

Обтекание потенциальным течением (магнитным полем или несжимаемой жидкостью) экрана с отверстием

С. Ф. Гаранин, С. Д. Кузнецов, К. О. Власов

Показано, что при обтекании магнитным полем (или для гидродинамической задачи – несжимаемой жидкостью) идеально проводящего (непроницаемого) экрана шириной D со щелью через узкую щель ширины Δ протекает значительный поток, так что, например, среднее по щели шириной $\Delta = 0,01D$ магнитное поле (скорость в гидродинамической задаче) будет в 26 раз больше натекающего. Гидродинамическая задача сформулирована также в осесимметричной постановке, когда экран и отверстие представляют собой круги; для достаточно малого отверстия поток жидкости оказывается пропорциональным диаметру отверстия Δ , а скорость протекания через отверстия с уменьшением Δ увеличивается как $1/\Delta$.

Введение

Во многих задачах магнито- и электростатики и гидродинамических течений несжимаемой жидкости распределения полей и скоростей описываются с помощью уравнения Лапласа, поэтому эти распределения для многих задач могут совпадать. При этом, результаты, полученные, скажем, для той или иной конфигурации магнитостатики, могут переноситься на распределение электрического поля или скорости в гидродинамическом течении. В настоящей работе мы будем интересоваться картинками обтекания экранов с отверстиями и концентрацией полей в этих отверстиях. Из-за эквивалентности формулировок разных задач начнем с задач магнитостатики и затем будем обсуждать, как эти задачи и их результаты будут выглядеть для электростатики и гидродинамики. Поскольку в осесимметричном случае обтекание экрана с отверстием представляет интерес толь-

ко для гидродинамической постановки, то в этом случае мы будем говорить об обтекании экрана жидкостью.

При рассмотрении магнитоэстатических конфигураций мы обращаем внимание на то, что если магнитное поле обтекает идеально-проводящий экран с узкой щелью (рис. 1), в щели происходит значительная концентрация магнитного поля, что в принципе можно использовать для получения сильных магнитных полей [1, 2] и, возможно, исследований, использующих такие магнитные поля [3]. Такая концентрация поля происходит благодаря тому, что в этом случае экран разбивается на два проводника и условие отсутствия полного тока по каждому из них приводит к тому, что через щель должен протекать значительный магнитный поток. Результаты, полученные для конфигурации магнитного поля в плоском случае, легко переносятся на потенциальную задачу для электрического поля, в которой вместо магнитного поля имеется электрическое, направленное перпендикулярно магнитному, представленному на рис. 1, б, т. е. в плоскости рис. 1, б, параллельно экрану, и на гидродинамическую задачу для течения несжимаемой жидкости. При этом электрическое поле в электростатической задаче и скорость течения жидкости в гидродинамической задаче будут концентрироваться в щели по тому же закону, что и магнитное поле в магнитной.

