

Ф Г У П

ISSN 0234-0763

«РОССИЙСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ЯДЕРНЫЙ ЦЕНТР – ВНИИЭФ»

---

# ВОПРОСЫ АТОМНОЙ НАУКИ И ТЕХНИКИ

---

СЕРИЯ:

Теоретическая и прикладная  
физика

ВЫПУСК 1

**2022**

Ф Г У П

«РОССИЙСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ЯДЕРНЫЙ ЦЕНТР – ВНИИЭФ»

# ВОПРОСЫ АТОМНОЙ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СЕРИЯ:

**Теоретическая и прикладная  
физика**

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ СБОРНИК

ВЫПУСК 1

Издается с 1984 г.

Саров – 2022

### **Уважаемые читатели!**

Редакция н/т сборника «Вопросы атомной науки и техники» серии «Теоретическая и прикладная физика» информирует о том, что начиная со 2-го полугодия 2008 г. журнал распространяется согласно новым правилам подписки.

Теперь подписаться на сборник можно во всех отделениях связи России по каталогу Агентства «Роспечать», раздел «Периодические издания НТИ», подписной индекс 72246.

Цена одного журнала – 200 руб.

В год издается 4 выпуска.

По всем вопросам обращаться по адресу:

*607188 г. Саров Нижегородской обл., пр. Мира, 37, РФЯЦ-ВНИИЭФ, ИТМФ.*

*Редакция журнала ВАНТ, сер. «Теоретическая и прикладная физика».*

Тел. (83130)7-54-96; e-mail: kul@otd68.vniief.ru

Главный редактор Ю. А. Трутнев

Редакционная коллегия:

В. А. Жмайло, П. А. Лобода, Н. В. Лычагина –  
ответственный секретарь, Б. А. Надыкто – зам. главного редактора, А. В. Певницкий,  
В. А. Симоненко, В. П. Соловьев, А. К. Чернышев

## О ВЕКТОРЕ ВЕЙЛЯ И ВЕЙЛЕВСКИХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ

С. Ю. Седов

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

Рассмотрено понятие геодезической в общем пространстве Вейля и в вейлевской гравитации. Обсуждается идея переменной массы и ее интерпретация в вейлевской гравитации.

Вейлевская геометрия приводит к двум типам геодезических линий – инвариантным и ковариантным. Ковариантные геодезические можно интерпретировать как экстремали действия для точечной частицы с переменной массой. Соответственно, уравнения свободного движения для точечной частицы в вейлевской геометрии содержат дополнительный член, который можно назвать вейлевской силой.

Рассмотрен вопрос о том, как совместить такую интерпретацию со стандартной физикой, избежав парадоксального эффекта вторых часов. Предложено два варианта: 1) неинтегрируемый вектор Вейля имеет малую норму на макроскопических масштабах и меняется хаотически, так что усреднение по векторному полю приводит лишь к стохастизации движения частицы; 2) ненулевое значение вектора Вейля имеет место только в области малых масштабов, в аналогах вихревых колец.

*Ключевые слова:* геометрия Вейля, связность Вейля, вектор Вейля, вейлевская гравитация.

### Введение

В последние годы рассматриваются различные варианты применения вейлевской локальной масштабной симметрии к гравитации. Идеи Вейля, сформулированные в начале 20 века [1], продолжают интенсивно обсуждаться и в 21 веке, сто лет спустя. В качестве относительно недавних примеров сошлемся на публикации [2, 3].

Особенно актуальна идея вейлевской симметрии в космологии, в которой физика частиц объединяется с альтернативными теориями гравитации. Поскольку логически последовательной теории квантовой гравитации нет, то такое, феноменологическое по существу, объединение разнородных областей физики названо нами гибридным [4].

Есть методические вопросы, относящиеся к пространству Вейля, которые в физической литературе изложены, на наш взгляд, недостаточно ясно. В этой публикации рассмотрим некоторые аспекты определения геодезических в пространстве

Вейля. Рассмотрим также понятие массы точечной частицы и понятие силы в вейлевской гравитации.

### 1. Основы вейлевской геометрии

Геометрия Вейля изложена в физической литературе достаточно подробно (см., например, [1, 5, 6–8]). Здесь мы рассмотрим только основные понятия.

Объектом изучения в вейлевской геометрии является дифференцируемое многообразие  $M$  с заданной билинейной невырожденной дифференциальной 2-формой (метрической функцией)  $g$  и дифференциальной 1-формой  $A$ . Этот геометрический объект называется пространством Вейля, его можно обозначить как  $(M, g, A)$ . Для определенности следует задать конкретную сигнатуру метрики  $g$ . Новым по сравнению с римановой геометрией является введение дополнительной 1-формы  $A$ . Эта 1-форма является замкнутой, если  $dA = 0$ , и

точной, если существует такая 2-форма  $\sigma$ , что  $A = d\sigma$ . Здесь  $d$  – оператор внешнего дифференцирования. Проще говоря, точная форма  $A$  соответствует случаю, когда вектор  $A_\alpha$  представим как градиент некоторого скаляра  $A_\alpha = \frac{\partial\phi(x)}{\partial x^\alpha}$ .

Замкнутая форма соответствует случаю, когда  $F_{\alpha\beta} = \frac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta} \equiv 0$ . В общем случае вейлевской геометрии  $A$  не является замкнутой формой.

Вейлевское (локальное масштабное) преобразование задано соотношениями:

$$g \rightarrow \tilde{g} = \Omega^2 g, \quad A \rightarrow \tilde{A} = A - d \log \Omega, \quad (1)$$

где  $\Omega$  – строго положительная дифференцируемая вещественная функция. В координатном виде эти преобразования выглядят так:

$$g_{\mu\nu}(x) \rightarrow \tilde{g}_{\mu\nu}(x) = \Omega^2(x)g_{\mu\nu}(x), \quad \Omega(x) = \exp(\sigma(x)), \quad (2)$$

$$A_\mu \rightarrow \tilde{A}_\mu = A_\mu - \frac{\partial\sigma}{\partial x^\mu} = A_\mu - \nabla_\mu \sigma, \quad \sigma = \ln \Omega(x). \quad (3)$$

Здесь преобразованные величины обозначаются волнистой чертой вверх. Коэффициенты вейлевской связности  $\tilde{\Gamma}$  определяются с помощью метрики  $g_{\alpha\beta}(x)$  и вектора Вейля  $A_\nu(x)$ . В координатном виде они выглядят следующим образом [6–9]:

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda &= \frac{1}{2} g^{\lambda\alpha} (\tilde{\partial}_\mu g_{\alpha\nu} + \tilde{\partial}_\nu g_{\alpha\mu} - \tilde{\partial}_\alpha g_{\mu\nu}) = \\ &= \Gamma_{\mu\nu}^\lambda + \delta_\mu^\lambda A_\nu + \delta_\nu^\lambda A_\mu - g_{\mu\nu} A^\lambda, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\tilde{\partial}_\mu g_{\alpha\beta} = (\partial_\mu + 2A_\mu) g_{\alpha\beta}, \quad (5)$$

$$\left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\alpha} (\partial_\mu g_{\alpha\nu} + \partial_\nu g_{\alpha\mu} - \partial_\alpha g_{\mu\nu}) \quad (6)$$

– обычные символы Кристоффеля связности Леви-Чивита. Выпуклой чертой вверх («шляпкой») обозначены вейлевские аналоги величин римановой геометрии. Обычная ковариантная производная  $\nabla_\lambda$  произвольного тензора  $B_{\mu\nu}$  в римановом пространстве имеет вид:

$$\nabla_\lambda B_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\lambda} B_{\mu\nu} - \Gamma_{\lambda\mu}^\alpha B_{\alpha\nu} - \Gamma_{\lambda\nu}^\alpha B_{\mu\alpha}. \quad (7)$$

В случае вейлевской ковариантной производной для произвольного тензора  $B_{\mu\nu}$  по аналогии с римановым случаем имеем:

$$\tilde{\nabla}_\lambda B_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\lambda} B_{\mu\nu} - \tilde{\Gamma}_{\lambda\mu}^\alpha B_{\alpha\nu} - \tilde{\Gamma}_{\lambda\nu}^\alpha B_{\mu\alpha}, \quad (8)$$

поэтому для метрического тензора получаем:

$$\tilde{\nabla}_\lambda g_{\alpha\beta} = -2A_\lambda g_{\alpha\beta}. \quad (9)$$

Аналогично определяется  $\tilde{\nabla}_\lambda$  в общем случае с заменой связности Леви-Чивита на вейлевскую:  $\Gamma$  на  $\tilde{\Gamma}$ .

Для риманова пространства имеет место условие метричности

$$\nabla_\lambda g_{\alpha\beta} = 0. \quad (10)$$

Вейлевское многообразие неметрическое вследствие наличия соотношения (9). Рассматривают также и другие неметрические пространства аффинной связности, например, пространства с кручением [10], но они здесь не понадобятся. Как видно из выражений (2), (3), вектор Вейля  $A$  отвечает за локальные масштабные преобразования.

Вейлевским весом геометрической величины  $H$  называют число  $k = W(H)$ , которое является степенью в вейлевском преобразовании:

$$H \rightarrow \tilde{H} = \Omega^k H. \quad (11)$$

Можно определить вейлевскую инвариантную производную метрического тензора  $g_{\alpha\beta}$  с вейлевским весом  $W = 2$ :

$$\tilde{D}_\mu g_{\alpha\beta} = (\tilde{\nabla}_\mu + W(g_{\alpha\beta})A_\mu)g_{\alpha\beta} = 0. \quad (12)$$

Это соотношение является аналогом соотношения метричности  $\nabla_\mu g_{\alpha\beta} = 0$  в римановой геометрии.

В общем виде для скаляра  $h$ , вектора  $h_\alpha$  и тензора  $h_{\alpha\beta}$  вейлевские ковариантные производные определяются так:

$$\tilde{\partial}_\mu h = \partial_\mu h + W(h)A_\mu h, \quad (13)$$

$$\tilde{D}_\mu h(x) = [\tilde{\nabla}_\mu + W(h)A_\mu]h(x) = \tilde{\partial}_\mu h(x), \quad (14)$$

$$\tilde{D}_\mu h_\alpha \equiv [\tilde{\nabla}_\mu + W(h_\alpha)A_\mu]h_\alpha, \quad (15)$$

$$\tilde{D}_\mu h_{\alpha\beta} \equiv [\tilde{\nabla}_\mu + W(h_{\alpha\beta})A_\mu]h_{\alpha\beta}. \quad (16)$$

Величины (11), преобразующиеся с вейлевским весом  $W$ , называют вейлевски ковариантными, а если  $W(H) = 0$ , то вейлевски инвариантными. В частности, действие для вейлевской гравитации  $S_g$  должно быть вейлевски инвариантным:

$\tilde{S}_g = S_g$ . Соответственно, лагранжиан гравитации  $L_g$  должен быть вейлевски ковариантным с весом  $W(L_g) = -4$ , так как

$$W\left(\sqrt{|\det g|}\right) = 4, \quad (17)$$

и

$$S_g = \int d^4x \sqrt{|\det g|} L_g. \quad (18)$$

Отметим, что с точностью до вейлевского преобразования  $(M, g, A)$  и  $(M, \tilde{g}, \tilde{A})$  совпадают, т. е. локальное масштабное преобразование не меняет пространство Вейля. Все экземпляры  $(M, \tilde{g}, \tilde{A})$  равнозначны. Их объединяют в класс эквивалентности по отношению к калибровке  $\Omega$ .

В связи с определением пространства Вейля  $(M, g, A)$  заметим здесь, что физическое пространство-время  $(M, g_1, A_1)$  уникально по отношению к выбору калибровки, то есть среди набора всех вейлевских эквивалентных экземпляров из класса  $(M, g, A)$  выделен один экземпляр при фиксировании калибровочной функции  $\Omega = \Omega_1$ . По этому поводу будем говорить, что произошло нарушение вейлевской инвариантности. Такое нарушение связано с тем, что в физической гравитации четко определены масштабы времени расстояния и массы. Характерными единицами обычно служат планковская длина, планковское время и планковская масса.

Отметим, что, когда в объекте  $(M, g, A)$   $A$  является точной 1-формой, можно подобрать калибровку  $\Omega$  такую, что  $\tilde{A}_\mu$  обратится в нуль на всем пространстве  $M$ :

$$A_\mu \rightarrow \tilde{A}_\mu = A_\mu - \frac{\partial \sigma}{\partial x^\mu} = 0. \quad (19)$$

Такое вейлевское пространство называется интегрируемым вейлевским пространством. Для интегрируемого вейлевского пространства  $A = d\sigma$ , а калибровка  $\Omega$ , приводящая к  $\tilde{A}_\mu = 0$ , называется эйнштейновской. Объект  $(M, g, d\sigma)$  в литературе называют IWG (Integrable Weylian Geometry, [6–8]) или WIST (Weyl Integrable SpaceTime, см. [11]). При выборе конкретной эйнштейновской калибровки получается конкретный экземпляр риманова пространства. Таким образом, интегрируемое вейлевское пространство представляет собой класс эквивалентности различных римановых пространств, находящихся в конформном соответствии между собой. Оно характеризуется единственной, инвариантной к выбору калибровки, вейлевской связностью  $\tilde{\Gamma}$  в отличие от римановых экземпляров с различными связностями Леви-Чивита  $\Gamma$ .

В литературе вектор Вейля  $A$  у разных авторов определяется с точностью до знака и с точностью до множителя 2. Кроме того, сигнатура метрики  $g$  также выбирается по-разному, как  $(-, +, +, +)$  и как  $(+, -, -, -)$ . Выберем здесь последнюю сигнатуру. Она соответствует выбору в [12–15]. Кривизна  $R$ , тензор Риччи  $R_{\alpha\beta}$  и тензор кривизны  $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$  также определяются различным образом с точностью до знака. Так, например, тензор кривизны в [12–15] имеет обратный знак в сравнении с выражением для него, приведенным в [16]. Тензор Риччи в [13, 15] имеет обратный знак по сравнению с выражением из [12, 14, 16]. Мы будем придерживаться, в основном, соглашений [14]:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = g_{\alpha\rho} R^{\rho}_{\beta\gamma\delta}, \quad R_{\mu\nu} = R_{\mu\alpha\nu}{}^\alpha = R^\alpha_{\mu\alpha\nu}, \\ R = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}. \quad (20)$$

Вейлевский тензор кривизны определяется аналогично случаю римановой геометрии:

$$R_{\mu\nu\rho}{}^\alpha = \partial_\nu \Gamma^\alpha_{\mu\rho} - \partial_\mu \Gamma^\alpha_{\nu\rho} + \Gamma^\alpha_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\rho} - \Gamma^\alpha_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\rho}, \quad (21)$$

$$\tilde{R}_{\mu\nu\rho}{}^\alpha = \partial_\nu \tilde{\Gamma}^\alpha_{\mu\rho} - \partial_\mu \tilde{\Gamma}^\alpha_{\nu\rho} + \tilde{\Gamma}^\alpha_{\nu\lambda} \tilde{\Gamma}^\lambda_{\mu\rho} - \tilde{\Gamma}^\alpha_{\mu\lambda} \tilde{\Gamma}^\lambda_{\nu\rho}, \quad (22)$$

$$\tilde{R} = R - 6\nabla A - 6A^2. \quad (23)$$

Приведем выражение для тензора Эйнштейна

$$\tilde{G}_{\mu\nu} = \tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \tilde{R} \text{ из [17]:}$$

$$\tilde{G}_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} + 2A_\mu A_\nu + g_{\mu\nu} A^2 + 2g_{\mu\nu} \nabla A - 3\nabla_\mu A_\nu + \nabla_\nu A_\mu. \quad (24)$$

Если к этому выражению прибавить антисимметричный тензор

$$F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu, \quad (25)$$

получим

$$\tilde{G}'_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} + 2A_\mu A_\nu + g_{\mu\nu} A^2 + 2g_{\mu\nu} \nabla A - 2\nabla_\mu A_\nu. \quad (26)$$

## 2. Геодезические в пространстве Вейля

Геодезические линии  $\gamma(t)$  в пространстве Вейля, как и в пространстве Римана определяют условием, что касательные векторы должны переноситься параллельно самим себе. Автопараллельные инвариантные геодезические в пространстве Вейля определяются соотношениями, аналогичными римановым геодезическим, но с заменой связности Леви-Чивита  $\Gamma$  на вейлевскую связность  $\tilde{\Gamma}$ :

$$\tilde{\nabla}_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0, \quad \dot{\gamma}^\lambda + \tilde{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu} \cdot \dot{\gamma}^\mu \dot{\gamma}^\nu = 0, \quad \dot{\gamma}^\alpha = \frac{dx^\alpha}{dt}, \quad (27)$$

где  $t$  – аффинный вейлевский инвариантный параметр кривой  $\gamma$ . Действительно, применяя формулу параллельного переноса к касательному вектору  $\dot{\gamma}^\alpha$  в пространстве Вейля, имеем:

$$d\left(\frac{dx^\alpha}{dt}\right) = -\tilde{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{dt} dx^\gamma, \quad (28)$$

откуда и вытекают соотношения (27). Эти геодезические в пространстве Вейля не являются линиями со стационарным расстоянием, так как при параллельном перенесении не сохраняется длина вектора. Отметим, что на кривой  $\gamma(t)$

$$\frac{d}{dt}(dx^\alpha dx_\alpha) = -\left(dx^\alpha dx_\alpha\right)\left(2A_\beta \frac{dx^\beta}{dt}\right), \quad (29)$$

что согласуется с выражением  $\tilde{\nabla}_\lambda g_{\alpha\beta} = -2A_\lambda g_{\alpha\beta}$ . Длины геодезических зависят от калибровки в силу соотношения (29).

При вейлевских преобразованиях вейлевская связность инвариантна:

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda \rightarrow \tilde{\tilde{\Gamma}}_{\mu\nu}^\lambda = \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda, \quad (30)$$

и для инвариантных вейлевских геодезических [6]

$$\begin{aligned} \dot{L}_t = \sqrt{g_{\alpha\beta} \dot{\gamma}^\alpha \dot{\gamma}^\beta} \rightarrow \tilde{\dot{L}}_t = \Omega \dot{L}_t, \quad W(\dot{L}_t) = 1, \\ \gamma(t) \rightarrow \tilde{\gamma}(t) = \gamma(t). \end{aligned} \quad (31)$$

Введем 4-скорость  $u$ . Для нее имеют место соотношения:

$$\begin{aligned} u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{ds}, \quad ds = \sqrt{|g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta|}, \quad |u_\alpha u^\alpha| = 1, \\ W(u) = -1. \end{aligned} \quad (32)$$

Можно определить вейлевскую ковариантную геодезическую  $\gamma(s)$  на основе выражения:

$$\begin{aligned} \tilde{D}_u u^\lambda = du^\lambda + \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda u^\mu dx^\nu + W(u) (A_\mu dx^\mu) u^\lambda = \\ = du^\lambda + \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda u^\mu dx^\nu - (A_\mu dx^\mu) u^\lambda = 0. \end{aligned} \quad (33)$$

Такая ковариантная геодезическая, определена как решение уравнения (33) с учетом конкретной параметризации (32) [6]. При вейлевском преобразовании:

$$\begin{aligned} \dot{L}_s = \sqrt{|g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta|} = 1 \rightarrow \tilde{\dot{L}}_s = \sqrt{|\tilde{g}_{\alpha\beta} \tilde{u}^\alpha \tilde{u}^\beta|} = 1, \\ W(\dot{L}_s) = 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Для такой ковариантной геодезической можно определить соответствующую связность [6]:

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{\Gamma}}_{\mu\nu}^\lambda = \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda - \frac{1}{2} \delta_\nu^\lambda A_\mu - \frac{1}{2} \delta_\mu^\lambda A_\nu = \\ = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda + \frac{1}{2} \delta_\nu^\lambda A_\mu + \frac{1}{2} \delta_\mu^\lambda A_\nu - g_{\mu\nu} A^\lambda, \end{aligned} \quad (35)$$

так что уравнение ковариантной геодезической  $\gamma(s)$  принимает вид:

$$\tilde{D}_u u^\lambda = du^\lambda + \tilde{\tilde{\Gamma}}(A)_{\mu\nu}^\lambda u^\mu dx^\nu = 0. \quad (36)$$

Итак, для пространства Вейля существует два определения геодезических линий – инвариантные геодезические (27) и ковариантные геодезические (33). Вейлевские инвариантные геодезические заданы уравнениями:

$$\tilde{u}^\nu = \frac{dx^\nu}{dt}, \quad \tilde{u}^\nu \tilde{\nabla}_\nu \tilde{u}^\mu = 0, \quad (37)$$

а вейлевские ковариантные геодезические – уравнениями

$$u^\nu = \frac{dx^\nu}{ds}, \quad \tilde{D}_s u^\mu = 0, \quad ds = \sqrt{|g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta|}. \quad (38)$$

Отметим, что они отличаются параметризацией, но на многообразии  $M$  множества инвариантных и ковариантных геодезических совпадают [6]

$$\{\gamma(t)\} = \{\gamma(s)\}, \quad (39)$$

так как

$$\left(\tilde{\tilde{\Gamma}}_{\mu\nu}^\lambda - \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda\right) u^\mu u^\nu = -\left(A_\mu dx^\mu\right) u^\lambda \sim u^\lambda. \quad (40)$$

Длины геодезических, определяемые с помощью соотношения

$$L_\gamma = \int_\gamma ds = \int_\gamma \sqrt{|g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta|}, \quad (41)$$

зависят от калибровки  $\Omega$ . Но можно определить вейлевскую инвариантную длину геодезической  $\tilde{L}(\gamma)$  посредством соотношения [6]

$$\tilde{L}^2(\gamma) = \int_{\gamma[x_0, x_1]} \exp\left(2 \int_{\gamma[x_0, x] \subset \gamma[x_0, x_1]} A_\alpha dx^\alpha\right) ds^2. \quad (42)$$

Экспоненциальный множитель, зависящий от вектора Вейля  $A$ , компенсирует изменение длины кривой при перенесении ее масштаба вдоль  $\gamma$ .

### 3. Движение свободной частицы в геометрии Вейля

Рассмотрим материальную точку с массой  $m$ . В общей теории относительности (ОТО) свобод-

ное движение точки (пробной массы) выводится из вариации действия [12]:

$$S_m = - \int m_0 c ds, \quad (43)$$

и при этом получается уравнение геодезической в римановом пространстве:

$$\frac{du^\lambda}{ds} + \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda u^\alpha u^\beta = 0. \quad (44)$$

Какой аналог этого действия в вейлевской геометрии? В вейлевской геометрии масштаб длины  $L_m$  при переносе по некоторой кривой  $\gamma$  меняется по соотношению:

$$dL_m = - (A_\beta dx^\beta) L_m. \quad (45)$$

Так как частица точечная, то ее размер при движении не может меняться, а меняться может только масса  $m \sim \frac{1}{L_m}$  вследствие свойств геометрии

Вейля. Поэтому считаем, что переменная масса  $m$  при параллельном переносе материальной частицы вдоль геодезической  $\gamma$  вейлевского пространства меняется как

$$m(\gamma) = m_0 \exp \left( \int_\gamma A_\alpha dx^\alpha \right). \quad (46)$$

Таким образом, аналог действия для точечной частицы в случае геометрии Вейля возьмем в виде:

$$\begin{aligned} \tilde{S}_m &= - \int m c ds = - \int m_0 c \exp \left( \int_{\gamma[x_0, x]} A_\lambda dx^\lambda \right) ds = \\ &= - m_0 c \int d\tilde{s}, \end{aligned} \quad (47)$$

где

$$\begin{aligned} d\tilde{s} &= \sqrt{\psi^2(x) |g_{\alpha\beta}(x) dx^\alpha dx^\beta|}, \\ \psi(x) &= \exp \left( \int_{\gamma(x_0, x)} A_\lambda dx^\lambda \right). \end{aligned} \quad (48)$$

Такое определение вейлевского инвариантного действия  $S_m$  для материальной точки соответствует определению (42) вейлевской инвариантной длины геодезической  $\tilde{L}$ , когда изменение масштаба длины для интервала  $ds$  компенсируется соответствующим множителем  $\psi$ , зависящим от вектора Вейля  $A$ .

Рассмотрим вариацию  $d\tilde{s}^2$ . Воспользуемся методом решения задачи о вычислении геодезической в ОТО (см. например, [12], с. 320):

$$\delta(d\tilde{s}^2) \sim dx^\alpha dx^\beta \frac{\partial(\psi^2 g_{\alpha\beta})}{\partial x^\gamma} \delta x^\gamma + 2g_{\alpha\beta} \psi^2 dx^\alpha d\delta x^\beta. \quad (49)$$

Итак,

$$\delta S = -m_0 c \int d\tilde{s} \left[ \frac{1}{2} \frac{dx^\alpha}{d\tilde{s}} \frac{dx^\beta}{d\tilde{s}} \frac{\partial(\psi^2 g_{\alpha\beta})}{\partial x^\gamma} \delta x^\gamma - \frac{d}{d\tilde{s}} \left( \psi^2 g_{\alpha\gamma} \frac{dx^\alpha}{d\tilde{s}} \right) \delta x^\gamma \right]. \quad (50)$$

Полагая вариацию  $\delta(d\tilde{s}) = 0$ ,  $\tilde{u}^\beta = \frac{dx^\beta}{d\tilde{s}}$  и

$\frac{d}{d\tilde{s}} = \tilde{u}^\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta}$ , получаем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \tilde{u}^\alpha \tilde{u}^\beta \psi^2 \left( \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} + 2A_\gamma \right) - \psi g_{\alpha\gamma} \frac{d\tilde{u}^\alpha}{d\tilde{s}} - \\ - \psi^2 \tilde{u}^\alpha \tilde{u}^\beta \left( \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta} + 2A_\beta \right) = 0. \end{aligned} \quad (51)$$

С учетом равенства

$$\begin{aligned} \tilde{u}^\alpha \tilde{u}^\beta \left( \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta} + 2A_\beta \right) = \\ = \frac{1}{2} \tilde{u}^\alpha \tilde{u}^\beta \left( \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha} + 2A_\beta + 2A_\alpha \right), \end{aligned} \quad (52)$$

сокращая (51) на  $\psi^2$  и поднимая индекс  $\gamma$  умножением выражения (51) на  $g^{\lambda\gamma}$ , получаем выражение:

$$\frac{d\tilde{u}^\nu}{d\tilde{s}} + \tilde{u}^\alpha \tilde{u}^\beta \left[ \frac{1}{2} g^{\lambda\gamma} (\partial_\alpha g_{\gamma\beta} + \partial_\beta g_{\gamma\alpha} - \partial_\gamma g_{\alpha\beta}) + \delta_\alpha^\lambda A_\beta + \delta_\beta^\lambda A_\alpha - g_{\alpha\beta} A^\lambda \right] = 0. \quad (53)$$

Итак, линия движения частицы с переменной массой  $m$  задается уравнением вейлевской инвариантной геодезической (27):

$$\frac{d\tilde{u}^\lambda}{d\tilde{s}} + \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda \tilde{u}^\mu \tilde{u}^\nu = 0. \quad (54)$$

Введем 4-скорость  $u^\lambda = \frac{dx^\lambda}{ds}$ . Учтя связь производных

$$\frac{d}{ds} = \psi \frac{d}{d\tilde{s}} \quad (55)$$

и выражение для  $\psi$  из (48), получаем уравнение для вейлевской ковариантной геодезической:

$$\frac{du^\lambda}{ds} + \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda u^\mu u^\nu - (A_\alpha u^\alpha) u^\lambda = 0, \quad (56)$$

или

$$\frac{du^\lambda}{ds} + \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda u^\mu u^\nu = 0. \quad (57)$$



Это уравнение совпадает с уравнением (33). В зависимости от использованной параметризации (инвариантной)  $\bar{s}$  или (ковариантной)  $s$  получаются два различных уравнения (54) и (56), описывающие один и тот же набор кривых.

Рассмотрим 4-импульс  $p^\lambda = m c u^\lambda$ . Его производная удовлетворяет соотношению

$$\frac{dp^\lambda}{ds} = mc \frac{du^\lambda}{ds} + m c u^\lambda (A_\alpha u^\alpha). \quad (58)$$

При этом

$$\frac{d(p^\lambda p_\lambda)}{ds} = \frac{d(m^2 c^2)}{ds} = m^2 c^2 (2A_\nu x^\nu), \quad (59)$$

и на петле происходит изменение  $\Delta m$  массы материальной точки:

$$\Delta m = m_0 \exp\left(\oint A_\alpha dx^\alpha\right). \quad (60)$$

Изменение 4-импульса вдоль ковариантной геодезической пространства Вейля, как это следует из (58), удовлетворяет равенству

$$\frac{dp^\lambda}{ds} - mc \frac{du^\lambda}{ds} - m c u^\lambda (A_\alpha u^\alpha) = 0, \quad (61)$$

то есть на ковариантной геодезической линии (56) выполняется уравнение для 4-импульса с переменной массой:

$$\frac{dp^\lambda}{ds} + \frac{1}{mc} \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda p^\mu p^\nu - \frac{2}{mc} p^\lambda (A_\alpha p^\alpha) = 0. \quad (62)$$

Отметим, что в литературе имеется достаточно много вариантов гравитации для случая интегрируемой геометрии Вейля. Так, например, в публикации [20] рассматривался вопрос о переменной массе и геодезических в интегрируемой вейлевской геометрии, и их анализ согласуется с нашим. В [20] утверждается, что масса – переменная величина в вейлевской гравитации. Импульс в [20] определяется как

$$p^\mu = m(\varphi) \frac{dx^\mu}{ds}, \quad (63)$$

а уравнение для импульса имеет вид:

$$\frac{dp^\mu}{ds} + \bar{\Gamma}_{\sigma\lambda}^\mu \frac{dx^\sigma}{ds} p^\lambda - \partial_\lambda \varphi \frac{dx^\lambda}{ds} p^\mu = 0, \quad (64)$$

что согласуется с нашим выражением (62) для случая интегрируемого вектора Вейля  $\partial_\lambda \varphi = 2A_\lambda$ , где  $\varphi = \varphi(x)$  – скалярное поле.

В работе [21] используются вейлевские ковариантные геодезические, которые у нас определены выражением (56). В [13, 15, 22] вводится пере-

менная масса:  $m = m_0 \beta$ , где  $\beta(x)$  – поле Дирака, так что совпадение с нашим выражением (56) достигается только при  $\frac{\beta^\alpha}{\beta} = A^\alpha$ , т. е., опять же

в случае интегрируемого вектора Вейля. Отметим, что у Дирака [15] действие для свободной частицы в геометрии Вейля выбрано в виде

$$I_1 = -m_0 \int \beta ds. \quad (65)$$

Соответственно, введенные Дираком геодезические свободного движения частицы имеют вид [15] (инвариантные геодезические Дирака):

$$\frac{d(m_0 \beta u^\mu)}{ds} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu u^\rho u^\sigma - m_0 \beta^\mu = 0, \quad (66)$$

что соответствует нашему выражению (62) только в случае  $A^\alpha = \frac{\beta^\alpha}{\beta}$  и  $m = m_0 \beta(x)$ , т. е. в случае интегрируемого пространства Вейля. Такое определение геодезических линий не соответствует геометрическому определению ковариантных геодезических (33) в случае общего пространства Вейля.

Отметим, тем не менее, что Дирак в своей теории гравитации [15] использует неинтегрируемый вектор Вейля с ненулевой напряженностью поля вектора Вейля.

В публикации [3] действие для свободной частицы до нарушения конформной инвариантности записывается в виде:

$$S = \frac{1}{2} \int dt \left[ \frac{1}{\lambda} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx_\mu}{dt} - m_0^2 \lambda \right]. \quad (67)$$

При этом до нарушения конформности в [3] полагается  $m_0 = 0$ . Здесь  $\lambda$  – лагранжевый множитель, который при вейлевских преобразованиях ведет себя как  $\lambda \rightarrow \tilde{\lambda} = \Omega^2 \lambda$ . Отметим, что  $t$  – произвольный параметр. После нарушения вейлевской инвариантности для действия частицы авторы [3] используют другое выражение, совпадающее с принятым в ОТО:

$$S = -m_0 \int dt \sqrt{-\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu}, \quad (68)$$

что дает уравнение движения свободной частицы как в ОТО, если не учитывать специфического вейлевского заряда частицы:

$$\dot{x}^\mu + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \dot{x}^\nu \dot{x}^\rho = 0. \quad (69)$$

На наш взгляд, подход, примененный в [3], логически непоследователен. Если после нарушения конформной инвариантности в лагранжиане учи-

тывается ненулевой вектор Вейля, то он должен учитываться и в уравнениях для геодезической, т. е., в уравнениях для движения свободной частицы.

Итак, даже при наличии, вообще говоря, неинтегрируемого вектора Вейля в своей модели, авторы [3, 13, 15] предпочитают не использовать вектор Вейля в уравнении движения свободной частицы, несмотря на то, что он входит в вейлевскую связность (4). Вместо этого в [15], к примеру, используется функция Дирака  $\beta(x)$ .

#### 4. Вейлевская сила в геометрии Вейля

До нарушения конформной инвариантности гравитации масштабы длины и массы в вейлевской геометрии не заданы, поэтому изменение массы на классическом уровне рассмотрения допустимо в вейлевской модели гравитации.

Вейлевская гравитация рассматривается во многих публикациях для случая интегрируемого вектора Вейля (см., например, [20]). Можно считать, что у элементарных частиц изначально была нулевая масса, а ненулевое ее значение возникает уже после нарушения вейлевской симметрии, как, например, принято в [3]. Можно упомянуть также соображения Р. Пенроуза в [17] о конформной стадии развития вселенной в связи с его идеей о переносимой массе частиц. Когда энергия частиц крайне велика, массой покоя можно пренебречь.

Необычные свойства геометрии Вейля в неинтегрируемом случае вызвало у Эйнштейна возражение, см. для примера обсуждение Паули в [5], которое получило название «эффекта вторых часов». Действительно, если перенести часы вдоль замкнутой траектории (петли), вернув в прежнюю точку, то скорость их хода изменится по сравнению с теми, которые не перемещались. Масса элементарной частицы при обходе вдоль петли изменится тоже. Это противоречит представлениям стандартной физики. Если же вектор Вейля интегрируемый, то на петле изменение массы равно нулю.

Дискуссионным выглядит вопрос о возможности использования неинтегрируемого вектора Вейля после нарушения конформной инвариантности. Наличие такого вектора – экзотическая ситуация. Но в связи с примерами использования вектора Вейля в лагранжианах с неминимальной связью скалярного поля с гравитацией (см. для примера публикации [3, 13, 18, 19]) такой вопрос достаточно актуален, хотя бы с методической точки зрения.

