Вайнберга безмассовой скалярной электродинамики [30]. Как в этой модели скаляр поглощается электромагнитным потенциалом, модели, так и вектором Вейля поглощается один скаляр посредством механизма Браута–Энглерта–Хиггса [31, 32], но остается другое массивное скалярное поле, которое может служить в качестве вклада массивных слабо взаимодействующих частиц (WIMP) в темную материю.

Очевидно, что в модель [19] легко ввести взаимодействие с электромагнитным полем $B_\mu(x)$ по схеме (67). Тогда комплексность скалярного поля $\tilde{\chi}$ выглядит более естественно.

Рассмотрим квантовые поправки к лагранжиану (89). Как и в [19], возьмем за основу результаты Коулмена–Вайнберга [30] в той части, которая относится к скалярной квантовой электродинамике. Квантовые поправки приводят к перенормировке потенциала (вейлевский заряд здесь равен единице):

$$U(\tilde{\chi}) = \frac{\tilde{\lambda}}{24}\cosh^2\Theta|\tilde{\chi}|^4 \to \langle U(\tilde{\chi})\rangle_q = \\ = \frac{3\cosh^8\Theta}{(8\pi)^2}|\tilde{\chi}|^4\left(\ln\frac{|\tilde{\chi}|^2}{h^2} - \frac{1}{2}\right). \qquad (94)$$

Здесь $\tilde{\lambda}$ приобрела конкретное значение. Величина h^2 – это значение $|\tilde{\chi}|^2$ в минимуме,

$$h^2 = |\tilde{\chi}|^2_{\min}. \qquad (95)$$

Оно может быть найдено приравниванием:

$$\frac{1}{6}h^2\sinh^2\Theta = \frac{M_P c^2}{2}. \qquad (96)$$

Масштаб массы h найден из соответствия ОТО при $|\tilde{\chi}|^2 = h^2$. Отсюда находится масса вейлона в модели [19]:

$$m_A^2 = 24\frac{\cosh^4\Theta}{\sinh^2\Theta}M_P^2, \qquad (97)$$

и масса скаляра:

$$\tilde{m}_\chi^2 = \frac{9}{8\pi}\frac{\cosh^8\Theta}{\sinh^2\Theta}M_P^2. \qquad (98)$$

Квантовые поправки приводят к изменению формы для потенциала поля классического лагранжиана (94), но не дают непосредственно величины масштаба нарушения массы. Эта величина задается из соображения соответствия конформного лагранжиана (89) лагранжиану ОТО (4), т. е. h задается величиной массы Планка в (96). Тем самым фиксируется конформный фактор $\Omega(x)$. Если же отождествления (96) не производить, а считать, что введенный скаляр h^2 преобразуется как $|\tilde{\chi}|^2$:

$$|\tilde{\chi}|^2 \to |\tilde{\chi}|^2\,\Omega^{-2}(x),\;\; h^2 \to h^2\Omega^{-2}(x), \qquad (99)$$

то вид потенциала изменился, но нарушения конформной инвариантности за счет квантовых поправок не происходит.

Сделаем замечание о конформной аномалии. Она заключается в том, что след усредненного по вакууму тензора энергии-импульса квантованного безмассового скалярного поля не равен нулю [9]. След же классического тензора энергии-импульса конформного лагранжиана обязан быть равен нулю [8]. Для комплексного скалярного поля с лагранжианом

$$L = |\chi|^2 R + 6g^{\mu\nu}\left(\partial_\mu\chi\right)^*\partial_\nu\chi, \qquad (100)$$

тензор энергии-импульса скалярного поля конформно-инвариантен и имеет нулевой след [9]:

$$T_{\mu\nu}^{(\chi)} = \partial_\mu\chi^*\partial_\nu\chi + \partial_\nu\chi^*\partial_\mu\chi - \\ -\frac{1}{6}g_{\mu\nu}\left(|\chi|^2 R + 6g^{\mu\nu}\left(\partial_\mu\chi\right)^*\partial_\nu\chi\right) + \\ +\frac{1}{3}\left(R_{\mu\nu} - \nabla_\mu\nabla_\nu + g_{\mu\nu}\nabla_\alpha\nabla^\alpha\right)|\chi|^2. \qquad (101)$$

Здесь надо учесть, что выполняются соотношения:

$$\nabla_\alpha\nabla^\alpha\chi = \frac{R}{6}\chi,\;\; \nabla_\alpha\nabla^\alpha\chi^* = \frac{R}{6}\chi^*. \qquad (102)$$