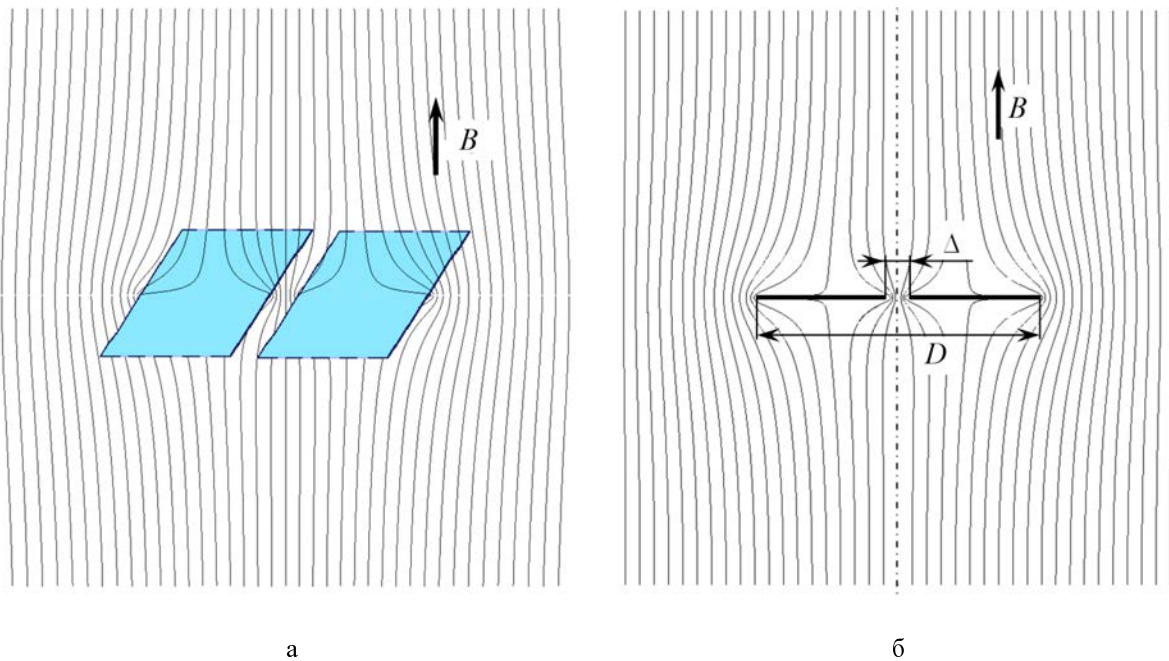


Рис. 1. Картина магнитных силовых линий для экрана с щелью: а – трехмерная изометрия для плоского экрана, б – двумерная картина

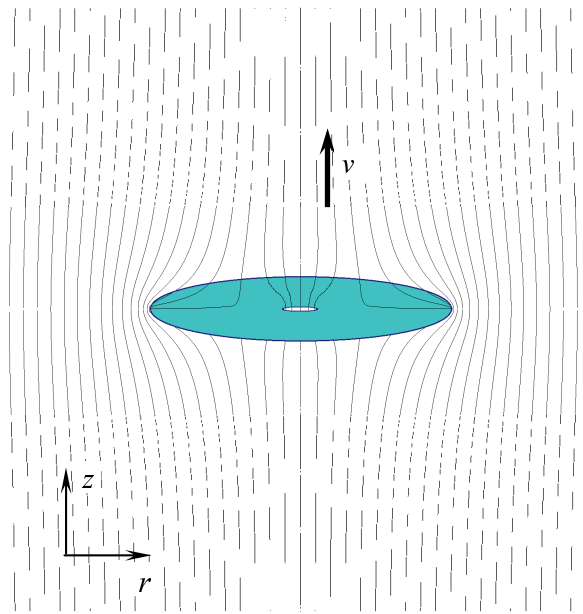


Рис. 2. Картина линий тока в осесимметричной задаче

Надо сказать, что гидродинамическую задачу об обтекании экрана с щелью можно сформулировать также в осесимметричной постановке (рис. 2), в координатах r и z , когда экран и отверстие представляют собой круги, и тогда условие потенциальности течения (отсутствие интеграла по контуру вокруг кольца, которое обтекается жидкостью) также приводит к значительной концентрации скорости v внутри щели. В осесимметричной задаче для магнитного поля концентрации поля внутри отверстия происходить не будет, поскольку в этом случае по замкнутому кольцу в магнитной задаче будет циркулировать ток и интеграл по контуру вокруг кольца не будет зануляться. Электростатическая же задача в осесимметричном случае вообще не ставится.

Концентрация поля в отверстии для уравнения Лапласа (плоского и осесимметричного потенциальных течений)

Плоский случай

Оценим, по какому закону будет концентрироваться поле в отверстии, пользуясь условием равенства нулю интеграла от магнитного поля по контуру, охватывающему проводник, в плоскости рис. 1, б:

$$\oint \mathbf{B} d\mathbf{l} = 0. \tag{1}$$

При этом будем использовать то обстоятельство, что для решения задачи без отверстия интеграл по этому контуру, т. е. в этом случае для незамкнутого контура (для половины экрана), будет отличным от нуля и его можно будет вычислить, а для решения задачи с отверстием, через которое протекает поток, но с бесконечным экраном интеграл по этому контуру, т. е. и в этом случае для незамкнутого контура (для половины протекающего потока), также будет отличным

от нуля и его также можно будет вычислить. Вклады этих интегралов в (1) будут разного знака, а поскольку их сумма равна нулю, можно вычислить поток, протекающий через отверстие. В этих рассуждениях существенно используется то обстоятельство, что отверстие считается малым по сравнению с экраном, и его влияние на течения без отверстия предполагается малым.

