

УДК 621.039

## МЕТОД АССОЦИИРОВАННЫХ ИНВАРИАНТНЫХ ПОДПРОСТРАНСТВ В ЗАДАЧАХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НЕЙТРОНОВ В СЛАБОСВЯЗНЫХ СИСТЕМАХ

Э. А. Бибердорф\*, Е. Ф. Митенкова\*\*, Т. В. Семёнова, Е. В. Соловьёва\*\*

(\*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск; \*\*ИБРАЭ РАН, г. Москва; ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области)

При моделировании переноса нейтронов в сложных гетерогенных средах наиболее точное распределение нейтронов достигается применением статистических алгоритмов Монте-Карло. Однако алгоритмические особенности используемого при этом метода поколений могут приводить к значительным погрешностям и даже некорректным результатам в слабосвязных системах. Для вычисления распределения нейтронов в слабосвязных системах предлагается метод ассоциированных инвариантных подпространств на базе матрицы деления, сформированной с помощью программы TDMSS. В основу положен метод дихотомии матричного спектра, разработанный в Институте математики им. С. Л. Соболева СО РАН. Рассматривается новая постановка несимметричной спектральной проблемы для решения прикладных задач.

*Ключевые слова:* слабосвязная (слабосвязанная) система, матрица деления, спектральная задача, дихотомия матричного спектра.

### Введение

В нейтронной физике изначально были сформулированы несколько уравнений переноса, в которых составляющие транспортного оператора описывались в балансовых соотношениях нейтронов *генерация—поглощение—утечка* по-разному, и решение транспортного уравнения с разными допущениями и граничными условиями рассматривалось в рамках одной из  $\lambda$ -,  $c$ -,  $k_{эф}$ -проблем собственных значений [1]. В задачах на критичность при решении уравнения переноса с  $k_{эф}$ -проблемой вычислялось наибольшее собственное значение — эффективный коэффициент размножения нейтронов  $k_{эф}$ , в задачах, сформулированных в рамках  $c$ -проблемы, — несколько собственных значений. При этом собственные значения, определяемые в рамках  $\lambda$ -,  $c$ -,  $k_{эф}$ -проблем имели принципиальные различия. Исследованием математических аспектов решения уравнения переноса занимались многие специалисты, формулируя для транспортного оператора необходимые условия, обеспечивающие корректное вычисление отдельных собственных значений, спектра в целом и собственных векторов.

Вычисление  $k_{эф}$  в системах с максимально полным представлением пространственно-материальной структуры было главной целью прецизионных кодов, базирующихся на статистических методах моделирования переноса нейтронов. В расчетах на критичность корректность счета нейтронов методом Монте-Карло связывается с источником нейтронов деления. В традиционных реакторных системах при соответствующей статистике нейтронов формирование корректного источника с выходом на главную собственную функцию при любом начальном распределении нейтронов [2] обеспечивается использованием метода поколений (power iteration method).

Вместе с тем вычислительные особенности метода поколений, обусловленные итерационными процессами с присущими им автокорреляциями, могут приводить к значительным погрешностям в расчетах некоторых систем. Различный характер проявления автокорреляций отмечается в расчетах интегрального значения  $k_{эф}$  и локальных характеристик [3]. Так, автокорреляции, практически

не влияющие на точность расчета  $k_{эф}$  для традиционных реакторных систем, в некоторых случаях могут привести к смещению оценок локальных функционалов и недооценке их погрешностей [2, 4]. Для слабосвязных систем\* и систем с доминантным отношением, близким к единице, метод поколений не гарантирует получения адекватного источника нейтронов даже при очень большой статистике [5, 6], а некорректные результаты могут возникнуть даже при малых возмущениях [7, 8].