Для одной частицы, движущейся в поле вектора Вейля с нулевым вейлевским зарядом в случае ковариантных геодезических имеем уравнения:

$$\frac{du^\lambda}{ds} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda u^\mu u^\nu = A^\lambda - (A_\alpha u^\alpha) u^\lambda = 0, \quad (70)$$

$$\frac{dp^\lambda}{ds} + \frac{1}{mc} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda p^\mu p^\nu = mcA^\lambda. \quad (71)$$

Сравнивая выражения (70) и (71) с соответствующими выражениями ОТО (т. е., при  $A^\lambda \equiv 0$ ), мы видим, что наличие вектора Вейля приводит к наличию специфической вейлевской силы. Причем, как это следует из (59), действие этой силы приводит к изменению массы частицы. В нерелятивистском случае изменение импульса мы могли бы записать так:

$$\Delta \bar{p} = \Delta(m\bar{v}) = m\Delta\bar{v} + \Delta m\bar{v}, \quad (72)$$

то есть импульс частицы меняется не только за счет изменения скорости, но и за счет изменения массы.

Отметим, что из-за ненулевой напряженности вектора Вейля имеется еще одна сила, связанная с вектором Вейля, которая полностью аналогичная силе, действующей на электрический заряд в электромагнитном поле. Эта сила связана с ненулевым вейлевским зарядом частицы  $q_W$ , если таковой у нее есть. Отметим, что этот заряд – особый и не совпадает с электрическим зарядом  $q$ . Тогда к действию для свободной частицы (47) надо добавить член

$$S_q = -q_W \int ds A_\mu \frac{dx^\mu}{ds}, \quad (73)$$

что дает выражение для изменения импульса

$$\frac{dp^\lambda}{ds} + \frac{1}{mc} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda p^\mu p^\nu = mcA^\lambda + q_W F_\mu^\lambda \frac{dx^\mu}{ds}, \quad (74)$$

где

$$F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu. \quad (75)$$

Сила  $q_W F_\mu^\lambda \frac{dx^\mu}{ds}$ , действующая на частицу вследствие вейлевского заряда, не меняет массы частицы.

С неинтегрируемым случаем вектора Вейля авторы статей по вейлевской гравитации по понятным причинам (возражения Эйнштейна) предпочитают не иметь дело, но мы рассматриваем здесь именно этот любопытный вариант. В связи с ним возникает вопрос – как можно было бы обойти эффект «вторых часов»?

*Способ 1. Стохастизация поля вектора Вейля.* Пусть влияние случайного векторного поля

Вейля  $A^\lambda$  на движение частицы достаточно мало, а само поле  $A^\lambda$  не имеет выделенных направлений и изотропно. Будем исходить из уравнения движения частицы в соответствии с ковариантной вейлевской геодезической

$$du^\mu + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu u^\alpha u^\beta ds = - \left[ (A^\alpha u_\alpha) u^\lambda - A^\lambda \right] ds. \quad (76)$$

Рассмотрим величину

$$\begin{aligned} \xi^2 &= - \left( A^\lambda - (A^\alpha u_\alpha) u^\lambda \right) \left( A_\lambda - (A^\alpha u_\alpha) u_\lambda \right) = \\ &= \left( A^\alpha u_\alpha \right)^2 - A^\lambda A_\lambda. \end{aligned} \quad (77)$$

Эта величина – инвариант. Пусть частица движется по стационарной траектории. В системе отчета покоящейся частицы, где  $u^\lambda = (1, 0, 0, 0)$ , в окрестности частицы  $\xi^2$  неотрицательна:

$$\xi^2 = (A^1)^2 + (A^2)^2 + (A^3)^2 \geq 0, \quad (78)$$

поскольку

$$A^\lambda A_\lambda = (A^0)^2 - (A^1)^2 - (A^2)^2 - (A^3)^2. \quad (79)$$

Поэтому мы можем ввести вероятностное распределение нормального типа для случайной величины

$$\xi = \sqrt{-g_{\alpha\beta}(x) A_\perp^\alpha(x) A_\perp^\beta(x)}, \quad (80)$$

где

$$A_\perp^\lambda = A_\lambda - (A^\alpha u_\alpha) u^\lambda. \quad (81)$$

Плотность вероятности  $w$  запишем как:

$$w(\xi) = \frac{1}{\sigma^2 \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2\sigma^2}\right), \quad (82)$$

где  $\sigma^2$  – дисперсия распределения случайной величины  $\xi$ .

Этот результат обобщается на случай произвольного движения частицы следующим образом. Вводится уравнение Ланжевена с собственным временем частицы  $d\tau = ds$ ,

$$du^\mu + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu u^\alpha u^\beta d\tau = \sigma A_\perp^\mu d\tau, \quad (83)$$

где

$$\langle A_\perp^\lambda(\tau) \rangle = 0, \quad \langle A_\perp^\lambda(\tau_1) A_\perp^\mu(\tau_2) \rangle = -\sigma^2 \delta_\mu^\lambda \delta(\tau_1 - \tau_2). \quad (84)$$

Получили уравнение, описывающее броуновский процесс. Фактически, имеют место флуктуации около классической траектории ОТО.

*Способ 2. Трубки из вейлонов.* Предположим, что поле вектора Вейля при квантовании приводит

к очень массивным частицам – вейлонам [4, 18, 24, 25]. Вейлоны взаимодействуют с обычными частицами на очень малых расстояниях. Рассмотрим нерелятивистское движение очень тяжелых вейлонов. Если вейлоны образуют структуры в виде замкнутых хаотически ориентированных трубок, то получается аналогия со сверхтекучими вихревыми линиями в гелии [26]. Более реалистично было бы рассмотреть модель вихревых нитей в виде аналогов вортонов [27]. В данном случае имеются в виду релятивистские вихревые кольца из вейлонов. При хаотической ориентации этих вортонов средний вклад в изменение массы частиц при пролете через область из вортонов нулевой. Если масса вейлона близка планковской массе, то процессы рассеяния частиц на вортонах существенны только на малых (планковских) расстояниях. Таким образом, эффект вторых часов на макроскопических расстояниях не наблюдается, а на малых (планковских) расстояниях частицы должны описываться квантовой теорией и могут менять массу дискретным образом, взаимодействуя с вейлонными вортонами – аналогами ротонов [26]. Эти процессы могли бы иметь место на ранней стадии существования Вселенной при очень высоких температурах.

### 5. Движение частицы по геодезической в цилиндрически симметричном гравитационном поле

Рассмотрим задачу о движении частицы в статическом гравитационном поле с учетом вектора Вейля. Пусть имеется в виду цилиндрическая симметрия. В цилиндрических координатах  $(t, r, \varphi, z)$  вектор Вейля зададим в виде

$$A = (0, A^r(r), A^\varphi(r), 0). \quad (85)$$

Рассмотрим движение частицы по геодезической в плоскости  $z = 0$ . В соответствии с выражением (56) получаем два уравнения:

$$\ddot{r} + \Gamma_{\sigma\nu}^r \frac{dx^\sigma}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} - A^r + (A_r \dot{r} + A_\varphi \dot{\varphi}) \dot{r} = 0, \quad (86)$$

$$\ddot{\varphi} + \Gamma_{\sigma\nu}^\varphi \frac{dx^\sigma}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} - A^\varphi + (A_r \dot{r} + A_\varphi \dot{\varphi}) \dot{\varphi} = 0. \quad (87)$$

Здесь

$$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{ds}, \quad \dot{r} = \frac{dr}{ds}, \quad \ddot{\varphi} = \frac{d^2\varphi}{ds^2}, \quad \ddot{r} = \frac{d^2r}{ds^2}, \quad \dot{t} = \frac{dt}{ds}. \quad (88)$$

Можно рассмотреть изотропную статическую цилиндрическую метрику данной задачи в виде

$$ds^2 = \exp(\nu(r))dt^2 - \exp(\lambda(r))(dr^2 + r^2d\varphi^2 + dz^2). \quad (89)$$

Здесь  $\nu(r)$  и  $\lambda(r)$  – две функции, которые находятся из решения уравнений для гравитации. Тогда

$$\ddot{r} + \Gamma_{tt}^r \dot{t}^2 + \Gamma_{\varphi\varphi}^r \dot{\varphi}^2 - A^r + (A_r \dot{r} + A_\varphi \dot{\varphi}) \dot{r} = 0, \quad (90)$$

$$\ddot{\varphi} - A^\varphi + (A_r \dot{r} + A_\varphi \dot{\varphi}) \dot{\varphi} = 0, \quad (91)$$

где  $\Gamma_{\varphi\varphi}^r$  и  $\Gamma_{\varphi\varphi}^r$  – функции только от  $r$ .

Итого есть два уравнения второго порядка, которые приводят к спиральной траектории движения пробной частицы.

Если  $A_r \equiv 0$ , то

$$\ddot{r} + \Gamma_{tt}^r \dot{t}^2 + \Gamma_{\varphi\varphi}^r \dot{\varphi}^2 + g_{\varphi\varphi} A^\varphi \dot{\varphi} = 0, \quad (92)$$

$$\ddot{\varphi} = A^\varphi(r) (1 - g_{\varphi\varphi} \dot{\varphi}^2) = A^\varphi g_{tt} \dot{t}^2. \quad (93)$$

Квадрат обычной 3-скорости частицы  $\vec{v}$  находится из соотношения (при  $c = 1$ )

$$\vec{v}^2 = -\frac{g_{\varphi\varphi} \dot{\varphi}^2}{g_{tt} \dot{t}^2}, \quad (94)$$

тогда

$$\ddot{\varphi} = \frac{A^\varphi(r)}{1 - \vec{v}^2}. \quad (95)$$

Если в (92) положить  $\dot{r} \equiv 0$ , то

$$\Gamma_{tt}^r \dot{t}^2 + \Gamma_{\varphi\varphi}^r \dot{\varphi}^2 = 0, \quad (96)$$

откуда

$$\vec{v}^2 = \frac{g_{\varphi\varphi} \Gamma_{tt}^r}{\Gamma_{\varphi\varphi}^r} = \text{const}, \quad (97)$$

что противоречит (95). Таким образом, при  $A^r \equiv 0$  и  $A^\varphi(r) \neq 0$  реализуется спиральное движение ( $r$  и  $\varphi$  меняются у частицы в процессе движения).

Пусть теперь  $A^\varphi \equiv 0$  и  $A^r(r) \neq 0$ . Эта задача подробно разобрана в [23]. Положим в (90) и (91)  $\dot{r} \equiv 0$  и  $A^\varphi \equiv 0$ . Тогда  $\ddot{\varphi} \equiv 0$ . Это соответствует случаю интегрируемого вектора Вейля и стационарного движения по орбите с постоянным радиусом  $r$ . Величина 3-скорости кругового движения находится из (97). При этом  $z$ -компонента углового момента  $M$  – сохраняющаяся величина. Она находится так. Рассматривается лагранжиан пробной частицы с учетом поля Вейля [23]:

$$L = m_0 \exp\left(\int A_r dr\right) \sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}, \quad (98)$$

который приводит при  $r = \text{const}$  к соотношению для углового момента:

$$M = -\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m_0 \exp\left(\int_{r_0}^r A_r(r') dr'\right) g_{\varphi\varphi} \dot{\varphi} = \text{const}. \quad (99)$$

## Заключение

Вейлевская геометрия приводит к двум типам геодезических линий – инвариантным и ковариантным. Ковариантные геодезические можно интерпретировать как экстремали действия для точечной частицы с переменной массой. Соответственно, уравнения свободного движения для точечной частицы в вейлевской геометрии содержат дополнительный член, который можно назвать вейлевской силой. Этот член просто меняет масштаб массы до нарушения конформной инвариантности, но после нарушения локальной конформной инвариантности приводит к реальному изменению массы физической частицы. Под нарушением конформной инвариантности мы имеем в виду выбор конкретного экземпляра пространства Вейля из класса эквивалентности по отношению к преобразованиям (1).

Подчеркнем, что вектор Вейля  $A^\mu$  в отличие от электромагнитного потенциала, действует на частицу не только при наличии вейлевского заряда и ненулевой напряженности, но и сам по себе, через вейлевскую связность (4).

Некоторые авторы вместо вектора Вейля в геодезических используют градиент скалярной функции, несмотря на то, что в лагранжиане у них присутствует ненулевая напряженность вектора Вейля. На наш взгляд, это непоследовательно. Конечно, это позволяет избавиться от эффекта вторых часов, но не соответствует духу геометрии Вейля.

В неинтегрируемом случае вектора Вейля мы предложили два выхода. А именно: 1) неинтегрируемый вектор Вейля имеет малую норму на макроскопических масштабах и меняется хаотически, так что усреднение по векторному полю приводит лишь к некоторой стохастизации движения частицы; 2) ненулевое значение вектора Вейля имеет место только в области планковских масштабов, в аналогах вортонов – вихревых колец. При этом изменение массы у других частиц при взаимодействии с вейлевскими аналогами вортонов происходит дискретным образом.

Эти варианты вейлевской гравитации нуждаются в развитии. Следует показать, могут ли они быть реализованы в физике частиц таким образом, чтобы с одной стороны не противоречить надежно установленным экспериментальным фактам, а с другой – объяснить или предсказать новые эффекты.

### Список литературы

1. Weyl, Hermann. *Space – Time – Matter*. Translated from the 4th German edition by H. Brose. London: Methuen. Reprint New York: Dover (1952).
2. Itzhak Bars, Paul Steinhardt, Neil Turok. *Local conformal symmetry in physics and cosmology*. *Physical Review D*. 2014. N89, P043515(1-15).
3. Marco de Cesare, John W. Moffat, and Mairi Sakellariadou. *Local conformal symmetry in non-Riemannian geometry and the origin of physical scales* // arXiv:1612.08066v2 [hep-th] 3 Sep 2017.
4. Седов С. Ю. *Вейлевская гравитация и вейлоны* // ВАНТ. Сер. Теор. и прикл. физика. 2019. Вып. 4. С. 14–24.
5. Pauli W. *Theory of relativity*. Pergamon Press. 1958.
6. Erhard Scholz. *Gauging the spacetime metric – looking back and forth a century later* // arXiv:1911.01696v1 [physics.hist-ph] 5 Nov 2019.
7. Erhard Scholz. *Weyl's scale gauge geometry in late 20th century physics*. Preprint submitted to: “Beyond Einstein: Perspectives on Geometry, Gravitation, and Cosmology”, ed. David Rowe. Einstein Studies Basel: Birkhäuser. 2011. ArXiv:1111.3220 [gr-qc].
8. Erhard Scholz. *Paving the way for transitions – a case for Weyl geometry* // ArXiv:1206.1559v6 [gr-qc] 27 Jul 2015.
9. Jose Beltran Jimenez and Tomi S. Koivisto. *Extended Gauss-Bonnet gravities in Weyl geometry* // ArXiv:1402.1846v1 [gr-qc], 8 Feb 2014.
10. Бабурова О. В., Фролов Б. Н. *Математические основы современной теории гравитации*: Монография. М.: Прометей, 2012.
11. Carlos Romero. *Is Weyl unified theory wrong or incomplete?* // ArXiv:1508.03766v2 [gr-qc] 25 Aug 2015.
12. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Теория поля*. М.: Наука, 1988.
13. Rosen N. *Weyl's Geometry and Physics*. Foundation of physics. 1982. Vol. 12, N3. P. 213–235.
14. Вергелес С. Н. *Лекции по теории гравитации*. М.: МФТИ, 2001.
15. Dirac, P.A.M. *Long range forces and broken symmetries* // Proceedings of Royal Society London 1973. A. N 333. P 403–418.
16. Биррелл Н., Девис П. *Квантованные поля в искривленном пространстве-времени*. М.: Мир, 1984.
17. Пенроуз Р. *Циклы времени*. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний. 2014.
18. Smolin, Lee. *Towards a theory of spacetime structure at very short distances* // Nuclear Physics B. 1979, N 160. P 253–268.
19. Cheng, Hung. *Possible existence of Weyl's vector meson* // Physical Review Letters. 1988, N 61. P 2182–2184.
20. Israel Quiros. *Scale invariance and broken electroweak symmetry may coexist together* // ArXiv:1312.1018v3 [gr-qc], 3 Jan 2014.
21. Carlos Castro. *The cosmological constant and Pioneer anomaly from Weyl spacetimes and Mach's principle*. 2009. Physics Letters B, N 675. P. 226–230.
22. S. Mirabotalebi, S. Jalalzadeh, M. Sadegh Movahedand H. R. Sepangi. *Weyl-Dirac theory predictions on galactic scales* // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2008. Vol. 385, Issue 2. P. 986–994. arXiv: 0504117v3 [gr-qc].
23. Ronaldo S. S. Vieira, Patricio S. Letelier. *Thin-disk models in an Integrable Weyl-Dirac theory* // ArXiv:1305.2662v2 [gr-qc]. 11 Feb 2014.
24. Mark Israelit. *A Weyl-Dirac cosmological model with DM and DE* // Arxiv: 1008.0767 [gr-qc]. 2009.
25. Cheng, Hung. *Possible existence of Weyl's vector meson* // Physical Review Letters. 1988, N 61. P. 2182–2184.
26. Grigory E. Volovik. *The Universe in a Helium Droplet*. Clarendon Press. Oxford. 2003. P. 1–507.
27. Carter B., Martin X. *Dynamic Instability criterion for Circular String Loops* // Ann. of Phys. 1993. Vol. 227. P. 151–171.

Статья поступила в редакцию 10.01.2022

## КОНФОРМНЫЕ ЛАГРАНЖИАНЫ В ГРАВИТАЦИИ ВЕЙЛЯ

С. Ю. Седов

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

Обсуждаются модели конформной гравитации с лагранжианами, линейными по скалярной кривизне и неминимальной связью со скалярным полем. Подробно освещена теория гравитации Вейля–Дирака. На основе анализа приведенных примеров предложен вариант конформного лагранжиана с двумя скалярными полями, в котором вектор Вейля заменен на вектор, преобразующийся как и вектор Вейля, но не входящий в вейлевскую связность. Пространством такой модели является интегрируемое пространство Вейля.

*Ключевые слова:* конформная гравитация, конформные лагранжианы, геометрия Вейля, вектор Вейля.

### Введение

Столетие назад Г. Вейль предложил свою теорию гравитации, основанную на локальной симметрии относительно калибровки измерений [1]. Идеи Г. Вейля являются актуальными и сейчас. Количество публикаций, основанных на этих идеях, постоянно увеличивается.

В последние годы рассматриваются различные варианты применения вейлевской (локальной конформной) симметрии к гравитации с точки зрения модификации общей теории относительности (ОТО) для описания темной материи, темной энергии, эволюции ранней Вселенной [2–7]. Модификации ОТО с учетом локальной конформной инвариантности исследуются в течение долгого времени как попытки решения различных проблем, в частности: способов перенормировок в квантовой гравитации, перенормировки тензора энергии-импульса, динамики инфляции в ранней Вселенной и появления массы у элементарных частиц [8–11].

Обычный лагранжиан ОТО конформно не инвариантен. Но авторы отмечают, что конформная симметрия для больших энергий может иметь ме-

сто в более общей теории гравитации, чем ОТО [12, 13]. Отмечается также, что стандартную модель физики частиц можно трактовать как приближенно конформную при энергиях частиц, много больших массы бозона Хиггса (вакуумное среднее поля Хиггса имеет значение 246 ГэВ). Если положить равной нулю массу бозона Хиггса, то стандартная модель конформно-инвариантна. Идея конформности является привлекательной как в гравитации, так и в физике частиц.

При определенных условиях (при низких энергиях, например) конформная симметрия нарушается и осуществляется переход к ОТО. Нарушение конформной симметрии в различных моделях может происходить различными способами. Нарушение конформной симметрии может происходить перед нарушением электрослабой симметрии  $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$  [2, 3], может происходить перед нарушением симметрии  $SU(5)$  [14] и может происходить еще раньше. Нарушение конформной симметрии обычно рассматривают с привлечением дилатонного поля (поля, связанного с локальными растяжениями метрики).

В этой публикации рассматривается применение идей Г. Вейля к построению конформных лагранжианов гравитации. Имеется в виду случай только линейных по кривизне  $R$  лагранжианов. После нарушения конформности лагранжиан должен соответствовать лагранжиану ОТО. Отметим, что мы не делали попытку представить сколько-нибудь широкий обзор множества моделей конформной гравитации. Выбрано небольшое их число. Но можно надеяться, что и на основании рассмотренных примеров можно получить представление о значительной роли геометрии Вейля в альтернативных моделях гравитации.

В разделе 1 рассматривается теория гравитации Вейля-Дирака [15]. Эта теория формулируется как естественное обобщение гравитации на случай пространства Вейля. В разделе 2 приведены уравнения теории Вейля-Дирака. При нарушении конформной инвариантности у векторного поля Вейля появляется масса и возникает понятие вейлона как частицы этого поля [5, 6, 14]. В связи с вейлоном упоминается об «эффекте вторых часов». В разделе 3 нами предложен способ сохранить общие свойства теории Вейля-Дирака, но избежать «эффекта вторых часов». В разделе 4 рассмотрен лагранжиан с одним комплексным скалярным полем, как непосредственное обобщение лагранжиана теории Вейля-Дирака. В разделе 5 очень кратко рассмотрен конформный случай для теории гравитации Бранса-Дикке [16–18]. В разделе 6 описана модель [19] с одним дилатонным комплексным скалярным полем, которое имеет правильный знак кинетического члена. Раздел 7 посвящен общему описанию лагранжиана, содержащего дилатонное и физическое скалярное поля. Разделы 8–10 содержат три примера конформных лагранжианов с двумя скалярными полями. И, наконец, в разделе 11 подводится краткий итог обсуждению различных конформных лагранжианов. На основе проделанного обзора предлагается наша версия конформного лагранжиана.

Отметим, что мы старались придерживаться следующих нотаций в римановой геометрии (как в [20]): сигнатура метрики  $(+, -, -, -)$ , тензор кривизны  $R_{\mu\nu\sigma}^{\lambda} = \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda} - \partial_{\sigma}\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} + \Gamma_{\nu\rho}^{\lambda}\Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} - \Gamma_{\sigma\rho}^{\lambda}\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}$ , тензор Риччи  $R_{\mu\sigma} = R_{\mu\lambda\sigma}^{\lambda}$ , скалярная кривизна  $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ .

Вейлевская связность определяется с учетом вектора Вейля:

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda} = \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} + \delta_{\mu}^{\lambda}A_{\nu} + \delta_{\nu}^{\lambda}A_{\mu} - g_{\mu\nu}A^{\lambda}. \quad (1)$$

Вейлевская кривизна задается соотношением

$$\tilde{R} = R - 6\nabla_{\alpha}A^{\alpha} - 6A_{\alpha}A^{\alpha}. \quad (2)$$

Вейлевские величины, в отличие от римановых, обозначены «шляпками». Здесь  $A^{\alpha}$  – вектор Вейля. При вейлевских (локально-конформных) преобразованиях метрика и вектор Вейля меняются следующим образом:

$$g_{\alpha\beta} \rightarrow \tilde{g}_{\alpha\beta} = \Omega^2 g_{\alpha\beta}, \quad A^{\alpha} \rightarrow \tilde{A}^{\alpha} = A^{\alpha} - \partial^{\alpha} \ln \Omega(x). \quad (3)$$

Здесь  $\Omega(x)$  – положительная гладкая функция (конформный фактор). Вейлевским весом геометрической величины  $H$  называют число  $k = W(H)$ , которое является степенью в вейлевском преобразовании:  $H \rightarrow \tilde{H} = \Omega^k H$ .

## 1. Лагранжиан гравитации Вейля-Дирака

Действие для гравитации в ОТО [20, 21] имеет вид:

$$S_g = - \int \frac{M_P^2 c^2}{2\hbar} R \sqrt{|g|} d^4x. \quad (4)$$

Обычно полагают

$$M_P = \sqrt{\frac{\hbar c}{8\pi G_N}}, \quad \hbar = 1, \quad c = 1, \quad G_N = 1. \quad (5)$$

Здесь  $M_P$  – приведенная масса Планка,  $G_N$  – ньютоновская постоянная тяготения. Приведенная масса Планка зачастую удобней обычной, так как позволяет не выписывать множитель  $8\pi$ .

Для действия гравитационного поля в пространстве Вейля попробуем использовать инвариантный относительно локальных масштабных преобразований аналог (4) с переменной массой Планка  $\tilde{M}_P = M_P \psi$ , зависящей от вектора Вейля:

$$\tilde{S}_A = - \int \frac{c^2}{2} M_P^2 \psi^2 \tilde{R} \sqrt{|g|} d^4x, \quad (6)$$

где

$$\psi(x) = \exp \left( \int_{\gamma(x_0, x)} A_{\lambda} dx^{\lambda} \right), \quad (7)$$

$\gamma(x_0, x)$  – произвольная гладкая кривая, соединяющая фиксированную точку  $x_0$  и текущую точку  $x$  на гладком многообразии  $M$ ,  $\tilde{R}$  – вейлевская кривизна. Однако такое геометризованное дейст-

вие (6), зависящее только от метрики  $g_{\mu\nu}$  и вектора Вейля  $A_\lambda$ , накладывает следующее ограничение на вектор Вейля  $A$ :

$$F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu = 0, \quad (8)$$

приводя к интегрируемой вейлевской геометрии (IWG). Действительно, поскольку можно записать

$$\psi^2 \check{R} = \psi^2 R - 6\psi^2 A^2 - 6\psi^2 \nabla A, \quad (9)$$

то следует вычислить вариацию величины  $I$ , где

$$I = I_1 - 6I_2 - 6I_3, \quad (10)$$

$$I_1 = \int \psi^2 R \sqrt{-g} d^4 x, \quad I_2 = \int \psi^2 A^2 \sqrt{-g} d^4 x, \\ I_3 = \int \psi^2 \nabla A \sqrt{-g} d^4 x. \quad (11)$$

Вариация  $I_1$  по  $\delta g^{\mu\nu}$  дает:

$$\delta I_1 = \int d^4 x \sqrt{-g} \left( \psi^2 G_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} \square \psi^2 - \nabla_\mu \nabla_\nu \psi^2 \right) \delta g^{\mu\nu}. \quad (12)$$

Для  $I_3$  можно записать:

$$I_3 = \int \psi^2 \partial_\lambda \left( A^\lambda \sqrt{-g} \right) d^4 x = \\ = \int d^4 x \left[ \partial_\lambda \left( \psi^2 A^\lambda \sqrt{-g} \right) - A^\lambda \sqrt{-g} \partial_\lambda \psi^2 \right]. \quad (13)$$

Предполагая, что  $\psi^2 A^\lambda$  на бесконечности убывает, получаем, что вариация

$$\delta I_3 = -2\delta I_2, \quad (14)$$

так как

$$\delta I_2 = \int \delta \left( \psi^2 A^2 \sqrt{-g} \right) d^4 x = \\ = \int d^4 x \sqrt{-g} \psi^2 \left( A_\mu A_\nu - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} A^2 \right) \delta g^{\mu\nu}, \quad (15)$$

$$\psi(x) = \exp \left( \int A_\lambda dx^\lambda \right), \quad (16)$$

$$\delta I_3 = - \int d^4 x \delta \left[ A^\lambda \sqrt{-g} \partial_\lambda \psi^2 \right] = \\ = - \int d^4 x \delta \left( 2\psi^2 A^\lambda A_\lambda \sqrt{-g} \right) = \\ = -2 \int d^4 x \delta \left( \psi^2 A^2 \sqrt{-g} \right). \quad (17)$$

Учтем, что

$$\frac{\square \psi^2 - \nabla_\mu \nabla_\nu \psi^2}{\psi^2} = \\ = 4g_{\mu\nu} A^2 + 2g_{\mu\nu} \nabla A - 2\nabla_\mu A_\nu - 4A_\mu A_\nu. \quad (18)$$

Полагая вариацию  $\delta I = 0$  и собирая все результаты, получаем уравнения, следующие из вариации  $\check{S}_A$  по метрике  $\delta g^{\mu\nu}$ :

$$G_{\mu\nu} + 2A_\mu A_\nu + g_{\mu\nu} A^2 + 2g_{\mu\nu} \nabla A - 2\nabla_\mu A_\nu = 0. \quad (19)$$

Так как тензор Эйнштейна  $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$  – симметричный, то уравнения (19) могут удовлетворяться только при условии

$$\nabla_\mu A_\nu = \nabla_\nu A_\mu. \quad (20)$$

Это обстоятельство связано с несимметричностью вейлевского аналога тензора Риччи  $\check{R}_{\mu\nu}$  в общем случае.

Итак, действие для гравитации (6), с линейным относительно кривизны  $\check{R}$  лагранжианом, зависящее только от геометрических атрибутов пространства Вейля – метрики  $g$  и вектора Вейля  $A$ , не относится к общему случаю пространства Вейля, а имеет в виду только интегрируемую вейлевскую геометрию (IWG). Чтобы использовать действие (6), в выражении (7) мы должны положить  $A_\nu = \frac{\partial_\nu \sigma(x)}{\sigma}$ , где  $\sigma(x)$  – некоторое вещественное скалярное поле.

Дирак [15] предложил другое вейлевское инвариантное действие, введя в лагранжиан гравитации с линейной зависимостью от кривизны  $R$  дополнительное скалярное поле  $\beta(x)$ , не связанное с вектором  $A$ , которое имеет нужный вейлевский вес  $W(\beta) = -1$ :

$$\check{S}_g = - \int \frac{c^3}{16\pi G_N} \beta^2(x) \check{R} \sqrt{|g|} d^4 x = \\ = - \frac{1}{2} \int M_P^2 \beta^2(x) \check{R} \sqrt{|g|} d^4 x, \quad \hbar = 1, \quad c = 1. \quad (21)$$

Вариация  $\delta \check{S}_g$  по метрике  $\delta g^{\mu\nu}$  приводит к приемлемому симметричному тензору:

$$G_{\mu\nu} = - \frac{1}{\beta^2} \left( 4\beta^\mu \beta^\nu - g^{\mu\nu} \beta^\lambda \beta_\lambda \right) - \\ - \frac{2}{\beta^2} \left( g^{\mu\nu} \beta \beta_{;\lambda}^\lambda - \beta \beta^{\nu;\lambda} g^{\lambda\nu} \right), \quad (22)$$

как это следует из выражения (12) для  $\delta I_1$  при замене в нем  $\psi \rightarrow \beta(x)$ . Это также следует из соотношения (19) при подстановке  $A_\nu = \frac{\beta_{;\nu}}{\beta}$ .

Действие для гравитационного поля в виде (21) за счет введения дополнительной функции Дирака  $\beta(x)$  является конформно-инвариантным. Поле  $\beta(x)$  можно интерпретировать не как переменную массу Планка, а как переменный параметр связи гравитации и материи:



$$\frac{1}{G_\beta} = \frac{\beta^2(x)}{G_N}. \quad (23)$$

Итак,

$$\beta^2 \check{R} = \beta^2 R - 6\beta^2 A^2 - 6\beta^2 \nabla A, \quad (24)$$

причем член  $-6\beta^2 \nabla A$  можно заменить в лагранжиане (24) на  $+12\beta\beta_\lambda A^\lambda$  с помощью интегрирования поверхностного члена, т. е. приема, использованного при выводе выражения (13), с заменой  $\psi$  на  $\beta$ . Таким образом,

$$\check{S}_g = -\frac{1}{2} \int M_P^2 \left( \beta^2 R - 6\beta^2 A_\lambda A^\lambda + 12\beta\beta_\lambda A^\lambda \right) \sqrt{|g|} d^4 x. \quad (25)$$

Отметим, что в гравитации Вейля–Дирака вектор  $A_\nu$ , вообще говоря, это неинтегрируемый вектор Вейля. Кроме того, Дирак включил в лагранжиан  $L_\beta$  вейлевскую инвариантную связь скалярного поля  $\beta$  и вектора  $A$ :

$$\alpha \check{\partial}_\mu \beta \check{\partial}^\mu \beta = \alpha g^{\mu\nu} (\beta A_\mu - \beta_\mu) (\beta A_\nu - \beta_\nu), \quad (26)$$

а также напряженность  $F^{\mu\nu}$  векторного поля  $A$  и член  $\sim \beta^4$ :

$$\omega^2 F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + 2\lambda\beta^4. \quad (27)$$

Здесь  $\alpha$  – параметр,  $\omega \sim \frac{1}{e_A}$  – произвольная неот-

рицательная величина, определяющая вклад напряженности  $F_{\lambda\rho}$  вектора Вейля  $A$  в тензор энергии-импульса,  $e_A$  – безразмерный вейлевский «заряд»,  $\lambda$  – безразмерный параметр. Окончательно получается вейлевски инвариантный лагранжиан гравитации Дирака в виде:

$$\check{S}_\beta = -\frac{M_P^2}{2} \int L_\beta \sqrt{|g|} d^4 x = -\frac{1}{16\pi} \int L_\beta \sqrt{|g|} d^4 x, \quad (28)$$

где  $L_\beta$  записывается как:

$$L_\beta = \beta^2 R - 6\beta^2 A_\lambda A^\lambda + 12\beta\beta_\lambda A^\lambda + \alpha(\beta_\mu - A_\mu\beta)(\beta^\mu - A^\mu\beta) + 2\lambda\beta^4 + \omega^2 F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad (29)$$

или

$$L_\beta = \beta^2 R + 6\beta_\lambda \beta^\lambda + (\alpha - 6)(\beta_\mu - A_\mu\beta) \times (\beta^\mu - A^\mu\beta) + 2\lambda\beta^4 + \omega^2 F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}. \quad (30)$$

Знак кривизны  $R$  в выражении (30) и в публикации [6] разный (из-за разности выбора соглашений о свертывании индексов в тензоре Римана).

При  $\alpha = 6$ ,  $\lambda = 0$ ,  $\omega = 0$  получается конформно-инвариантный лагранжиан (см. также [8, 22])

$$L_0 = R\beta^2 + 6\beta^\lambda \beta_\lambda, \quad (31)$$

приводящий к конформному уравнению Пенроуза–Тагирова–Черникова [22]:

$$\square\beta - \frac{R}{6}\beta = 0. \quad (32)$$

При  $\alpha = 0$ ,  $\lambda = 0$ ,  $\omega = 0$  получаем вейлевский инвариантный лагранжиан

$$L_g = \check{R}\beta^2(x) \quad (33)$$

с действием (21).

Дирак, приведя в [15] сначала полный лагранжиан (30), затем подробно разобрал частный случай  $\alpha = 6$ . Но с точки зрения изучения влияния поля  $\beta$  и вейлевского вектора  $A$  на динамику гравитации более интересен случай отрицательных значений  $\alpha < 0$  [6]. Действительно, с учетом знака в (28) кинетическая энергия скалярного поля  $\beta(x)$  будет положительной в (30), если  $\alpha < 0$ . Поэтому при значениях  $\alpha < 0$  это поле может играть физическую роль в данной модели, если оно не исчезло после нарушения свойства конформности.