Для плоского случая эту оценку можно провести с логарифмической точностью, когда предполагается, что не только отношение D/Δ , но и его логарифм велик, а точность по порядку величины равна $1/\ln(D/\Delta)$. Для оценки можно считать, что магнитное поле складывается из двух составляющих: магнитного поля, обтекающего экран, определяемого в пренебрежении влиянием отверстия и дающего ненулевой вклад в (1), и из магнитного поля, определяемого протекающим через отверстие магнитным потоком и дающего вклад в (1) противоположного знака.

Задача об обтекании экрана в пренебрежении влиянием отверстия решается точно [4, с. 142] и для комплексного потенциала магнитного поля w имеет вид

$$w = B_0 \sqrt{-z^2 + R^2} \quad (2)$$

(B_0 – магнитное поле на бесконечности, $R = D/2$ – полуширина экрана). Вклад в (1) от (2) равен разности потенциалов (2), т. е.

$$2B_0R. \quad (3)$$

Протекающий через отверстие магнитный поток f создает на больших по сравнению с размером отверстия Δ расстояниях r магнитное поле: $B = \frac{f}{\pi r}$, и, следовательно, дает вклад в интеграл (1), равный

$$-\frac{2f}{\pi} \ln\left(\frac{2R}{\Delta}\right). \quad (4)$$

Приравнивая сумму (3) и (4) нулю, получаем с логарифмической точностью величину потока f

$$f = \frac{\pi}{\ln\left(\frac{2R}{\Delta}\right)} B_0 R = \frac{\pi}{2 \ln\left(\frac{D}{\Delta}\right)} B_0 D. \quad (5)$$

Можно несколько уточнить величину потока, оценив коэффициент под знаком логарифма в (5). Для этого можно использовать аналитическое решение [4] для комплексного потенциала течения с конечным потоком (потоком f) вблизи краев пластины: $w \sim \ln\left(z + \sqrt{z^2 - (x_i)^2}\right)$ (x_i – координата каждого из двух краев пластины, $|x_1| = \Delta/2$, $|x_2| = R$). Тогда каждый из краев даст двойку под знаком логарифма и уточненная величина потока будет равна

$$f = \frac{\pi}{2 \ln\left(\frac{4D}{\Delta}\right)} B_0 D. \quad (6)$$

Среднее магнитное поле будет в этом случае расти с уменьшением ширины щели по закону

$$\bar{B} = \frac{\pi D}{2 \Delta} \frac{1}{\ln\left(\frac{4D}{\Delta}\right)} B_0. \quad (7)$$

Распределение магнитного поля по ширине щели для достаточно малых Δ/D будет описываться аналитическим решением [4] для течения через щель и соответствовать формуле

$$B = \frac{B(0)}{\sqrt{1 - \left(\frac{2x}{\Delta}\right)^2}}, \quad (8)$$

где x – координата, отсчитанная от центра щели, а $B(0)$ – поле в центре щели. Согласно (8),

$$\bar{B} = \frac{\pi}{2} B(0).$$

Заметим, что рассмотренная задача о концентрации магнитного поля в зазоре родственна задаче о распределении тока по поверхности плоских шин, разделенных малым зазором, рассмотренной в работе [5]. Сходны и подход к решению задачи (сшивка двух задач, когда в одной пренебрегается шириной зазора, а в другой ширина пластин считается бесконечной), и ответ с логарифмической точностью, имеющий вид (6), (7). Формула (7) показывает, что для узких щелей магнитное поле оказывается сильно сконцентрированным в области щели и, например, для щели шириной $\Delta = 0,01D$ будет составлять: $\bar{B} = 26B_0$, и даже минимальное поле в центре щели будет равно $B(0) = 17B_0$. Такую концентрацию магнитного поля (а также электрического поля в электростатической задаче и скорости жидкости в гидродинамической) можно использовать для различных применений.

Можно предложить также интерполяционную формулу для потока, переходящую в пределе, когда экран исчезает ($D/\Delta = 1$), в $f = B_0D$

$$f = \frac{B_0D}{\frac{2}{\pi} \ln\left(\frac{D}{\Delta}\right) + A - (A-1)\left(\frac{\Delta}{D}\right)} \quad (9)$$

(A – некоторая константа). Для экрана, представляющего собой тонкую полосу ($\Delta/D = 1$), поток должен быть примерно равен

$$f = B_0(D + \Delta)/2. \quad (10)$$

Накладывая условие, чтобы (9) в этом случае переходило в (10), получим значение константы:

$A = \frac{3}{2} - \frac{2}{\pi} \approx 0,86$. Интересно, что при этом значении A уточненный коэффициент под знаком логарифма при $\Delta/D \ll 1$ получается равным 3,9 в прекрасном соответствии с 4 в формуле (6). Поэтому можно ожидать, что формула (9) с $A = 0,86$ будет хорошо описывать величину потока через щель для любых значений Δ/D .