В настоящей работе вычисление функций распределения нейтронов деления в слабосвязных системах предлагается осуществлять на основе матрицы деления [9]. С помощью программы TDMCC формируется матрица деления  $M_f$  с размерами  $n \times n$ , в которой в полной мере учитывается пространственно-материальная структура системы, представленной  $n$  областями [10]. Корректность  $M_f$  оценивается, исходя из нейтронно-физических свойств — длины свободного пробега нейтрона, захвата и деления в  $i$ -областях ( $i = 1, \dots, n$ ) системы и др. [11]. По сути, матрица деления — это дискретное представление ядра интегрального оператора  $A(r', r)$  перехода нейтрона деления из точки  $r'$  в точку  $r$ .

Для сформированной матрицы деления  $M_f$  ставится задача на собственные значения. Предполагается, что полученные значения, характеризующие локальные свойства отдельных областей системы, обеспечат достоверное отображение распределения нейтронов деления во всей системе в целом.

### Задачи на собственные значения и новая постановка спектральной задачи

Задачи на собственные значения востребованы в различных прикладных областях физики и механики. В задачах механики и специализированных задачах, например, связанных с устойчивостью, собственные значения интерпретируются как собственные частоты колебаний, а собственные векторы, в том числе и не главные, отражают соответствующие моды колебаний. Для задач, решение которых не связано с колебательными процессами, интерпретация собственных векторов часто оказывается затруднительной и решение строится только на основе главных собственных значений.

Использование статистических алгоритмов в программе TDMCC приводит к формированию несимметричных матриц деления. При этом для одной и той же системы при разных расчетных параметрах формируются матрицы, различающиеся как размерами, так и значениями элементов. Для несимметричных матриц существуют математические сложности вычисления собственных значений и собственных векторов, обусловленные их непредсказуемой "чувствительностью" к возмущению матрицы и изменению отдельных ее элементов. Дополнительные трудности возникают при вычислении близких собственных значений. Универсальные алгоритмы, обеспечивающие необходимую устойчивость вычисляемых собственных значений и собственных векторов, отсутствуют даже для несимметричной трехдиагональной матрицы [12]. В этой связи проблема устойчивости для матрицы деления  $M_f$  становится одной из ключевых.

Классическая постановка спектральной задачи с матрицей деления для слабосвязной системы не обеспечивает получения достоверных распределений нейтронов [13]. В качестве альтернативы предлагается использовать метод ассоциированных инвариантных подпространств (АИП), основанный на методе дихотомии матричного спектра [14]. Задача дихотомии спектра представляет собой новую постановку несимметричной спектральной проблемы, ориентированную на характерные особенности многих прикладных задач [15].

В последние годы этот подход успешно применялся в различных областях. Так, в монографии [16] показано использование дихотомии матричного спектра относительно мнимой оси в задачах линейного управления. В задачах механики, например, при анализе колебаний гидродинамических решеток метод дихотомии позволил получить более полную информацию о характере колебаний механических систем в сравнении с традиционными подходами [17]. Эффективность метода продемонстрирована и в задаче о флаттере крыла в постановке М. В. Келдыша [18] при определении критической скорости набегающего потока, превышение которой приводит к потере устойчивости крыла и развитию флаттера. Модификация метода для матриц с большой нормой применялась в

\* В некоторых источниках используется термин *слабосвязанная система*.

задачах об устойчивости плоскопараллельных течений с определением критического значения числа Рейнольдса, приводящего к ламинарно-турбулентному переходу [19]. Алгоритм, реализованный для дихотомии матричного спектра гиперболой, может применяться для исследования устойчивости течения Блазиуса [20]. Разрабатываемый в настоящее время алгоритм дихотомии матричного спектра относительно ломаной, состоящей из отрезков прямых и дуг окружностей, ориентирован на исследования устойчивости автоматических систем управления.

Следует подчеркнуть, что метод дихотомии может применяться для матриц, не являющихся нормальными, позволяя оценивать влияние погрешности исходных данных на точность получаемых характеристик для неконсервативных систем, описываемых несамосопряженными матрицами [21].