При вычислении квантовых поправок к следу тензора энергии-импульса $T_{\mu\nu}^{(\chi)}$ комплексного скалярного поля [8, 9] появляются добавки:

$$\left\langle T^{(\chi)\alpha}{}_{\alpha} \right\rangle_q =$$

$$= -\frac{1}{1440\pi^2}\left[C_{\alpha\beta\gamma\delta}C^{\alpha\beta\gamma\delta} + R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta} - \frac{1}{3}R^2 + \Box R \right], \quad (103)$$

где $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$ – тензор Вейля,

$$C_{\alpha\beta\gamma\delta}C^{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta} - 2R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta} + \frac{1}{3}R^2. \quad (104)$$

Для массивного скалярного поля χ след тензора энергии-импульса был бы равен:

$$T^{(\chi)\alpha}{}_{\alpha} = m^2 |\chi|^2 \quad (105)$$

при условии соблюдения равенства

$$\nabla_\alpha \nabla^\alpha \chi = \frac{R}{6}\chi - m^2\chi. \quad (106)$$

Итак, конформная аномалия приводит к нарушению конформной инвариантности лагранжиана свободного скалярного безмассового поля χ и появлению масштаба массы, связанного как с полем χ, так и с гравитацией. Здесь опять, как и в (94), квантовая теория указывает на нарушение конформной инвариантности, но не дает конкретного масштаба массы.

Вслед за авторами [8, 9] можно сделать вывод, что классические конформные теории гравитации являются приближенными и применимыми, когда квантовые эффекты малы. По вопросу, когда эти эффекты малы, есть разные точки зрения, см. для примера мнение, высказанное в [33].

7. Лагранжианы с двумя скалярными полями

В лагранжиане (69) функция $\chi(x)$ комплексная и имеет «двойную нагрузку» – взаимодействует как с вектором Вейля, так и с электромагнитным потенциалом. Она же связана с выбором масштаба измерения массы и при калибровке $\chi\chi^* = 1$ и $A_\mu = 0$ должна приводить к ОТО. Это делает модель с одним скалярным полем «экономной» по количеству используемых скаляров, но слишком «жесткой». То же замечание относится и к модели [19]. Кроме того, наличие ненулевого вектора Вейля после нарушения локальной конформной инвариантности заставляет решать проблему «эффекта вторых часов».

Рассмотрим другую модель, а именно введем две скалярные функции: вещественную $\beta(x)$ и комплексную $\varphi(x)$. Пусть $\beta(x)$ по прежнему является функцией Дирака, а $\varphi(x)$ отвечает за взаимодействие с электромагнитным потенциалом. Тогда можно записать такой лагранжиан:

$$L_\varphi = \beta^2 R + 6\beta_\lambda \beta^\lambda + (\alpha - 6)\breve{\partial}_\mu \beta \breve{\partial}^\mu \beta + \omega^2 F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} +$$

$$+ 2\lambda\left(\varphi\varphi^* - \beta^2\right)^2 + \zeta\left(\hat{\breve{\partial}}_\nu \varphi\right)^* \hat{\breve{\partial}}^\nu \varphi + \delta^2 H^{\mu\nu}H_{\mu\nu}. \quad (107)$$

Чтобы этот лагранжиан был вейлевски инвариантен, нам пришлось ввести модифицированную удлиненную производную скалярного поля φ:

$$\hat{\breve{\partial}}_\mu \varphi = \partial_\mu \varphi - w_\mu \varphi = \partial_\mu \varphi - (A + iB)_\mu \varphi. \quad (108)$$

Здесь вейлевский вес $W(\varphi) = -1$, ζ – параметр связи скалярного поля φ с вектором w_μ.

В принципе, можно ввести несколько вспомогательных скалярных полей, зависящих от дилатонного поля σ. В публикации [34] в рамках интегрируемой геометрии Вейля (IWG) предложена такая модель (в наших обозначениях):

$$\sigma = \sigma(x), \quad A_\mu = \frac{\partial_\mu \sigma}{\sigma}, \quad M_{pl}(\sigma) = M_P \sigma, \quad h(\sigma) = h_0 \sigma,$$

$$H = H(x), \quad (109)$$

$$L_H = -\left(\frac{M_{pl}^2(\sigma) + \xi H H^+}{2}\right)\breve{R} - g^{\mu\nu}\left(\breve{\partial}_\mu H\right)^+ \left(\breve{\partial}_\nu H\right) -$$

$$-\frac{\lambda}{4}\left(HH^+ - h^2(\sigma)\right), \quad (110)$$

$$S_H = -\int d^4x \sqrt{-g}\, L_H, \quad \breve{\partial}_\mu H = \partial_\mu H - A_\mu H. \quad (111)$$

Здесь H – дублет поля Хиггса, $\sigma = \sigma(x)$ – дилатонное поле, M_{pl} – переменная масса Планка, h – переменная величина массового параметра поля Хиггса H. Лагранжиан (110) позволяет «нарушить» электрослабую симметрию раньше нарушения конформной симметрии.