## 2. Уравнения гравитации Вейля–Дирака

Рассмотрим гравитацию Вейля–Дирака. Уравнения движения получаются варьированием действия (28) с лагранжианом (30) по метрике  $\delta g_{\mu\nu}$ , по полю  $\delta\beta$  и по вектору  $\delta A^\nu$ . Следуя [4–6], получаем при вариации действия по метрике  $\delta g_{\mu\nu}$ :

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \equiv G^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} = T^{(\beta)\mu\nu} + T^{(A)\mu\nu} + T^{(F)\mu\nu} + \frac{8\pi T^{(m)\mu\nu}}{\beta^2} - g^{\mu\nu} \lambda \beta^2(x). \quad (34)$$

где

$$T^{(\beta)\mu\nu} = \frac{1}{\beta^2} \left( -2 + \frac{\alpha}{2} \right) g^{\mu\nu} \beta_\alpha \beta^\alpha + \frac{1}{\beta^2} (2 - \alpha) \beta^{\mu\nu} - \frac{2}{\beta^2} g^{\mu\nu} \beta \beta_{;\alpha}^\alpha + \frac{2}{\beta^2} \beta \beta^{\mu;\nu}, \quad (35)$$

$$T^{(A)\mu\nu} = (\alpha - 6) \left( -A^\mu A^\nu + \frac{g^{\mu\nu}}{2} A^\lambda A_\lambda \right) + \frac{(\alpha - 6)}{\beta} (\beta^\mu A^\nu + \beta^\nu A^\mu - g^{\mu\nu} \beta_\lambda A^\lambda), \quad (36)$$

$$\begin{aligned} T^{(F)\mu\nu} &= \omega^2 \frac{8\pi}{\beta^2} \left[ \frac{1}{16\pi} g^{\mu\nu} F^{\lambda\rho} F_{\lambda\rho} - \frac{1}{4\pi} F_{\lambda}^{\mu} F^{\nu\lambda} \right] = \\ &= \frac{\omega^2}{\beta^2} \left[ \frac{1}{2} g^{\mu\nu} F^{\lambda\rho} F_{\lambda\rho} - 2F_{\lambda}^{\mu} F^{\nu\lambda} \right]. \end{aligned} \quad (37)$$

Здесь введен  $T^{(m)\mu\nu}$  – тензор энергии-импульса обычной материи. Величины  $T^{(m)\mu\nu}$ ,  $\Psi$  и  $J^{\mu}$  входят в выражение для вариации лагранжиана  $L_{matter}$  обычной материи:

$$S_m = \int d^4x L_{matter} \sqrt{-g}, \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \delta(L_{matter} \sqrt{-g}) &= 8\pi T^{(m)\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \sqrt{-g} + \\ &+ 16\pi J^{\lambda} \delta A_{\lambda} \sqrt{-g} + \Psi \delta \beta \sqrt{-g}. \end{aligned} \quad (39)$$

Это плотность вейлевского заряда обычной материи и плотность вейлевского тока обычной материи. Вариация по полю  $\delta\beta$  дает уравнение:

$$R = \alpha \frac{\beta^{\lambda}{}_{;\lambda}}{\beta} - 4\beta^2 \lambda - (\alpha - 6) (A^{\lambda} A_{\lambda} + A^{\lambda}{}_{;\lambda}) - \frac{\Psi}{2\beta}. \quad (40)$$

Вариация по вектору  $\delta A^{\nu}$  дает уравнение:

$$4\omega^2 F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 16\pi J^{\mu} - 2(\alpha - 6)\beta(\beta^{\mu} - \beta A^{\mu}). \quad (41)$$

Далее положим

$$T^{(m)\mu\nu} = 0, \quad J^{\lambda} = 0, \quad \Psi = 0. \quad (42)$$

Вейлевский ток обычной материи  $J^{\mu}$  полагаем равным нулю. Итак, из (41) с учетом определения

$$F_{\mu}^{\nu} = \partial_{\mu} A^{\nu} - \partial_{\nu} A^{\mu} \quad (43)$$

получаем:

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu;\mu} = 0, \quad (44)$$

то есть:

$$(\beta\beta^{\mu} - \beta^2 A^{\mu})_{;\mu} = 0. \quad (45)$$

Соотношения (34) – (41) инвариантны относительно преобразований Вейля при условии (42). Величины  $\beta$  и  $A_{\alpha}$  определены с точностью до преобразований Вейля

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta} &\rightarrow g_{\alpha\beta} \Omega^2(x), \\ \beta &\rightarrow \beta \Omega^{-1}(x) \quad A_{\alpha} \rightarrow A_{\alpha} - \partial_{\alpha} \ln \Omega(x). \end{aligned} \quad (46)$$

Пусть произошло нарушение вейлевской инвариантности: полагаем  $\beta(x) = 1$ , что соответствует ОТО. Тогда из (41) следует, что

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 4\pi J^{\mu} + \frac{1}{2\omega^2} (\alpha - 6) A^{\mu}. \quad (47)$$

Воспользуемся далее рассуждениями из [6]. Пусть  $(\alpha - 6) < 0$ . Если положить  $\frac{1}{2\omega^2} (\alpha - 6) = -k_A^2 < 0$ ,  $J^{\mu} = 0$ ,  $\beta(x) = 1$ , то получаем:

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu} + k_A^2 A^{\mu} = 0. \quad (48)$$

Из (44) следует, что

$$A^{\mu}{}_{;\mu} = 0. \quad (49)$$

Отсюда

$$\nabla_{\nu} \nabla^{\nu} A^{\mu} + k_A^2 A^{\mu} = 0, \quad (50)$$

то есть получаются уравнения Прока (49), (50) для свободного векторного поля вейлонов со спином 1 и массой  $m_A = \frac{\hbar k_A}{c}$  [5, 6]. При этом скалярная

кривизна, связанная с космологической постоянной и наличием вейлонов (свободного от обычной материи пространства), равна

$$R = -4\lambda + 2k_A^2 (A^{\lambda} A_{\lambda} + A^{\lambda}{}_{;\lambda}) = -4\lambda + 2k_A^2 A^{\lambda} A_{\lambda}. \quad (51)$$

Заметим, что в ранней вселенной флуктуации векторного поля вейлонов могут приводить к флуктуации кривизны в соответствии с соотношением (51).

Масса вейлона в модели Розена–Израэлиты [6]

$$m_A = \frac{k_A \hbar}{c} = \frac{\hbar}{c} \sqrt{\frac{1}{2\omega^2} (6 - \alpha)} \sim \frac{1}{\omega}, \quad (52)$$

то есть произвольна, если параметр  $\omega$  произволен.

Пусть пробная макрочастица движется по геодезической, причем можно принять в некоторой ее окрестности в геодезической системе координат  $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = 0$ . Тогда 4-скорость пробной частицы меняется как

$$\begin{aligned} \frac{du^{\lambda}}{ds} &= -\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} u^{\mu} u^{\nu} + A^{\lambda} - (A_{\alpha} u^{\alpha}) u^{\lambda} = \\ &= A^{\lambda} - (A_{\alpha} u^{\alpha}) u^{\lambda}, \end{aligned} \quad (53)$$

а ее масса  $m$  как ([23])

$$\frac{1}{m} \frac{dm}{ds} = (A_{\alpha} u^{\alpha}). \quad (54)$$

Здесь  $ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta}$ ,  $u^{\lambda} = \frac{dx^{\lambda}}{ds}$ . Такое изменение массы, если оно происходит при ненулевой напряженности  $F_{\alpha\beta}$  вектора Вейля  $A_{\alpha}$ , связано с парадоксальным «эффектом вторых часов» в геометрии Вейля [24, 25].

По замечанию А. Эйнштейна, в пространстве-времени, описываемой геометрией Вейля, существование резких спектральных линий в излучении от звезд невозможно из-за того, что скорость хода атомных часов зависит от их прошлой истории. Или иначе говоря, двое различных часов, пропутешествовавших по Вселенной различными путями и вернувшихся в первоначальную точку, будут иметь разную скорость хода.

В [23] мы отмечали, что проявление «эффекта вторых часов» в виде соотношения (54) может быть интересно в качестве способа «необратимого» изменения массы частицы при переходе через микроскопические области ненулевой напряженности  $F_{\mu}^{\lambda}$  вектора Вейля  $A_{\mu}$ . Но такое изменение массы должно быть обязательно дискретным; т. е. поле вектора Вейля и его напряженность должны быть квантованными. Кроме того, такая возможность не должна противоречить экспериментальным фактам и общим концепциям физики частиц. Проблема реализации такой возможности заключается в том, что вектор Вейля будет менять массу у любой массивной частицы.

Допустим тогда в связи с этим, что в выражение (54) входит не вектор Вейля, а вектор Вейля, умноженный на вейлевский заряд, т. е.  $q_W A_{\mu}$ , причем этот вейлевский заряд  $q_W$  (ничего общего не имеющий с электрическим зарядом) ненулевой только для некоторых типов частиц. Но такое допущение приводит к тому, что свободные классические массивные частицы с нулевым вейлевским зарядом будут двигаться по геодезическим пространства Римана

$$\frac{dp^{\lambda}}{ds} + \frac{1}{mc} \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} p^{\mu} p^{\nu} = 0, \quad (55)$$

а классические частицы с ненулевым вейлевским зарядом и переменной массой будут двигаться с учетом геометрии Вейля в одном и том же физическом пространстве-времени. Кроме того, на частицу в пространстве Вейля будет действовать сила  $q_W F_{\mu}^{\lambda} \frac{dx^{\mu}}{ds}$ , так что изменение 4-импульса  $p^{\mu}$  классической вейлевской частицы будет определяться соотношением

$$\frac{dp^{\lambda}}{ds} + \frac{1}{mc} \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} p^{\mu} p^{\nu} = mcq_W A^{\lambda} + q_W F_{\mu}^{\lambda} \frac{dx^{\mu}}{ds}. \quad (56)$$

Если поле вейлонов  $A_{\alpha}(x)$ , определяемое как решение уравнений Прока (50), мало по амплитуде, то масса пробной частицы  $m$  практически не

меняется при движении. В этом случае проявления «эффекта вторых часов» практически нет. Его нет также, если частицы безмассовые. Если мы рассматриваем современную эпоху, то для нее условие малости амплитуды можно взять в виде  $|A_{\alpha} A^{\alpha}| < \frac{H^2}{c^2} \sim 10^{-52} \text{ м}^{-2}$ . Здесь  $H$  – постоянная Хаббла.

Допустимо считать  $\beta(x)$  переменной величиной и после нарушения локальной конформной инвариантности, как считал Дирак [15] и считают другие авторы; см., например, [4]. Если  $\beta(x)$  – функция, то она соответствует переменному параметру  $u$  силы гравитации  $G_{\beta} = \frac{G_N}{\beta^2(x)}$ , где

$G_N = 6,67 \cdot 10^{-14} \text{ м}^3 \text{ с}^{-2} \text{ г}^{-1}$  – постоянная Ньютона. Разумеется, изменение гравитационного параметра должно быть достаточно малым, чтобы не противоречить результатам астрономических наблюдений. Переменность величины  $\beta(x)$  успешно применялась некоторыми авторами для объяснения наблюдаемых скоростей звезд в галактиках.

### 3. Наша модификация лагранжиана гравитации Вейля–Дирака

В принципе, можно использовать векторное поле в лагранжиане, аналогичное вектору Вейля, и при этом вообще избежать «эффекта вторых часов». Для этого следует модифицировать гравитацию Вейля–Дирака, введя два векторных поля. Вектор Вейля  $A$  в определении пространства Вейля  $(M, g, A)$  будет чисто градиентным, если положить его равным

$$A_{\nu} = \frac{\partial_{\nu} \beta(x)}{\beta}, \quad (57)$$

где  $\beta(x)$  – функция Дирака. Функция  $\beta$  при вейлевском преобразовании меняется как:

$$\beta \rightarrow \tilde{\beta} = \beta \Omega^{-1}. \quad (58)$$

Введем также другой вектор  $C_{\mu}(x)$ , который при вейлевском преобразовании меняется как и вектор Вейля  $A_{\mu}$ :

$$C_{\mu} \rightarrow \tilde{C}_{\mu} = C_{\mu} - \frac{\partial \ln \Omega(x)}{\partial x^{\mu}}. \quad (59)$$

Тогда

$$\beta^2 \check{R} = \beta^2 R - 6\beta^2 A_\lambda A^\lambda + 12\beta\beta_\lambda A^\lambda = \beta^2 R + 6\beta_\lambda \beta^\lambda, \quad (60)$$

и модифицированный лагранжиан принимает вид:

$$\begin{aligned} \check{L}_\beta = & \beta^2 R + 6\beta_\lambda \beta^\lambda + \alpha (\beta_\mu - C_\mu \beta) (\beta^\mu - C^\mu \beta) + \\ & + 2\lambda \beta^4 + \omega^2 E^{\mu\nu} E_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (61)$$

$$E_{\mu\nu} = \partial_\mu C_\nu - \partial_\nu C_\mu, \quad (62)$$

где вектор Вейля  $A$  в лагранжиан (61) уже не входит, а из  $\alpha$  не вычитается число 6. Еще раз подчеркнем, что  $A_\mu$  и  $C_\mu$  – совершенно разные векторы, но лагранжианы (30) и (61) формально совпадают. Заметим здесь, что только вектор  $A_\mu$  используется в определении вейлевской связности:

$$\check{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda + \delta_\mu^\lambda A_\nu + \delta_\nu^\lambda A_\mu - g_{\mu\nu} A^\lambda. \quad (63)$$

При  $\alpha + 6 < 0$  кинетическая энергия поля  $\beta(x)$  будет положительная. Если рассматривать массу у частицы до нарушения конформной инвариантности, то эта масса должна быть переменная:

$$m = m_0 \beta(x). \quad (64)$$

Это – случай интегрируемой геометрии Вейля (IWG). При фиксировании  $\beta(x) = 1$  вектор  $A_\nu = \frac{\beta_\nu}{\beta}$  в связности Вейля (63) исчезает, и эта связность становится римановой связностью Леви–Чивита  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ . Вектор  $C_\mu$  и его напряженность  $E_{\mu\nu}$  в лагранжиане остаются, но локального эффекта «вторых часов» после нарушения конформной симметрии нет из-за использования интегрируемой геометрии Вейля. Пусть два электрона на разных концах вселенной имеют разные массы вследствие переменности  $\beta(x)$ . При сведении их в одну точку у них теперь будут одинаковые массы. Векторные частицы со спином 1, связанные с векторным полем  $C_\mu$ , лучше называть не вейлонами, как принято в [5, 6], а как-то иначе, например вектонами [26]. Собственно вейлоны в такой модификации лагранжиана уже не существуют, поскольку вектор  $C_\mu$  уже не имеет геометрической интерпретации вектора Вейля  $A_\mu$ .

#### 4. Конформный лагранжиан с одним комплексным скалярным полем

Поскольку вещественное скалярное поле  $\beta(x)$  нужно только для соблюдения конформности ла-

гранжиана (29), но само по себе не определяет геометрию пространства Вейля, то его можно заменить на комплексное скалярное поле  $\chi$ :  $\beta^2 \rightarrow \chi\chi^*$ . Произведение  $\chi\chi^*$  должно преобразовываться с вейлевским весом  $W = -2$ . Такое поле использовалось рядом авторов, см. например, [19, 27, 28]. Комплексность поля  $\chi$  означает, что ему можно приписать электрический заряд и ввести взаимодействие с электромагнитным потенциалом  $B$ . Таким образом, введем комплексный вектор  $w$ , объединяющий вещественный вектор Вейля  $A$  и вещественный электромагнитный потенциал  $B$ :

$$w = A + iB. \quad (65)$$

В вектор электромагнитного потенциала  $B$  мы включили электрический заряд, и он обратно пропорционален параметру  $\delta$  (см. ниже). Введем обозначение:

$$\chi(x) = \beta(x) \exp(i\eta(x)). \quad (66)$$

Тогда можно определить комплексную вейлевскую производную:

$$\hat{\partial}_\mu \chi = \partial_\mu \chi - w_\mu \chi = \left( \frac{\beta_\mu}{\beta} - A_\mu \right) \chi + i(\eta_\mu - B_\mu) \chi. \quad (67)$$

Лагранжиан вейлевской гравитации с действием

$$\check{S}_\chi = -\frac{c^2}{2} M_P^2 \int L_\chi \sqrt{|g|} d^4 x \quad (68)$$

запишем так:

$$\begin{aligned} L_\chi = & |\chi|^2 R + 6g^{\mu\nu} (\partial_\mu \chi)^* \partial_\nu \chi + \\ & + (\alpha - 6) g^{\mu\nu} (\hat{\partial}_\mu \chi)^* \hat{\partial}_\nu \chi + \\ & 2\lambda |\chi|^4 + \omega^2 F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \delta^2 H^{\mu\nu} H_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (69)$$

где  $\delta$  – параметр связи электромагнитного поля,  $H_{\mu\nu}$  – напряженность электромагнитного поля  $B_\nu$ :

$$H_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu. \quad (70)$$

В системе Гаусса

$$\frac{M_P^2 c^2}{2\hbar} \delta^2 = \frac{1}{16\pi e^2}, \quad (71)$$

где  $e$  – электрический заряд. Отметим, что векторы  $A$  (вектор Вейля) и  $B$  (электромагнитный потенциал) входят в лагранжиан (69) похожим образом, но первый связан с абелевой некомпактной группой, второй – с абелевой компактной группой. Кроме того, в отличие от электромагнитного потенциала  $B$ , вектор Вейля  $A$  входит также в связность Вейля (63).

Полагая формально  $\chi = \exp(i \ln \beta(x))$  и  $A=0$ , получаем из (69) лагранжиан:

$$L_\chi = R + \frac{1}{\beta^2} 6g^{\mu\nu} \partial_\mu \beta \partial_\nu \beta + \frac{1}{\beta^2} (\alpha - 6) g^{\mu\nu} (\beta_\mu - B_\mu \beta) \times (\beta_\nu - B_\nu \beta) + 2\lambda + \delta^2 H^{\mu\nu} H_{\mu\nu}. \quad (72)$$

Заметим, что лагранжиан (72) конформно не инвариантен, но сохраняет свой вид при преобразовании  $\beta \rightarrow l\beta$ , где  $l$  – вещественный параметр. Если потребовать, чтобы при этом преобразовании сохраняло вид исходное поле  $\chi = \exp(i \ln \beta)$ , то  $l = \exp(2\pi n)$ , где  $n$  – целое число.

Полагая  $\chi = \exp(\ln \beta) = \beta$  и  $B=0$ , получаем из (69) лагранжиан (30):

$$\frac{L_\beta}{\beta^2} = R + \frac{1}{\beta^2} 6\beta_\lambda \beta^\lambda + \frac{1}{\beta^2} (\alpha - 6) g^{\mu\nu} (\beta_\mu - A_\mu \beta) \times (\beta_\nu - A_\nu \beta) + 2\lambda \beta^2 + \frac{1}{\beta^2} \omega^2 F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}. \quad (73)$$

Рассмотрим случай, когда

$$\beta(x) = 1 + \mu(x), \quad |\mu| \ll 1, \quad (74)$$

то есть когда произошло нарушение вейлевской симметрии, но есть малые флуктуации поля  $\beta$ . Тогда при подстановках

$$\beta \approx 1, \quad B \rightarrow A, \quad \delta^2 H^{\mu\nu} H_{\mu\nu} \rightarrow \omega^2 F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad \beta_\nu = \mu_\nu \quad (75)$$

выражения (72) и (73) практически совпадают.

Сделаем еще одно замечание. Если обобщить результаты раздела 3 на комплексный случай и определить:

$$w_\mu = C_\mu + iB_\mu, \quad A_\mu = \frac{\partial_\mu |\chi|^2}{2|\chi|^2}, \quad \hat{\partial}_\mu \chi = \partial_\mu \chi - w_\mu \chi, \quad (76)$$

$$E_{\mu\nu} = \partial_\mu C_\nu - \partial_\nu C_\mu, \quad (77)$$

то лагранжиан скалярного поля  $\chi$

$$L_\chi = |\chi|^2 R + 6g^{\mu\nu} (\partial_\mu \chi)^* \partial_\nu \chi + \alpha g^{\mu\nu} (\hat{\partial}_\mu \chi)^* \hat{\partial}_\nu \chi + + 2\lambda |\chi|^4 + \omega^2 E^{\mu\nu} E_{\mu\nu} + \delta^2 H^{\mu\nu} H_{\mu\nu}. \quad (78)$$

будет соответствовать интегрируемой геометрии Вейля (IWG), причем при преобразованиях Вейля

$$C_\alpha \rightarrow C_\alpha - \partial_\alpha \ln \Omega(x) \quad (79)$$

плотность лагранжиана  $\sqrt{-g} L_\chi$  будет инвариантной.

Рассмотрим теперь вариант лагранжиана (78), когда напряженность  $E_{\mu\nu}$  векторного поля  $C_\mu$

в лагранжиан не входит. Это может быть только в случае, когда не только вектор Вейля  $A_\mu$  градиентный в соответствии с (78), но и вектор  $C_\mu$  градиентный. Причем калибровка конформного фактора в выражении (79) должна быть фиксирована условием:  $C_\alpha = 0$  при оставшемся ненулевом поле  $\chi(x)$ . Тогда лагранжиан (78) сводится к лагранжиану:

$$L_\chi = |\chi|^2 R + 6g^{\mu\nu} (\partial_\mu \chi)^* \partial_\nu \chi + \alpha g^{\mu\nu} (\hat{\partial}_\mu \chi)^* \hat{\partial}_\nu \chi + + 2\lambda |\chi|^4 + \delta^2 H^{\mu\nu} H_{\mu\nu}, \quad (80)$$

где

$$\hat{\partial}_\mu \chi = \partial_\mu \chi - iB_\mu \chi, \quad H_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu. \quad (81)$$

Напомним здесь, что  $B_\mu$  – электромагнитный потенциал. В такой калибровке конформного фактора  $\Omega(x)$  лагранжиан (80) является лагранжианом заряженного скалярного поля с неминимальной связью с гравитацией.

## 5. Конформный лагранжиан в модели Бранса–Дикке

Лагранжиан и действие для гравитации Бранса–Дикке [16–18] выглядят так:

$$L_{BD} = \varphi(x) R - \frac{\omega}{\varphi(x)} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \varphi(x) \partial_\beta \varphi(x), \quad S_{BD} = -\frac{1}{16\pi} \int d^4 x \sqrt{-g} L_{BD}. \quad (82)$$

Здесь  $\varphi$  – вещественное скалярное поле Бранса–Дикке,  $\omega$  – параметр теории. Если сделать подстановку  $\varphi = \beta^2$ , то лагранжиан будет иметь вид:

$$L_{BD} = \beta^2 R - 4\omega \partial^\mu \beta \partial_\mu \beta. \quad (83)$$

Сравнивая это выражение с (31), видим, что лагранжиан (83) будет конформно-инвариантным, если

$$\omega = -\frac{3}{2}. \quad (84)$$

Полевые уравнения модели Бранса–Дикке имеют вид [17,18]:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi}{\varphi} T_{\mu\nu}^{(m)} + \frac{\omega}{\varphi^2} (g_{\mu\nu} \partial^\alpha \varphi \partial_\alpha \varphi) + + \frac{1}{\varphi} (\partial_\mu \partial_\nu \varphi - g_{\mu\nu} \square \varphi), \quad (85)$$

$$8\pi T_{\alpha}^{(m)\alpha} = (3 + 2\omega)\square\varphi. \quad (86)$$

Здесь  $T_{\mu\nu}^{(m)}$  – тензор энергии-импульса обычной материи. Случай ОТО имеет место, когда  $\omega \rightarrow \infty$ .

Тензор энергии-импульса должен быть бесследовым в конформном случае, т. е. при  $3 + 2\omega = 0$ . При этом поле  $\varphi$  перестает быть динамическим.

Здесь следует сделать замечание. Если ввести конформные преобразования метрики

$$g_{\alpha\beta} \rightarrow \Omega^2(x)g_{\alpha\beta} \quad (87)$$

при условии (84), то тем самым осуществляется переход к интегрируемой геометрии Вейля. Соответствующие римановы пространства с различными  $g_{\alpha\beta}$  и  $\varphi$  находятся в конформном соответствии и образуют класс эквивалентности (пространство Вейля) по преобразованиям (87). В этом случае вектор Вейля градиентный. Обычно называют (см., например, [29]) фреймом Эйнштейна (или эйнштейновской калибровкой) выбор  $\Omega(x)$ , когда  $\varphi \equiv \text{const}$ , и фреймом Иордана (или римановой калибровкой), когда  $\varphi$  – некоторая функция, как в выражении (82). При этом, конечно, аффинные связности будут разными, отличаясь друг от друга вейлевским преобразованием. Если же преобразовывать лагранжиан (83) при произвольном параметре  $\omega \neq -\frac{3}{2}$ , то после преобразования (87) он будет описывать «различную физику».

Итак, теория Бранса–Дикке [16–18] для конформного выбора параметра (84) сводится к уже рассмотренному варианту – лагранжиану (31), частному случаю теории Вейля–Дирака [15].

## 6. Модель Hans Ohanian

Автором [19] предлагается использовать комплексное поле  $\tilde{\chi}(x)$  на основе общей геометрии Вейля в лагранжиане для гравитации. Взаимодействие вектора Вейля  $A_{\mu}$  со скалярным полем позволяет привлечь механизм спонтанного нарушения локальной конформной симметрии.

В [19] отмечается общий факт, что неправильный знак у кинетического члена дилатонного поля в лагранжиане приводит к «духам» (ghosts) и нестабильности системы. Пропагатор Фейнмана с неправильным знаком приводит к нарушению унитарности при квантовании теории. Поэтому если дилатонное поле с неправильным знаком не

исчезает после нарушения локальной конформной инвариантности, это приведет к трудностям при квантовании скалярного поля. Однако если это поле исчезло при выборе калибровки, то проблем со знаком поля нет, но и конформности уже нет; а квантование неконформной модели гравитации имеет свои трудности [8]. Поэтому желательно иметь как правильный знак кинетического члена у скалярного поля, так и возможность квантования конформно инвариантной классической модели. По мнению [19], использование вектора Вейля в лагранжиане решает проблему неправильного знака кинетического члена и дает также динамический механизм нарушения конформной симметрии.

Выпишем лагранжиан (69)  $L_{\chi}$  для случая нулевого электромагнитного потенциала  $B_{\mu} = 0$  и лагранжиан  $\tilde{L}_{\chi}$  модели [19]:

$$\begin{aligned} -\frac{c^2}{2}M_P^2 L_{\chi} &= -\frac{c^2}{2}M_P^2 |\chi|^2 R - \\ &- \frac{c^2}{2}M_P^2 6g^{\mu\nu} (\partial_{\mu}\chi)^* \partial_{\nu}\chi - \\ &- \frac{c^2}{2}M_P^2 (\alpha - 6)g^{\mu\nu} (\tilde{\partial}_{\mu}\chi)^* \tilde{\partial}_{\nu}\chi - \\ &- \frac{c^2}{2}M_P^2 2\lambda |\chi|^4 - \frac{c^2}{2}M_P^2 \omega^2 F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (88)$$

$$\begin{aligned} \tilde{L}_{\chi} &= -\frac{\sinh^2 \Theta}{6} \tilde{\chi} \tilde{\chi}^* R - \sinh^2 \Theta g^{\mu\nu} \partial_{\mu} \tilde{\chi} \partial_{\nu} \tilde{\chi}^* + \\ &+ \cosh^2 \Theta g^{\mu\nu} (\tilde{\partial}_{\mu} \tilde{\chi})^* \tilde{\partial}_{\nu} \tilde{\chi} - \\ &- \frac{\tilde{\lambda}}{24} \cosh^2 \Theta |\tilde{\chi}|^4 - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (89)$$

Здесь  $A_{\mu}$  – вектор Вейля,

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu}, \quad \tilde{\partial}_{\mu} \chi = \partial_{\mu} \chi - A_{\mu} \chi, \\ \tilde{\partial}_{\mu} \tilde{\chi} &= \partial_{\mu} \tilde{\chi} - A_{\mu} \tilde{\chi}. \end{aligned} \quad (90)$$

Приравнивая  $-\frac{c^2}{2}M_P^2 L_{\chi} = \tilde{L}_{\chi}$ , получаем связи в выражениях (88) и (89):

$$\begin{aligned} |\chi(x)|^2 &= \frac{\sinh^2 \Theta}{3M_P^2 c^2} |\tilde{\chi}(x)|^2, \quad \sinh^2 \Theta = -\frac{6}{\alpha} > 0, \\ \cosh^2 \Theta &= \frac{\alpha - 6}{\alpha} > 0, \end{aligned} \quad (91)$$

$$\tilde{\lambda} = \frac{24}{9} \frac{\lambda}{M_P^2 c^2} \sinh^4 \Theta, \quad \omega^2 = \frac{1}{2M_P^2 c^2}. \quad (92)$$

Мы видим, что при выборе  $\alpha < 0$  получается правильный знак кинетической энергии. С точностью до обозначений лагранжиан (88) и лагранжиан (89) модели [19] совпадают при выборе знака параметра  $\alpha < 0$ .

Плотность конформного тока в случае лагранжиана (89) записывается как:

$$\frac{\partial \tilde{L}_\chi}{\partial A_\mu} = -\cosh^2 \Theta \left[ \tilde{\chi} \partial^\mu \tilde{\chi}^* + \tilde{\chi}^* \partial^\mu \tilde{\chi} \right]. \quad (93)$$

Автор [19] выбрал комплексное поле  $\tilde{\chi}$ , а не вещественное, мотивируя это несколькими обстоятельствами. Два из них таковы.

1) Фаза скалярного поля конформно-инвариантна, а свобода выбора амплитуды скалярного поля реализует конформную симметрию.

2) Введение комплексного скалярного поля позволяет имитировать модель Коулмена–Вайнберга безмассовой скалярной электродинамики [30]. Как в этой модели скаляр поглощается электромагнитным потенциалом, модели, так и вектором Вейля поглощается один скаляр посредством механизма Браута–Энглерта–Хиггса [31, 32], но остается другое массивное скалярное поле, которое может служить в качестве вклада массивных слабо взаимодействующих частиц (WIMP) в темную материю.

Очевидно, что в модель [19] легко ввести взаимодействие с электромагнитным полем  $B_\mu(x)$  по схеме (67). Тогда комплексность скалярного поля  $\tilde{\chi}$  выглядит более естественно.

Рассмотрим квантовые поправки к лагранжиану (89). Как и в [19], возьмем за основу результаты Коулмена–Вайнберга [30] в той части, которая относится к скалярной квантовой электродинамике. Квантовые поправки приводят к перенормировке потенциала (вейлевский заряд здесь равен единице):

$$\begin{aligned} U(\tilde{\chi}) &= \frac{\tilde{\lambda}}{24} \cosh^2 \Theta |\tilde{\chi}|^4 \rightarrow \langle U(\tilde{\chi}) \rangle_q = \\ &= \frac{3 \cosh^8 \Theta}{(8\pi)^2} |\tilde{\chi}|^4 \left( \ln \frac{|\tilde{\chi}|^2}{h^2} - \frac{1}{2} \right). \end{aligned} \quad (94)$$

Здесь  $\tilde{\lambda}$  приобрела конкретное значение. Величина  $h^2$  – это значение  $|\tilde{\chi}|^2$  в минимуме,

$$h^2 = |\tilde{\chi}|_{\min}^2. \quad (95)$$

Оно может быть найдено приравниванием:

$$\frac{1}{6} h^2 \sinh^2 \Theta = \frac{M_P c^2}{2}. \quad (96)$$

Масштаб массы  $h$  найден из соответствия ОТО при  $|\tilde{\chi}|^2 = h^2$ . Отсюда находится масса вейлона в модели [19]:

$$m_A^2 = 24 \frac{\cosh^4 \Theta}{\sinh^2 \Theta} M_P^2, \quad (97)$$

и масса скаляра:

$$\tilde{m}_\chi^2 = \frac{9 \cosh^8 \Theta}{8\pi \sinh^2 \Theta} M_P^2. \quad (98)$$

Квантовые поправки приводят к изменению формы для потенциала поля классического лагранжиана (94), но не дают непосредственно величины масштаба нарушения массы. Эта величина задается из соображения соответствия конформного лагранжиана (89) лагранжиану ОТО (4), т. е.  $h$  задается величиной массы Планка в (96). Тем самым фиксируется конформный фактор  $\Omega(x)$ . Если же отождествления (96) не производить, а считать, что введенный скаляр  $h^2$  преобразуется как  $|\tilde{\chi}|^2$ :

$$|\tilde{\chi}|^2 \rightarrow |\tilde{\chi}|^2 \Omega^{-2}(x), \quad h^2 \rightarrow h^2 \Omega^{-2}(x), \quad (99)$$

то вид потенциала изменился, но нарушения конформной инвариантности за счет квантовых поправок не происходит.

Сделаем замечание о конформной аномалии. Она заключается в том, что след усредненного по вакууму тензора энергии-импульса квантованного безмассового скалярного поля не равен нулю [9]. След же классического тензора энергии-импульса конформного лагранжиана обязан быть равен нулю [8]. Для комплексного скалярного поля с лагранжианом

$$L = |\chi|^2 R + 6g^{\mu\nu} (\partial_\mu \chi)^* \partial_\nu \chi, \quad (100)$$

тензор энергии-импульса скалярного поля конформно-инвариантен и имеет нулевой след [9]:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^{(\chi)} &= \partial_\mu \chi^* \partial_\nu \chi + \partial_\nu \chi^* \partial_\mu \chi - \\ &- \frac{1}{6} g_{\mu\nu} \left( |\chi|^2 R + 6g^{\mu\nu} (\partial_\mu \chi)^* \partial_\nu \chi \right) + \\ &+ \frac{1}{3} \left( R_{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu + g_{\mu\nu} \nabla_\alpha \nabla^\alpha \right) |\chi|^2. \end{aligned} \quad (101)$$

Здесь надо учесть, что выполняются соотношения:

$$\nabla_\alpha \nabla^\alpha \chi = \frac{R}{6} \chi, \quad \nabla_\alpha \nabla^\alpha \chi^* = \frac{R}{6} \chi^*. \quad (102)$$

При вычислении квантовых поправок к следу тензора энергии-импульса  $T_{\mu\nu}^{(\chi)}$  комплексного скалярного поля [8, 9] появляются добавки:

$$\begin{aligned} & \langle T^{(\chi)\alpha}_{\alpha} \rangle_q = \\ & = -\frac{1}{1440\pi^2} \left[ C_{\alpha\beta\gamma\delta} C^{\alpha\beta\gamma\delta} + R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} - \frac{1}{3} R^2 + \square R \right], \end{aligned} \quad (103)$$

где  $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$  – тензор Вейля,

$$C_{\alpha\beta\gamma\delta} C^{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\alpha\beta\gamma\delta} R^{\alpha\beta\gamma\delta} - 2R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} + \frac{1}{3} R^2. \quad (104)$$

Для массивного скалярного поля  $\chi$  след тензора энергии-импульса был бы равен:

$$T^{(\chi)\alpha}_{\alpha} = m^2 |\chi|^2 \quad (105)$$

при условии соблюдения равенства

$$\nabla_{\alpha} \nabla^{\alpha} \chi = \frac{R}{6} \chi - m^2 \chi. \quad (106)$$

Итак, конформная аномалия приводит к нарушению конформной инвариантности лагранжиана свободного скалярного безмассового поля  $\chi$  и появлению масштаба массы, связанного как с полем  $\chi$ , так и с гравитацией. Здесь опять, как и в (94), квантовая теория указывает на нарушение конформной инвариантности, но не дает конкретного масштаба массы.