## Математические основы метода АИП

**Критерий дихотомии.** В основу предлагаемого метода АИП положен метод дихотомии матричного спектра, разработанный в Институте математики им. С. Л. Соболева СО РАН под руководством академика С. К. Годунова [22]. С помощью метода дихотомии множество собственных значений  $\{\lambda_j\}$  матрицы  $A$  разделяется на две части в зависимости от их расположения относительно кривой  $\gamma$ . Мерой разделения спектра или, иными словами, критерием дихотомии служит норма матричного интеграла  $H = \oint_{\gamma} (\bar{\lambda}I - A^*)^{-1}(\lambda I - A)^{-1}d\lambda$ . Действительно, точки спектра матрицы  $A$  находятся на кривой  $\gamma$  тогда и только тогда, когда операторная норма  $\omega = \|H\|$  обращается в бесконечность. Если значение  $\omega$  конечно, то кривая  $\gamma$  делит спектр матрицы на две части, каждой из которых соответствует инвариантное подпространство, натянутое на собственные векторы.

Несмотря на то, что в основе метода дихотомии матричного спектра лежат контурные интегралы, для определения их значений разработан итерационный алгоритм, включающий  $QR$ -разложения и другие алгебраические матричные операции и не содержащий обращений матриц. Существует несколько базовых вариантов этого алгоритма, разница между которыми не существенна. Важно заметить, что одновременно с вычислением  $H$  происходит вычисление проекторов  $P$  и  $I - P$  ( $I$  — единичная матрица) на инвариантные подпространства матрицы  $A$ , соответствующие собственным значениям, лежащим по разные стороны кривой  $\gamma$ .

**Спектральный портрет и инвариантные подпространства.** Одномерный спектральный портрет в виде графика функции  $\omega(r) = \|H(r)\|$  для семейства кривых  $\gamma(r)$  позволяет разделить спектр матрицы  $A$  на подмножества, которые группируются в окрестностях кривых  $\gamma(r_i)$ , и вычислить соответствующие базисы инвариантных подпространств, используя матрицы-проекторы  $P_i$ , удовлетворяющие условию  $P_i^2 = P_i$ . В результате пространство разбивается на подпространства меньшей размерности. С помощью сингулярного разложения проекторов [23] могут быть получены матрицы  $U_i$ , состоящие из ортонормированных базисных векторов соответствующих инвариантных подпространств. Заметим, что если инвариантное подпространство имеет размерность 1, т. е. соответствует единственному собственному значению, то его базис совпадает с собственным вектором. Если размерность инвариантного подпространства больше единицы, то совпадение вычисленного базиса с собственными векторами не обязательно. Знание базисов инвариантных подпространств позволяет, в частности, привести матрицу  $A$  к клеточно-диагональному виду (вычислительно устойчивому аналогу формы Жордана).

Для произвольного нормированного вектора  $\mathbf{x}$  угол  $\alpha_i$  между ним и выбранным  $i$ -м инвариантным подпространством вычисляется по формуле  $\cos \alpha_i = 1 - \|[U_i, \mathbf{x}]\|^2$ , где берется евклидова норма матрицы  $[U_i, \mathbf{x}]$ , полученной из матрицы  $U_i$  присоединением к ней вектора-столбца  $\mathbf{x}$ . Проекция вектора  $\mathbf{x}$  на это подпространство получается его умножением на матрицу проектора:  $\mathbf{p}_x = P_i \mathbf{x}$ . Если подпространство, на которое осуществляется проецирование, одномерное, то проекция — это вектор, коллинеарный собственному. Если собственное подпространство двумерное, то имеем проекцию вектора на плоскость, и т. д.

**Ассоциированные инвариантные подпространства.** Рассмотрим векторы, состоящие из нулей и единиц, которые описывают положение зон системы. Например, вектор  $\mathbf{u} = (0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$  при длине системы 360 см и разбиении на  $n = 18$  областей указывает на зону

длиной 80 см, находящуюся в 40 см от левого края системы. При этом квадрат евклидовой нормы  $\|\mathbf{u}\|^2$  равен числу областей системы, составляющих заданную зону (для данного примера  $\|\mathbf{u}\|^2 = 4$ ). Такие векторы будем называть векторами-индикаторами.