В следующих трех разделах рассмотрим три конформно-инвариантные модели, использующие два скалярных поля.

8. Локально конформный лагранжиан в модели Чудновского

Если не включать общий вектор Вейля в описание гравитационных явлений и взять скалярную кривизну R в лагранжиане для гравитации в первой степени, то можно использовать конформно-инвариантное выражение [8, 9]:

$$L_\varphi = \frac{1}{6}\left(R\varphi\varphi^* + 6\nabla\varphi^\lambda\varphi^*_\lambda\right). \qquad (112)$$

Здесь $\varphi = \varphi(x)$ – комплекснозначное безмассовое скалярное поле. Конформно-инвариантный лагранжиан (112) приводит к конформному уравнению Пенроуза–Тагирова–Черникова [22]:

$$\square\,\varphi - \frac{R}{6}\varphi = 0, \qquad (113)$$

соответствующему нулевой массе поля φ. В связи с этим возникает вопрос – как ввести массу поля φ в выражении (112). Для этого в [35] использован такой прием. Вводится дополнительное вещественное скалярное поле $\sigma(x)$. Поле $\sigma(x)$ – дилатонное. Можно ввести и необязательную для реализации основной идеи [35] связь электромагнитного поля B с полем φ. Конформно-инвариантный лагранжиан запишется так:

$$L_{\varphi\sigma} = \hat{\partial}^\mu\varphi\hat{\partial}_\mu\varphi^* + \frac{R}{6}\varphi\varphi^* - \frac{1}{2}\partial^\mu\sigma\partial_\mu\sigma - \frac{R}{12}\sigma^2 -$$

$$-\lambda\left(\varphi\varphi^* - h^2\sigma^2\right)^2 - \frac{1}{4}H_{\mu\nu}H^{\mu\nu}. \qquad (114)$$

Действие

$$S_{\varphi\sigma} = \int d^4x\sqrt{-g}L_{\varphi\sigma}. \qquad (115)$$

Здесь

$$\hat{\partial}_\mu\varphi = \partial_\mu\varphi - ieB_\mu, \qquad (116)$$

$$H_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu, \qquad (117)$$

e, λ и h – безразмерные параметры лагранжиана $L_{\varphi\sigma}$, B_ν – потенциал электромагнитного поля, использована система единиц Хевисайда. Лагранжиан $L_{\varphi\sigma}$ инвариантен относительно локальных конформных преобразований:

$$g_{\mu\nu}(x) \to \Omega^2(x)g_{\mu\nu}(x), \;\; \varphi(x) \to \varphi(x)\Omega^{-1}(x),$$

$$\sigma(x) \to \sigma(x)\Omega^{-1}(x), \qquad (118)$$

и относительно локальных калибровочных преобразований электромагнитного потенциала B:

$$B_\mu \to B_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\eta(x), \;\; \varphi \to \varphi\exp\left(i\eta(x)\right). \qquad (119)$$

Пусть теперь конформная инвариантность нарушена, т. е. выбрано конкретное значение $\varphi\varphi^* = \rho_0^2$. Пусть также выбрано и конкретное значение фазы скаляра η_0, так что

$$\varphi = \varphi_0 = \rho_0\exp\left(i\eta_0\right), \;\; \sigma = \sigma_0 = \frac{\rho_0}{h}. \qquad (120)$$

Для этого в (114) следует сделать конкретное конформное преобразование, взяв

$$\Omega^{-1}(x) = \frac{\sigma(x)}{\sigma_0}. \qquad (121)$$

Тогда дилатонное поле $\sigma(x)$ исчезает и лагранжиан (114) примет вид лагранжиана ОТО с минимальной связью с заряженным скалярным полем φ:

$$L_\varphi = -\frac{R}{16\pi G_N} + \hat{\partial}^\mu\varphi\hat{\partial}_\mu\varphi^* -$$

$$-\lambda\left(\varphi\varphi^* - \rho_0^2\right)^2 - \frac{1}{4}H_{\mu\nu}H^{\mu\nu}, \qquad (122)$$

где эффективная гравитационная постоянная равна

$$G_N = \frac{3h^2}{4\pi\rho_0^2\left(1-2h^2\right)} \qquad (123)$$

при условии $h^2 < \frac{1}{2}$.