Вслед за авторами [8, 9] можно сделать вывод, что классические конформные теории гравитации являются приближенными и применимыми, когда квантовые эффекты малы. По вопросу, когда эти эффекты малы, есть разные точки зрения, см. для примера мнение, высказанное в [33].

## 7. Лагранжианы с двумя скалярными полями

В лагранжиане (69) функция  $\chi(x)$  комплексная и имеет «двойную нагрузку» – взаимодействует как с вектором Вейля, так и с электромагнитным потенциалом. Она же связана с выбором масштаба измерения массы и при калибровке  $\chi\chi^* = 1$  и  $A_{\mu} = 0$  должна приводить к ОТО. Это делает модель с одним скалярным полем «экономной» по количеству используемых скаляров, но слишком «жесткой». То же замечание относится и к модели [19]. Кроме того, наличие ненулевого вектора Вейля после нарушения локальной конформной инвариантности заставляет решать проблему «эффекта вторых часов».

Рассмотрим другую модель, а именно введем две скалярные функции: вещественную  $\beta(x)$  и комплексную  $\varphi(x)$ . Пусть  $\beta(x)$  по-прежнему является функцией Дирака, а  $\varphi(x)$  отвечает за взаимодействие с электромагнитным потенциалом. Тогда можно записать такой лагранжиан:

$$\begin{aligned} L_{\varphi} = & \beta^2 R + 6\beta_{\lambda}\beta^{\lambda} + (\alpha - 6) \check{\partial}_{\mu}\beta\check{\partial}^{\mu}\beta + \omega^2 F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \\ & + 2\lambda(\varphi\varphi^* - \beta^2)^2 + \zeta(\hat{\partial}_{\nu}\varphi)^* \hat{\partial}^{\nu}\varphi + \delta^2 H^{\mu\nu} H_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (107)$$

Чтобы этот лагранжиан был вейлевски инвариантен, нам пришлось ввести модифицированную удлиненную производную скалярного поля  $\varphi$ :

$$\hat{\partial}_{\mu}\varphi = \partial_{\mu}\varphi - w_{\mu}\varphi = \partial_{\mu}\varphi - (A + iB)_{\mu}\varphi. \quad (108)$$

Здесь вейлевский вес  $W(\varphi) = -1$ ,  $\zeta$  – параметр связи скалярного поля  $\varphi$  с вектором  $w_{\mu}$ .

В принципе, можно ввести несколько вспомогательных скалярных полей, зависящих от дилатонного поля  $\sigma$ . В публикации [34] в рамках интегрируемой геометрии Вейля (IWG) предложена такая модель (в наших обозначениях):

$$\begin{aligned} \sigma = \sigma(x), \quad A_{\mu} = \frac{\partial_{\mu}\sigma}{\sigma}, \quad M_{pl}(\sigma) = M_P\sigma, \quad h(\sigma) = h_0\sigma, \\ H = H(x), \end{aligned} \quad (109)$$

$$\begin{aligned} L_H = & -\left( \frac{M_{pl}^2(\sigma) + \xi HH^+}{2} \right) \check{R} - g^{\mu\nu} (\check{\partial}_{\mu} H)^+ (\check{\partial}_{\nu} H) - \\ & - \frac{\lambda}{4} (HH^+ - h^2(\sigma)), \end{aligned} \quad (110)$$

$$S_H = -\int d^4x \sqrt{-g} L_H, \quad \check{\partial}_{\mu} H = \partial_{\mu} H - A_{\mu} H. \quad (111)$$

Здесь  $H$  – дублет поля Хиггса,  $\sigma = \sigma(x)$  – дилатонное поле,  $M_{pl}$  – переменная масса Планка,  $h$  – переменная величина массового параметра поля Хиггса  $H$ . Лагранжиан (110) позволяет «нарушить» электрослабую симметрию раньше нарушения конформной симметрии.

В следующих трех разделах рассмотрим три конформно-инвариантные модели, использующие два скалярных поля.

## 8. Локально конформный лагранжиан в модели Чудновского

Если не включать общий вектор Вейля в описание гравитационных явлений и взять скалярную



кривизну  $R$  в лагранжиане для гравитации в первой степени, то можно использовать конформно-инвариантное выражение [8, 9]:

$$L_\varphi = \frac{1}{6} \left( R\varphi\varphi^* + 6\nabla\varphi^\lambda\varphi_\lambda^* \right). \quad (112)$$

Здесь  $\varphi = \varphi(x)$  – комплекснозначное безмассовое скалярное поле. Конформно-инвариантный лагранжиан (112) приводит к конформному уравнению Пенроуза–Тагирова–Черникова [22]:

$$\square \varphi - \frac{R}{6}\varphi = 0, \quad (113)$$

соответствующему нулевой массе поля  $\varphi$ . В связи с этим возникает вопрос – как ввести массу поля  $\varphi$  в выражении (112). Для этого в [35] использован такой прием. Вводится дополнительное вещественное скалярное поле  $\sigma(x)$ . Поле  $\sigma(x)$  – дилатонное. Можно ввести и необязательную для реализации основной идеи [35] связь электромагнитного поля  $B$  с полем  $\varphi$ . Конформно-инвариантный лагранжиан запишется так:

$$L_{\varphi\sigma} = \hat{\partial}^\mu\varphi\hat{\partial}_\mu\varphi^* + \frac{R}{6}\varphi\varphi^* - \frac{1}{2}\partial^\mu\sigma\partial_\mu\sigma - \frac{R}{12}\sigma^2 - \lambda\left(\varphi\varphi^* - h^2\sigma^2\right)^2 - \frac{1}{4}H_{\mu\nu}H^{\mu\nu}. \quad (114)$$

Действие

$$S_{\varphi\sigma} = \int d^4x \sqrt{-g} L_{\varphi\sigma}. \quad (115)$$

Здесь

$$\hat{\partial}_\mu\varphi = \partial_\mu\varphi - ieB_\mu, \quad (116)$$

$$H_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu, \quad (117)$$

$e$ ,  $\lambda$  и  $h$  – безразмерные параметры лагранжиана  $L_{\varphi\sigma}$ ,  $B_\nu$  – потенциал электромагнитного поля, использована система единиц Хевисайда. Лагранжиан  $L_{\varphi\sigma}$  инвариантен относительно локальных конформных преобразований:

$$g_{\mu\nu}(x) \rightarrow \Omega^2(x)g_{\mu\nu}(x), \quad \varphi(x) \rightarrow \varphi(x)\Omega^{-1}(x), \\ \sigma(x) \rightarrow \sigma(x)\Omega^{-1}(x), \quad (118)$$

и относительно локальных калибровочных преобразований электромагнитного потенциала  $B$ :

$$B_\mu \rightarrow B_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\eta(x), \quad \varphi \rightarrow \varphi\exp(i\eta(x)). \quad (119)$$

Пусть теперь конформная инвариантность нарушена, т. е. выбрано конкретное значение  $\varphi\varphi^* = \rho_0^2$ . Пусть также выбрано и конкретное значение фазы скаляра  $\eta_0$ , так что

$$\varphi = \varphi_0 = \rho_0 \exp(i\eta_0), \quad \sigma = \sigma_0 = \frac{\rho_0}{h}. \quad (120)$$

Для этого в (114) следует сделать конкретное конформное преобразование, взяв

$$\Omega^{-1}(x) = \frac{\sigma(x)}{\sigma_0}. \quad (121)$$

Тогда дилатонное поле  $\sigma(x)$  исчезает и лагранжиан (114) примет вид лагранжиана ОТО с минимальной связью с заряженным скалярным полем  $\varphi$ :

$$L_\varphi = -\frac{R}{16\pi G_N} + \hat{\partial}^\mu\varphi\hat{\partial}_\mu\varphi^* - \lambda\left(\varphi\varphi^* - \rho_0^2\right)^2 - \frac{1}{4}H_{\mu\nu}H^{\mu\nu}, \quad (122)$$

где эффективная гравитационная постоянная равна

$$G_N = \frac{3h^2}{4\pi\rho_0^2(1-2h^2)} \quad (123)$$

при условии  $h^2 < \frac{1}{2}$ .

Таким образом, нефизическое дилатонное поле  $\sigma(x)$  в (114) имеет неправильный знак кинетической энергии, но это не делает модель [35] неприемлемой. До нарушения конформной инвариантности неправильный знак у поля  $\sigma(x)$  не сказывается на физических результатах, поскольку не фиксирован масштаб измерений (поля  $\varphi$  и  $\sigma$  изначально безмассовые), а после нарушения конформной инвариантности поле  $\sigma(x)$  исчезает и остается только имеющее физический смысл поле  $\varphi(x)$  с массой  $\rho_0$  в (122).

Сделаем общее замечание насчет знака у квадрата скалярного поля и производных скалярного поля  $\varphi$ . В лагранжиане они могут присутствовать в общем виде

$$L_\varphi = \varepsilon_1 m^2 \varphi\varphi^* + \varepsilon_2 g^{\mu\nu} \partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi^*, \\ S_\varphi = \int d^4x \sqrt{-g} L_\varphi, \quad (124)$$

где  $\varepsilon_1 = \pm 1$ ,  $\varepsilon_2 = \pm 1$ . Если знак  $\varepsilon_1 = -1$ , то это обычный случай классической теории поля с положительной массой  $m$ . Если знак  $\varepsilon_1 = +1$ , то речь идет о тахионном поле (tachyon field) с мнимой «потенциальной» массой  $im$ , которое говорит о неустойчивости рассматриваемой системы. Такая неустойчивость полезна при моделировании фазового перехода с потерей симметрии, когда система переходит в устойчивое состояние с другой положительной массой, например, в случае

механизма Хиггса. В случае кинетического члена  $\varepsilon_2 g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi^*$  помимо знака  $\varepsilon_2$  следует дополнительно учитывать сигнатуру метрики  $g^{\mu\nu}$ . Если сигнатура метрики  $(+, -, -, -)$  и  $\varepsilon_2 = +1$ , то в нерелятивистском пределе  $\varepsilon_2 g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi^* \sim \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial \varphi^*}{\partial t}$ , что соответствует положительной кинетической энергии поля. Если сигнатура метрики  $(-, +, +, +)$ , и  $\varepsilon_2 = -1$ , то кинетическая энергия поля также имеет правильный знак. Если сигнатура метрики  $(+, -, -, -)$  и  $\varepsilon_2 = -1$  или сигнатура метрики  $(-, +, +, +)$  и  $\varepsilon_2 = +1$ , то это случай духового поля (ghost field) с отрицательной кинетической энергией. Духовые поля свидетельствуют о нефизичности модели и при квантовании приводят к отрицательным вероятностям и нарушению унитарности квантовой версии модели. Очевидно, что проблемы проистекают из-за того, что таким полям можно приписать отрицательную «кинетическую» массу. Такие духовые поля могут использоваться в промежуточных вычислениях, но не должны входить в окончательные результаты.

Отметим, что вектор Вейля  $A$  в лагранжиане (114) не присутствует; но это не значит, что его нет вообще. Действительно, при локально-конформном преобразовании (118) коэффициенты римановой связности Леви-Чивиты

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\alpha} (\partial_\mu g_{\alpha\nu} + \partial_\nu g_{\alpha\mu} - \partial_\alpha g_{\mu\nu}) \quad (125)$$

меняются по соотношению:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \rightarrow \Gamma_{\mu\nu}^\lambda + \delta_\mu^\lambda \frac{\Omega_\nu}{\Omega} + \delta_\nu^\lambda \frac{\Omega_\mu}{\Omega} - g_{\mu\nu} \frac{\Omega^\lambda}{\Omega}. \quad (126)$$

Чтобы они оставались инвариантными, их надо переопределить как коэффициенты связности  $\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda$  пространства Вейля, введя при этом вектор Вейля  $A_\mu$ . Поскольку в лагранжиане (114) напряженность вектора Вейля не входит, удобно положить вектор Вейля

$$A_\mu = \frac{\sigma_\mu}{\sigma}, \quad (127)$$

тогда

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \delta_\mu^\lambda \frac{\sigma_\nu}{\sigma} - \delta_\nu^\lambda \frac{\sigma_\mu}{\sigma} + g_{\mu\nu} \frac{\sigma^\lambda}{\sigma}. \quad (128)$$

После нарушения конформной инвариантности коэффициенты связности будут равны римановым  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ . Таким образом, модель [35] основана на ин-

тегрируемой геометрии Вейля (IWG) со связностью, задаваемой формулой (128).

Инфлатоном называют частицу инфлатонного поля (поля, приводящего к инфляции). После нарушения конформной инвариантности и квантования поле  $\varphi(x)$  может играть роль инфлатонного поля. Здесь речь идет об определенной простой модели нарушения конформной инвариантности и об определенной модели инфляции с выбором зависимости инфляционного потенциала в виде

$$U(\varphi) = \lambda (\varphi \varphi^* - \rho_0^2)^2. \quad (129)$$

Итак, модель Чудновского [35] проста, и в то же время совмещает одновременно нарушение локальной конформной инвариантности и появление массы у первоначально безмассового поля  $\varphi$ . Ее можно назвать игрушечной моделью (toy model) одновременного нарушения конформной симметрии и появления массы у скалярного поля посредством механизма Хиггса. В этой модели «нефизическое» дилатонное поле исчезает после нарушения конформной инвариантности. Но отметим, что в некоторых моделях инфлатон, в принципе, может совпадать с дилатоном.

## 9. Конформный лагранжиан в модели Bars, Steinhardt, Turok

В статье [2] предложена более громоздкая модель, которая идейно напоминает модель Чудновского. Выпишем соответствующий лагранжиан:

$$\begin{aligned} L_{\varphi H} = & -\frac{1}{12} (\sigma^2 - 2H^+ H) R - \\ & - g^{\mu\nu} \left( \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial_\nu \sigma - D_\mu H^+ D_\nu H \right) \\ & - \left( \frac{\lambda}{4} (H^+ H - h^2 \sigma^2)^2 + \frac{\lambda'}{4} \sigma^4 \right) + L_{SM}. \end{aligned} \quad (130)$$

По сравнению с обозначениями в [2], мы изменили некоторые знаки в лагранжиане и изменили обозначение дилатонного поля на  $\sigma(x)$ . Здесь  $H(x)$  дублет поля Хиггса,  $L_{SM}$  – добавок к лагранжиану, куда входят все остальные поля (кварки, лептоны, калибровочные бозоны). В унитарной калибровке для симметрии  $SU(2) \times U(1)$  можно взять поле Хиггса  $H$  в виде:

$$H(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi(x) \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}. \quad (131)$$

После нарушения конформной симметрии при фиксировании дилатонного поля  $\sigma(x) = \sigma_0$  поле  $H(x)$  приобретает массу,

$$H_0^+ H_0 = h^2 \sigma_0^2, \quad h = \frac{246 \text{ ГэВ}}{\sqrt{2} \sigma_0},$$

$$\frac{1}{16\pi G_N} = \frac{1 - 2h^2}{12} \sigma_0^2. \quad (132)$$

Итак, модель [2] по идеологии совпадает с моделью [35]. Отметим, что здесь фазовый переход с нарушением электрослабой симметрии происходит одновременно с нарушением конформной симметрии. Как можно предположить, в публикации [2], видимо, имеется в виду случай интегрируемой геометрии Вейля с вектором Вейля  $A_\mu = \frac{\sigma_\mu}{\sigma}$ , который становится нулевым после нарушения симметрии, хотя об этом в [2] не говорится.

В публикации [2], помимо приведенной модели, предлагается также более общая модель с несколькими скалярными полями, которую здесь не будем рассматривать.

## 10. Конформный лагранжиан в модели de Cesare, Moffat, and Sakellariadou

В публикации [3] предложена модель, которая основана на общей геометрии Вейля, с учетом взаимодействия вектора Вейля с полем Хиггса. Эта модель является в некотором смысле непосредственным усложнением модели [2]. Полный лагранжиан модели [3] выглядит несколько громоздко, поэтому лучше рассмотреть его по частям. Мы изменили некоторые знаки и обозначения по сравнению с [3], чтобы сохранить в них преемственность с предыдущими обозначениями нашей публикации.

В [3] вводится вещественное дилатонное поле  $\sigma$  и поле Хиггса  $H$ :

$$L_g = \left( -\xi_\sigma \sigma^2 + 2\xi_H H^+ H \right) \check{R}, \quad (133)$$

где  $\check{R}$  – кривизна, вычисленная с учетом вектора Вейля  $A$ :

$$\check{R} = R - 6\nabla_\alpha A^\alpha - 6g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu. \quad (134)$$

Производные поля Хиггса и дилатонного поля вводятся с учетом вектора Вейля:

$$L_H = g^{\mu\nu} \left( \partial_\mu H^+ - A_\mu H^+ \right) \left( \partial_\nu H - A_\nu H \right), \quad (135)$$

$$L_\sigma = -\frac{\xi_\omega}{2} g^{\mu\nu} \left( \partial_\mu \sigma - A_\mu \sigma \right) \left( \partial_\nu \sigma - A_\nu \sigma \right). \quad (136)$$

Вводится потенциал полей  $H$  и  $\sigma$ :

$$V(\sigma, H) = \frac{\lambda}{4} \left( H^+ H - h^2 \sigma^2 \right)^2 + \lambda' \sigma^4. \quad (137)$$

Помимо этого вводится напряженность вектора Вейля:

$$L_A = -\frac{1}{4\xi_A^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (138)$$

Это значит, что в [3] имеется в виду вектор Вейля, который не сводится к градиенту скаляра. Полный лагранжиан модели [3] с безразмерными параметрами  $\xi_\sigma$ ,  $\xi_H$ ,  $\xi_\omega$ ,  $\lambda$ ,  $\lambda'$ ,  $\xi_A$  записывается так:

$$L_{\phi HA} = L_g + L_H + L_\sigma - V(\sigma, H) + L_A. \quad (139)$$

Нарушение конформной симметрии  $\sigma(x) = \sigma_0$  фиксирует параметры модели, устанавливая значения космологической постоянной  $\Lambda$  и массы  $\mu$  бозона Хиггса:

$$\lambda' \sigma_0^4 = \frac{\Lambda}{8\pi G_N}, \quad \frac{v^2}{2} = h^2 \sigma_0^2, \quad \xi_\sigma \sigma_0^2 + \xi_H v^2 = \frac{1}{16\pi G_N},$$

$$\mu^2 = -\lambda h^2 \sigma_0^2. \quad (140)$$

После нарушения конформной симметрии у векторного поля Вейля появляется масса:

$$m_A^2 = 3 \left( \xi_\sigma \sigma_0^2 + \xi_H v^2 \right) + \frac{\xi_\omega}{4} \sigma_0^2 + \frac{v^2}{4} =$$

$$= \frac{3}{16\pi G_N} + \frac{v^2}{4} \left( \frac{\xi_\omega}{2h^2} + 1 \right). \quad (141)$$

Соответствующее действие для векторного поля вейлонов записывается в виде:

$$S_A = \int d^4 x \sqrt{-g} \left[ -\frac{1}{4\xi_A^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} m_A^2 A_\mu A^\mu \right]. \quad (142)$$

Модель [3] не определяет конкретную величину массы вейлона  $m_A$ .

## 11. Обсуждение

Здесь рассмотрена лишь очень малая часть вариантов конформных лагранжианов, имеющих в литературе, и наш обзор очень ограничен по объему выборки. Многие важные работы вообще не были упомянуты (обзор множества подходов заслуживает отдельной публикации). Но тем не менее приведенные примеры конформных лагранжианов представляются достаточно характерными, показывающими одно из определенных направлений, по которому движется мысль исследователей в области альтернативных вариантов гравитации.

На наш взгляд, позволить комплексному дилатонному полю играть двойную роль как в модели Hans Ohanian [19] (иметь физическое значение после нарушения конформности) – значит делать модель достаточно «жесткой». Комплексная скалярная функция тогда играет роль и дилатона, и поля, управляющего инфляцией. На основе небольшого набора параметров модели трудно описать наблюдаемые явления в космологии и физике частиц. Кроме того, поле вектора Вейля, становящееся массивным после нарушения конформности, имеет проблему, связанную с «эффектом вторых часов».

Модель с двумя скалярными полями в духе подхода Чудновского [35] более гибкая. Но она имеет некоторый дефект – дилатонное поле имеет неправильный знак кинетической энергии, как и в моделях [2, 3].

Соблюсти правильный знак у кинетического члена дилатонного поля можно, добавляя вейлевское взаимодействие с векторным полем типа (67), (90), (108), как это подчеркнуто в [19]. Но введенное таким образом векторное поле, на наш взгляд, не желательно отождествлять с вектором Вейля  $A$ , чтобы не столкнуться с эффектом «вторых часов» [24]. Проще оставаться в рамках интегрируемой геометрии Вейля. Тогда вектор Вейля можно отождествить с градиентом дилатонного поля. Это поле  $\beta$  должно быть вещественным, так как градиент скалярного поля будет входить в аффинную связность, как в выражении (128). Но модель с одним вещественным векторным полем достаточно «бедна» и, как минимум, нуждается еще в комплексном скалярном поле.

Таким образом, можно сформулировать следующую модель. В нашей модели имеются: вещественное дилатонное поле  $\beta(x)$ , комплексное скалярное поле  $\varphi(x)$ , вещественный вектор  $C_\mu(x)$ , электромагнитный потенциал  $B_\mu(x)$ . Введем безразмерные параметры  $\alpha, \mu, \lambda, \rho, \xi, \omega^2, \delta^2$ . Действие

$$S_{\beta\varphi} = -\frac{M_P^2}{2} \int d^4x \sqrt{-g} L_{\beta\varphi}.$$

Лагранжиан модели записывается так:

$$\begin{aligned} L_{\beta\varphi} = & \beta^2 R + 6\beta_\lambda \beta^\lambda + \alpha g^{\mu\nu} (\beta_\mu - C_\mu \beta)(\beta_\nu - C_\nu \beta) + \\ & + \mu (\varphi \varphi^* - \rho \beta^2)^2 + 2\lambda \beta^4 + \xi g^{\mu\nu} (\partial_\mu \varphi - (C_\mu + iB_\mu)\varphi)^* \times \\ & \times (\partial_\nu \varphi - (C_\nu + iB_\nu)\varphi) + \delta^2 H^{\mu\nu} H_{\mu\nu} + \omega^2 E^{\mu\nu} E_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (143)$$

где введена производная комплексного скалярного поля  $\varphi$ , которая одновременно вейлевски-инвариантна и калибровочно-инвариантна:

$$\hat{\partial}_\mu \varphi = \partial_\mu \varphi - (C_\mu + iB_\mu)\varphi. \quad (144)$$

Аффинная связность записывается в рамках интегрируемой геометрии Вейля (1), где вектор Вейля градиентный:

$$A_\nu \equiv \frac{\partial \beta_\nu}{\beta}. \quad (145)$$

До нарушения конформной симметрии масса частиц зависит от дилатонного поля:

$$m = m_0 \beta(x). \quad (146)$$

Напряженности векторных полей  $C$  и  $B$ , вообще говоря, ненулевые:

$$E_{\mu\nu} = \partial_\mu C_\nu - \partial_\nu C_\mu, \quad H_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu. \quad (147)$$

Конечно, в модели можно заменить скаляр  $\varphi$  на дублет поля Хиггса:  $\varphi(x) \rightarrow H(x)$ , а также добавить взаимодействие с фермионами подобно тому, как это сделано в [2, 3, 28]. Можно ввести и калибровочные поля как в [3].

Предлагаемый нами лагранжиан (143) конформно инвариантен. Основное отличие от моделей [15] и [3] заключается в том, что вектор  $C$ , хотя и преобразуется при локальных конформных преобразованиях как вектор Вейля  $A$ :

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} \rightarrow \tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2(x) g_{\mu\nu}, \quad A_\mu \rightarrow \tilde{A}_\mu = A_\mu - \frac{\partial \ln \Omega(x)}{\partial x^\mu}, \\ C_\mu \rightarrow \tilde{C}_\mu = C_\mu - \frac{\partial \ln \Omega(x)}{\partial x^\mu}, \end{aligned} \quad (148)$$

но не совпадает с ним. Это свойство позволяет избавиться от эффекта «вторых часов», но сохранить основные черты моделей [3] и [15].

## Список литературы

1. Weyl, Hermann. *Space – Time – Matter*. Translated from the 4th German edition. London. Reprint New York. Dover. 1952.
2. Itzhak Bars, Paul Steinhardt, Neil Turok. *Local conformal symmetry in physics and cosmology* // Physical Review D. 2014, N89, P. 043515(1–15).
3. Marco de Cesare, John W. Moffat, and Mairi Sakellariadou. *Local conformal symmetry in non-Riemannian geometry and the origin of physical scales* // arXiv:1612.08066v2 [hep-th] 3 Sep 2017.

4. Mirabotalebi S., Jalalzadeh S., M. Sadegh Movahedand H. R. Sepangi. *Weyl-Dirac theory predictions on galactic scales* // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2008. Vol. 385, Issue 2. P. 986–994. arXiv: 0504117v3 [gr-qc].
5. Rosen N. *Weyl's Geometry and Physics*. Foundation of physics. 1982. V12, N3. P 213–235.
6. Mark Israelit. *A Weyl-Dirac cosmological model with DM and DE* // Arxiv: 1008.0767 [gr-qc]. 2009.
7. Бабурова О. В., Фролов Б. Н. *Математические основы современной теории гравитации*: Монография. М.: Прометей, 2012.
8. Birrell N. D. and Davies P. C. W.. *Quantum Fields in Curved Space*. Cambridge Monogr. Math. Phys., 1982. Рус. перев.: Биррелл Н., Девис П. *Квантованные поля в искривленном пространстве-времени*. М.: Мир, 1984.
9. Гриб А. А., Мамаев С. Г., Мостепаненко В. М. *Квантовые эффекты в интенсивных внешних полях*. М.: Атомиздат, 1980.
10. Линде А. Д. *Физика элементарных частиц и инфляционная космология*. М.: Наука, 1989.
11. Лукаш В. Н., Михеева Е. В. *Физическая космология*. М.: Физматлит. 2010.
12. Rubakov V. A. *Harrison\_Zeldovich spectrum from conformal invariance* // JCAP, 2009. 0909, 030. ArXiv:0906.3693.
13. Shimon Meir. *Conformal Higgs Gravity*// arXiv:1712.02638v3 [gr-qc] 14 Jun 2018.
14. Hitoshi Nishino and Subhash Rajpoot. *Standard Model and SU(5) GUT with Local Scale Invariance and the Weylon* // arXiv:0805.0613v1 [hep-th] 5 May 2008.
15. Dirac, P.A.M. *Long range forces and broken symmetries* // Proceedings of Royal Society London. 1973. A, N 333. P. 403–418.
16. Brans Carl, Dicke, Robert H. *Mach's principle and a relativistic theory of gravitation* // Physical Review. 1961. Vol. 124. P. 925–935.
17. Новиков И. Д., Шацкий А. А., Алексеев С. О., Третьякова Д. А. *Идеи Я. Б. Зельдовича и современная космология Бранса–Дикке* // УФН, 2014. Т. 184, N 4, С. 379–386.
18. Valerio Faraoni. *Illusions of general relativity in Brans–Dicke gravity* // ArXiv:gr-qc/9902083, v1. 26 Feb 1999.
19. Hans C. Ohanian. *Weyl gauge-vector and complex dilaton scalar for conformal symmetry and its breaking* // General Relativity and Gravitation, March 2016. Vol. 48. P. 25.
20. Вергелес С. Н. *Лекции по теории гравитации*. М.: МФТИ, 2001.
21. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Теория поля*. М.: Наука, 1988.
22. Penrose R. *Zero rest-mass fields including gravitation: asymptotic behavior* // Proceedings of Royal Society London. 1965. Ser A 284. P. 159–203.
23. Седов С. Ю. *Вейлевская гравитация и вейлоны* // ВАНТ. Сер. Теор. и прикл. физика. 2019. Вып. 4. С. 14–24.
24. Carlos Romero. *Is Weyl unified theory wrong or incomplete?* // arXiv:1508.03766v2 [gr-qc] 25 Aug 2015.
25. Pauli W. *Theory of relativity*. Pergamon Press. 1958.
26. Филиппов А. Т. *Аффинная гравитация Вейля–Эддингтона–Эйнштейна в контексте современной космологии* // ТМФ. 2010. Т. 163. N3. С. 430–448.
27. Gregorash D., Parini G. *Weyl-Dirac theory and Superconductivity* // Nuovo Cimento. 1981. Vol. 63B. N2. P. 487–509.
28. Drechsler W., Tann H. *Broken Weyl invariance and the origin of mass* // Foundations of Physics. 1999. Vol. 29(7). P. 1023–1064.
29. Erhard Scholz. *Paving the way for transitions – a case for Weyl geometry* // ArXiv:1206.1559v6 [gr-qc] 27 Jul 2015.
30. Weinberg E. J. *Radiative corrections as the origin of spontaneous symmetry breaking*. A Ph.D. Thesis on Physics. Harvard University, Cambridge, Massachusetts. May 1973 // ArXiv:hep-th/0507214v1 21 Jul 2005.
31. Englert F., Brout R. *Broken Symmetry and the Mass of Gauge Vector Mesons*// Physical Review Letters. 1964. Vol. 13 (9). P. 321–323.
32. Higgs P. *Broken Symmetries and the Masses of Gauge Bosons* // Physical Review Letters. 1964. Vol. 13 (16). P. 508–509.
33. Пенроуз Р. *Циклы времени*. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний. 2014.
34. Israel Quiros. *Scale invariance and broken electroweak symmetry may coexist together* // ArXiv:1312.1018v3 [gr-qc], 3 Jan 2014.
35. Чудновский Е. М. *Спонтанное нарушение конформной инвариантности и механизм Хиггса* // ТМФ. 1978. Т. 35, № 3. С. 398–400.

Статья поступила в редакцию 05.04.2022

## УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ СТИШОВИТА ДО 1000 ГПа И БОЛЕЕ 10000 К, ФАЗОВАЯ СТАБИЛЬНОСТЬ СТИШОВИТА И ОПИСАНИЕ ПРИ ВЫСОКИХ ДАВЛЕНИЯХ УДАРНЫХ АДИАБАТ ПОЛИМОРФНЫХ ФАЗ $\text{SiO}_2$ КАК УДАРНЫХ АДИАБАТ ПОРИСТОГО СТИШОВИТА

Б. А. Надыкто, А. Б. Надыкто, А. И. Ломайкин

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

Предложено новое уравнение состояния (УРС) стишовита, которое верифицировано на основе экспериментальных данных. Параметры УРС (объемный модуль, равновесная плотность и температура Дебая) получены с использованием измерения статического сжатия при комнатной температуре и изобарической теплоемкости при нормальном давлении. Показано, что уравнение состояния адекватно предсказывает свойства стишовита в широкой области условий в статических и ударно-волновых экспериментах при высоких давлениях и температуре до 1000 ГПа и  $> 10000$  К в очень хорошем согласии с измерениями. Продемонстрировано, что ударные адиабаты полиморфных фаз  $\text{SiO}_2$  (кварца, плавного кварца, коэсита, кристобалита и других) при  $P > 30$  ГПа могут быть описаны ударной адиабатой пористого стишовита и что предсказанные по уравнению состояния вторые ударные адиабаты и адиабаты разгрузки находятся в хорошем согласии с экспериментом. Мы проанализировали также стабильность стишовита и показали, что его электронная структура на холодной изотерме сохраняется до давления  $\sim 500$  ГПа, и, таким образом, этот минерал может быть рекомендован для использования в качестве датчика давления в статических экспериментах с алмазными наковальнями.

*Ключевые слова:* уравнение состояния, стишовит, кварц, ударная адиабата, изотермы.

### Введение

Известно большое количество полиморфных фаз  $\text{SiO}_2$  [1]. При изменении температуры кремнезем существует в виде  $\alpha$ - и  $\beta$ -модификаций кварца, кристобалита и тридимита. В 1953 г. Л. Коэсом при нагревании до  $700$  °С и давлении 4 ГПа была получена более плотная ( $2,92$  г/см<sup>3</sup>) по сравнению с кварцем фаза  $\text{SiO}_2$  [2], названная коэситом. Синтез еще более плотной фазы  $\text{SiO}_2$  впервые был осуществлен С. М. Стишовым и С. В. Поповой (1961 г.) при  $1200\div 1400$  °С и  $16\div 18$  ГПа [3]. Вскоре Э. Чао нашел природный аналог этой фазы в Аризонском метеоритном кратере и назвал его стишовитом [4]. Стишовит – очень твердый минерал, имеющий среди фаз  $\text{SiO}_2$  наибольшую плотность при нормальных условиях ( $4,3$  г/см<sup>3</sup>).

Стишовит и коэсит важны для геофизики и оказывают большое влияние на понимание явлений в коре и мантии Земли [5]. Кремнезем является одним из основных компонентов коры и мантии Земли. Он может существовать в виде стишовита внутри Земли с глубины 300 км (10 ГПа) до границы с ядром (3000 км, 140 ГПа). В слоях мантии могут происходить химические реакции с участием стишовита. Все это определяет большой научный интерес к исследованию характеристик стишовита и других фаз кремнезема [6].

В этой статье предложено новое уравнение состояния стишовита до 1000 ГПа и  $> 10000$  К, которое верифицировано на основе экспериментальных данных по статическому и ударно-волновому сжатию. В отличие от большинства полученных в последние десятилетия уравнений состояния в форме Бёрча-Мурнагана [7], в кото-

рых для описания холодной кривой давления используется три параметра  $\rho_0$ ,  $B_0$ ,  $dB/dP$ , в данной работе уравнение для холодного давления является двухпараметрическим с различным набором  $\rho_0$ ,  $B_0$  для каждой электронной фазы. Мы используем  $\rho_0$ ,  $B_0$ , полученные из экспериментальных данных на нормальной изотерме, температуру Дебая из экспериментальной изобарной теплоемкости и модель Дугдейла-Макдональда [8] для зависимости коэффициента Грюнайзена от плотности вместо различных произвольных приближений, используемых в других работах [9–16]. С новым уравнением состояния мы исследуем статическое и ударно-волновое сжатие стишовита и других полиморфных модификаций  $\text{SiO}_2$  и сравниваем теорию с экспериментом. Мы показываем, что предложенная теория хорошо согласуется с экспериментом в очень широкой области давлений и температуры до 1000 ГПа и  $> 10000$  К и что ударные адиабаты полиморфных фаз  $\text{SiO}_2$  при  $P > 30$  ГПа адекватно описываются ударной адиабатой пористого стишовита. Анализ фазовой стабильности показал, что электронная фаза стишовита сохраняется до холодного давления 500 ГПа и поэтому стишовит может использоваться в качестве датчика давления в экспериментах по статическому сжатию в алмазных наковальнях.