Инвариантное подпространство матрицы деления является *ассоциированным* с заданной зоной системы, если вектор-индикатор зоны образует с этим подпространством угол меньший, чем с другими инвариантными подпространствами. Ассоциированное подпространство можно расширять за счет объединения с другими инвариантными подпространствами.

**Средние значения и нормировка.** Проекцию вектора можно нормировать произвольным образом. В предлагаемом варианте в нормировочные коэффициенты будут входить средние значения распределений в заданных зонах. Пусть вектор  $\boldsymbol{\rho}$  представляет распределение некоторой величины по длине системы, а  $\mathbf{u}$  — вектор-индикатор фиксированной зоны. Тогда скалярное произведение  $(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{u})$  равно сумме тех компонент  $\boldsymbol{\rho}$ , которые заданы в зоне, описываемой вектором  $\mathbf{u}$ . При этом  $(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{u}) / \|\mathbf{u}\|^2$  — среднее арифметическое значение распределения  $\boldsymbol{\rho}$  в зоне, заданной вектором-индикатором  $\mathbf{u}$ .

В частности, если  $\mathbf{u}$  описывает зону, содержащую в среднем максимальное число нейтронов, а  $\mathbf{D}$  — вектор диагональных элементов матрицы деления  $A = M_f$ , то  $m_{\max} = (\mathbf{D}, \mathbf{u}) / \|\mathbf{u}\|^2$  — среднее значение диагональных элементов в этой зоне. Если  $\mathbf{p}_u$  — проекция вектора-индикатора  $\mathbf{u}$ , то  $m_u = (\mathbf{p}_u, \mathbf{u}) / \|\mathbf{u}\|^2$  — усредненное значение компонент вектора-проекции  $\mathbf{p}_u$  в зоне, заданной  $\mathbf{u}$ .

Для сравнения результатов для разных  $n$  исходные матрицы деления также нормируются:  $A/m_{\max}$ .

**Описание метода.** Метод АИП включает следующие основные шаги:

1. Предварительная нормировка матрицы деления  $A$  (необязательный шаг).
2. Вычисление и анализ одномерного спектрального портрета матрицы  $A$ . В качестве кривых  $\gamma(r)$  используются окружности радиусом  $r$  с центром в начале координат. Пики спектрального портрета матрицы  $A$  определяют радиусы  $r_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) окружностей, на которых расположены собственные значения матрицы, в том числе  $r_{\max} = \max |\lambda_j|$ . Для каждого пика вычисляются проектор  $P_i$  и матрица  $U_i$ , образованная ортонормированными базисными векторами соответствующего инвариантного подпространства.
3. Выбор ассоциированного инвариантного подпространства. Осуществляется на основании вычисления и анализа углов, образованных заданным (соответствующим выделяемой зоне) вектором-индикатором  $\mathbf{u}$  с инвариантными подпространствами. Выбирается инвариантное подпространство, с которым  $\mathbf{u}$  образует минимальный угол. При этом  $r_u = |\lambda_u|$  — радиус окружности, на которой лежат собственные значения, соответствующие ассоциированному инвариантному подпространству.
4. Вычисление проекции  $\mathbf{p}_u$  вектора-индикатора  $\mathbf{u}$  на выбранное ассоциированное инвариантное подпространство.
5. Вычисление нормировочного множителя  $q = \frac{m_{\max}/m_u}{r_{\max}/r_u}$  с последующей нормировкой проекции  $\hat{\mathbf{p}} = q\mathbf{p}_u$ .

В результате имеем вектор  $\hat{\mathbf{p}}$ , принадлежащий инвариантному подпространству матрицы деления, который близок к вектору-индикатору, описывающему заданную зону. Далее показано, что нормированные проекции хорошо передают локальные свойства системы.