Таким образом, нефизическое дилатонное поле $\sigma(x)$ в (114) имеет неправильный знак кинетической энергии, но это не делает модель [35] неприемлемой. До нарушения конформной инвариантности неправильный знак у поля $\sigma(x)$ не сказывается на физических результатах, поскольку не фиксирован масштаб измерений (поля φ и σ изначально безмассовые), а после нарушения конформной инвариантности поле $\sigma(x)$ исчезает и остается только имеющее физический смысл поле $\varphi(x)$ с массой ρ_0 в (122).

Сделаем общее замечание насчет знака у квадрата скалярного поля и производных скалярного поля φ. В лагранжиане они могут присутствовать в общем виде

$$L_\varphi = \varepsilon_1 m^2\varphi\varphi^* + \varepsilon_2 g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi^*,$$

$$S_\varphi = \int d^4x\sqrt{-g}L_\varphi, \qquad (124)$$

где $\varepsilon_1 = \pm 1$, $\varepsilon_2 = \pm 1$. Если знак $\varepsilon_1 = -1$, то это обычный случай классической теории поля с положительной массой m. Если знак $\varepsilon_1 = +1$, то речь идет о тахионном поле (tachyon field) с мнимой «потенциальной» массой im, которое говорит о неустойчивости рассматриваемой системы. Такая неустойчивость полезна при моделировании фазового перехода с потерей симметрии, когда система переходит в устойчивое состояние с другой положительной массой, например, в случае механизма Хиггса. В случае кинетического члена $\varepsilon_2 g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi^*$ помимо знака ε_2 следует дополнительно учитывать сигнатуру метрики $g^{\mu\nu}$. Если сигнатура метрики $(+,-,-,-)$ и $\varepsilon_2=+1$, то в нерелятивистском пределе $\varepsilon_2 g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi^* \sim \frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{\partial\varphi^*}{\partial t}$, что соответствует положительной кинетической энергии поля. Если сигнатура метрики $(-,+,+,+)$, и $\varepsilon_2=-1$, то кинетическая энергия поля также имеет правильный знак. Если сигнатура метрики $(+,-,-,-)$ и $\varepsilon_2=-1$ или сигнатура метрики $(-,+,+,+)$ и $\varepsilon_2=+1$, то это случай духового поля (ghost field) с отрицательной кинетической энергией. Духовые поля свидетельствуют о нефизичности модели и при квантовании приводят к отрицательным вероятностям и нарушению унитарности квантовой версии модели. Очевидно, что проблемы проистекают из-за того, что таким полям можно приписать отрицательную «кинетическую» массу. Такие духовые поля могут использоваться в промежуточных вычислениях, но не должны входить в окончательные результаты.

Отметим, что вектор Вейля A в лагранжиане (114) не присутствует; но это не значит, что его нет вообще. Действительно, при локально-конформном преобразовании (118) коэффициенты римановой связности Леви–Чивиты

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\alpha}\left(\partial_\mu g_{\alpha\nu} + \partial_\nu g_{\alpha\mu} - \partial_\alpha g_{\mu\nu}\right) \quad (125)$$

меняются по соотношению:

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} \to \Gamma^\lambda_{\mu\nu} + \delta^\lambda_\mu \frac{\Omega_\nu}{\Omega} + \delta^\lambda_\nu \frac{\Omega_\mu}{\Omega} - g_{\mu\nu}\frac{\Omega^\lambda}{\Omega}. \quad (126)$$

Чтобы они оставались инвариантными, их надо переопределить как коэффициенты связности $\breve{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}$ пространства Вейля, введя при этом вектор Вейля A_μ. Поскольку в лагранжиан (114) напряженность вектора Вейля не входит, удобно положить вектор Вейля

$$A_\mu = \frac{\sigma_\mu}{\sigma}, \quad (127)$$

тогда

$$\breve{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \delta^\lambda_\mu \frac{\sigma_\nu}{\sigma} - \delta^\lambda_\nu \frac{\sigma_\mu}{\sigma} + g_{\mu\nu}\frac{\sigma^\lambda}{\sigma}. \quad (128)$$

После нарушения конформной инвариантности коэффициенты связности будут равны римановым $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$. Таким образом, модель [35] основана на интегрируемой геометрии Вейля (IWG) со связностью, задаваемой формулой (128).