Осесимметричный случай

В осесимметричном случае условие равенства нулю интеграла по контуру, охватывающему экран от отверстия до границы, позволяет вычислить поток жидкости (здесь мы будем рассматривать гидродинамическую задачу, поскольку только для нее будет происходить концентрация скорости в отверстии), протекающий через отверстие, не с логарифмической точностью, а с точностью $\sim a/R$, где a – радиус отверстия, а R – радиус экрана. В этом случае течение жидкости без учета отверстия будет описываться формулами, приведенными в работе [6], которые для распределения потенциала по поверхности экрана дают

$$\varphi = \frac{2}{\pi} v_0 \sqrt{R^2 - \rho^2} \tag{11}$$

(v_0 – скорость жидкости на бесконечности, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ – радиус в цилиндрических координатах). Вклад от этого течения в интеграл по контуру (1) будет равняться удвоенной разности потенциалов между $\rho = 0$ и $\rho = R$: $\frac{4}{\pi} v_0 R$. С другой стороны, течение потока жидкости f через отверстие будет описываться формулами для электрического поля заряженного проводящего круглого диска, потенциал которого равняется [7]: $\varphi = \frac{\pi e}{2 a} = \frac{1}{4} \frac{f}{a}$ (e – заряд диска), что дает вклад в интеграл (1), равный $\frac{1}{2} \frac{f}{a}$, и противоположного знака. Приравнивая эти вклады, получим $f = \frac{8}{\pi} a R v_0$.

Таким образом, в осесимметричном случае средняя скорость в отверстии $\bar{v} = \frac{8}{\pi^2} \frac{R}{a} v_0$ будет при уменьшении a увеличиваться еще несколько быстрее, чем в плоской задаче.

Обратим внимание, что распределение скорости через отверстие в зависимости от радиуса для малого отверстия будет согласно [7] описываться формулой, аналогичной (8) для плоской задачи:

$$v = \frac{v(0)}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2}}, \tag{12}$$

и, таким образом, средняя скорость через отверстие будет связана со скоростью в центре соотношением: $\bar{v} = 2v(0)$.

Аналогично плоскому случаю можно предложить интерполяционную формулу для зависимости потока от a/R , имеющую правильную асимптотику при малых a/R :

$$f = \left(\frac{8}{\pi^2} \xi + C_1 \xi^2 + C_2 \xi^3 \right) \pi R^2 v_0, \tag{13}$$

где $\xi = a/R$, а C_1 и C_2 – некоторые константы. Накладывая на (13) условие, чтобы в пределе, когда экран исчезает ($a/R \approx 1$), формула переходила в правильную зависимость для тонкого кольца

$$f = \pi R^2 v_0 \xi, \text{ получим значения констант: } C_1 = 2 - \frac{16}{\pi^2}, C_2 = \frac{8}{\pi^2} - 1.$$

Результаты расчетов в плоском случае

Мы провели численные двумерные расчеты распределения магнитного поля (скорости жидкости) для разных значений Δ/D от 0,004 до 0,1. Расчеты проводились по программе, основанной