Имеется ряд данных по статическому сжатию стишовита [9–16], а также данные по теплоемкостям стишовита и коэсита при нормальном давлении [17–19].

### Уравнение состояния стишовита

В [20, 21] упругая энергия твердого тела представляет собой сумму кинетической энергии электронов при условии квантования их момента импульса и потенциальной энергии взаимодействия электронов с зарядом ядра и между собой. Различные вещества и их разные фазы описываются одним и тем же аналитическим уравнением состояния с двумя параметрами, равновесной плотностью  $\rho_{0n}$  и объемным модулем  $B_{0n}$  (при  $P = 0$ ,  $T = 0$ ), или, эквивалентно, равновесной плотностью  $\rho_{0n}$  и энергией внешних электронов  $E_{0n}$  элементарной атомной или молекулярной ячейки, содержащей одну молекулу.

Полная энергия  $E$  элементарной атомной или молекулярной ячейки и давление  $P$  в твердом теле, даваемые уравнениями (1) и (2) соответственно,

являются суммой холодной (упругой, потенциальной)  $E_C$ ,  $P_C$  и тепловой  $E_T$ ,  $P_T$  энергий и давлений:

$$E = E_C + E_T; \quad (1)$$

$$P = P_C + P_T. \quad (2)$$

Упругие составляющие энергии и давления  $n$ -й электронной фазы ( $\text{ЭФ}$ ) твердого тела определяются выражениями:

$$E_C(\sigma) = \frac{9B_{0n}}{\rho_{0n}} \left( \frac{\sigma^{2/3}}{2} - \sigma^{1/3} \right); \quad (3)$$

$$P_C(\sigma) = 3B_{0n} \left( \sigma^{5/3} - \sigma^{4/3} \right), \quad (4)$$

где  $\sigma = \rho/\rho_{0n}$  – степень сжатия.

В приближении Дебая тепловые составляющие УРС имеют вид:

$$E_T(T) = \frac{3RTn}{A} D\left(\frac{T_D}{T}\right), \quad P_T(\rho, T) = \rho\Gamma(\rho)E_T, \quad (5)$$

где  $D(x) = \frac{3}{x^3} \int_0^x \frac{t^3 dt}{e^t - 1}$  – функция Дебая,  $R$  – газовая

постоянная,  $n$  – число атомов в молекуле,  $A$  – молекулярная масса,  $\Gamma(\rho)$  – функция Грюнайзена,  $x = T_D/T$ ,  $T_D$  – температура Дебая. В приближении Дугдейла-Макдональда [8] коэффициент Грюнайзена равен:

$$\Gamma = -\frac{1}{3} - \frac{V}{2} \frac{d^2(P_x V^{2/3}) / dV^2}{d(P_x V^{2/3}) / dV}. \quad (6)$$

При  $P_x = 3B_0(\sigma^{5/3} - \sigma^{4/3})$  значение  $\Gamma(\sigma)$  равно:

$$\Gamma(\sigma) = \frac{2\sigma^{1/3} - 1}{3\sigma^{1/3} - 2}. \quad (7)$$

Температура Дебая стишовита равна  $T_D = (1130 \div 1140)$  К [10]. Зависимость температуры Дебая  $T_D$  от степени сжатия  $\sigma$  определяется из выражения:

$$\Gamma(\sigma) = -\left( \frac{\partial \ln T_D}{\partial \ln V} \right)_T.$$

Интегрирование этого выражения дает:

$$T_D = T_{D0} \exp \left( \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{\Gamma(t) dt}{t} \right). \quad (8)$$

Когда  $\Gamma(\sigma)$  определяется из (7), получается следующее выражение для температуры Дебая:

$$T_D(\sigma) = T_{D0} \left( 3\sigma^{4/3} - 2\sigma \right)^{1/2}, \quad (9)$$

где  $T_{D0}$  – температура Дебая при  $\sigma = 1$ . Учет зависимости  $T_D(\sigma)$  важен для веществ с высоким значением  $T_{D0}$ . По определению температура Дебая равна:  $T_D = \hbar\omega_{\max}/k$ , где  $\omega_{\max}$  – максимальная частота колебаний в модели Дебая,  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ ,  $h$  – постоянная Планка,  $k$  – постоянная Больцмана. Поэтому  $\omega_{\max}(\sigma) = \omega_{\max}(1)(3\sigma^{4/3} - 2\sigma)^{1/2}$ .

### Нормальная изотерма стишовита

Подобранные на основании имеющихся экспериментальных данных [9–16] параметры уравнения состояния (3), (4) для стишовита  $\rho_0 = 4,3 \text{ г/см}^3$ ,  $B_0 = 343 \text{ ГПа}$  практически совпадают с данными работы [20] 1991 г. Результаты исследований стишовита, выполненных в последующие годы, дают возможность подробно тестировать это уравнение состояния. На рис. 1 показана зависимость давления от плотности на нормальной изотерме стишовита. Наша теоретическая кривая хорошо описывает экспериментальные данные [9–16] до 55 ГПа. Некоторое превышение экспериментальных значений ниже 5–7 ГПа, по-видимому, объясняется небольшой пористостью изготовленных образцов стишовита, связанной с их дефектной структурой.

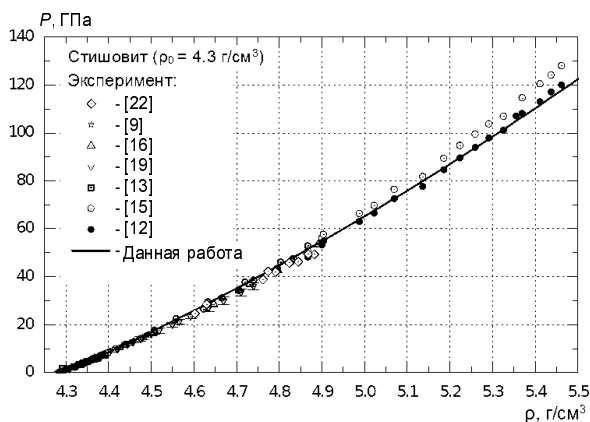


Рис. 1. Зависимости давления от плотности на нормальной изотерме стишовита

При  $P > 50 \text{ ГПа}$  наша теоретическая кривая проходит вблизи экспериментальных точек работы [12]. Экспериментальные данные [15] проходят выше нашей теоретической зависимости и данных [12]. Основная причина отличия, по нашему мнению, связана с разной шкалой давления, использованной в разных экспериментах. Наша теорети-

ческая зависимость близка к данным по рубиновой шкале давления Мао 1986 г. [23]. В работе [15] значения давления были изменены с использованием уравнения состояния  $B_1$  и  $B_2$  фаз NaCl из измерений методом рентгеновской дифракции объема (плотности) NaCl. При давлении 50–130 ГПа в [12, 15] определено уравнение состояния для кристаллической структуры CaCl<sub>2</sub> кремнезема. Мы считаем, что электронная структура SiO<sub>2</sub> сохраняется до высоких давлений (степеней сжатия), несмотря на изменение кристаллической структуры, и, соответственно, до высоких давлений используем уравнение состояния стишовита. Дальнейшее сравнение с экспериментальными данными по ударно-волновому сжатию коэсита, кварца и плавленого кварца подтверждает правильность такого подхода.

### Теплоемкость стишовита

Теплоемкость стишовита экспериментально определена в работах [17, 24]. На рис. 2 представлены зависимости изобарной теплоемкости стишовита от температуры при нормальном давлении, рассчитанные по уравнению состояния данной работы, и экспериментальные точки из [17, 24].

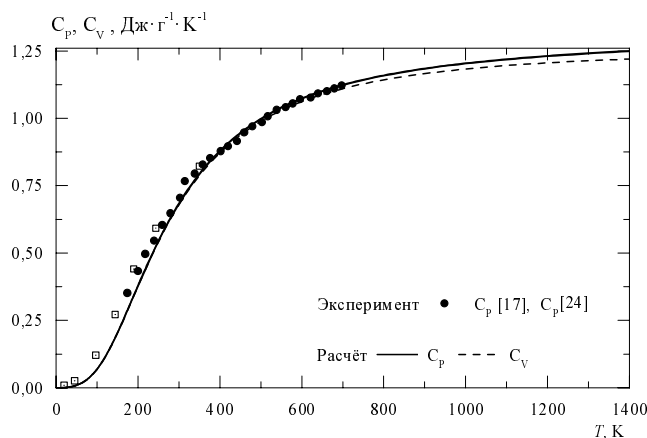


Рис. 2. Зависимость теплоемкости стишовита от температуры при  $P = 10^{-4} \text{ ГПа}$

Наша теоретическая зависимость получена при температуре Дебая  $T_D(\sigma) = T_{D0}(3\sigma^{4/3} - 2\sigma)^{1/2}$ . Аппроксимация выполнялась, исходя из наилучшего описания экспериментальных данных при  $T > 300 \text{ К}$ . При этом значение температуры Дебая (1130 К) получилось близким к значениям, приведенным в работах [10, 25]. Некоторое отличие ап-



проксимации от экспериментальных данных при  $T < 300$  К объясняется изменением температуры Дебая при возрастании температуры [10]. При низкой температуре колеблются молекулы и молекулярные кластеры, при высоких температурах происходят независимые колебания атомов.

### Тепловое расширение стишовита

Плотность при постоянном давлении  $P$  может быть определена с помощью следующего условия:

$$P_C + P_T = P. \quad (10)$$

Для  $P_C$  и  $P_T$ , заданных уравнениями (4) и (5) соответственно, получаем следующее уравнение:

$$3B_0(\sigma^{5/3} - \sigma^{4/3}) + \Gamma\rho_0\sigma E_T = P. \quad (11)$$

При постоянном давлении и меняющейся температуре (или  $E_T$ ) можно использовать уравнение (11) для получения плотности в зависимости от температуры, описывающей тепловое расширение. В частности, при нулевом или стандартном давлении решение уравнения (11) при постоянной  $\Gamma$  дается следующей аналитической формулой:

$$\sigma^{1/3} = \frac{1 + (1 - 4\Gamma\rho_0 E_{Tn} / 3B_0)^{1/2}}{2}. \quad (12)$$

В случае, когда  $\Gamma = \Gamma(\sigma)$ , уравнение (11) может быть решено итерационно (численно).

Экспериментальные данные по тепловому расширению стишовита приведены в работах [19, 26]. На рис. 3 приведено сравнение зависимости от температуры нашей теоретической плотности стишовита при нормальном давлении с экспериментальными данными. Видно, что наше уравнение состояния адекватно описывает данные из работ [19, 26].

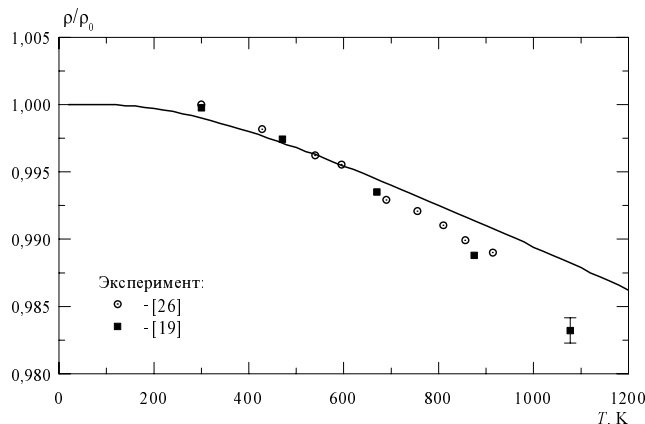


Рис. 3. Зависимость расширения стишовита от температуры при  $P = 10^{-4}$  ГПа

### Высокотемпературные изотермы стишовита

Уравнение (11) при постоянной температуре дает изменение давления в зависимости от плотности вдоль изотерм. Экспериментальные изотермы стишовита получены в работах [13, 25] до давления 55 ГПа. На рис. 4 приведены экспериментальные данные [13, 25] и наши теоретические значения давления на изотермах 300 – 1700 К. Наш теоретический расчет очень хорошо описывает экспериментальные данные [13, 25].

Коэффициент Грюнайзена и теплоемкость определяют тепловую составляющую уравнения состояния. Адекватность описания экспериментальных данных по давлению на изотермах 300 – 1700 К (см. рис. 4) свидетельствует о правильности нашей холодной давления  $P(\rho)$  для стишовита и зависимостей  $\Gamma(\rho)$  и  $C_T(T)$ , по крайней мере, в этом диапазоне температур.

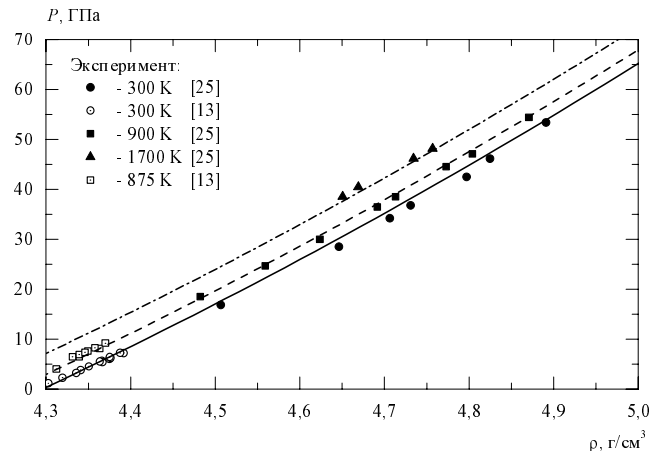


Рис. 4. Зависимости давления от плотности на трех изотермах стишовита

### Ударно-волновое сжатие стишовита

С использованием описанного выше уравнения состояния можно рассчитать сжатие веществ ударными волнами. Пусть плотность, давление и внутренняя энергия вещества перед фронтом ударной волны  $\rho_{00}$ ,  $P_0$ ,  $E_0$ , за фронтом ударной волны  $\rho$ ,  $P$ ,  $E$ . Из законов сохранения массы, импульса и энергии на ударном скачке получаются уравнения:

$$\rho = \rho_{00} D / (D - u); \quad (13)$$

$$P - P_0 = \rho_{00} D u; \quad (14)$$

$$E - E_0 = \frac{(P_H + P_0)}{2} \left( \frac{1}{\rho_{00}} - \frac{1}{\rho} \right). \quad (15)$$

Тепловую энергию в соответствии с (2), (5) можно записать в виде:  $E_T = \frac{(P_H - P_X)}{\Gamma(\sigma)\rho}$ , где  $\sigma = \rho/\rho_0$ .

В этом случае связь между плотностью и давлением за фронтом ударной волны определяется выражением:

$$P_H - P_0 = \frac{P_C - \Gamma \rho (E_C - E_C^o - E_T^o - P_o(1/\rho_{00} - 1/\rho)/2)}{1 - \Gamma\rho(1/\rho_{00} - 1/\rho)/2}. \quad (16)$$

По найденному значению  $P_H$  на основании законов сохранения массы (13) и импульса (14) на фронте ударной волны определяется массовая скорость  $u = \left(\frac{P_H(\sigma - 1)}{\rho_{00}\sigma}\right)^{1/2}$  и скорость ударной волны  $D = \sigma u/(\sigma - 1)$  и, таким образом, получается расчетная зависимость  $D(u)$ .

Подставляя в (17)  $E_C$ ,  $P_C$ , согласно уравнениям состояния (3), (4) получаем зависимость давления за фронтом ударной волны от степени сжатия  $\sigma$ :

$$P_H - P_0 = \frac{3B_0 \left[ \sigma^{5/3} - \sigma^{4/3} - 1.5\Gamma\sigma \left( (\sigma^{1/3} - 1)^2 - (\sigma_1^{1/3} - 1)^2 \right) \right] + \Gamma\rho_0\sigma E_{T0} + \Gamma B_0(\sigma/\sigma_1 - 1)/2}{1 - \Gamma(\sigma/\sigma_1 - 1)/2}, \quad (17)$$

где  $\sigma = \rho/\rho_0$ ,  $\sigma_1 = \rho_{00}/\rho_0$ .

Для пористых сыпучих тел  $P_0 = 0$ ,  $E_{C0} = 0$ ,  $E_{T0} = 0$  и давление  $P$  равно:

$$P = \frac{3B_0 \left( \sigma^{5/3} - \sigma^{4/3} - 1.5\Gamma\sigma \left( \sigma^{1/3} - 1 \right)^2 \right)}{1 - \Gamma(m\sigma - 1)/2}, \quad (18)$$

где  $m = 1/\sigma_1 = \rho_0/\rho_{00}$  – пористость материала.

Экспериментальные данные по ударно-волновому сжатию стишовита приведены в работах [26, 27]. Эти данные не использовались в подборе параметров уравнения состояния стишовита. На рис. 5 показаны экспериментальные данные работы [26] и наш теоретический расчет адиабаты Гюгонио стишовита в гидродинамическом приближении. Видно, что гидродинамическое приближение дает давление ниже, чем экспериментальные данные [26]. Описание экспериментальных данных получается при учете прочности стишовита. Напряжение за фронтом плоской ударной волны превышает давление за счет гидростатического сжатия на две трети предела текучести ( $2Y/3$ ). С пределом текучести 30 ГПа наш расчет проходит через экспериментальные точки [26]. Высокая прочность стишовита согласуется с его высокой твердостью [28].

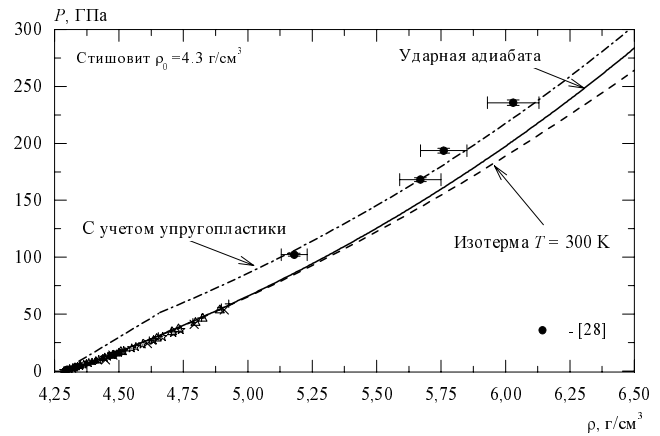


Рис. 5. Зависимость давления от плотности при ударно-волновом сжатии стишовита ( $\rho_0 = 4,3 \text{ г/см}^3$ )

В работе [27] получены экспериментальные ударные адиабаты стишовита при давлении в интервале 1000 – 2000 ГПа. На рис. 6 показано сравнение наших теоретических результатов с экспериментальными данными [26] и [27]. Ввиду высокого нагрева материала при таком высоком давлении, при котором происходит потеря прочности, расчеты проводились в гидродинамическом приближении без учета прочности. Из рис. 6 видно, что теоретическая кривая стишовита в терапаскальной области давлений проходит по правой границе погрешности эксперимента. Более точное описание ударной адиабаты стишовита при плотности выше  $8 \text{ г/см}^3$  возможно за счет учета перехода в пост-стишовитовую фазу с параметрами  $\rho_0 = 4,76 \text{ г/см}^3$  и  $B_0 = 483 \text{ ГПа}$ . Кривая для ударной адиабаты пост-стишовитовой фазы показана на рис. 6 штрихпунктирной линией. Пунктиром показаны комнатные

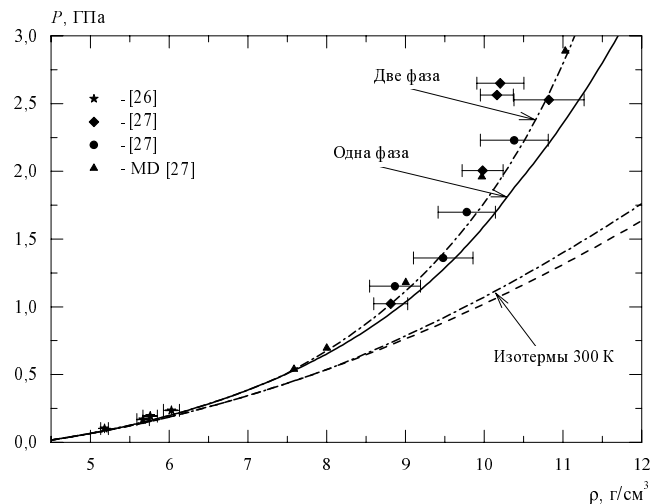


Рис. 6. Зависимость давления от плотности при ударно-волновом сжатии стишовита ( $\rho_0 = 4,3 \text{ г/см}^3$ ):  
★, ◆, ● – эксперимент; ▲ – MD-расчет

изотермы стишовита и постстишовитовой фазы  $\text{SiO}_2$ . Разница в давлении на изотермах стишовита и постстишовитовой фазы в районе 1000 ГПа составляет около 6 %.

### Ударно-волновое сжатие кремнезема

В 1963 г. Мак-Квин с сотрудниками [29] объяснили поведение за фронтом ударной волны кварца и плавленого кварца при давлениях больших 30 ГПа как сжатие фазы со структурой рутила, которая была недавно открыта и названа стишовитом. В дальнейшем был показан переход в фазу стишовита и из других полиморфных модификаций кремнезема при их ударно-волновом сжатии (см. [30, 31]). Термодинамические свойства кварца, коэсита и стишовита исследовались в [32].

Наше уравнение состояния стишовита дает хорошее описание при давлениях выше 30 ГПа экспериментальных ударных адиабат для фаз  $\text{SiO}_2$  с низкой плотностью как ударных адиабат пористого стишовита. Используя уравнение (19) с холодной кривой (4), функцией Грюнайзена (7) и температуру Дебая (9), как в стишовите, но используя начальную плотность кварца, коэсита, плавленого кварца или любой другой фазы  $\text{SiO}_2$  низкой плотности, теоретически получаем их параметры ударных волн в широком интервале давлений. Такое же описание получается для пористых образцов разных фаз  $\text{SiO}_2$ . Таким способом теоретические ударные адиабаты  $\text{SiO}_2$  с разной начальной плотностью получаются при изменении единственного параметра (начальной плотности) при сохранении параметров уравнения состояния стишовита.

Экспериментальные точки на адиабате Гюгонио коэсита получены в [26, 30] до 140 ГПа. Подробная информация по ударно-волновому сжатию  $\alpha$ -кварца до 1300 ГПа получена в [33]. Данные для плавленого кварца до 1600 ГПа содержатся в [34]. На рис. 7 показаны зависимости скорости ударной волны  $D$  от массовой скорости  $u$  кварца, коэсита, кристобалита, плавленого и пористого кварца. Наши теоретические данные хорошо описывают экспериментальные данные для всех фаз  $\text{SiO}_2$ .

Зависимость давления от плотности за фронтом ударной волны показана на рис. 8. Для кварца на рис. 8 помимо экспериментальных данных [33] приведены результаты последних экспериментов [35] тех же авторов. В [35] получено девять экспериментальных точек при давлении от 200 до 1078 ГПа, которые хорошо согласуются с данными предыдущей работы [33] и нашими теоретическими ре-

зультатами. Данные [35] имеют более высокую точность и поэтому меньшее отклонение экспериментальных точек от теоретической кривой.

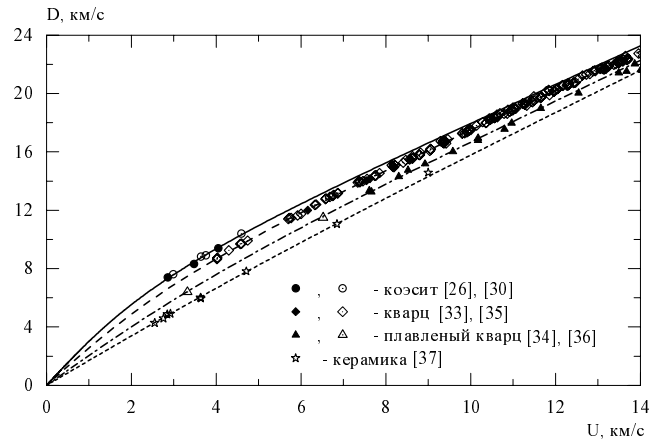


Рис. 7. Зависимости скорости фронта ударной волны от массовой скорости при ударно-волновом сжатии полиморфных модификаций кремнезема. Цвет линий соответствует цвету маркеров

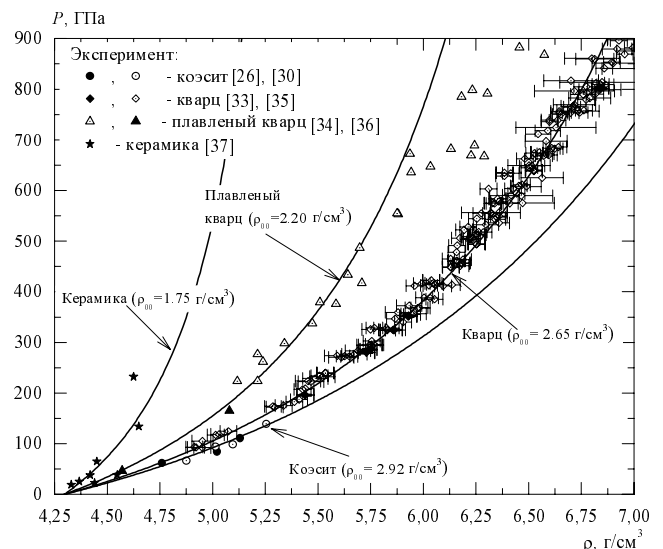


Рис. 8. Сравнение изменения давления  $P$  с плотностью  $\rho$  при ударно-волновом сжатии коэсита, кварца, плавленого кварца и пористого кремнезема

Ударная адиабата стишовита, кварца, плавленого кварца описывается до высоких давлений без учета электронных возбуждений с использованием только холодного давления и теплового давления решетки. Отклонение теоретической зависимости от экспериментальных данных начинается для кварца и плавленого кварца при давлении 800, 650 ГПа соответственно, когда согласно расчетам температура за фронтом волны достигает 70000 К. В таких условиях возможны электронные возбуждения и диссоциация  $\text{SiO}_2$ , которые мы не рассматриваем в данной работе.

### Скорость звука

Изотермический модуль объемного сжатия определяется выражением:

$$B_T = -V \partial P / \partial V \Big|_T = \rho \partial P / \partial \rho \Big|_T.$$

В случае, когда  $P = P_C + \Gamma \rho E_T$ , значение изотермического объемного модуля равно:

$$B_T = B_C(\rho) + P_T \left( 1 + \frac{\partial \ln \Gamma}{\partial \ln \rho} \right) + \rho^2 \Gamma \frac{dE_T}{d\rho}. \quad (19)$$

При высоких температурах  $dE_T/d\rho = 0$ , и когда коэффициент Грюнайзена  $\Gamma$  вычисляется по формуле (7), то объемный модуль  $B_T$  равен:

$$B_T = B_0 \left( 5\sigma^{5/3} - 4\sigma^{4/3} \right) + P_T \left( 1 - \frac{\sigma^{1/3}}{3(3\sigma^{1/3} - 2)(2\sigma^{1/3} - 1)} \right)$$

Изотермический (адиабатический) модуль объемного сжатия равен:  $B_S = \frac{C_P}{C_V} B_T$ , где  $C_P$ ,  $C_V$  – теплоемкость при постоянном давлении и постоянном объеме соответственно. Объемная скорость звука равна  $c = (B/\rho)^{1/2}$ .

В работе [36] приведены результаты измерений объемной скорости звука за фронтом ударной волны в плавленом кварце до 1100 ГПа. На рис. 9 показано сравнение наших теоретических значений с данными [36]. Теория согласуется с экспериментом [36] в пределах ошибок эксперимента.

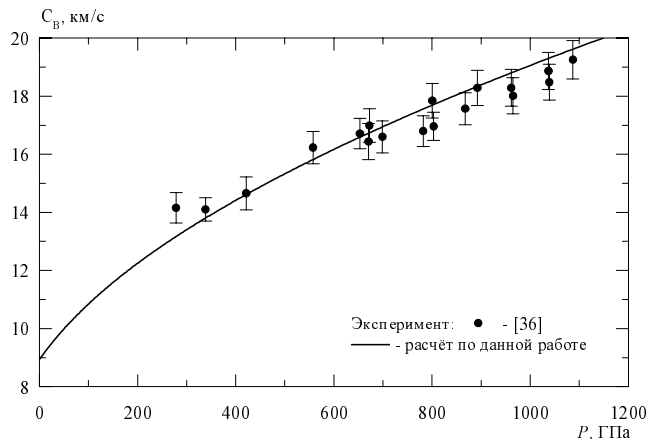


Рис. 9. Зависимости изотропической (объемной) скорости звука от давления в ударно сжатом плавленом кварце ( $\rho_{00} = 2,2 \text{ г/см}^3$ )

### Повторное ударное сжатие и изэнтропы разгрузки

Расчет второй ударной адиабаты производится по уравнению (16), в котором  $E_0(\rho_1)$ ,  $P_0(\rho_1)$  – параметры вещества на первой ударной волне.

Из первого закона термодинамики для адиабатического (изэнтропического) процесса получаем  $-\left(\frac{dE}{dV}\right)_S = \rho^2 \left(\frac{dE}{d\rho}\right)_S = P$ . Воспользовавшись при-

ближением Ми-Грюнайзена, получим  $\rho^2 \left(\frac{dE_T}{d\rho}\right)_S = \Gamma \rho E_T$ . Интегрирование дает:  $E_T =$

$$E_T(1) \exp \left( \int_{\sigma(1)}^{\sigma} \frac{\Gamma(\sigma) d\sigma}{\sigma} \right).$$

$E_T(1)$  и  $\sigma(1)$  – тепловая энергия и степень сжатия в начальной точке, через которую проведена изэнтропа. При коэффициенте Грюнайзена  $\Gamma$ , определяемом выражением (7), получаем:

$$E_T = E_T(1) \frac{\sigma^{1/2} \left( 3\sigma^{1/3} - 2 \right)^{1/2}}{\sigma(1)^{1/2} \left( 3\sigma(1)^{1/3} - 2 \right)^{1/2}}.$$

Для зависимости давления от плотности при разгрузке получаем:

$$P_S(\sigma) = P_C(\sigma) + \Gamma(\sigma) \rho E_T(1) \exp \left( \int_{\sigma(1)}^{\sigma} \frac{\Gamma(\sigma) d\sigma}{\sigma} \right) = 3B_0 \left( \frac{5}{\sigma^3} - \frac{4}{\sigma^3} \right) + \rho E_T(1) \left( \frac{\sigma^{1/2} \left( 2\sigma^{1/3} - 1 \right)}{\sigma(1)^{1/2} \left( 3\sigma(1)^{1/3} - 2 \right)^{1/2} \left( 3\sigma^{1/3} - 2 \right)^{1/2}} \right).$$

Результаты экспериментов по разгрузке обычно представляют в виде функции  $P(u)$ . Для получения  $P(u)$  мы можем воспользоваться инвариантом Римана:

$$du = \frac{dP}{\rho c} = \frac{dP}{d\rho} \frac{d\rho}{\rho c} = \frac{\left(\frac{dP}{d\rho}\right)^{1/2}}{\rho} d\rho = \frac{cd\rho}{\rho}$$

и, следовательно,

$$u(\sigma) = u(1) + \int_{\rho(1)}^{\rho} \frac{c(\rho) d\rho}{\rho} = u(1) + \int_{\sigma(1)}^{\sigma} \frac{c(\sigma) d\sigma}{\sigma}.$$

Полученные зависимости  $P(\sigma)$  и  $u(\sigma)$  (или  $\sigma(u)$ ) дают в параметрическом виде зависимость  $P(u)$ .

Ряд экспериментальных ударных адиабат повторного сжатия кварца получен в работе [37]. Рис. 10 показывает, что наша теория достаточно хорошо описывает точки [37] на первой и второй адиабате Гюгонио.

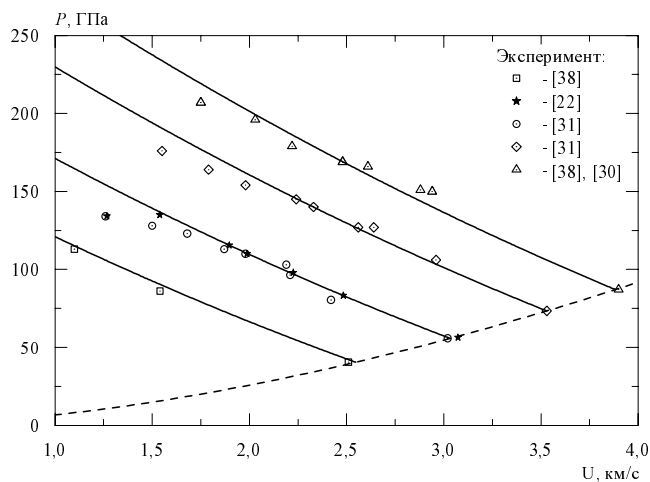
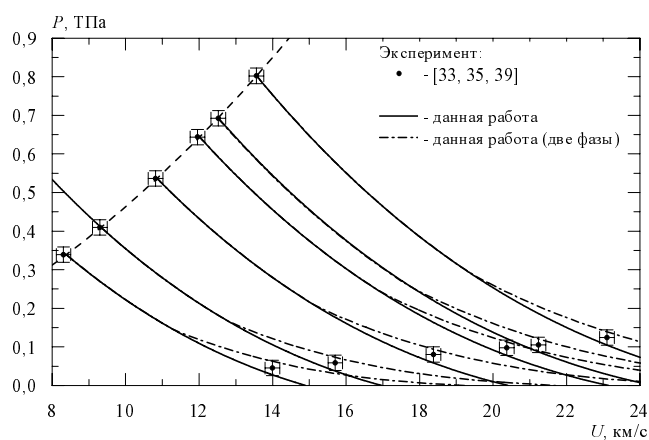


Рис. 10. Зависимости давления от массовой скорости на первой и второй ударной адиабате кварца ( $\rho_{00} = 2,65 \text{ г/см}^3$ )

Ряд данных по адиабатическому расширению ударно сжатого кварца с начальных значений давления выше 300 ГПа получен в [33, 35, 39]. Разгрузка кварца производилась в полимер ТРХ с начальной плотностью  $0,83 \text{ г/см}^3$  и силикагель с



а

плотностью  $0,19$  и  $0,11 \text{ г/см}^3$ . На рис. 11 показаны наши теоретические адиабаты разгрузки и экспериментальные точки [33] при разгрузке кварца в полимер с плотностью  $0,83 \text{ г/см}^3$  из состояний в фазе стишовита. Видно идеальное совпадение теории и эксперимента.