Инфлатоном называют частицу инфлатонного поля (поля, приводящего к инфляции). После нарушения конформной инвариантности и квантовании поле $\varphi(x)$ может играть роль инфлатонного поля. Здесь речь идет об определенной простой модели нарушения конформной инвариантности и об определенной модели инфляции с выбором зависимости инфляционного потенциала в виде

$$U(\varphi) = \lambda\left(\varphi\varphi^* - \rho_0^2\right)^2. \quad (129)$$

Итак, модель Чудновского [35] проста, и в то же время совмещает одновременно нарушение локальной конформной инвариантности и появление массы у первоначально безмассового поля φ. Ее можно назвать игрушечной моделью (toy model) одновременного нарушения конформной симметрии и появления массы у скалярного поля посредством механизма Хиггса. В этой модели «нефизическое» дилатонное поле исчезает после нарушения конформной инвариантности. Но отметим, что в некоторых моделях инфлатон, в принципе, может совпадать с дилатоном.

9. Конформный лагранжиан в модели Bars, Steinhardt, Turok

В статье [2] предложена более громоздкая модель, которая идейно напоминает модель Чудновского. Выпишем соответствующий лагранжиан:

$$\begin{aligned} L_{\varphi H} = &-\frac{1}{12}\left(\sigma^2 - 2H^+H\right)R - \\ &-g^{\mu\nu}\left(\frac{1}{2}\partial_\mu\sigma\partial_\nu\sigma - D_\mu H^+ D_\nu H\right) \\ &-\left(\frac{\lambda}{4}\left(H^+H - h^2\sigma^2\right)^2 + \frac{\lambda'}{4}\sigma^4\right) + L_{SM}. \end{aligned} \quad (130)$$

По сравнению с обозначениями в [2], мы изменили некоторые знаки в лагранжиане и изменили обозначение дилатонного поля на $\sigma(x)$. Здесь $H(x)$ дублет поля Хиггса, L_{SM} – добавок к лагранжиану, куда входят все остальные поля (кварки, лептоны, калибровочные бозоны). В унитарной калибровке для симметрии $SU(2)\times U(1)$ можно взять поле Хиггса H в виде:

$$H(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\varphi(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \quad (131)$$

После нарушения конформной симметрии при фиксировании дилатонного поля $\sigma(x)=\sigma_0$ поле $H(x)$ приобретает массу,

$$H_0^+ H_0 = h^2\sigma_0^2,\ \ h=\frac{246\ \text{ГэВ}}{\sqrt{2}\sigma_0},$$

$$\frac{1}{16\pi G_N}=\frac{1-2h^2}{12}\sigma_0^2. \qquad (132)$$

Итак, модель [2] по идеологии совпадает с моделью [35]. Отметим, что здесь фазовый переход с нарушением электрослабой симметрии происходит одновременно с нарушением конформной симметрии. Как можно предположить, в публикации [2], видимо, имеется в виду случай интегрируемой геометрии Вейля с вектором Вейля $A_\mu=\frac{\sigma_\mu}{\sigma}$, который становится нулевым после нарушения симметрии, хотя об этом в [2] не говорится.

В публикации [2], помимо приведенной модели, предлагается также более общая модель с несколькими скалярными полями, которую здесь не будем рассматривать.

10. Конформный лагранжиан в модели de Cesare, Moffat, and Sakellariadou

В публикации [3] предложена модель, которая основана на общей геометрии Вейля, с учетом взаимодействия вектора Вейля с полем Хиггса. Эта модель является в некотором смысле непосредственным усложнением модели [2]. Полный лагранжиан модели [3] выглядит несколько громоздко, поэтому лучше рассмотреть его по частям. Мы изменили некоторые знаки и обозначения по сравнению с [3], чтобы сохранить в них преемственность с предыдущими обозначениями нашей публикации.