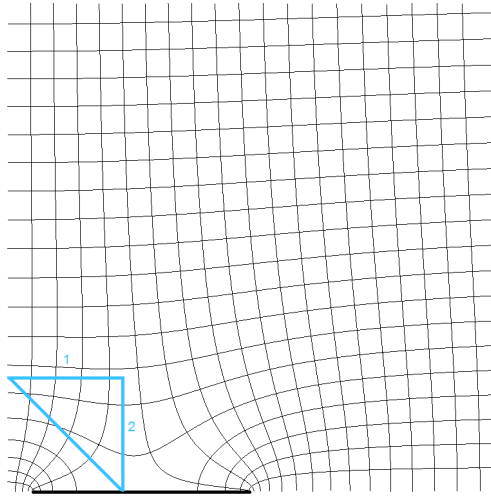


Рис. 3. Распределение силовых линий и потенциала для $D/\Delta = 10$

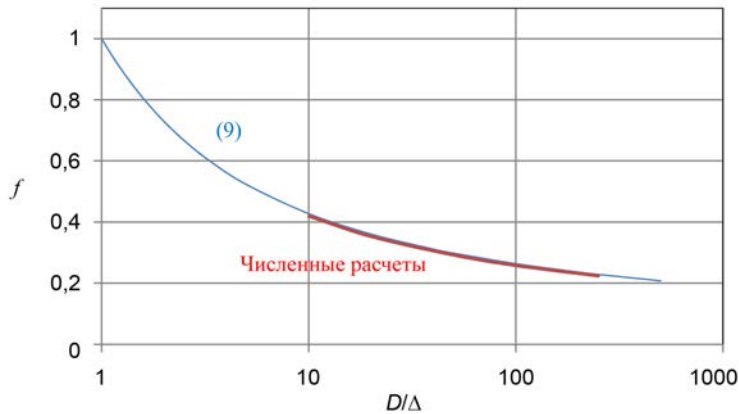


Рис. 4. Зависимость потока f через щель, отнормированного на $f_0 = B_0 D$, от D/Δ , полученная в расчетах и вычисленная по формуле (9)

чением константы $A = 0,86$. Видно, что обе зависимости прекрасно согласуются друг с другом.

Расчеты показали, что соотношение $\bar{B} = \frac{\pi}{2} B(0)$, связывающее среднее по щели магнитное поле с его значением в центре, выполняется с процентной точностью даже для щели с $\Delta/D = 0,1$. Это говорит о том, что распределение магнитного поля по ширине щели также будет описываться формулой (8) с точностью такого порядка.

на методе конечных элементов. Строилась сетка со сгущением в области отверстия с предпочтительно прямоугольными элементами второго порядка, максимальное число элементов в расчетах составляло $\sim 5 \cdot 10^5$, которое оказывается достаточным для счета отверстий с $D/\Delta \sim 1000$. В качестве примера полученного распределения на рис. 3 приведено распределение силовых линий и потенциала для $D/\Delta = 10$. Для электростатической задачи с внешним полем, направленным вдоль экрана, эти распределения будут соответствовать, наоборот, распределениям потенциала и силовых линий электрического поля.

Для расчета потока были использованы процедуры вычисления потока через сечение щели и некоторое сечение, отсекающее щель (линия 1 на рис. 3). Значения потоков через эти сечения должны быть равны в силу сохранения потока в потенциальном течении, но в расчетной методике предпочтительнее сечения, удаленные от щели, так как скорость на них не имеет расходимости. Зависимость потока f через щель, полученного в этих расчетах, от Δ/D представлена на рис. 4. Для сравнения здесь же приведена величина f , вычисленная по формуле (9) со зна-

Результаты расчетов потенциального течения в осесимметричном случае

Мы провели численные расчеты распределения скорости жидкости для разных значений a/R . Поскольку для расчетов использовалась трехмерная программа, для уменьшения числа элементов выбирался сегмент цилиндра с углом раствора порядка нескольких градусов. Сетка также строилась со сгущением в области отверстия. Эти меры позволяют произвести расчет при отношении $R/a \sim 100$. Для вычисления потока использовалась поверхность в сечении отверстия, а также цилиндрическая поверхность, отсекающая щель (аналогично поверхности 1 на рис. 3). В качестве примера полученного распределения на рис. 5 приведено распределение линий тока и эквипотенциалей для $R/a = 5$ в сравнении с решением для плоского случая.

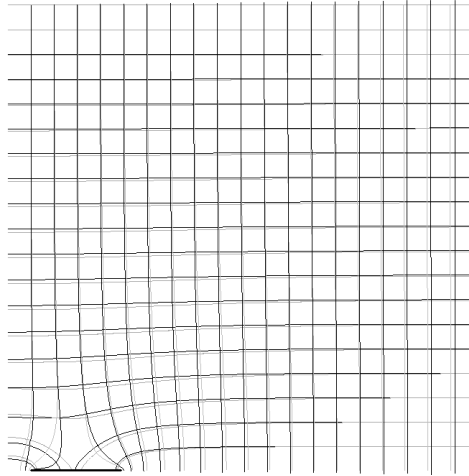


Рис. 5. Распределение силовых линий и потенциала для $R/a = 5$ в осесимметричном (черные линии) и для $D/\Delta = 5$ в плоском случае (серые линии)

Зависимость средней скорости через отверстие \bar{v} , полученная в этих расчетах, от R/a представлена на рис. 6. Для сравнения здесь же приведена величина \bar{v} , вычисленная с помощью интерполяции (13):

$$\frac{\bar{v}}{v_0} = \left(\frac{8}{\pi^2} \xi + C_1 \xi^2 + C_2 \xi^3 \right) / \xi^2. \quad (14)$$

Видно, что обе зависимости прекрасно согласуются друг с другом. Расчеты показали, что соотношение $\bar{v} = 2v(0)$, связывающее среднее по щели магнитное поле с его значением в центре, выполняется с процентной точностью даже для отверстия с $a/R = 0,2$. Это говорит о том, что распределение скорости по ширине щели также будет описываться формулой (12) с точностью такого порядка.