На рис. 12, а, б показаны экспериментальные точки и наши теоретические значения на кривых разгрузки в силикагель с плотностью  $0,19$  и  $0,11 \text{ г/см}^3$ . В этом случае экспериментальные точки на кривых разгрузки при давлении 50–120 ГПа несколько отклоняются от теоретической кривой для разгрузки стишовита. Учет фазового перехода стишовита в кварц на разгрузке при снижении упругого давления ниже 30 ГПа позволяет описать эти точки, как показано штрихпунктирной линией.

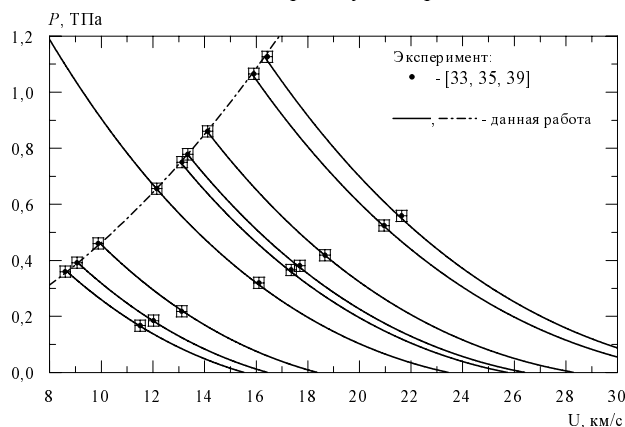
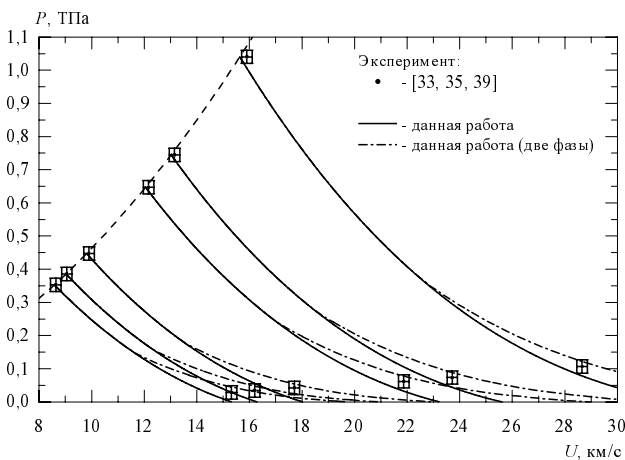


Рис. 11. Зависимости давления от массовой скорости на ударной адиабате кварца с  $\rho_{00} = 2,65 \text{ г/см}^3$  (штриховая кривая) и на изэнтропах разгрузки, рассчитанных по УРС стишовита (сплошные кривые). Маркеры – экспериментальные точки из [33]. В эксперименте [33] разгрузка производилась в полимер polymethylpentene (commonly known as ТРХ) плотностью  $0,83 \text{ г/см}^3$



б

Рис. 12. Зависимости давления от массовой скорости на ударной адиабате кварца с  $\rho_{00} = 2,65 \text{ г/см}^3$  (штриховая кривая) и на изэнтропах разгрузки, рассчитанных по УРС стишовита (сплошные кривые). Маркеры – экспериментальные точки из [33]. В эксперименте [33] разгрузка производилась в силикагель плотностью  $0,19 \text{ г/см}^3$  (а) и  $0,110 \text{ г/см}^3$  (б)

## Обсуждение результатов

Наши теоретические расчеты широкого круга физических величин для разных фаз  $\text{SiO}_2$  показывают высокую точность описания предложенным уравнением состояния стишовита большого набора экспериментальных данных.

Правильное описание ударных адиабат фаз  $\text{SiO}_2$  с низкой плотностью (коэзит, кварц, плавленый кварц и другие) как ударных адиабат пористого стишовита свидетельствует о правильности предложенного уравнения состояния стишовита. Уравнение состояния Бёрча-Мурнагана, предложенное в [26], с параметрами  $\rho_0 = 4,3 \text{ г/см}^3$ ,  $B_0 = 309 \text{ ГПа}$ ,  $dB/dP = 4.8$  и  $\Gamma = 1,35/\sigma^{2,6}$  приводит при высоких давлениях к неправильным результатам и явно нефизическим эффектам.

На рис. 13 сплошными черными линиями показаны наши теоретические ударные адиабаты кварца и плавленого кварца вместе с экспериментальными данными [33], [35] для кварца и [34] для плавленого кварца. Результаты расчетов с уравнением состояния стишовита из [26] показаны тонкими линиями. Пунктирными линиями показаны нормальные изотермы по нашему уравнению состояния и по УРС из [26]. Видно, что для кварца уравнение состояния из [26] описывает эксперимент [33], [35] до 200 ГПа, а наше уравнение состояния до 850 ГПа. Для плавленого кварца уравнение состояния из [26] дает неправильный результат, начиная с самых низких давлений. Из рис. 14 видно, что давление на комнатной изотерме по УРС из [26] значительно выше, чем по нашему уравнению состояния.

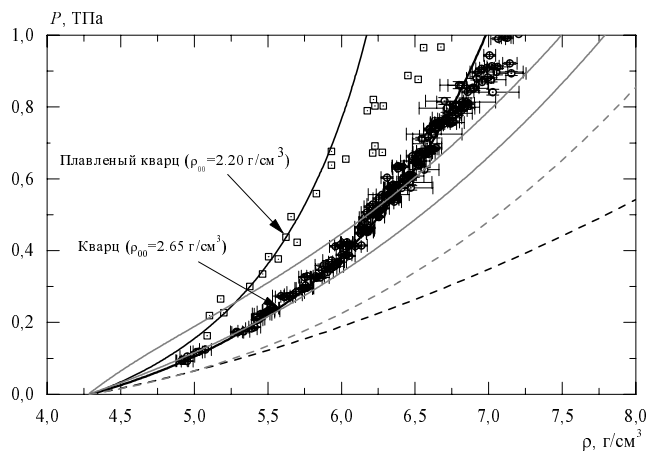


Рис. 13. Зависимость давления от плотности при ударно-волновом сжатии кварца и плавленого кварца. Расчет по УРС данной работы показан сплошными черными линиями

На рис. 14 показана зависимость давления от плотности при ударно-волновом сжатии стишовита ( $\rho_{00} = 4,3 \text{ г/см}^3$ ). Наша теоретическая ударная адиабата и холодное давление показаны на двух нижних кривых сплошной и штриховой линией соответственно. Для уравнения состояния из [26] адиабата Гюгонио и холодное давление показаны на верхних кривых. Уравнение состояния из [26] дает значение холодного давления в стишовите очень близкое к значениям на ударной адиабате вплоть до очень высоких давлений и степеней сжатия. Это является следствием резкого падения коэффициента Грюнайзена со степенью сжатия (например,  $\Gamma = 0,215$  при  $\sigma = 2$ ), которое приводит к явно нефизическому поведению стишовита и других фаз  $\text{SiO}_2$  за фронтом ударной волны: сжатие до очень больших значений  $\sigma = 2/\Gamma + 1$ . Фактически сжатие за фронтом ударной волны ограничено высоким нагревом вещества и обычно не превышает  $\sigma = 4\div 6$  (предельное сжатие).

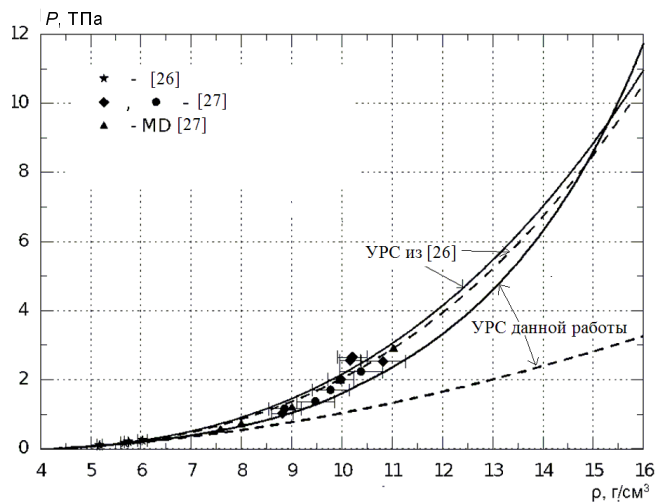


Рис. 14. Зависимость давления от плотности при ударно-волновом сжатии стишовита

На рис. 15 показаны зависимости давления от плотности на трех изотермах стишовита. Сплошными линиями показаны наши теоретические изотермы, штриховыми линиями – результаты расчетов по уравнению состояния из [26], маркерами – экспериментальные данные [13, 25]. Наша теория хорошо описывает эксперимент во всей исследованной области давления и температуры. Расчет по УРС из [26] дает заметное отличие от экспериментальных точек и нашей теории при давлении ниже 25 ГПа и от наших теоретических кривых выше 70 ГПа. При давлении 150 ГПа, отвечающем границе ядра Земли, давление по УРС из [26] на 12 % выше, чем по нашей теории. Для

условий внутри больших планет это различие значительно больше. При одинаковой плотности давлению 500 ГПа по нашему УРС отвечает давление 770 ГПа по УРС из [26]. При одинаковом давлении 500 ГПа плотность стишовита по нашему УРС на 10 % выше, чем по УРС из [26].

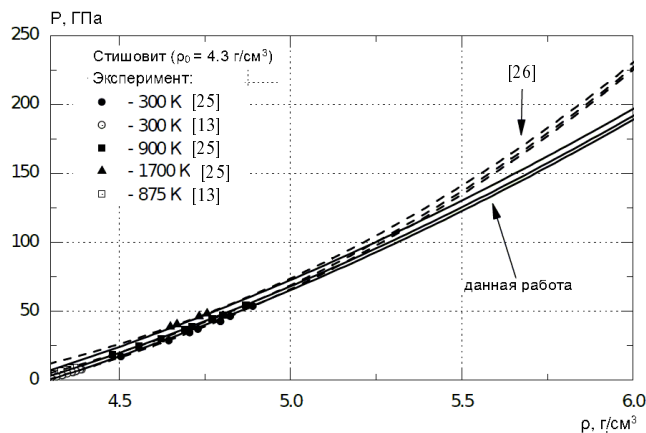


Рис. 15. Зависимости давления от плотности на трех изотермах стишовита

### Заключение

Предложенное уравнение состояния стишовита дает хорошее описание при давлениях выше 30 ГПа экспериментальных ударных адиабат для фаз  $\text{SiO}_2$  с низкой плотностью как ударных адиабат пористого стишовита с использованием холодной кривой, функции Грюнайзена и температуры Дебая, как в стишовите, но с использованием начальной плотности кварца, коэсита, плавленного кварца или любой другой фазы  $\text{SiO}_2$  низкой плотности. Такое же описание получается для пористых образцов разных фаз  $\text{SiO}_2$ . Таким образом, теоретические ударные адиабаты  $\text{SiO}_2$  с разной начальной плотностью получаются при изменении одного единственного параметра (начальной плотности) при сохранении параметров уравнения состояния стишовита.

Хорошее описание ударно-волновых экспериментов с кварцем и плавленным кварцем при высоких давлениях свидетельствует о высокой стабильности электронной структуры стишовита, на нулевой (или комнатной) изотерме она сохраняется, по крайней мере, до 500 ГПа. Поэтому уравнение состояния стишовита  $P = 3B_0(\sigma^{5/3} - \sigma^{4/3})$  (где  $\sigma = \rho/\rho_0$ ,  $\rho_0 = 4,30 \text{ г/см}^3$ ,  $B_0 = 343 \text{ ГПа}$ ) может служить в качестве шкалы давления в статических экспериментах при высоких давлениях. Измеряя методом рентгеновской дифракции плотность об-

разцов стишовита, используемых как датчик давления, давление при измеренной плотности получаем по уравнению состояния стишовита. При высоких давлениях в качестве датчика может использоваться кварц, который под давлением переходит в стишовит.

### Список литературы

- Greenwood N. N. and Earnshaw A. *Chemistry of the Elements*. Elsevier. (2012).
- Coes L. Jr. A New Dense Crystalline Silica. *Science*. 118 (3057): 131–132. (1953).
- Стишов С. М., Попова С. В. // *Геохимия*. 1961, № 10. С. 837–839. S. M. Stishov, S. V. Popova, *Geochem*. 10 (1961) 923.
- Chao E C T et al. *J. Geophys. Res.* 67 419 (1962).
- Heimann R. B.: *Classic and Advanced Ceramics*, p. 71-81, 507-520. Wiley-VCH, Weinheim 2010.
- Pabst W. and Gregorova E., 2013. Elastic properties of silica polymorphs – a review. *Ceramics-Silikaty*, 57(3). P. 167–184.
- Birch F. Finite strain isotherm and velocities for single crystal and polycrystalline NaCl at high pressures and 300 K // *Journal of Geophysical Research*. 1978. Vol. 83. P. 1257–1268.
- Dugdale J. S., McDonald D. The thermal expansion of solids // *Phys. Rev.* 1953. Vol. 89. P. 832–851.
- Ross Nancy L., Shu Jin-Fu, Hazen Robert M., Gasparik Tibor. High-pressure crystal chemistry of stishovite // *American Mineralogist*. 1990. Vol. 75. P. 739–747.
- Hofmeister A. M. Thermodynamic properties of Stishovite at mantle conditions determined from pressure variations of vibrational modes. *Mineral Spectroscopy A Tribute to Roger G. Burns. The Geochemical Society, Special Publication No. 5*, 215 (1996).
- Li B., Rigden S. M., Liebermann R. C. Elasticity of stishovite at high pressure // *Physics of the Earth and Planetary Interiors*. 1996. Vol. 96. P. 113–127.
- Andrault D., Fiquet C., Hafland M. Pressure induced landau-type transition in stishovite // *Science*. 1998. Vol. 282. P. 720–724.
- Jun Liu, Jianzhong Zhang, Lucy Flesch, Baosheng Li, Donald J. Weidner, Robert C. Liebermann. Thermal equation of state of stishovite // *Physics of the Earth and Planetary Interiors*. 1999. Vol. 112. P. 257–266.
- Panero W. R., Benedetti L. R., Jeanloz R. J. Equation of state of Stishovite and interpretation of  $\text{SiO}_2$  shock compression data // *Journal Geophysical Research*, 2001.

15. Andraut D., Angel R. J., Mosenfelder J. L., Bihan T. Equation of state of stishovite to lower mantle pressures // *American Mineralogist*. 2003. Vol. 88. P. 301–307.
16. Wang F., Tange Y., Irifune T., Funakoshi K. P-V-T equation of state of stishovite up to mid-lower mantle conditions // *Journal Geophysical Research*. 2012. Vol. 117. Is. B6.
17. Holm J. L., Kleppa O. L., Westrum E. F. Thermodynamics of polymorphic transitions in silica. Thermal properties from 5 to 1070 K and pressure-temperature stability fields for coesite and stishovite // *Geochim. Cosmochim. Acta*. 1967. Vol. 31. P. 2289–2307.
18. Masaki Akaogi, Hitoshi Yusa, Kimiko Shiraiishi, Toshihiro Suzuki. Thermodynamic properties of  $\alpha$ -quartz, coesite, and stishovite and equilibrium phase relations at high pressures and high temperatures // *Journal of geophysical research*. 1995. Vol. 100, №. B11. November 10. P. 22, 337–22, 347.
19. Nishimura Y., Nakayama K., Takahashi E., Iguchi T., Funakoshi K. // *Phys. Chem. Mine*. 2005. Vol. 31. P. 660.
20. Надыкто Б. А. Состояния атомов при фиксированном атомном объеме. Полуэмпирическое уравнение состояния твердых тел // *Докл. АН СССР*. 1991. Т. 316, N 6. С. 1389.
21. Надыкто Б. А. Полуэмпирическая модель расчета энергии состояний многоэлектронных атомов и ионов // *УФН*. 1993. Т. 163, № 9. С. 37–74.
22. Hemley R J et al. *Solid State Commun*. 114 527 (2000).
23. Mao H. K., Xu J., Bell M. *Journal Geophys. Res.* 1986. Vol. 91. P. 4673.
24. Watanabe H. Thermochemical properties of synthetic high-pressure compounds relevant to the Earths mantle. In *High Pressure Research: Application to Geophysics* (Ed. S. Akimoto and M. H. Manghnani) Academic Press, San Diego, CA, 441-464 (1982).
25. Ito H., Kawada K., Akimoto S. Thermal expansion of stishovite // *Phys. Earth Planet, Inter*. 1974. Vol. 8. P. 277.
26. Luo S. N., Mosenfelder J. L., Asimow P. D., Ahrens T. J. Direct shock wave loading of Stishovite to 235 GPa: Implications for perovskite stability relative to an oxide assemblage at lowermantle condictions // *Geophysical Research Letter*. 2002. Vol. 29, N 14. P. 36.
27. Millot M., Dubrovinskaia N., A. Černok A., Blaha S., Dubrovinsky L., Braun D. G., Celliers P. M., Collins G. W., Eggert J. H., Jeanloz R. Shock compression of stishovite and melting of silica at planetary // *Interior conditions Science*, January. 2015. Vol. 347. P. 418–420.
28. Luo S. N., Swadener J. G., Ma C., Tschauer O. Examining crystallographic orientation dependence of hardness of silica Stishovite // *Physica*. 2007. B 399. P. 138–142.
29. McQueen R. G., Fritz J. N., Marsh S. P. // *J. Geophys. Res.* 1963. Vol. 68. P. 2319.
30. Подурец М. А., Симаков Г. В., Трунин Р. Ф. Переход стишовита в более плотную фазу // *Изв. АН СССР. Физика Земли*. 1990. N 4. С. 30–37.
31. Подурец М. А., Симаков Г. В., Телегин Г. С., Трунин Р. Ф. Полиморфизм кремнезема в ударных волнах и уравнение состояния коэсита и стишовита // *Изв. АН СССР. Физика Земли*. 1981, N 1. С. 16–25.
32. Akaogi M., Yusa H., Shiraishi K., Suzuki T. Thermodynamic properties of  $\alpha$ -quartz, coesite, and stishovite and equilibrium phase relations at high pressures and high temperatures // *Journal of geophysical research*. 1995. Vol. 100, №. B11. November 10. P. 22, 337-22, 347.
33. Knudson M. D., Desjarlais M. P. Adiabatic release measurements in  $\alpha$ -quartz between 300 and 1200 GPa: Characterization of  $\alpha$ -quartz as a shock standard in the multimegabar regime // *Physical Review B*. 2013. Vol. 88. P. 184107(1–18).
34. McCoy C. A., Gregor M. C., Polsin D. N., Fratanduono D. E. Celliers P. M., Boehly T. R., Meyerhofer D. D. Shock-wave equation-of-state measurements in fused silica up to 1600 GPa // *Journal Applied Physics*. 2016. Vol. 119. P. 215901.
35. Desjarlais M. P., Knudson M. D., and Cochran K. R. Extension of the Hugoniot release model of  $\alpha$ -quartz to 0,2–3 TPa // *Journal Applied Physics*. 2017. Vol. 122. P. 035903.
36. McCoy C. A., Gregor M. C., Polsin D. N., Fratanduono D. E. Celliers P. M., Boehly T. R., Meyerhofer D. D. Measurements of the sound velocity of shock-compressed liquid silica to 1100 GPa // *Journal Applied Physics*. 2016. Vol. 120. P. 235901.
37. Подурец М. А., Симаков Г. В., Трунин Р. Ф. О фазовом равновесии в ударно сжатом кварце и о характере кинетики фазового перехода // *Изв. АН СССР. Физика Земли*. 1976. N 7. С. 3.
38. Борщевский А. О., Горшков М. М., Тарасов А. М. Ударная адиабата двукратного сжатия кварцита при давлениях 550–1500 кбар // *Физика земли*. 1998, N 4. С. 28.
39. Knudson MD, Desjarlais MP. Shock compression of quartz to 1.6 TPa: Redefining a pressure standard // *Physical Review Letters*. 2009. Nov 24; 103(22):225501.



## О ГРАВИТАЦИИ ВЕЙЛЯ–ДИРАКА И КОСМОЛОГИИ ФРИДМАНА

С. Ю. Седов

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

В рамках теории гравитации Вейля–Дирака с неминимальной связью вещественного скалярного поля рассматривается задача описания конформной стадии эволюции Вселенной на основе метрики Фридмана. Приведены конформно-инвариантные решения для масштабного фактора.

Показано, что квантовые поправки к следу тензора энергии-импульса частично компенсируются калибровкой функции Дирака, приводящей к лагранжиану общей теории относительности.

*Ключевые слова:* конформные обобщения гравитации, гравитация Вейля–Дирака, космология.

### 1. Введение

Известно, что Стандартная модель физики частиц при достаточно больших энергиях масштабно инвариантна [1]. Тем не менее общая теория относительности (ОТО) масштабно не инвариантна [2]. Этот факт стимулирует разработку альтернативных теорий гравитации, которые масштабно инвариантны на классическом уровне и включают в себя элементы Стандартной модели (см., например, [3]). Такие теории не должны противоречить данным наблюдательной космологии. Например, в моделях инфляции потенциальная энергия инфлатонного поля должна иметь приемлемую форму с приблизительно «плоским» участком [4].

В литературе встречаются различные модели гравитации с учетом свойства масштабной инвариантности (см., например, [5–7]). В этом контексте рассматриваются теории гравитации, инвариантные при вейлевских преобразованиях метрики

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \Omega^2(x)g_{\mu\nu}. \quad (1)$$

Далее преобразования (1) для краткости будем называть также локально конформными (такой термин распространен в литературе) или вейлев-

скими, хотя под конформными преобразованиями в физике и математике имеются в виду и другие преобразования, см. для примера [8].

Итак, примем, что классическое действие для гравитационного поля имеет (приближенную) конформную симметрию. Мы предполагаем, что эволюция Вселенной началась с нарушения конформной симметрии и фиксирования масштаба массы.

После этого инфлатонное скалярное поле привело к расширению Вселенной. Когда инфлатонное поле скатилось в минимум потенциала, то стало осциллировать вблизи минимума, рождать массивные бозоны [9]. При этом рождающееся массивное вещество разогрелось. При охлаждении разогретого вещества происходили фазовые переходы, в том числе переход с нарушением электро-слабой симметрии [9, 10].

Здесь рассмотрим только конформную стадию Вселенной на основе интегрируемой геометрии Вейля. Свобода выбора масштаба измерения в геометрии Вейля позволяет естественным образом описать конформную симметрию Вселенной. Будем считать, что гравитационное поле можно описывать как классическое, но сделаем попытку учесть и квантовые добавки.

Для конкретности используем метрики Фридмана–Леметра–Робертсона–Уокера (FLRW, см. [2]) и конформную теорию гравитации Вейля–Дирака с вещественным скалярным полем, неминимально связанным с гравитацией [11]. Пространство Фридмана является стандартной моделью пространства-времени в космологии [12]. В данной работе мы рассматриваем, какие появляются особенности в такой модели, если в качестве геометрии пространства-времени использовать интегрируемую геометрию Вейля. Отметим, что в этом направлении есть ряд публикаций (см., например, [13–18, 27–29]), но наш анализ имеет ряд особенностей. В первую очередь, здесь нас интересует вопрос о происхождении нарушения локальной конформной инвариантности.

В разделе 2 рассматриваем общие уравнения теории гравитации Вейля–Дирака [11, 16] и приводим выражение для связи кривизны пространства-времени и скалярного поля Дирака  $\beta$ .

В разделе 3 рассматриваем конформную космологию на основе метрик FLRW и приводим конформные решения для случая с ненулевым космологическим параметром  $\lambda$ .

В разделе 4 рассматриваем влияние квантовых поправок на классические уравнения Эйнштейна с учетом конформного поля.

В разделе 5 приводим возможное обобщение лагранжиана Вейля–Дирака с учетом электромагнитного поля и комплексного скалярного поля.

В заключении подводится итог проведенному рассмотрению конформной космологии Фридмана.

## 2. Уравнения модификации теории Вейля–Дирака

Рассмотрим вариант конформной гравитации, предполагающий неминимальную связь вещественного скалярного поля  $\beta$  и гравитации. Этот вариант предложен Дираком [11] и в дальнейшем рассматривался рядом исследователей, для примера см. [15, 16, 19, 20]. Воспользуемся далее модификацией теории Вейля–Дирака, близкой к форме Розена и Израэлиты [16].

Положим гравитационную постоянную Ньютона  $G=1$ , скорость света  $c=1$ . Действие без обычной материи конформно инвариантно:

$$S_{BC} = -\frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ R\beta^2 + 6g^{\mu\nu} \beta_{,\mu} \beta_{,\nu} + \omega^2 E^{\mu\nu} E_{\mu\nu} + \alpha (\beta_{,\mu} - C_{\mu} \beta) (\beta^{,\mu} - C^{\mu} \beta) + 2\lambda \beta^4 \right\}, \quad (1)$$

Используемые нами величины отличаются от величин Розена и Израэлиты [15, 16] следующим образом: скалярная кривизна  $R$  имеет другой знак, параметр  $\alpha < 0$ , напряженность векторного поля  $E_{\mu\nu} = \partial_{\mu} C_{\nu} - \partial_{\nu} C_{\mu}$ . Сигнатура метрики, которую мы используем:  $(+, -, -, -)$  (см. [2]).

Существенно подчеркнуть, что лагранжиан (1) совпадает с лагранжианом [11, 15, 16] с точностью до обозначений и выбора соглашений о знаках кривизны  $R$  и тензора Риччи  $R_{\alpha\beta}$ , но в коэффициенты вейлевской геометрической связности у нас входит не вейлевский вектор  $C_{\mu}$ , а градиент  $\partial_{\nu} \beta(x) \equiv \beta_{,\nu}$ :

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda} = \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} + \delta_{\mu}^{\lambda} \beta_{,\nu} + \delta_{\nu}^{\lambda} \beta_{,\mu} - g_{\mu\nu} \beta^{,\lambda}.$$

Это приводит к тому, что используемая здесь геометрия пространства Вейля является интегрируемой. Уравнения движения получаются варьированием действия (1) по метрике  $\delta g_{\mu\nu}$ , по полю  $\delta \beta$  и по вектору  $\delta C^{\nu}$ . Следуя [15, 16, 19], при вариации действия по метрике  $\delta g_{\mu\nu}$  получаем уравнения:

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \equiv G^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} \equiv T^{(B)\mu\nu} + T^{(C)\mu\nu} + T^{(E)\mu\nu} + g^{\mu\nu} \lambda \beta^2(x) + \frac{8\pi T^{(m)\mu\nu}}{\beta^2}, \quad (2)$$

где

$$T^{(B)\mu\nu} = \frac{1}{\beta^2} \left( -2 + \frac{\alpha}{2} \right) g^{\mu\nu} \beta_{,\alpha} \beta^{,\alpha} + \frac{1}{\beta^2} (2 - \alpha) \beta^{,\mu} \beta^{,\nu} - \frac{2}{\beta^2} g^{\mu\nu} \beta \beta_{;\alpha} + \frac{2}{\beta^2} \beta \beta^{;\mu;\nu}, \quad (3)$$

$$T^{(C)\mu\nu} = \alpha \left( -C^{\mu} C^{\nu} + \frac{g^{\mu\nu}}{2} C^{\lambda} C_{\lambda} \right) + \frac{\alpha}{\beta} \left( \beta^{,\mu} C^{\nu} + \beta^{,\nu} C^{\mu} - g^{\mu\nu} \beta_{,\lambda} C^{\lambda} \right), \quad (4)$$

$$T^{(E)\mu\nu} = \omega^2 \frac{8\pi}{\beta^2} \left[ \frac{1}{16\pi} g^{\mu\nu} E^{\lambda\rho} E_{\lambda\rho} - \frac{1}{4\pi} E_{\lambda}^{\mu} E^{\nu\lambda} \right] = \frac{\omega^2}{\beta^2} \left[ \frac{1}{2} g^{\mu\nu} E^{\lambda\rho} F_{\lambda\rho} - 2E_{\lambda}^{\mu} E^{\nu\lambda} \right], \quad (5)$$

$$E_{\mu}^{\nu} = \partial_{\mu} C^{\nu} - \partial_{\nu} C^{\mu}. \quad (6)$$

Здесь введен  $T^{(m)\mu\nu}$  – тензор энергии-импульса материи. В работах [16, 19] параметр принят равным  $\omega^2 = 1$ . Величины  $T^{(m)\mu\nu}$ ,  $\psi$  и  $J^{\mu}$  входят в выражение для вариации лагранжиана  $L_{\text{matter}}$

материи, выраженного здесь в единицах приведенной массы Планка  $M_{PL} = \frac{1}{\sqrt{8\pi G}}$ :

$$S_m = -\frac{1}{16\pi} \int d^4x \cdot L_{\text{matter}} \sqrt{-g}, \quad (7)$$

$$\delta(L_{\text{matter}} \sqrt{-g}) = 8\pi T^{(m)\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \sqrt{-g} + 16\pi J^\lambda \delta B_\lambda \sqrt{-g} + \Psi \delta \beta \sqrt{-g}. \quad (8)$$

Наложим условие отсутствия следа на тензор материи  $T^{(m)\mu\nu}$  для сохранения конформности уравнений (2):

$$T^{(m)\lambda}_{\lambda} = 0. \quad (9)$$

По поводу этого условия см., например, [21], предложение 6.11.3 и [22], п. 6.3. В соотношении (8)  $\Psi$  и  $J^\lambda$  – это плотность вейлевского заряда обычной материи и плотность вейлевского тока обычной материи. Вариация по полю  $\delta\beta$  дает уравнение:

$$R = (\alpha + 6) \frac{\beta^{\lambda;\lambda}}{\beta} - 4\beta^2 \lambda - \alpha (C^\lambda C_\lambda + C^\lambda{}_{;\lambda}) - \frac{\Psi}{2\beta}. \quad (10)$$

Вариация по вектору  $\delta C^\nu$  дает уравнение:

$$4\omega^2 E^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 16\pi J^\mu - 2\alpha\beta (\beta^\mu - \beta C^\mu). \quad (11)$$

Далее положим вейлевский ток материи и вейлевский заряд обычной материи равными нулю:

$$J^\lambda = 0, \quad \Psi = 0. \quad (12)$$

Итак, из (11) с учетом определения тензора  $E_\mu^\nu$  получаем:

$$E^{\mu\nu}{}_{;\nu;\mu} = 0, \quad (13)$$

то есть:

$$(\beta\beta^\mu - \beta^2 C^\mu)_{;\mu} = 0. \quad (14)$$

Соотношения (2) – (11) инвариантны относительно преобразований Вейля при условии (12). Величины  $\beta$  и  $C_\alpha$  определены с точностью до преобразований Вейля

$$g_{\alpha\beta} \rightarrow g_{\alpha\beta} \Omega^2(x),$$

$$\beta \rightarrow \beta \Omega^{-1}(x) \quad C_\alpha \rightarrow C_\alpha - \partial_\alpha \ln \Omega(x). \quad (15)$$

Величина  $\beta(x) = 1$  соответствует ОТО. Тогда из (11) следует, что

$$C^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 4\pi J^\mu + \frac{1}{2\omega^2} \alpha C^\mu. \quad (16)$$

Воспользуемся далее рассуждениями из [16].

Пусть  $\alpha < 0$ . Если положить  $\frac{1}{2\omega^2} \alpha = -k_A^2 < 0$ ,

$J^\mu = 0$ ,  $\beta(x) = 1$ , то получаем:

$$E^{\mu\nu}{}_{;\nu} + k_A^2 C^\mu = 0. \quad (17)$$

Из (13) следует, что

$$C^\mu{}_{;\mu} = 0. \quad (18)$$

Отсюда

$$\nabla_\nu \nabla^\nu C^\mu + k_A^2 C^\mu = 0, \quad (19)$$

т. е. получаются уравнения Прока (18), (19) для свободного векторного поля  $C^\mu$  (вейлонов или вейлевских мезонов) со спином 1 и массой

$m_A = \frac{\hbar k_A}{c}$  [16]. При этом скалярная кривизна, связанная с космологической постоянной и наличием вейлонов (свободного от обычной материи пространства), равна

$$R = -4\lambda + 2k_A^2 (C^\lambda C_\lambda + C^\lambda{}_{;\lambda}) = -4\lambda + 2k_A^2 C^\lambda C_\lambda. \quad (20)$$

Заметим, что в ранней вселенной флуктуации векторного поля (вейлонов) могут приводить к флуктуации кривизны в соответствии с соотношением (20).

Отметим, что так как векторное поле  $C^\mu$  у нас не входит в вейлевскую геометрическую связность, в отличие от [1, 11, 16], то его можно квантовать без опасений «зadetъ» при этом метрику  $g_{\alpha\beta}$ .

### 3. Космология Фридмана с одним скалярным полем

Положим вектор

$$C^\mu \equiv \frac{\beta^\mu}{\beta} \quad (21)$$

в уравнениях (2). То есть, мы допускаем, что есть этап в эволюции Вселенной, когда векторное поле  $C^\mu$  не вносит существенного вклада в тензор энергии-импульса. Упрощенное действие (1), которое мы будем использовать в этом разделе, в данном случае можно записать так:

$$S = -\frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} (R\beta^2 + 6g^{\mu\nu} \beta_\mu \beta_\nu + 2\lambda\beta^4) + S^{(m)}, \quad (22)$$

где добавлено действие  $S^{(m)}$  релятивистской материи с нулевой массой и нулевым следом тензора

энергии-импульса  $T^{(m)\alpha}_\alpha = 0$ , не нарушающее конформность уравнений (2). Это хорошо известный случай (вещественного) скалярного поля, конформно связанного с гравитацией, который рассматривался во множестве работ, например в [5, 6, 22–27].

Далее мы рассмотрим различные варианты метрики FLRW (Робертсона – Уокера).