### Результаты численных экспериментов

С помощью метода АИП на основе матрицы деления вычисляются распределения нейтронов деления в бенчмарке *Pin-cell Array with Irradiated Fuel*, представляющем собой слабосвязную плоскую систему. Система состоит из топливных зон с разным обогащением  $w_l$  ( $l = 1, \dots, k$ ) общей длиной 360 см и 30-сантиметровых слоев воды на концах. На торцах она задается в виде бесконечной квадратной решетки с шагом 1,33 см с размещенным по центру твэлом диаметром 0,95 см, окруженным водой [24]. При этом решаются следующие задачи:

1. Вычисление распределений нейтронов в симметричной системе ( $k = 3; w_1 = w_3$ ).

2. Вычисление распределений нейтронов в несимметричной системе ( $k = 7$ ) и обеспечение хорошей согласованности результатов при разном пространственном представлении системы.

**Распределение нейтронов в симметричной системе.**

*Модельная задача.* Некоторые проблемы, связанные с особенностями алгебраической спектральной задачи в классической постановке, продемонстрируем на примере упрощенной симметричной матрицы с размерами  $9 \times 9$

$$S = \begin{pmatrix} \mathbf{60} & 3 & & & & & & & \\ 3 & \mathbf{34} & 4 & & & & & & \\ & 4 & \mathbf{35} & 4 & & & & & \\ & & 4 & \mathbf{35} & 4 & & & & \\ & & & 4 & \mathbf{35} & 4 & & & \\ & & & & 4 & \mathbf{35} & 4 & & \\ & & & & & 4 & \mathbf{35} & 4 & \\ & & & & & & 4 & \mathbf{34} & 3 \\ & & & & & & & 3 & \mathbf{60} \end{pmatrix}.$$

Эта матрица характеризуется кратным главным собственным значением, для которого собственные векторы  $\mathbf{v}_8$  и  $\mathbf{v}_9$  не выделяют однозначно правую и левую концевые области системы, а осцилляции значений компонент остальных собственных векторов также не позволяют связать полученные собственные векторы с конкретными областями (табл. 1).

Собственные векторы (функции), вычисленные традиционными методами на базе сформированной симметричной матрицы деления, дают лишь схематичное представление о распределении нейтронов деления в слабосвязной системе [13]. В силу стандартной нормировки максимумы оказываются зависимыми от разбиения  $n$ , а области с одинаковыми размножающими свойствами не свидетельствуют о равномерном распределении нейтронов. Также стандартная нормировка вычисляемых собственных векторов не обеспечивает условий для сравнения распределений в зонах с разными нейтронно-физическими свойствами.

Таблица 1

**Собственные векторы симметричной матрицы  $S$  (выделены компоненты с максимальными по модулю значениями)**

Вектор	Компоненты								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\mathbf{v}_1$	0,025	-0,206	0,357	-0,457	<b>0,492</b>	-0,457	0,357	-0,206	0,025
$\mathbf{v}_2$	-0,049	0,373	<b>-0,493</b>	0,340	0,000	-0,340	<b>0,493</b>	-0,373	0,049
$\mathbf{v}_3$	-0,051	0,490	-0,288	-0,227	<b>0,495</b>	-0,227	-0,288	0,490	-0,051
$\mathbf{v}_4$	0,057	-0,488	-0,084	<b>0,502</b>	0,000	<b>-0,502</b>	0,084	0,488	-0,057
$\mathbf{v}_5$	-0,056	0,417	0,409	-0,160	<b>-0,510</b>	-0,160	0,409	0,417	-0,056
$\mathbf{v}_6$	0,046	-0,301	<b>-0,511</b>	-0,383	0,000	0,383	<b>0,511</b>	0,301	-0,046
$\mathbf{v}_7$	0,026	-0,156	-0,344	-0,472	<b>-0,517</b>	-0,472	-0,344	-0,156	0,026
$\mathbf{v}_8$	<b>0,702</b>	0,082	0,013	0,002	0,000	-0,002	-0,013	-0,082	<b>-0,702</b>
$\mathbf{v}_9$	<b>-0,702</b>	-0,082	-0,013	-0,002	-0,001	-0,002	-0,013	-0,082	<b>-0,702</b>