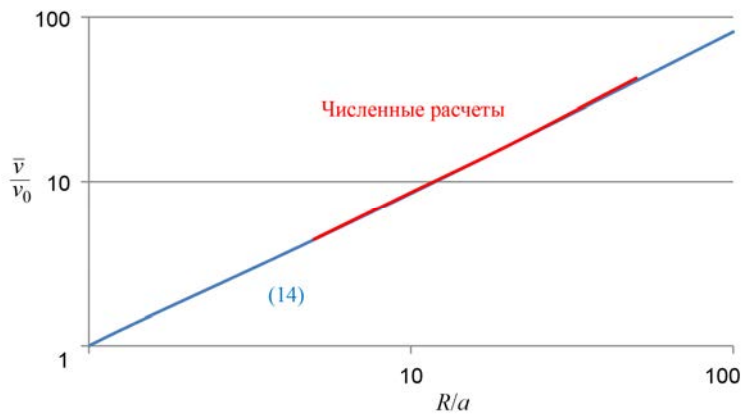


Рис. 6. Зависимость средней скорости через отверстие от R/a , полученная в расчетах и вычисленная по формуле (14)

Заключение

В плоских задачах магнитостатики (гидродинамики несжимаемой жидкости), если при обтекании магнитным полем идеально проводящего экрана (при потенциальном течении жидкости вокруг препятствия) в экране (препятствии) имеется небольшое отверстие, конфигурация магнитного поля (характер течения) меняется довольно значительно, приводя к усилению магнитного поля (скорости жидкости) в отверстии. Так, для тонкого экрана магнитный поток, протекающий через щель, уменьшается всего лишь логарифмически и для щели, составляющей $0,01D$, равняется 26 % потока, падающего на экран.

В осесимметричном случае поток через отверстия уменьшается при уменьшении размеров отверстия пропорционально радиусу и средняя скорость течения через отверстие усиливается еще сильнее. Так, при обтекании плоского диска при радиусе отверстия в 100 раз меньшего, чем радиус диска, средняя скорость течения через отверстие увеличивается в 81 раз.

Свойства усиления поля (скорости течения) при протекании через малые отверстия являются общими и для других геометрий, а не только рассмотренных в работе. Меняться в разных геометриях будут только коэффициенты усиления. Эти свойства можно использовать для концентрации магнитного поля (скорости течения) в различных устройствах.

В быту явления усиленного протекания через щели являются широко распространенными, поскольку многие знают, что для обеспечения тепла необходимо тщательно бороться даже с очень малыми щелями. В нашей работе мы представляем количественные оценки потоков через тонкие щели.

Список литературы

1. Кнопфель Г. Сверхсильные импульсные магнитные поля. М.: Мир, 1972.
2. Магнитокумулятивные генераторы – импульсные источники энергии. Т. 1 / Под ред. В. А. Демидова, Л. Н. Пляшкевича, В. Д. Селемира. Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2012.
3. Дрансфельд К., Хайду Я., Херлах Ф. и др. Сильные и сверхсильные магнитные поля и их применения / Под ред. Ф. Херлаха. М.: Мир, 1988.
4. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973.
5. Шнеерсон Г. А. Поля и переходные процессы в аппаратуре сверхсильных токов. Ленинград: Энергоиздат, Ленинградское отделение, 1981.
6. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. М.: Физматгиз, 1963.
7. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982.

Irrotational Flow (of Magnetic Field or Incompressible Fluid) Around a Screen with a Slot

S. F. Garanin, S. D. Kuznetsov, K. O. Vlasov

It is shown that for a magnetic field flow around a perfectly conducting screen of width D with a slot of width A (or for the hydrodynamic problem of an irrotational flow of an incompressible fluid around an impermeable screen with a slot) significant flux flows through the narrow slot.