### 3.1. Замкнутая однородная и изотропная Вселенная

Рассмотрим нестационарную метрику FLRW замкнутой однородной и изотропной Вселенной в синхронной системе отсчета [16]:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left( \frac{dr^2}{1-r^2} + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2 \right). \quad (23)$$

При подстановке в уравнения (2) метрика (23) дает два соотношения

$$R_1^1 - \frac{1}{2}R = -\frac{8\pi}{\beta^2}p + \frac{\dot{\beta}^2}{\beta^2} - 2\frac{\ddot{\beta}}{\beta} - 4\frac{\dot{a}\dot{\beta}}{a\beta} + \lambda\beta^2, \quad (24)$$

$$R_0^0 - \frac{1}{2}R = \frac{8\pi}{\beta^2}\varepsilon - 3\frac{\dot{\beta}^2}{\beta^2} - 6\frac{\dot{a}\dot{\beta}}{a\beta} + \lambda\beta^2. \quad (25)$$

Здесь

$$T^{(m)1}_1 = -p, \quad T^{(m)0}_0 = \varepsilon. \quad (26)$$

Соотношения (24) и (25) можно переписать в виде [16]:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{8\pi}{3\beta^2}\varepsilon - \frac{\dot{\beta}^2}{\beta^2} - 2\frac{\dot{a}\dot{\beta}}{a\beta} + \frac{1}{3}\lambda\beta^2, \quad (27)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi}{\beta^2} \left( p + \frac{1}{3}\varepsilon \right) + \frac{\dot{\beta}^2}{\beta^2} - \frac{\ddot{\beta}}{\beta} - \frac{\dot{a}\dot{\beta}}{a\beta} + \frac{1}{3}\lambda\beta^2. \quad (28)$$

Задание произвольной функции  $\beta(t) > 0$  приводит к двум уравнениям для определения функции  $a(t)$ . Скалярная кривизна

$$R = -6 \left( \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{1}{a^2} \right). \quad (29)$$

С другой стороны, из выражения (10)

$$R = 6 \frac{\beta^{\lambda}_{;\lambda}}{\beta} - 4\lambda\beta^2, \quad (30)$$

откуда

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{1}{a^2} = -\frac{\ddot{\beta}}{\beta} - 3\frac{\dot{a}\dot{\beta}}{a\beta} + \frac{2}{3}\lambda\beta^2. \quad (31)$$

Соотношение (31) является также следствием уравнений (27) и (28) при условии  $\varepsilon = 3p$ .

Подчеркнем, что функция  $\beta(t)$  до нарушения конформной инвариантности произвольна. Если принять, как в [16], что при  $t = 0$ :  $a_0 = a(0)$ ,  $\beta(0) = \beta_0$ ,  $\dot{\beta}(0) = 0$ , то из (27) следует, что

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = -\frac{1}{a_0^2} + \frac{1}{3}\lambda\beta_0^2, \quad \frac{\ddot{a}}{a} \approx \frac{1}{3}\lambda\beta_0^2. \quad (32)$$

Это означает, что Вселенная расширяется при  $\lambda > 0$  и  $\frac{1}{a_0^2} \ll \frac{1}{3}\lambda\beta_0^2$ . Тогда можно записать приближенное решение:

$$a \approx a_0 \exp \left( \sqrt{\frac{1}{3}\lambda\beta_0^2} t \right). \quad (33)$$

Если задается конкретная функция  $\beta(t)$ , то тем самым считается, что конформная инвариантность нарушена и обратный переход к произвольной зависимости  $\beta(t)$  невозможен. Зависимость  $\beta(t)$  можно подобрать так, чтобы она соответствовала определенным данным космологических наблюдений; подробнее см. [15, 16, 27]. Мы не ставим здесь целью такой подбор. Можно привлечь переменность функции  $\beta(t)$  как источник рождения материи. В [15, 16, 27] это делается на основе классического поля чисто феноменологическим образом.

Если в уравнениях (27), (28) положить  $\varepsilon = p = 0$  (отсутствие материи) и  $\beta = 1$ , то можно получить решение де Ситтера для  $a(t)$ , соответствующее пустому пространству:

$$a(t) = \sqrt{\frac{3}{\lambda}} \operatorname{ch} \left( \sqrt{\frac{\lambda}{3}} t \right). \quad (34)$$

### 3.2. Плоская однородная и изотропная Вселенная

В [28] рассмотрен случай, когда метрика плоская и задана в виде:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left( dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2 \right). \quad (35)$$

Если иметь в виду случай действия (22), то получаем два различных уравнения из соотношений (2) при отсутствии релятивистской материи ( $\varepsilon = p = 0$ ):

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{\beta}}{\beta} + 4\frac{\dot{a}\dot{\beta}}{a\beta} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{\dot{\beta}^2}{\beta^2} = \lambda\beta^2, \quad (36)$$

$$3\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 6\frac{\dot{a}\dot{\beta}}{a\beta} + 3\frac{\dot{\beta}^2}{\beta^2} = \lambda\beta^2. \quad (37)$$

Уравнение (10) для функции Дирака  $\beta$  в данном случае имеет вид:

$$\frac{\ddot{\beta}}{\beta} + 3\frac{\dot{\alpha}\dot{\beta}}{a\beta} = -\frac{\ddot{\alpha}}{a} - \frac{\dot{\alpha}^2}{a^2} + \frac{2}{3}\beta^2\lambda. \quad (38)$$

Оно является следствием соотношений (36) и (37), но не совпадает с выражением, приведенным в [28]:

$$\frac{\ddot{\beta}}{\beta} + 3\frac{\dot{\alpha}\dot{\beta}}{a\beta} = -2\frac{\dot{\beta}^2}{\beta^2}. \quad (39)$$

Заметим, что для функции  $\beta$  Дезера–Дирака в [28] вместо уравнения (10) используется соотношение

$$Ag^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\ln\beta + Bg^{\mu\nu}\partial_\mu\ln\beta\partial_\nu\ln\beta = 0 \quad (40)$$

при значениях параметров  $B=3A$ . Оно и приводит у авторов [28] к выражению (39).

По этому поводу в [29] написано: «Если перейти к гармонической системе координат в пространственно-плоской Вселенной, то уравнение для Дираковского скалярного поля имеет следующую форму (40) (для ранней эволюции Вселенной, когда динамика Вселенной определяется только скалярным полем, а обычная материя еще не возникла)...». В наложении условия гармоничности

$$\partial_\nu\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\right) = 0. \quad (41)$$

на уравнение для функции  $\beta$  кроется, на наш взгляд, нарушение конформности, так как при локальном конформном преобразовании  $\sqrt{-g}g^{\mu\nu} \rightarrow \Omega^2(x)\sqrt{-g}g^{\mu\nu}$ . Вейлевски инвариантный аналог калибровки де Дондера приведен в [30]:

$$\partial_\nu\left(\left(-g\right)^{\frac{1}{4}}g^{\mu\nu}\right) = 0. \quad (42)$$

Сделаем подстановку как и в [28]:  $u = \ln\frac{a}{a_0}$ ,  $v = \ln\beta$ . Тогда получаем из (36), (37) два уравнения:

$$\dot{u}^2 + 2\dot{u}\dot{v} + \dot{v}^2 = \frac{\lambda}{3}\exp(2v), \quad (43)$$

$$\ddot{u} + \ddot{v} - \dot{u}\dot{v} - \dot{v}^2 = 0. \quad (44)$$

Из (43) следует, что

$$\dot{u} + \dot{v} = \pm\sqrt{\frac{\lambda}{3}}\exp(v). \quad (45)$$

Как получено в [28], уравнение (44) является следствием (45). То есть, задавая произвольную функцию  $\beta(t) = \exp(v(t))$ , мы автоматически получим решение для  $a(t) = \exp(u(t))$ . Этот вывод согласуется с конформностью исходного действия (22).

Если принять, что Вселенная расширяется, то решение (45) записывается в виде:

$$\frac{\dot{a}}{a} = -\frac{\dot{\beta}}{\beta} + \sqrt{\frac{\lambda}{3}}\beta. \quad (46)$$

Какая бы ни была функция  $\beta(t)$ , она должна иметь значение  $\beta=1$  (или близкое к 1), чтобы действие (22) перешло в действие ОТО. Иными словами, конкретную калибровку  $\beta$  для нарушения конформности с целью соответствия ОТО здесь приходится задавать «руками», а не получать из какого-то дополнительного условия.

Если поставить начальные условия в произвольный момент времени  $t_0$  в виде  $a_0 = a(t_0)$ ,  $\beta_0 = \beta(t_0)$ ,  $\dot{\beta}(t_0) = 0$  и  $\Lambda > 0$ , то получаем расширение пустого пространства по экспоненциальному закону

$$a(t) = a_0 \exp\left(\sqrt{\frac{1}{3}\lambda\beta_0^2}(t-t_0)\right). \quad (47)$$

### 3.3. Открытая однородная и изотропная Вселенная с отрицательной $\lambda$

Нестационарная изотропная метрика открытого типа с конформным временем  $\eta$  рассмотрена в [31]:

$$ds^2 = a^2(\eta)\left[d\eta^2 - dr^2 - sh^2(r)(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2)\right]. \quad (48)$$

Рассмотрим случай отрицательного параметра

$$\lambda = -\tilde{\lambda} < 0 \quad (49)$$

в действии (22). В данном случае уравнения (2) имеют вид:

$$R_{11} - \frac{1}{2}g_{11}R = -\frac{8\pi}{\beta^2}p + \tilde{\lambda}\beta^2a^2 + 2\frac{\ddot{\beta}}{\beta} + 2\frac{\dot{\alpha}\dot{\beta}}{a\beta} - \frac{\dot{\beta}^2}{\beta^2}, \quad (50)$$

$$R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R = \frac{8\pi}{\beta^2}\varepsilon - \tilde{\lambda}\beta^2a^2 - 6\frac{\dot{\alpha}\dot{\beta}}{a\beta} - 3\frac{\dot{\beta}^2}{\beta^2}. \quad (51)$$

Здесь

$$R_{11} - \frac{1}{2}g_{11}R = -2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + 1,$$

$$R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R = 3\frac{\dot{a}^2}{a^2} - 3. \quad (52)$$

Скалярная кривизна

$$R = \frac{6}{a^3}(a - \ddot{a}). \quad (53)$$

Уравнение (10) для  $\beta(t)$ :

$$\ddot{\beta} + 2\frac{\dot{\alpha}\dot{\beta}}{a} + \left(\frac{\ddot{a}}{a} - 1\right)\beta + \frac{2}{3}\tilde{\lambda}\beta^3a^2 = 0. \quad (54)$$

Как и в [31], сделаем замену в (54) при условии  $\tilde{\lambda} > 0$ :

$$\beta(\eta)a(\eta) = \sqrt{\frac{3}{2\tilde{\lambda}}} f(\eta). \quad (55)$$

Тогда получается уравнение Дюффинга [31]:

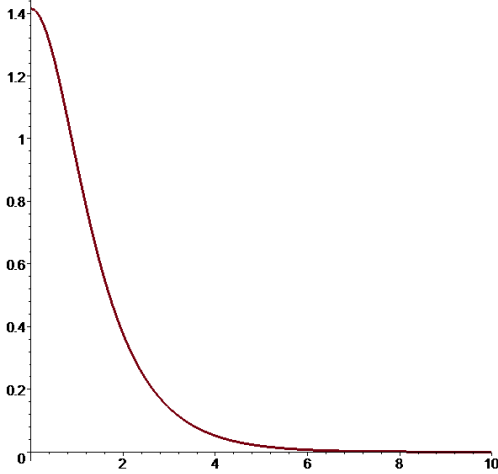
$$\ddot{f} - f + f^3 = 0. \quad (56)$$

Это уравнение подробно рассмотрено в [31]. Вывод по его исследованию в [31] сделан следующий.

Точка с координатами  $(f, \dot{f}) = (0, 0)$  на фазовой плоскости уравнения Дюффинга является особой точкой типа седла. Это нулевое решение неустойчиво. Особые точки с координатами  $(f, \dot{f}) = (\pm 1, 0)$  являются центрами, и являются устойчивыми состояниями равновесия для уравнения Дюффинга (56). Авторы [31] утверждают, что в случае комплексного скалярного поля это означает нарушение симметрии. Общее решение уравнения (56) приведено в [5]. Простейшим решением (56) является функция

$$f(\eta) = \frac{\sqrt{2}}{\text{ch}(\eta - \eta_0)}. \quad (57)$$

На следующем рисунке показан ее вид.



Зависимость (57) от  $\eta$  при  $\eta_0 = 0$  и  $\eta > 0$

Мы можем выбрать произвольную зависимость для  $\beta(\eta) > 0$ , полностью определив тем самым функцию  $a(\eta) = \sqrt{\frac{3}{2\tilde{\lambda}}} \frac{f(\eta)}{\beta(\eta)}$ . То есть имеется конформный произвол в выборе функции Дирака  $\beta(\eta)$ .

Плотность энергии и давление материи записываются так:

$$\begin{aligned} 8\pi\varepsilon &= \frac{9f^2}{2\tilde{\lambda}a^4} \left( -1 + \frac{f^2}{2} + \frac{\dot{f}^2}{f^2} \right), \\ 8\pi p &= \frac{3f^2}{2\tilde{\lambda}a^4} \left( -1 + \frac{f^2}{2} + \frac{\dot{f}^2}{f^2} \right). \end{aligned} \quad (58)$$

Отметим, что эти значения получаются из соотношений

$$\left( R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R + g^{\mu\nu}\tilde{\lambda}\beta^2(x) \right) - T^{(\beta)\mu\nu} = 8\pi T^{(m)\mu\nu}, \quad (59)$$

и приводят к ненулевым диагональным компонентам  $8\pi T^{(m)\mu\nu}$ , выписанным в (58). Хотя след  $T^{(m)\alpha}_{\alpha} = 0$  вследствие конформности уравнений (2), тем не менее из (58) и (59) следует, что имеется материя с нулевой массой и релятивистским уравнением состояния  $\varepsilon = 3p \neq 0$  (типа излучения).

Решение (57) соответствует вакуумному случаю с  $\varepsilon = p = 0$ . Это можно проверить прямой подстановкой (57) в (58). Выражение (57) приводит к следующей связи  $\beta(\eta)$  и  $a(\eta)$ :

$$a(\eta) = \frac{1}{\beta(\eta)} \sqrt{\frac{3}{\tilde{\lambda}}} \frac{1}{\text{ch}(\eta - \eta_0)}. \quad (60)$$

Если в (50) и (51) положить  $\beta = 1$ , то получаем соотношения:

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda} - \frac{1}{a^2} + 2\frac{\ddot{a}}{a^3} - \frac{\dot{a}^2}{a^4} &= -8\pi p = \\ &= -\frac{2\tilde{\lambda}}{3f^2} \left( -1 + \frac{f^2}{2} + \frac{\dot{f}^2}{f^2} \right), \end{aligned} \quad (61)$$

$$\tilde{\lambda} - \frac{3}{a^2} + 3\frac{\dot{a}^2}{a^4} = 8\pi\varepsilon = 2\frac{\tilde{\lambda}}{f^2} \left( -1 + \frac{f^2}{2} + \frac{\dot{f}^2}{f^2} \right). \quad (62)$$

В случае вакуума, соответствующего выражению (57) для  $f(\eta)$  и значения  $\beta = 1$  имеет место следующая зависимость конформного фактора от конформного времени  $\eta$ :

$$a(\eta) = \sqrt{\frac{3}{\tilde{\lambda}}} \frac{1}{\text{ch}(\eta - \eta_0)}. \quad (63)$$

Если же взять  $f = 1$  как устойчивое решение уравнения (56), то при  $\beta = 1$

$$a(\eta) = \sqrt{\frac{3}{2\tilde{\lambda}}}. \quad (64)$$

Итак, устойчивое решение (56) соответствует максимальному значению конформного фактора (64). Конформный фактор (64) соответствует статическому пространству анти-де-Ситтера, см. метрику (48).

Помимо калибровки  $\beta=1$ , непосредственно приводящей к ОТО, можно выбрать другие калибровки  $\beta(\eta)$ , чтобы получать разные космологические решения. Например, пусть

$$\beta_0 \gg 1, \quad \beta(\eta) = 1 + \frac{\beta_0}{\text{ch}^2(\eta)},$$

$$a(\eta) = \sqrt{\frac{3}{\tilde{\lambda}}} \frac{\text{ch}(\eta)}{\beta_0 + \text{ch}^2(\eta)}. \quad (65)$$

Тогда при малых временах  $a(\eta) \approx \sqrt{\frac{3}{\tilde{\lambda}}} \frac{\text{ch}(\eta)}{\beta_0}$ , а при больших отрицательных и больших положительных конформных временах  $a(\eta) \approx \sqrt{\frac{3}{\tilde{\lambda}}} \frac{1}{\text{ch}(\eta)}$ , т. е., сначала Вселенная расширяется, а потом схлопывается, причем при  $\eta=0$  сингулярности нет (но сингулярность есть как при  $\eta=-\infty$ , так и при  $\eta=+\infty$ ). Конформное время достижения максимального значения конформного параметра  $a_{\max}$  находится из соотношения  $\text{ch}(\eta_{\max}) = \sqrt{\beta_0}$ . Пример (65) имеет смысл рассматривать, если  $\tilde{\lambda} \ll 1$ .

Рассмотренный вариант действия (22) с отрицательным параметром  $\lambda = -\tilde{\lambda}$  соответствует неустойчивому случаю, когда потенциальная энергия поля  $U(\beta)$  при возрастании  $\beta(\eta)$  и достаточно больших значениях  $\beta$  уменьшается, будучи отрицательной:  $U(\beta) = R\beta^2 + 2\lambda\beta^4$ . Кроме того, отрицательный параметр  $\lambda$  не соответствует ОТО, в которой космологическая постоянная равна  $\Lambda \approx 3 \cdot 10^{-56} \text{ см}^2$  (см., например [12]; данные Peebles, 2003). Но это не должно нас смущать, так как при добавлении еще одного скалярного поля  $\phi$  отрицательную величину  $\lambda$  можно легко компенсировать.

Пусть, например, задан лагранжиан с вещественным дилатонным полем  $\beta$ , комплексным полем  $\phi$  и параметрами  $\lambda$ ,  $\lambda_1$ ,  $\mu$  и  $\rho$ :

$$L_{\beta\phi} = \beta^2 R + 6\beta_\alpha \beta^\alpha + \mu \left( \phi \phi^* - \rho^2 \beta^2 \right)^2 + 2\lambda\beta^4 + 2\lambda_1 \left( \phi \phi^* \right)^2 \quad (66)$$

При нарушении конформной симметрии  $\beta=1$  и спонтанном нарушении калибровочной симметрии поля  $|\phi_c| = \rho$ , поэтому

$$L_{\beta\phi} = R + 2\lambda + 2\lambda_1 \rho^4 = R + 2\lambda_{\text{eff}}. \quad (67)$$

Если  $\lambda < 0$  и  $-2|\lambda| + 2\lambda_1 \rho^4 = 2\lambda_{\text{eff}} > 0$ , то эффективное значение космологической постоянной  $\lambda_{\text{eff}}$  может быть выбрано достаточно малым и положительным, что будет находиться в согласии с наблюдениями; т. е. лагранжиан (66) после нарушения конформной и калибровочной симметрии сведется к лагранжиану ОТО (67).

Здесь возникает три вопроса: 1) каким «естественным» образом фиксировать калибровку  $\beta$ ; 2) как в случае необходимости «исправить» неправильный знак кинетического члена для  $\beta$  в (66); 3) как могли бы возникнуть частицы поля  $\phi$ .

Что касается первого вопроса, то в рамках классической конформной теории гравитации это можно сделать только «руками». Нарушение конформной инвариантности и конкретный вид функции  $\beta(x)$  имеют феноменологический характер. Выбор  $\beta=1$  в лагранжиане (22) соответствует ОТО, как еще говорят, «эйнштейновской картине».

Что касается второго вопроса, то это можно сделать, введя в (66) добавку в виде

$$\alpha g_{\mu\nu} \left( \beta^\mu - C^\mu \beta \right) \left( \beta^\nu - C^\nu \beta \right) \quad (68)$$

с вейлевским вектором  $C_\mu$  и параметром  $\alpha$  таким, что  $\alpha + 6 < 0$ . При этом условие (21) снимается, и  $C^\mu$  будет уже произвольным вещественным вектором.

Третий вопрос решается так. Когда поле  $\phi$  приобретает массу  $m_\phi^2 = 8\mu\rho^2$  в соответствии с видом лагранжиана (66) вследствие спонтанного нарушения симметрии, то в метрике (48) с конформным фактором

$$a(\eta) = \frac{a_1}{\text{ch}(\eta)} \quad (69)$$

происходит рождение массивных частиц поля  $\phi$ , как это показано в монографии [24]. Предельный спектр рожденных пар частиц при  $\eta \rightarrow +\infty$  имеет вид (см. [24], с. 202, формула (9.141)):

$$n(l) = \frac{\sin(\pi\sigma)}{\text{sh}^2(\pi l)}. \quad (70)$$

Здесь

$$a_1 = \sqrt{\frac{3}{\tilde{\lambda}}}, \quad \sigma = \left( \frac{1}{4} + m_\phi^2 a_1^2 \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}, \quad 0 \leq l < +\infty, \quad (71)$$

$l$  – непрерывное собственное значение оператора Лапласа–Бельтрами скалярного поля  $\phi$  (см. [24], с. 175) в случае метрики открытого типа. Если

$\sigma = N$ , где  $N$  – целое число, то  $n(l) = 0$ . Итак, в процессе эволюции Вселенная заполнится частями поля  $\phi$ , если  $\sigma \neq N$ .

### 3.4. Общее рассмотрение метрик FLRW с конформным временем

Нестационарная изотропная метрика закрытого типа с конформным временем

$$ds^2 = a^2(\eta) \left[ d\eta^2 - dr^2 - \sin^2(r) (d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2) \right] \quad (72)$$

приводит, как показано в [5], к уравнению для  $f$  вида

$$\ddot{f} + kf - \text{sign}(\lambda)f^3 = 0 \quad (73)$$

с  $k = 1$ . Здесь  $f(\eta)$  определяется выражением:

$$\beta(\eta)a(\eta) = \sqrt{\frac{3}{2|\lambda|}} f(\eta). \quad (74)$$

Выражения (73) и (74) – общие и выполняются для метрики (48) с  $k = -1$ , для метрики (72) с  $k = 1$  и для метрики (75) с  $k = 0$ :

$$ds^2 = a^2(\eta) \left[ d\eta^2 - dr^2 - r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2) \right]. \quad (75)$$

Плотность энергии и давление материи в общем случае записываются так:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{9f^2}{2\lambda a^4} \left( k - \text{sign}(\lambda) \frac{f^2}{2} + \frac{\dot{f}^2}{f^2} \right), \\ p &= \frac{3f^2}{2\lambda a^4} \left( k - \text{sign}(\lambda) \frac{f^2}{2} + \frac{\dot{f}^2}{f^2} \right). \end{aligned} \quad (76)$$

Можно найти общее решение уравнения (73) в эллиптических функциях Якоби (см., например, [5]).

Рассмотрим вакуумные решения с  $\varepsilon = 0$ ,  $p = 0$  при  $\beta = 1$  уравнения (73) для разных случаев. Для конформного времени мы пишем  $a = a(\eta)$ , для синхронного времени  $a = a(t)$ ,  $\eta = \int \frac{dt}{a}$  (см. [22]).

Случай  $k = -1$ ,  $\lambda > 0$ : вакуум  $f(\eta) = \frac{\sqrt{2}}{\text{sh}(\eta - \eta_0)}$ ,

$$a(t) = \sqrt{\frac{3}{\lambda}} \text{sh} \left( \sqrt{\frac{\lambda}{3}} (t - t_0) \right). \quad (77)$$

Случай  $k = 1$ ,  $\lambda > 0$ : вакуум  $f(\eta) = \frac{\sqrt{2}}{\text{sin}(\eta - \eta_0)}$ ,

$$a(t) = \sqrt{\frac{3}{\lambda}} \text{ch} \left( \sqrt{\frac{\lambda}{3}} (t - t_0) \right). \quad (78)$$

Случай  $k = 0$ ,  $\lambda > 0$ : вакуум  $f(\eta) = \frac{\sqrt{2}}{\eta - \eta_0}$ ,

$$a(t) = a_0 \exp \left( \sqrt{\frac{\lambda}{3}} (t - t_0) \right). \quad (79)$$

Случай  $k = -1$ ,  $\lambda < 0$ : вакуум  $f(\eta) = \frac{\sqrt{2}}{\text{ch}(\eta - \eta_0)}$ ,

$$a(t) = \sqrt{\frac{3}{-\lambda}} \text{sin} \left( \sqrt{\frac{-\lambda}{3}} (t - t_0) \right). \quad (80)$$

Случай  $k = 1$ ,  $\lambda < 0$ : вакуумного решения нет, первый интеграл уравнения (73)  $\frac{\dot{f}^2}{2} + \frac{f^2}{2} + \frac{f^4}{4} = C > 0$ .

Случай  $k = 0$ ,  $\lambda < 0$ : вакуумного решения нет, первый интеграл уравнения (73)  $\frac{\dot{f}^2}{2} + \frac{f^4}{4} = C > 0$ .

При  $C = \frac{1}{4}$  решение для  $f(\eta)$  имеет вид:

$$f(\eta) = \text{sin} \left[ \text{am} \left( \frac{\eta}{\sqrt{2}}, i \right) \right] \approx \text{sin} \left( \frac{1.2}{\sqrt{2}} \eta \right), \quad (81)$$

где

$$\text{am}(u, k) = \varphi, \quad u(\varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{dv}{\sqrt{1 - k^2 \text{sin}^2 v}}. \quad (82)$$

Отметим, что в любом случае выполняется соотношение  $\varepsilon = 3p$ , т. е. след тензора энергии-импульса безмассовой материи  $T^{(m)\alpha}_\alpha$  равен нулю.

## 4. О квантовых поправках

Во Вселенной с планковскими размерами существенны квантовые эффекты. Можно предполагать поэтому, что конформная инвариантность в данной ситуации нарушена. Здесь мы не будем обсуждать гипотезу Р. Пенроуза с полностью конформной версией развития Вселенной [32], требующую отдельного анализа.

Распространено общее мнение, что на планковских временах нужно учитывать гравитоны, уравнение для которых в ОТО конформно не инвариантно [24, 33]. Впрочем, вопрос об описании гравитонов в других теориях гравитации является в настоящее время предметом обсуждения, см., например, публикацию [34], где рассмотрены гравитационные волны в квадратичной версии конформной гравитации. По этому поводу см. также [35].

В [36] рассмотрено малое отклонение  $h_{\mu\nu}$  от метрики пространства анти де Ситтера. Автор [36]



показал, что можно ввести эффективную массу гравитона  $m_g$  в пространстве анти де Ситтера по формуле  $m_g = \sqrt{-\frac{2\Lambda}{3}}$  в соответствии с уравнениями для возмущений метрики

$$\square h_{\mu\nu} - \frac{2\Lambda}{3} h_{\mu\nu} = 0, \quad h_{\mu}^{\mu} = 0, \quad h_{\nu;\mu}^{\mu} = 0. \quad (83)$$

Ввести таким же образом массу гравитона в пространстве де Ситтера нельзя. Но если задать некоторое тензорное поле  $\Phi_{\mu\nu}$ , удовлетворяющее конформно-инвариантному уравнению при размерности  $n = 4$  и  $R = -4\Lambda$ :

$$\left[ \square - \frac{1}{6} R \right] \Phi_{\mu\nu} = 0, \quad (84)$$

то ему можно сопоставить массу  $m_g = \sqrt{\frac{2\Lambda}{3}}$ . Идея автора, по-видимому, заключается в том, чтобы рассматривать гравитоны в соответствии с уравнением

$$\square_{\eta} h_{\mu\nu} = 0 \quad (85)$$

в конформно соответствующем псевдоевклидовом пространстве с метрикой Минковского  $\eta$ , а потом сделать вейлевское преобразование  $\Phi_{\mu\nu} = \Omega^{-1}(x) h_{\mu\nu}$  и перейти к уравнению (84).

Частицы с массой при очень больших энергиях хорошо аппроксимируются безмассовыми. Поэтому при расширении Вселенной, когда квантовые эффекты гравитации уже малы, но энергии частиц еще велики по сравнению с их массой, конформная модель гравитации является хорошим приближением для описания реального случая.

Конформно-инвариантная потенциальная энергия дилатонного поля Дирака  $\beta$  записывается так:

$$\tilde{U}(\beta) = \beta^2 \tilde{R} + 2\lambda\beta^4. \quad (86)$$

Здесь  $\tilde{R}$  – скалярная вейлевская кривизна (см. например, [37]), которая отличается от римановой кривизны  $R$ . Вейлевская кривизна  $\tilde{R}$  в случае градиентного вектора Вейля  $A_{\nu} \equiv \frac{\partial\beta_{\nu}}{\beta}$  и интегрируемой геометрии Вейля равна:

$$\tilde{R} = R + 6 \frac{\beta_{\lambda}\beta^{\lambda}}{\beta^2}. \quad (87)$$

С точки зрения геометрии Вейля лагранжиан (86) представляет собой вейлевскую «потенциальную энергию» дилатонного поля  $\beta$ , а вейлевская «ки-

нетическая энергия» поля  $\beta$  содержится в лагранжиане (1) в члене  $\alpha(\beta_{\mu} - C_{\mu}\beta)(\beta^{\mu} - C^{\mu}\beta)$ .

Заметим, что если выбрать калибровку  $\beta^2(x) = \left| \frac{\tilde{R}}{4\lambda} \right|$  при наличии произвольного (не градиентного) вектора  $C^{\alpha}$  в выражении (10), то при параметре  $\alpha = 0$  лагранжиан (1) принимает вид

$$L_{\beta} = \xi \tilde{R}^2 + \omega^2 E^{\mu\nu} E_{\mu\nu} \quad (88)$$

с параметром  $\xi$ , зависящим от  $\lambda$ . Он похож на квадратичный лагранжиан Вейля ([38, 39]):

$$L = \tilde{R}^2 + \omega^2 F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (89)$$

с ненулевой напряженностью поля вектора Вейля  $F_{\mu\nu} = \partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu}$ .

Величина  $\lambda$  в (86) должна быть постоянной, чтобы действие на основе лагранжиана (1) было вейлевски инвариантным. Тем не менее есть способ обойти это требование. Он изложен, например, в [2, 4, 7]. Для этого надо ввести второе скалярное поле  $m_{\beta}(x)$ , преобразующееся так же, как и  $\beta$ :

$$\beta(x) \sim \Omega^{-1}(x), \quad m_{\beta}(x) \sim \Omega^{-1}(x), \quad (90)$$

но не совпадающее с  $\beta$ . Тогда функция  $\frac{\beta(x)}{m_{\beta}(x)}$  будет инвариантом при вейлевских преобразованиях, произвольным образом зависящих от точки  $x$ .

Таким образом, введя зависимость  $\tilde{\lambda} = h \left( \frac{\beta(x)}{m_{\beta}(x)} \right)$

в лагранжиан (1) с произвольной функцией  $h$ , мы получаем переменную функцию  $h \left( \frac{\beta(x)}{m_{\beta}(x)} \right) \beta^4$ , не нарушающую локальной конформной инвариантности действия. При этом уравнения движения скалярного поля  $\beta$  должны быть модифицированы с учетом наличия дополнительного поля  $m_{\beta}(x)$ .

Вещественное поле Дирака  $\beta$  (дилатон) рассматривается здесь как классическое (с-поле). Дело в том, что калибровочная функция  $\beta$  входит в преобразование геометрической связности Вейля и в кривизну Вейля. Кроме того, ее смысл заключается в том, что  $\beta$  – это переменная величина параметра связи гравитации и материи, которая при значении  $\beta = 1$  соответствует постоянной гравитации Ньютона  $G_N$ :

$$G_\beta = \frac{G_N}{\beta^2}. \quad (91)$$

Квантовать поле  $\beta$  – это означает квантовать параметр связи гравитации и материи  $G_\beta$ . Калибровочная вещественная функция  $\beta$  по определению положительна, и значение  $\beta = 0$  ей присвоить нельзя, поэтому вакуум для поля  $\beta$  не определен. В квазиклассическом приближении  $\beta$  должна оставаться неквантованной. Квантование метрики здесь не рассматривается.

Если в лагранжиан дополнительно ввести другую скалярную функцию  $\phi$ , которая может принимать значение нуль, и рассматривать ее как скалярное поле, то тогда  $\phi$  можно квантовать, введя соответствующее вакуумное состояние  $|0\rangle$ .

Рассмотрим далее в качестве примера конформно-инвариантное действие с дираковским полем  $\beta$  и скалярным безмассовым полем  $\phi$ :

$$S_{\beta\phi} = -\frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ R\beta^2 + 6g^{\mu\nu} \beta_{,\mu} \beta_{,\nu} + 2\lambda\beta^4 + 2\lambda_\phi \phi^4 + \xi g^{\mu\nu} \left( \partial_\mu \phi - \frac{\beta_{,\mu}}{\beta} \phi \right) \left( \partial_\nu \phi - \frac{\beta_{,\nu}}{\beta} \phi \right) \right\}. \quad (92)$$

Мы могли бы ввести и неминимальную связь поля  $\phi$  с гравитацией в (92), например, добавив член  $-R\phi^2 - 6g^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu}$  к лагранжиану действия (92), но в данном случае это не существенно. Параметр  $\xi$  должен выбираться так, чтобы при этом кинетическая энергия поля  $\phi$  входила с правильным знаком, т. е.  $\xi < 0$ .

Есть два основных типа квантовых поправок, известных в литературе, которые вносят вклад в тензор энергии-импульса скалярного поля.

#### 4.1. Первый тип квантовых поправок

Первый вид квантовых поправок связан с фактом, что с учетом флуктуаций меняется член  $2\lambda_\phi (\phi \phi^*)^2$  в действии (92) ([40, 41]. Действительно, будем трактовать поле  $\phi$  квантовым образом, введя

$$\phi = \phi_c + \Delta\phi, \quad (93)$$

где  $\phi_c$  – классическая часть поля,  $\Delta\phi$  – квантовые флуктуации.

В общем виде в однопетлевом вычислении в псевдоевклидовом пространстве (и пренебрегая влиянием на метрику) перенормированное значение  $2\lambda_\phi \phi^4$  можно записать так [40, 41]:

$$2\lambda_\phi \phi^4 \rightarrow 2\lambda_c \phi_c^4 + 2\lambda_q \phi_c^4 \ln \frac{\phi_c^2}{M^2}, \quad (94)$$

где величина введенного параметра массы  $M(x)$  не фиксирована. Если принять величину  $M$  локальной и меняющейся как  $\beta(x)$  при вейлевских преобразованиях, т. е. по соотношению (90), то выражение (94) будет конформно-инвариантным. Такой подход с переменной величиной  $M(x)$  здесь приемлем, поскольку «обрезание» в (94) при квантовополевых вычислениях делается при достаточно большой, но произвольной (не фиксированной) массе  $M$ .

Более конкретно (см. [41]) в однопетлевом приближении в псевдоевклидовом пространстве

$$2\lambda_\phi \phi^4 \rightarrow 2\lambda_\phi \phi^4 + \frac{18\lambda_\phi^2}{\pi^2} \phi^4 \left( \ln \frac{\phi}{M} - \frac{25}{12} \right). \quad (95)$$

В [8] с учетом бесконечного числа петлевых вкладов показано, что

$$2\lambda_\phi \phi^4 \rightarrow 2\lambda_\phi \phi^4 \frac{1}{1 - \frac{9\lambda_\phi}{\pi^2} \ln \left( \frac{\phi}{M} \right)}. \quad (96)$$

Если принять, что  $M \sim \Omega^{-1}(x)$ , то вейлевская инвариантность не нарушается при перенормировке (95), (96).