В [3] вводится вещественное дилатонное поле σ и поле Хиггса H:

$$L_g=\left(-\xi_\sigma\sigma^2+2\xi_H H^+H\right)\breve{R}, \qquad (133)$$

где $\breve{R}$ – кривизна, вычисленная с учетом вектора Вейля A:

$$\breve{R}=R-6\nabla_\alpha A^\alpha-6g_{\mu\nu}A^\mu A^\nu. \qquad (134)$$

Производные поля Хиггса и дилатонного поля вводятся с учетом вектора Вейля:

$$L_H=g^{\mu\nu}\left(\partial_\mu H^+-A_\mu H^+\right)\left(\partial_\nu H-A_\nu H\right), \qquad (135)$$

$$L_\sigma=-\frac{\xi_\omega}{2}g^{\mu\nu}\left(\partial_\mu\sigma-A_\mu\sigma\right)\left(\partial_\nu\sigma-A_\nu\sigma\right). \qquad (136)$$

Вводится потенциал полей H и σ:

$$V\left(\sigma,H\right)=\frac{\lambda}{4}\left(H^+H-h^2\sigma^2\right)^2+\lambda'\sigma^4. \qquad (137)$$

Помимо этого вводится напряженность вектора Вейля:

$$L_A=-\frac{1}{4\xi_A^2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu},\ \ F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu. \qquad (138)$$

Это значит, что в [3] имеется в виду вектор Вейля, который не сводится к градиенту скаляра. Полный лагранжиан модели [3] с безразмерными параметрами ξ_σ, ξ_H, ξ_ω, λ, λ', ξ_A записывается так:

$$L_{\varphi HA}=L_g+L_H+L_\sigma-V(\sigma,H)+L_A. \qquad (139)$$

Нарушение конформной симметрии $\sigma(x)=\sigma_0$ фиксирует параметры модели, устанавливая значения космологической постоянной Λ и массы μ бозона Хиггса:

$$\lambda'\sigma_0^4=\frac{\Lambda}{8\pi G_N},\ \ \frac{v^2}{2}=h^2\sigma_0^2,\ \ \xi_\sigma\sigma_0^2+\xi_H v^2=\frac{1}{16\pi G_N},$$

$$\mu^2=-\lambda h^2\sigma_0^2. \qquad (140)$$

После нарушения конформной симметрии у векторного поля Вейля появляется масса:

$$m_A^2=3\left(\xi_\sigma\sigma_0^2+\xi_H v^2\right)+\frac{\xi_\omega}{4}\sigma_0^2+\frac{v^2}{4}=$$

$$=\frac{3}{16\pi G_N}+\frac{v^2}{4}\left(\frac{\xi_\omega}{2h^2}+1\right). \qquad (141)$$

Соответствующее действие для векторного поля вейлонов записывается в виде:

$$S_A=\int d^4x\sqrt{-g}\left[-\frac{1}{4\xi_A^2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}-\frac{1}{2}m_A^2A_\mu A^\mu\right]. \qquad (142)$$

Модель [3] не определяет конкретную величину массы вейлона m_A.

11. Обсуждение

Здесь рассмотрена лишь очень малая часть вариантов конформных лагранжианов, имеющихся в литературе, и наш обзор очень ограничен по объему выборки. Многие важные работы вообще не были упомянуты (обзор множества подходов заслуживает отдельной публикации). Но тем не менее приведенные примеры конформных лагранжианов представляются достаточно характерными, показывающими одно из определенных направлений, по которому движется мысль исследователей в области альтернативных вариантов гравитации.

На наш взгляд, позволить комплексному дилатонному полю играть двойную роль как в модели Hans Ohanian [19] (иметь физическое значение после нарушения конформности) – значит делать модель достаточно «жесткой». Комплексная скалярная функция тогда играет роль и дилатона, и поля, управляющего инфляцией. На основе небольшого набора параметров модели трудно описать наблюдаемые явления в космологии и физике частиц. Кроме того, поле вектора Вейля, становящееся массивным после нарушения конформности, имеет проблему, связанную с «эффектом вторых часов».

Модель с двумя скалярными полями в духе подхода Чудновского [35] более гибкая. Но она имеет некоторый дефект – дилатонное поле имеет неправильный знак кинетической энергии, как и в моделях [2, 3].

Соблюсти правильный знак у кинетического члена дилатонного поля можно, добавляя вейлевское взаимодействие с векторным полем типа (67), (90), (108), как это подчеркнуто в [19]. Но введенное таким образом векторное поле, на наш взгляд, не желательно отождествлять с вектором Вейля A, чтобы не столкнуться с эффектом «вторых часов» [24]. Проще оставаться в рамках интегрируемой геометрии Вейля. Тогда вектор Вейля можно отождествить с градиентом дилатонного поля. Это поле β должно быть вещественным, так как градиент скалярного поля будет входить в аффинную связность, как в выражении (128). Но модель с одним вещественным векторным полем достаточно «бедна» и, как минимум, нуждается еще в комплексном скалярном поле.