*Стандартный подход.* Для симметричной системы с обогащениями  $w_1 = w_3 = 4,5\%$  в зонах 0–40 и 320–360 см,  $w_2 = 0,7\%$  в зоне 40–320 см матрица деления  $M_f = A_{100}$  с размерами  $100 \times 100$ , полученная методом Монте-Карло,

$$A_{100} = \begin{pmatrix} 1687 & 1019 & \dots & & & & & & & & \dots \\ 1239 & \mathbf{1290} & \dots & \dots & & & & & & & \dots \\ 812 & 1030 & \dots & \dots & \dots & & & & & & \dots \\ 451 & 656 & \dots & 695 & \dots & \dots & & & & & \dots \\ 236 & 400 & \dots & 1169 & 335 & \dots & \dots & \dots & \dots & & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \mathbf{1488} & 551 & 334 & \dots & \dots & \dots & & 4 & 1 \\ 13 & 12 & \dots & 1304 & \mathbf{746} & 334 & 366 & \dots & \dots & & 4 & 2 \\ 3 & 8 & \dots & 872 & 623 & \mathbf{708} & 565 & \dots & \dots & \dots & 13 & 3 \\ & & & & 5 & \dots & \dots & 401 & 554 & \mathbf{718} & \dots & \dots & \dots \\ & & & & 5 & \dots & \dots & \dots & 366 & 606 & \dots & 358 & 221 \\ & & & & & \dots & \dots & \dots & \dots & 377 & \dots & 618 & 484 \\ & & & & & & & & & & \dots & 991 & 860 \\ & & & & & & & & & & & \dots & \mathbf{1226} & 1233 \\ & & & & & & & & & & & & & \dots & 956 & \mathbf{1727} \end{pmatrix},$$

как отмечалось ранее, не может быть симметричной.

Для подобных матриц при больших  $n$  появляются комплексные собственные значения с комплексными собственными векторами, вычисляемые с помощью стандартных пакетов (SciLab и др.). На рис. 1, *a* показаны 22 собственных вектора, включая главный (отмечен черным цветом), с наибольшими компонентами в зоне 320–360 см. На рис. 1, *б* приведены модули компонент комплексных собственных векторов, отражающих амплитуду источника.

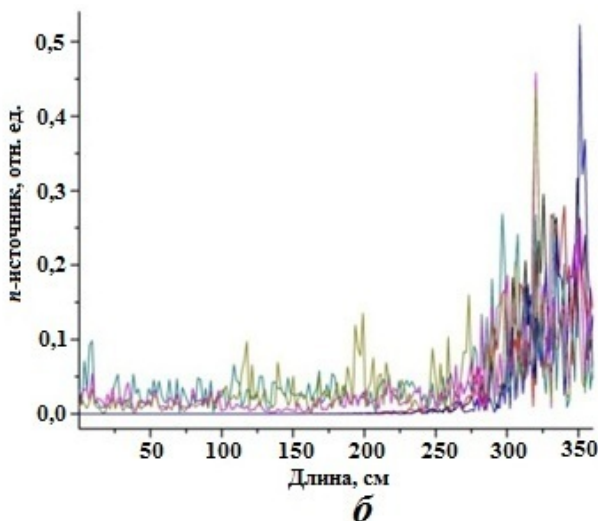
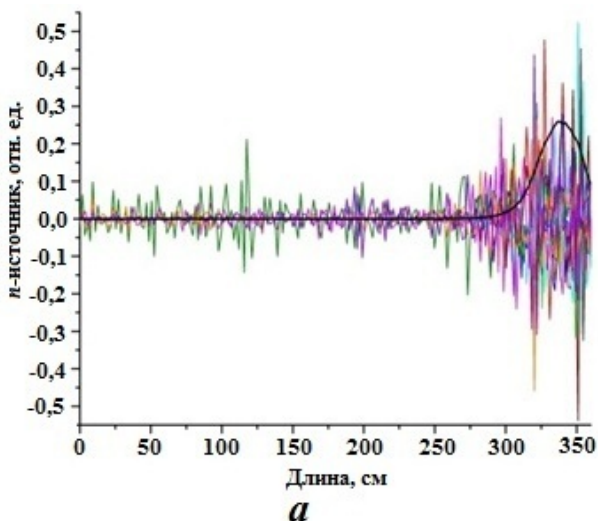