Таким образом, в классическом действии (92) вместо  $2\lambda_\phi \phi^4$ , где  $\lambda_\phi = \text{const}$ , можно использовать перенормированную конформно-инвариантную величину  $2(\lambda_\phi)_{\text{gen}} \phi^4$ , где  $(\lambda_\phi)_{\text{gen}}$  – функция от вейлевского инварианта  $h(x) = \frac{\phi(x)}{M(x)}$ , выбранного

из квантовых соображений и не меняющегося в точке  $x$  при преобразованиях (90). При этом помимо  $\phi(x)$  появляется дополнительное конформно-инвариантное поле  $M(x)$ . Можно попытаться отразить этот факт, модифицировав лагранжиан (92), но мы не будем здесь это делать.

Итак, квантовую перенормировку потенциала  $2\lambda_\phi \phi^4$  не обязательно трактовать как нарушение конформной инвариантности лагранжиана (92). Перенормировка приводит к тому, что  $\lambda_\phi$  становится не постоянной, а вейлевски инвариантной функцией  $(\lambda_\phi)_{\text{gen}} = h(x)$ . Основной вывод здесь такой, что квантовая перенормировка параметра  $\lambda_\phi$  не приводит непосредственно к фиксации

калибровки функции Дирака  $\beta$  в плоском пространстве.

В искривленном пространстве-времени с учетом потенциала скалярного поля  $\phi$  вида

$$U(\phi) = 2\lambda_\phi \phi^4 - \zeta R \phi^2 \quad (97)$$

были проведены вычисления перенормированной величины  $\langle U(\phi) \rangle_{\text{ren}}$  Элизалде и Одинцовым [42]. Авторы [42] получили такой результат (в наших обозначениях):

$$2\lambda_\phi \phi^4 \rightarrow 2\lambda_\phi \phi^4 \frac{1}{1 - \frac{9\lambda_\phi}{\pi^2} \ln\left(\frac{\phi}{M}\right)} + R\phi^2 \left[ 1 + (\zeta - 1) \frac{1}{\left(1 - \frac{9\lambda_\phi}{\pi^2} \ln\left\{\frac{\phi}{M}\right\}\right)^{\frac{1}{3}}} \right]. \quad (98)$$

Для лагранжиана (92) параметр  $\zeta = 0$ .

#### 4.2. Второй тип квантовых поправок

В сильном гравитационном поле происходит поляризация вакуума и след тензора энергии-импульса квантованного поля  $\phi$  получает квантовые добавки (см., например, [22] и [24]). Таким образом, с учетом квантовых поправок конформная инвариантность классического действия (92) может нарушаться.

Рассмотрим случай, когда имеются флуктуации нулевого вещественного скалярного поля  $\phi$ . Лагранжиан действия (92)

$$L_{\beta\phi} = R\beta^2 + 6g^{\mu\nu}\beta_\mu\beta_\nu + 2\lambda\beta^4 + 2\lambda_\phi\phi^4 + \xi g^{\mu\nu} \left( \partial_\mu\phi - \frac{\beta_\mu}{\beta}\phi \right) \left( \partial_\nu\phi - \frac{\beta_\nu}{\beta}\phi \right) \quad (99)$$

можно переписать так:

$$L_{\beta\phi} = R\beta^2 + 6g^{\mu\nu}\beta_\mu\beta_\nu + 2\lambda\beta^4 + 2\lambda_\phi \left( \frac{\phi}{\beta} \right)^4 \beta^4 + \xi g^{\mu\nu} \left( \frac{\phi}{\beta} \right)_\mu \left( \frac{\phi}{\beta} \right)_\nu \beta^2, \quad (100)$$

или так

$$L_{\beta\psi} = R\beta^2 + 6g^{\mu\nu}\beta_\mu\beta_\nu + 2\lambda\beta^4 + 2\lambda_\phi\psi^4\beta^4 + \xi g^{\mu\nu}\psi_\mu\psi_\nu\beta^2. \quad (101)$$

Величина  $\psi(x) = \frac{\phi(x)}{\beta(x)}$  является вейлевским инвариантом. При вариации действия (92) по метрике  $\delta g^{\mu\nu}$  получаем уравнения:

$$\beta^2 \left( R_\mu^\nu - \frac{1}{2} \delta_\mu^\nu R \right) = \beta^2 T^{(\beta)\nu}_\mu + \delta_\mu^\nu \lambda \beta^4(x) + \beta^2 T^{(\psi)\nu}_\mu, \quad (102)$$

$$T^{(\beta)\nu}_\mu = \frac{1}{\beta^2} \delta_\mu^\nu \beta_\alpha \beta^\alpha - \frac{4}{\beta^2} \beta_\mu \beta^\nu - \frac{2}{\beta^2} \delta_\mu^\nu \beta_\alpha \beta^\alpha + \frac{2}{\beta^2} \beta \beta_\mu{}^{;\nu}, \quad (103)$$

$$S_\psi = -\frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \beta^2 \xi g^{\mu\nu} \psi_\mu \psi_\nu, \quad (104)$$

$$\begin{aligned} \beta^2 T^{(\psi)}_{\mu\nu} &= 8\pi \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_\psi}{\delta g^{\mu\nu}} = \\ &= -\xi \beta^2 \psi_\mu \psi_\nu + \xi \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \beta^2 \psi^\lambda \psi_\lambda + \lambda_\phi \beta^4 \psi^4. \end{aligned} \quad (105)$$

Пусть  $\psi = 0$ . Тем не менее, в уравнении (102) присутствуют добавки за счет квантовых флуктуаций поля  $\psi$ . Вакуумное состояние  $|0\rangle$  следует взять для поля  $\beta\psi$ , и рассматривать перенормированный тензор энергии-импульса  $\beta^2 T^{(\psi)\nu}_\mu$ , считая величину  $\beta$  классической:

$$\begin{aligned} \beta^2 \left( R_\mu^\nu - \frac{1}{2} \delta_\mu^\nu R \right) &= \\ &= \beta^2 T^{(\beta)\nu}_\mu + \delta_\mu^\nu \lambda \beta^4(x) + \langle 0 | \beta^2 T^{(\psi)\nu}_\mu | 0 \rangle_{\text{ren}}. \end{aligned} \quad (106)$$

Перенормированный тензор  $\langle 0 | \beta^2 T^{(\psi)\nu}_\mu | 0 \rangle$  имеет ненулевые члены за счет квантовых поправок. Бесследовая часть перенормированного тензора энергии-импульса  $\langle 0 | \beta^2 T^{(\psi)\nu}_\mu | 0 \rangle_{\text{ren}}$  может быть интерпретирована как относящаяся к безмассовой материи с уравнением состояния  $\varepsilon = 3p$ . Более существенным является значение следа  $\langle 0 | \beta^2 T^{(\psi)\mu}_\mu | 0 \rangle_{\text{ren}}$ . Этот след может нарушать конформную инвариантность уравнений, задавая тем самым калибровку функции  $\beta$ . Значение следа (106) записывается как:

$$-\beta^2 R = 4\lambda\beta^4 - 6\beta\beta^\lambda_{;\lambda} + \langle \lambda_\phi \beta^4 \psi^4 \rangle_{\text{ren}} - \xi \langle T^{(0)\lambda}_\lambda \rangle_{\text{ren}}, \quad (107)$$

где

$$T^{(0)}_{\mu\nu} = \beta^2 \psi_\mu \psi_\nu - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \beta^2 \psi^\lambda \psi_\lambda. \quad (108)$$

Перенормированное значение  $2\lambda_\phi\psi^4\beta^4$  рассмотрено в предыдущем разделе, см. формулу (96). Выражение для аномального следа известно при  $\beta=1$  (см. [22], с. 93):

$$\frac{\langle T^{(0)\lambda}_\lambda \rangle_{\text{ren}}}{8\pi} = \frac{1}{2880\pi^2} \left( eC_{\alpha\beta\gamma\delta}C^{\alpha\beta\gamma\delta} + b \left( R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta} - \frac{1}{3}R^2 \right) + c\Box R + dR^2 \right), \quad (109)$$

где  $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$  – тензор Вейля. Для тензора (108) коэффициенты  $e=-1$ ,  $b=-1$ ,  $c=6$ ,  $d=-\frac{5}{2}$  (см. [22]).

Далее рассмотрим только метрику FLRW. В силу высокой симметрии этой метрики тензор Вейля равен нулю:  $C_{\alpha\beta\gamma\delta}=0$ .

Тогда выражение (107) можно переписать в виде:

$$\frac{\beta_{;\lambda}^\lambda}{\beta} = \frac{R}{6} + \frac{2}{3}\lambda\beta^2 + \frac{2}{3} \frac{\lambda_\phi\beta^2 \cdot \psi^4}{1 - \frac{9}{\pi^2}\lambda_\phi \ln \frac{\psi}{M_0}} + \frac{R\psi^2}{6} \left[ 1 - \frac{1}{\left( 1 - \frac{9\lambda_\phi}{\pi^2} \ln \left\{ \frac{\psi}{M_0} \right\} \right)^3} \right] - \frac{\xi}{2160\pi\beta^2} \left( b \left( R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta} - \frac{1}{3}R^2 \right) + c\Box R + dR^2 \right). \quad (110)$$

Здесь  $M_0 = \text{const}$ . Вклады, связанные с функцией  $\psi$ , нулевые, так как для вакуума полагаем  $\psi=0$ . Умножаем выражение (110) на  $\sqrt{\frac{3}{2}|\lambda|}a^3\beta$  и получаем в метрике, зависящей от конформного времени  $\eta$ :

$$\dot{f} + kf - \text{sign}(\lambda)f^3 = \sqrt{\frac{3}{2}|\lambda|} \frac{a^3}{\beta} \frac{\xi}{2160\pi} \left( b \left( R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta} - \frac{1}{3}R^2 \right) + c\Box R + dR^2 \right). \quad (111)$$

В правой части выражения (111) по сравнению с уравнением (73) появились аномальные квантовые добавки, которые нарушают конформность исходного уравнения (73). Конформность уравнения (110) сохранялась бы, если бы выполнялось равенство

$$b \left( R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta} - \frac{1}{3}R^2 \right) + c\Box R + dR^2 = \frac{\text{const}}{a(\eta)^4} \sim \beta^4. \quad (112)$$

Возьмем зависимость  $a(\eta) = \frac{f(\eta)}{\beta(\eta)} \sqrt{\frac{3}{2}|\lambda|}$  и подставим ее в правую часть выражения (111). В качестве  $f(\eta)$  возьмем вакуумные решения (77)–(80). Рассмотрим значения функции:

$$F(\beta, \beta^{(1)}, \dots, \beta^{(4)}) = b \left( R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta} - \frac{1}{3}R^2 \right) + c\Box R + dR^2. \quad (113)$$

Здесь мы обозначили

$$\beta^{(n)} \equiv \frac{d^n \beta(\eta)}{d\eta^n}. \quad (114)$$

Для краткости выпишем только первые два члена в функции  $F$ .

Случай  $k=-1$ ,  $\lambda > 0$ :

$$F = -\frac{4}{3}(b-12d)\lambda^2\beta^4 + \lambda^2 \frac{8}{3}(b-3c-12d) \times \text{sh}(\eta)\text{ch}(\eta)\beta^3 \frac{d\beta}{d\eta} + \dots$$

Случай  $k=1$ ,  $\lambda > 0$ :

$$F = -\frac{4}{3}(b-12d)\lambda^2\beta^4 - \lambda^2 \frac{8}{3}(b-3c-12d) \times \sin\eta\cos\eta\beta^3 \frac{d\beta}{d\eta} + \dots$$

Случай  $k=0$ ,  $\lambda > 0$ :

$$F = -\frac{4}{3}(b-12d)\lambda^2\beta^4 - \lambda^2 \frac{8}{3}(b-3c-12d)\eta\beta^3 \frac{d\beta}{d\eta} + \dots$$

Видно, что первый член в функции  $F$ , не содержащий производных, приводит к перенормировке параметра  $\lambda$  в выражении (110):

$$\frac{2}{3}\lambda\beta^2 \rightarrow \frac{2}{3}\lambda\beta^2 + \frac{\xi}{2160\pi} \frac{4}{3}(b-12d)\lambda^2\beta^2. \quad (115)$$

Следующие члены в функции  $F$  зависят от производных функции  $\beta$  вплоть до 4-го порядка включительно. Эти члены явным образом приводят к нарушению конформности уравнения (111). Тем не менее мы можем обнулить квантовые добавки, содержащие производные функции  $\beta$  по конформному времени  $\eta$ . Для этого надо положить  $\beta(\eta) = \text{const}$ , фиксируя тем самым калибровку  $\beta$ . Для согласия с ОТО полагаем  $\beta=1$ .

Рассмотрим для примера плоский случай  $k=0$ . Для него подробно выпишем функцию  $F$ , взяв следующие значения параметров в (113):  $b=-1$ ,  $c=6$ ,  $d=-\frac{5}{2}$ . Тогда

$$F = -\frac{2\lambda^2}{3}58\beta^4 - \frac{2\lambda^2}{3}(44\beta^3\beta^{(1)}\eta + 104\beta^2\beta^{(2)}\eta^2 + 44\beta\beta^{(3)}\eta^3 + 58\beta^{(4)}\eta^4 - (94\beta^{(2)}\eta^2 - 16\beta\beta^{(1)}\eta + 22\beta^2)\beta^2\beta^{(2)}\eta^2 + 33\beta^2\beta^{(2)}\beta^{(2)}\eta^4 + 24\beta^2\beta^{(3)}\beta^{(1)}\eta^4 - 6\beta^3\beta^{(4)}\eta^4). \quad (116)$$

При  $\beta=1$  получаем значение  $F = -\frac{2\lambda^2}{3}58\beta^4$ .

Итак, уравнение (111) для масштабного фактора  $a(\eta)$  принимает вид:

$$\ddot{f} + kf - \text{sign}(\lambda_{\text{ren}})f^3 = 0, \quad (117)$$

где

$$\lambda_{\text{ren}} = \lambda + \frac{\xi}{1080\pi}(b-12d)\lambda^2, \quad (118)$$

$$f(\eta) = a(\eta)\sqrt{\frac{2|\lambda|}{3}}. \quad (119)$$

Уравнение (117) описывает эволюцию ранней Вселенной с учетом нарушенной конформной симметрии ( $\beta = 1$ ).

Так для плоского случая в синхронном времени  $t$  получаем экспоненциальное решение:

$$a(t) = a_0 \exp\left(\sqrt{\frac{\lambda_{\text{ren}}}{3}}(t-t_0)\right). \quad (120)$$

Мы фиксировали калибровку функции Дирака  $\beta = 1$  после учета квантовых поправок к следу тензора энергии-импульса поля  $\phi$ , входящего в лагранжиан (92). Это привело к исчезновению членов в перенормированном тензоре энергии-импульса, зависящих от производных масштабного фактора  $a(\eta)$ . Вид уравнения (73) для функции  $f(\eta)$  не изменился, см. выражение (117). Если бы мы фиксировали калибровку  $\beta = 1$  до учета квантовых поправок, все члены с производными  $a(\eta)$  остались бы. Тогда получился бы стандартный случай, рассмотренный, например, в [43]. В принципе, можно считать, что  $\beta(\eta) \approx 1$ , задав слабую переменность  $\beta$  для описания небольшой вариации параметра гравитации  $G_\beta$  (но так, чтобы она не противоречила астрономическим данным).

## 5. Об общем виде конформного лагранжиана

В данной публикации фактически мы использовали только часть модифицированного лагранжиана Вейля–Дирака (1), которая представлена выражением (22).

Более общий конформный лагранжиан нашей модели, который включает и лагранжиан Вейля–Дирака, можно записать так:

$$L_{\beta\phi} = \beta^2 R + 6\beta_\lambda \beta^\lambda + \alpha g^{\mu\nu} (\beta_\mu - C_\mu \beta) (\beta_\mu - C_\mu \cdot \beta) + \mu (\phi\phi^* - \rho\beta^2)^2 + 2\lambda\beta^4 + 2\lambda_\phi (\phi\phi^*)^2 + \xi g^{\mu\nu} (\partial_\mu \phi - (C_\mu + iB_\mu)\phi)^* (\partial_\nu \phi - (C_\nu + iB_\nu)\phi) + \delta^2 H^{\mu\nu} H_{\mu\nu} + \omega^2 E^{\mu\nu} E_{\mu\nu} \quad (121)$$

где введена производная комплексного скалярного поля  $\phi$ , которая одновременно вейлевски инвариантна и калибровочно инвариантна:

$$\hat{\partial}_\mu \phi = \partial_\mu \phi - (C_\mu + iB_\mu)\phi. \quad (122)$$

Аффинная связность записывается в рамках интегрируемой геометрии Вейля, где вектор Вейля градиентный и равен  $\frac{\partial\beta_\nu}{\beta}$ . Напряженности векторных полей  $C$  и  $B$ , вообще говоря, ненулевые:

$$E_{\mu\nu} = \partial_\mu C_\nu - \partial_\nu C_\mu, \quad H_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu. \quad (123)$$

Предлагаемый нами лагранжиан (121) конформно-инвариантен. Здесь вектор  $B^\mu$  – электромагнитный потенциал, а вектор  $C^\mu$  – специфический вектор, связанный с вейлевской геометрией исходного многообразия. Отметим, что вектор  $C$ , хотя и преобразуется при локальных конформных преобразованиях как вектор Вейля:

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2(x)g_{\mu\nu}, \\ C_\mu \rightarrow \tilde{C}_\mu = C_\mu - \frac{\partial \ln \Omega(x)}{\partial x^\mu}, \quad (124)$$

но не входит в вейлевскую связность. Взаимодействует  $C^\mu$  только со скалярным полем  $\phi$  на основе выражения (122). Такой лагранжиан позволяет описать и стадию инфляции после нарушения локальной конформной симметрии. Этот лагранжиан можно усложнить, включив в него члены, относящиеся к стандартной модели, подобно тому, как сделано в [1,3].

После фиксирования калибровки  $\beta = 1$  в лагранжиане (121) осталась только одна особенность от прошлой конформной симметрии, а именно наличие вектора Вейля  $C^\mu$ . Это векторное поле может ассоциироваться с темной материей, и его квантование приводит к «темным вейлевским мезонам». Но это не вектор Вейля  $A^\mu$ , обсуждавшийся в [37], и используемый в [1, 11, 16, 20] в связности Вейля, который приводит к парадоксальному «эффекту

вторых часов». Влияние вектора  $C^\mu$  на космологические решения мы обсудим в других публикациях.

### Заключение

В данной работе в рамках метрик Фридмана–Леметра–Робертсона–Уокера мы рассмотрели конформно-инвариантные решения на основе лагранжиана теории гравитации Вейля–Дирака с вещественным скалярным полем  $\beta$  [11].

Поскольку конформная инвариантность в реальном мире нарушена, то возникает вопрос, как описать это нарушение. Многие авторы, начиная с П. А. М. Дирака, калибруют функцию  $\beta$ , отвечающую за конформную инвариантность, следующим образом. Выбирается некоторое феноменологическое значение функции  $\beta$ , которое задает переменный параметр тяготения Ньютона [5, 11, 27], используется для объяснения ротационных кривых в галактиках [19], описывает рождение материи в космологии [15, 16] и т. п. Это – чисто феноменологический подход, когда калибровка задается «руками» для описания определенных космологических и астрономических фактов. Вообще желательно было бы иметь и более общий принцип фиксации калибровки  $\beta$  типа минимизации некоторого функционала от  $\beta$ , который давал бы конкретное значение этой функции. Такой функционал в рамках самой классической конформной гравитации не может быть найден.

Мы рассмотрели влияние вакуумных квантовых поправок для тензора энергии-импульса на классические уравнения Эйнштейна с учетом дополнительного скалярного поля  $\phi$ . Эти поправки нарушили конформность уравнений гравитации. От квантовых поправок, зависящих от производных масштабного фактора  $a$ , мы избавились, фиксируя калибровку  $\beta = 1$ . Эта калибровка минимизировала (обнулила) такого типа квантовые поправки в функционале (113), приведя к уравнениям ОТО. Но космологический параметр  $\lambda$  оказался при этом перенормирован. Отметим, что фиксирование калибровки функции Дирака  $\beta$  произошло после учета квантовых поправок.

Итак, естественным способом нарушения вейлевской инвариантности лагранжиана типа (121), на наш взгляд, является учет квантовых вакуумных поправок для тензора энергии-импульса различных полей, входящих в лагранжиан. Мы ограничились простейшим кинетическим членом для скалярного поля  $\phi$  в лагранжиане (92), но могли

бы рассмотреть и потенциальные члены, а также векторные поля, как это сделано в [43]. В данном случае это не существенно, просто численные значения параметров  $a, b, c, d$  в выражениях (111) и (113) были бы другими.

Отметим, что в выражении (118) перенормированное значение  $\lambda_{\text{ren}}$  может быть достаточно малым, если  $\frac{\xi\lambda}{1080\pi}(b-12d) \approx -1$ .

### Список литературы

1. Marco de Cesare, John W. Moffat, and Mairi Sakellariadou. *Local conformal symmetry in non-Riemannian geometry and the origin of physical scales* // arXiv:1612.08066v2 [hep-th], 3 Sep 2017.
2. Вергелес С. Н. *Лекции по теории гравитации*. М.: МФТИ, 2001.
3. Drechsler W., Tann H. *Broken Weyl invariance and the origin of mass* // Foundations of Physics. 1999. Vol. 29(7). P. 1023–1064.
4. Renata Kallosh and Andrei Linde. *Universality class in conformal inflation* // arXiv: 1306.5220v2 [hep-th], 25 Jun 2013.
5. Станюкович К. П., Мельников В. Н. *Гидродинамика, поля и константы в теории гравитации*. М.: Энергоатомиздат, 1983.
6. Чудновский Е. М. *Спонтанное нарушение конформной инвариантности и механизм Хиггса* // ТМФ, 1978. Т. 35, № 3. С. 2980–400.
7. Israel Quiros. *Scale invariance and broken electroweak symmetry may coexist together* // ArXiv:1312.1018v3 [gr-qc], 3 Jan 2014.
8. Karin Dirksen. *Unifying Conformal Gravity and the Standard Model of particle physics* // A thesis for the degree of Master of Sciences in the Rijksuniversiteit Groningen. February 14, 2017.
9. Линде А. Д. *Физика элементарных частиц и инфляционная космология*. М.: Наука, 1989.
10. Бурдюжа В. В. *Темные компоненты Вселенной* // УФН. 2010. Т. 180, N4. С. 439–444.
11. Dirac, P.A.M. *Long range forces and broken symmetries* // Proceedings of Royal Society London A. 1973, № 333. P. 403–418.
12. Лукаш В. Н., Михеева Е. В. *Физическая космология*. М.: Физматлит, 2010.
13. Pucheu M. L., Alves Junior F. A. P., Barreto A. B., Romero C. *Cosmological models in Weyl geometrical scalar-tensor theory* // arXiv:1602.06966v2 [gr-qc] 5 Jul 2016.

14. Meir Shimon. *Cosmology in Conformal Dilatonic Gravity* // arXiv:1702.08472v3 [astro-ph.CO] 20 Apr 2017.
15. Israelit, Mark; Rosen, Nathan. *Cosmic dark matter and Dirac gauge function*// Foundations of Physics. 1995. N25. P. 763–777.
16. Mark Israelit. *A Weyl-Dirac cosmological model with DM and DE* // ArXiv: 1008.0767 [gr-qc]. 2009.
17. Бабурова О. В., Фролов Б. Н. *Математические основы современной теории гравитации*: Монография. М.: Прометей, 2012.
18. Erhard Sholz. *An extended frame for cosmology by integrable Weyl geometry* // arXiv [astro-ph]: 0409635v1 27 Sep 2004.
19. Mirabotalebi S., Jalalzadeh S., M. Sadegh Movahedand H. R. Sepangi. *Weyl-Dirac theory predictions on galactic scales* // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2008. Vol. 385, Issue 2. P. 986–994. ArXiv: 0504117v3 [gr-qc].
20. Gregorash D., Parini G. *Weyl-Dirac theory and Superconductivity* // Nuovo Cimento. 1981. Vol. 63B. N2. P. 487–509.
21. Катанаев М. О. *Лекции по общей теории относительности* / Математический институт имени В. А. Стеклова, 31 мая 2018 г. Электронный препринт. С. 1–215.
22. Birrell N. D. and Davies P. C. W. *Quantum Fields in Curved Space*. Cambridge Monogr. Math. Phys., 1982. Рус. перев.: Биррелл Н., Девис П. *Квантованные поля в искривленном пространстве-времени*. М.: Мир, 1984.
23. Penrose R. *Zero rest-mass fields including gravitation: asymptotic behavior* // Proceedings of Royal Society London. 1965. Ser A 284. P. 159–203.
24. Гриб А. А., Мамаев С. Г., Мостепаненко В. М. *Квантовые эффекты в интенсивных внешних полях*. М.: Энергоатомиздат, 1988.
25. Enrique Alvarez, Sergio González-Martín and Mario Herrero-Valea. *Some Cosmological Consequences of Weyl Invariance* // arXiv:1501.07819v2 [hep-th], 23 Feb 2015.
26. Николаенко В. М., Станюкович К. П., Шикин Г. Н. *Конформная инвариантность скалярного бозона в теориях типа модели Вайнберга–Салама* // ТМФ. 1981. Т. 46, № 3, С. 394–401.
27. Canuto V., Hsieh S. H. and Adams P. J. *Scale-Covariant Theory of Gravitation and Astrophysical Applications* // Physical Review Letters. 1977. Vol. 39, N8. 22. P. 429–432.
28. Babourova O. V. and Frolov B. N. *Dark energy, Dirac’s scalar field and the cosmological constant problem* // arXiv:1112.4449v1 [gr-qc], 19 Dec 2011.
29. Babourova O. V., Frolov B. N. and Kostkin R. S. *Dirac’s scalar field as an effective component of the dark energy and an evolution of the cosmological “constant”* // arXiv:1102.2901v1 [gr-qc], 14 Feb 2011.
30. Ichiro Oda. *Quantum Theory of Weyl Invariant Scalar-tensor Gravity* // arXiv:2204.11200v1 [hep-th], 24 Apr 2022.
31. Гриб А. А., Мостепаненко В. М., Фролов В. М. *Спонтанное нарушение калибровочной симметрии в нестационарной изотропной метрике* // ТМФ. 1977, Т33, № 1. С. 42–53.
32. Пенроуз Р. *Циклы времени*. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2014.
33. Зельдович Я. Б., Новиков И. Д. *Строение и эволюция Вселенной*. М.: Наука, 1975.
34. Chiara Caprini. *Astrophysical Gravitational Waves in Conformal Gravity* // arXiv: 1804.01876v2 [gr-qc], 23 Apr 2018.
35. Faria F. F. *Gravitational waves in massive conformal gravity* // arXiv:2007.03637v1 [gr-qc], 7 Jul 2020.
36. Liu Liao. *On the Gravitational Wave in de Sitter Spacetime* // arXiv:gr-qc/0411122v1, 25 Nov 2004.
37. Седов С. Ю. *Вейлевская гравитация и вейлоны* // ВАНТ. Сер. Теор. и прикл. физика. 2019. Вып. 4. С. 14–24.
38. Weyl, Hermann. *Space – Time – Matter*. New York: Dover, 1952.
39. Sanomiya T. A. T., Lobo I. P., Formiga J. B., Dahia F. and Romero C. *An Invariant Approach to Weyl’s unified field theory* // arXiv:2002.00285v1 [gr-qc], 1 Feb 2020.
40. Лапчинский В. Г., Рубаков В. А. *Спонтанное нарушение симметрии в открытой Вселенной Фридмана* // ТМФ. 1980. Т. 42, № 1. С. 37–44.
41. Weinberg E. J. *Radiative corrections as the origin of spontaneous symmetry breaking. A Ph. D. Thesis on Physics. Harvard University, Cambridge, Massachusetts. May 1973* // ArXiv:[hep-th] 0507214v1, 21 Jul 2005.
42. Elizalde E. and Odintsov S. D. *Renormalization group improved effective potential for gauge theories in curved space-time* // Phys. Lett. 1993. B303. P. 240–248; arXiv:[hep-th] 9302074; Russ. Phys. J. Vol. 37, N25. 1994.
43. Мамаев С. Г., Мостепаненко В. М., Шелюто В. А. *Метод размерной регуляризации для скалярного и векторного полей в однородных изотропных пространствах* // ТМФ, 1985. Т. 63, N. 1, С. 64–77.

<b>Седов С. Ю.</b> О векторе Вейля и вейлевских геодезических . . . . .	3	<b>Sedov S. Yu.</b> On Weyl Vector and Weyl geodesics. . . . .	3
<b>Седов С. Ю.</b> Конформные лагранжианы в гравитации Вейля . . . . .	13	<b>Sedov S. Yu.</b> Conformal Lagrangians in Weyl Gravitation . . . . .	13
<b>Надыкто Б. А., Надыкто А. Б., Ломайкин А. И.</b> Уравнение состояния стишовита до 1000 ГПа и более 10000 К, фазовая стабильность стишовита и описание при высоких давлениях ударных адиабат полиморфных фаз SiO <sub>2</sub> как ударных адиабат пористого стишовита . . . . .	29	<b>Nadykto B. A., Nadykto A. B., Lomaikin A. I.</b> Equation of state of stishovite up to 1000 GPa and > 10000 K, stability of its electronic phase up to 500 GPa and a description of Hugoniot of various polymorphs of SiO <sub>2</sub> at high pressures as Hugoniot of porous stishovite . . . . .	29
<b>Седов С. Ю.</b> О гравитации Вейля–Дирака и космологии Фридмана . . . . .	40	<b>Sedov S. Yu.</b> Weyl-Dirac gravitation and Friedmann’s cosmology . . . . .	40

Редактор *Н. П. Мишкина*

Компьютерная подготовка оригинала-макета *Н. В. Мишкина*

---

Подписано в печать 18.11.2022 Формат 60 × 84 1/8

Усл. печ. л. ~7,0 Уч.-изд. л. ~6,0

Тираж 1000 экз. Зак. тип. 2150-2022 4 статьи Индекс 72246

---

Отпечатано в ИПЦ ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ»  
607188, г. Саров Нижегородской области,  
ул. Силкина, 23



## ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ

К авторским оригиналам, передаваемым для издания, предъявляются следующие требования:

1. Экземпляр статьи должен быть отпечатан на одной стороне листа формата А4 шрифтом Times New Roman 12 пунктов через 2 интервала, левое поле 3 см. Статья сопровождается электронным вариантом текста (шрифт 11 пунктов через 1 интервал) в редакторе Word for Windows версии 2003. Статья должна быть составлена в следующем порядке: УДК; название статьи; инициалы и фамилии авторов; аннотация (не более 10 строк); ключевые слова – все вышеперечисленное на русском и английском языках; текст; список литературы; пронумерованные рисунки и подписи (на отдельном листе); таблицы с нумерационным и тематическим заголовками, каждая таблица на отдельном листе, а в электронном виде представляется отдельным файлом. Кавычки в тексте ставятся при английской раскладке клавиатуры («...»). Название файла должно состоять из фамилии первого автора и краткого названия статьи.

2. Файлы иллюстраций должны быть представлены отдельно – в виде файлов, в формате TIF (.TIF) или JPEG (.JPG) (максимальное качество) с разрешением не менее 250 точек на дюйм (dpi или inch). Название файла иллюстрации должно включать фамилию первого автора и порядковый номер рисунка в статье, например: Dzyuba\_03.tif. Не допускается представлять иллюстрации, созданные с использованием внутренних инструментов Word.

3. При написании статьи следует использовать общепринятые термины, единицы измерения и условные обозначения. Все употребляемые авторами обозначения должны быть определены при их первом появлении в тексте. Необходимо обращать внимание на написание прописных и строчных букв: латинские буквы (*A, I, d, h* и т. п.) набираются курсивом, греческие буквы ( $\alpha, \beta, \gamma$ ), названия функций ( $\sin, \cos, \exp$ ), химических элементов ( $H_2O, H_2C_5OH$ ) и единиц измерения (см, МВт/см<sup>2</sup>, с) – прямым (обычным) шрифтом. Символы ( $\Re, \varnothing, \otimes \in$  и т. п.) следует оговаривать на полях рукописи. Обозначения матриц и векторов набираются полужирным шрифтом прямо.

4. Формулы создаются в виде целых математических выражений в формульном редакторе Word или редакторе Math Type и нумеруются в круглых скобках. Нумерация формул должна быть сплошной по статье (не по разделам), нумерация типа (2а), (2б) нежелательна. Нумеровать следует только те формулы и уравнения, на которые есть ссылка в последующем изложении.

5. Ссылки на литературу в тексте даются по порядку, арабскими цифрами в квадратных скобках. Список литературы составляется в той же последовательности, в которой приводятся ссылки на литературу в тексте. Библиографические ссылки оформляются по следующим правилам:

– для книг: фамилии и инициалы авторов, название книги, место издания, издательство (без кавычек), год (для трудов конференций – город, страна, год);

– для статей в журнале: фамилии и инициалы авторов, название статьи, название журнала (без кавычек), год, том, выпуск, страницы;

– для авторефератов диссертаций: фамилия и инициалы автора, название автореферата диссертации, степень, место защиты (город) и год;

– для препринтов: фамилии и инициалы авторов, название препринта, место издания, год и номер;

– для патентов: вид патентного документа (А.с. или Пат.), его номер, название страны, выдавшей документ, индекс международной классификации изобретения, название издания, в котором опубликована формула изобретения, год и номер издания;

– для электронных источников – полный электронный адрес (включая дату обращения к источнику), позволяющий обратиться к публикации.

При необходимости в заголовке библиографической ссылки на работу четырех и более авторов могут быть указаны имена всех авторов или первых трех с добавлением слов «и др.». В списке литературы инициалы должны стоять после фамилий.

6. В конце текста (перед списком литературы) указывается контактная информация обо всех авторах статьи: фамилия, имя, отчество (полностью), место работы, должность, телефон, e-mail и по желанию автора – домашний почтовый адрес.

Все материалы по статьям должны направляться по адресу:

607188, г. Саров Нижегородской обл., пр. Мира, 37, РФЯЦ-ВНИИЭФ, ИТМФ, в редакцию журнала ВАНТ, сер. «Теоретическая и прикладная физика». Тел. (83 130) 2-77-01. E-mail: [Nadykto@vniief.ru](mailto:Nadykto@vniief.ru)

ISSN 0234-0763

**ВОПРОСЫ АТОМНОЙ НАУКИ И ТЕХНИКИ**

С е р и я :

**ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ ФИЗИКА**

2022. Вып. 1. 1–55