Таким образом, можно сформулировать следующую модель. В нашей модели имеются: вещественное дилатонное поле $\beta(x)$, комплексное скалярное поле $\varphi(x)$, вещественный вектор $C_\mu(x)$, электромагнитный потенциал $B_\mu(x)$. Введем безразмерные параметры α, μ, λ, ρ, ξ, ω^2, δ^2. Действие $S_{\beta\varphi} = -\dfrac{M_P^2}{2}\int d^4x\sqrt{-g}L_{\beta\varphi}$.

Лагранжиан модели записывается так:

$$L_{\beta\varphi} = \beta^2 R + 6\beta_\lambda\beta^\lambda + \alpha g^{\mu\nu}\left(\beta_\mu - C_\mu\beta\right)\left(\beta_\mu - C_\mu\beta\right) + \\ +\mu\left(\varphi\varphi^* - \rho\beta^2\right)^2 + 2\lambda\beta^4 + \xi g^{\mu\nu}\left(\partial_\mu\varphi - (C_\mu + iB_\mu)\varphi\right)^* \times \\ \times\left(\partial_\nu\varphi - (C_\nu + iB_\nu)\varphi\right) + \delta^2 H^{\mu\nu}H_{\mu\nu} + \omega^2 E^{\mu\nu}E_{\mu\nu}, \quad (143)$$

где введена производная комплексного скалярного поля φ, которая одновременно вейлевски-инвариантна и калибровочно-инвариантна:

$$\hat{\hat{\partial}}_\mu\varphi = \partial_\mu\varphi - (C_\mu + iB_\mu)\varphi. \quad (144)$$

Аффинная связность записывается в рамках интегрируемой геометрии Вейля (1), где вектор Вейля градиентный:

$$A_\nu \equiv \frac{\partial\beta_\nu}{\beta}. \quad (145)$$

До нарушения конформной симметрии масса частиц зависит от дилатонного поля:

$$m = m_0\beta(x). \quad (146)$$

Напряженности векторных полей C и B, вообще говоря, ненулевые:

$$E_{\mu\nu} = \partial_\mu C_\nu - \partial_\nu C_\mu, \; H_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu. \quad (147)$$

Конечно, в модели можно заменить скаляр φ на дублет поля Хиггса: $\varphi(x) \to H(x)$, а также добавить взаимодействие с фермионами подобно тому, как это сделано в [2, 3, 28]. Можно ввести и калибровочные поля как в [3].

Предлагаемый нами лагранжиан (143) конформно инвариантен. Основное отличие от моделей [15] и [3] заключается в том, что вектор C, хотя и преобразуется при локальных конформных преобразованиях как вектор Вейля A:

$$g_{\mu\nu} \to \tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2(x)g_{\mu\nu}, \; A_\mu \to \tilde{A}_\mu = A_\mu - \frac{\partial\ln\Omega(x)}{\partial x^\mu}, \\ C_\mu \to \tilde{C}_\mu = C_\mu - \frac{\partial\ln\Omega(x)}{\partial x^\mu}, \quad (148)$$

но не совпадает с ним. Это свойство позволяет избавиться от эффекта «вторых часов», но сохранить основные черты моделей [3] и [15].

Список литературы

1. Weyl, Hermann. *Space – Time – Matter.* Translated from the 4th German edition. London. Reprint New York. Dover. 1952.

2. Itzhak Bars, Paul Steinhardt, Neil Turok. *Local conformal symmetry in physics and cosmology* // Physical Review D. 2014, N89, P. 043515(1–15).

3. Marco de Cesare, John W. Moffat, and Mairi Sakellariadou. *Local conformal symmetry in non-Riemannian geometry and the origin of physical scales* // arXiv:1612.08066v2 [hep-th] 3 Sep 2017.

4. Mirabotalebi S., Jalalzadeh S., M. Sadegh Movahedand H. R. Sepangi. *Weyl-Dirac theory predictions on galactic scales* // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2008. Vol. 385, Issue 2. P. 986–994. arXiv: 0504117v3 [gr-qc].

5. Rosen N. *Weyl's Geometry and Physics.* Foundation of physics. 1982. V12, N3. P 213–235.

6. Mark Israelit. *A Weyl-Dirac cosmological model with DM and DE* // Arxiv: 1008.0767 [gr-qc]. 2009.

7. Бабурова О. В., Фролов Б. Н. *Математические основы современной теории гравитации:* Монография. М.: Прометей, 2012.

8. Birrell N. D. and Davies P. C. W.. *Quantum Fields in Curved Space.* Cambridge Monogr. Math. Phys., 1982. Рус. перев.: Биррелл Н., Девис П. *Квантованные поля в искривленном пространстве-времени.* М.: Мир, 1984.

9. Гриб А. А., Мамаев С. Г., Мостепаненко В. М. *Квантовые эффекты в интенсивных внешних полях.* М.: Атомиздат, 1980.

10. Линде А. Д. *Физика элементарных частиц и инфляционная космология.* М.: Наука, 1989.

11. Лукаш В. Н., Михеева Е. В. *Физическая космология.* М.: Физматлит. 2010.

12. Rubakov V. A. *Harrison_Zeldovich spectrum from conformal invariance* // JCAP, 2009. 0909, 030. ArXiv:0906.3693.

13. Shimon Meir. *Conformal Higgs Gravity//* arXiv:1712.02638v3 [gr-qc] 14 Jun 2018.

14. Hitoshi Nishino and Subhash Rajpoot. *Standard Model and SU(5) GUT with Local Scale Invariance and the Weylon* // arXiv:0805.0613v1 [hep-th] 5 May 2008.

15. Dirac, P.A.M. *Long range forces and broken symmetries* // Proceedings of Royal Society London. 1973. A, N 333. P. 403–418.

16. Brans Carl, Dicke, Robert H. *Mach's principle and a relativistic theory of gravitation* // Physical Review. 1961. Vol. 124. P. 925–935.

17. Новиков И. Д., Шацкий А. А., Алексеев С. О., Третьякова Д. А. *Идеи Я. Б. Зельдовича и современная космология Бранса–Дикке* // УФН, 2014. Т. 184, N 4, С. 379–386.

18. Valerio Faraoni. *Illusions of general relativity in Brans–Dicke gravity* // ArXiv:gr-qc/9902083, v1. 26 Feb 1999.

19. Hans C. Ohanian. *Weyl gauge-vector and complex dilaton scalar for conformal symmetry and its breaking* // General Relativity and Gravitation, March 2016. Vol. 48. P. 25.

20. Вергелес С. Н. *Лекции по теории гравитации.* М.: МФТИ, 2001.

21. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Теория поля.* М.: Наука, 1988.

22. Penrose R. *Zero rest-mass fields including gravitation: asymptotic behavior* // Proceedings of Royal Society London. 1965. Ser A 284. P. 159–203.

23. Седов С. Ю. *Вейлевская гравитация и вейлоны* // ВАНТ. Сер. Теор. и прикл. физика. 2019. Вып. 4. С. 14–24.

24. Carlos Romero. *Is Weyl unified theory wrong or incomplete?* // arXiv:1508.03766v2 [gr-qc] 25 Aug 2015.

25. Pauli W. *Theory of relativity.* Pergamon Press. 1958.

26. Филиппов А. Т. *Аффинная гравитация Вейля–Эддингтона–Эйнштейна в контексте современной космологии* // ТМФ. 2010. Т. 163. N3. С. 430–448.

27. Gregorash D., Parini G. *Weyl-Dirac theory and Superconductivity* // Nuovo Cimento. 1981. Vol. 63B. N2. P. 487–509.

28. Drechsler W., Tann H. *Broken Weyl invariance and the origin of mass* // Foundations of Physics. 1999. Vol. 29(7). P. 1023–1064.

29. Erhard Scholz. *Paving the way for transitions – a case for Weyl geometry* // ArXiv:1206.1559v6 [gr-qc] 27 Jul 2015.

30. Weinberg E. J. *Radiative corrections as the origin of spontaneous symmetry breaking.* A Ph.D. Thesis on Physics. Harvard University, Cambridge, Massachusetts. May 1973 // ArXiv:hep-th/0507214v1 21 Jul 2005.

31. Englert F., Brout R. *Broken Symmetry and the Mass of Gauge Vector Mesons//* Physical Review Letters. 1964. Vol. 13 (9). P. 321–323.

32. Higgs P. *Broken Symmetries and the Masses of Gauge Bosons* // Physical Review Letters. 1964. Vol. 13 (16). P. 508–509.

33. Пенроуз Р. *Циклы времени.* М.: БИНОМ. Лаборатория знаний. 2014.

34. Israel Quiros. *Scale invariance and broken electroweak symmetry may coexist together* // ArXiv:1312.1018v3 [gr-qc], 3 Jan 2014.

35. Чудновский Е. М. *Спонтанное нарушение конформной инвариантности и механизм Хиггса* // ТМФ. 1978. Т. 35, № 3. С. 398–400.

Статья поступила в редакцию 05.04.2022