Рис. 1. Собственные векторы с наибольшими значениями компонент в зоне 320–360 см с  $w_3 = 4,5\%$  (*a*) и модули этих компонент (*б*) для матрицы  $A_{100}$

Приведенная картина подтверждает невозможность представления финального распределения для каждой конкретной области с учетом вкладов, вносимых в эту область соответствующими собственными векторами. Тем более неясно, каким образом можно представить распределение во всей системе.

*Метод АИП.* В отличие от традиционного подхода метод АИП позволяет получить адекватные распределения в симметричной (в физическом смысле) системе с приведенной выше несимметричной матрицей  $A_{100}$ . Для матрицы  $A_{100}$  определяем векторы-индикаторы  $\mathbf{e}, \mathbf{f}$  соответственно для левой и правой концевых зон длиной 40 см:  $\mathbf{e} = (\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{11}, 0, \dots, 0)^T$ ,  $\mathbf{f} = (0, \dots, 0, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{11})^T$ , а также вектор-индикатор  $\mathbf{g}$  — для центральной:  $\mathbf{g} = (0, 0, \dots, 0, \underbrace{1, 1, 1, 1}_{11}, \dots, 1, 1, 1, 1, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{11})^T$ .

Области разбиения с максимальными значениями диагональных элементов матрицы  $A_{100}$  приходятся на концевые зоны, которым соответствуют векторы-индикаторы  $\mathbf{e}$  и  $\mathbf{f}$ . Множитель для предварительной нормировки выбирается в виде  $m_{\max} = (\mathbf{D}, \mathbf{e}) / \|\mathbf{e}\|^2$ , где  $\mathbf{D}$  — вектор диагональных элементов матрицы  $A_{100}$ , и дальнейший анализ проводится для нормированной матрицы  $A_{100}/m_{\max}$  (далее сохраним обозначение  $A_{100}$ ).

Построение ассоциированных инвариантных подпространств осуществляется на основе спектрального портрета (рис. 2) и углов между векторами-индикаторами и инвариантными подпространствами (рис. 3), где по горизонтальной оси отложены номера инвариантных подпространств, пронумерованных по убыванию модулей собственных значений, а по вертикальной оси — значения углов в радианах. В результате определяются ассоциированные инвариантные подпространства: двумерные для векторов  $\mathbf{e}$  и  $\mathbf{f}$  (для  $\mathbf{e}$  — объединение подпространств 2 и 4, для  $\mathbf{f}$  — 1 и 3) и объединение подпространств 3—5, 7 и 9 для вектора  $\mathbf{g}$ . Таким образом, несмотря на то, что каждому из пиков спектрального портрета соответствуют одномерные подпространства, вектор  $\mathbf{g}$  проецируется на пятимерное подпространство. Нормировка для проекций  $\mathbf{p}_e$  и  $\mathbf{p}_f$  вычисляется по формуле, приведенной в п. 5 описания метода, а для нормировки  $\mathbf{p}_g$  используется усреднение модулей собственных значений, отвечающих подпространствам, вошедшим в ассоциированное подпространство:

$$\hat{\mathbf{p}}_g = \frac{1}{m_g} \frac{r_3 + r_4 + r_5 + r_7 + r_9}{5r_{\max}} \mathbf{p}_g.$$

Полученные проекции имеют ряд характерных особенностей. Заметим, что при использовании метода АИП они сопоставляются с конкретными выделенными зонами. Применение метода к системам с большим числом областей  $n$  (в отличие от малых  $n$ ) может приводить к появлению заметных ненулевых и даже отрицательных значений первых и последних компонент вектора проекции, приходящихся на области вне выделенной зоны. Эти значения не являются информативными ни для заданной, ни для соседних зон, и их наличие не требует корректировок при вычислении проекций.

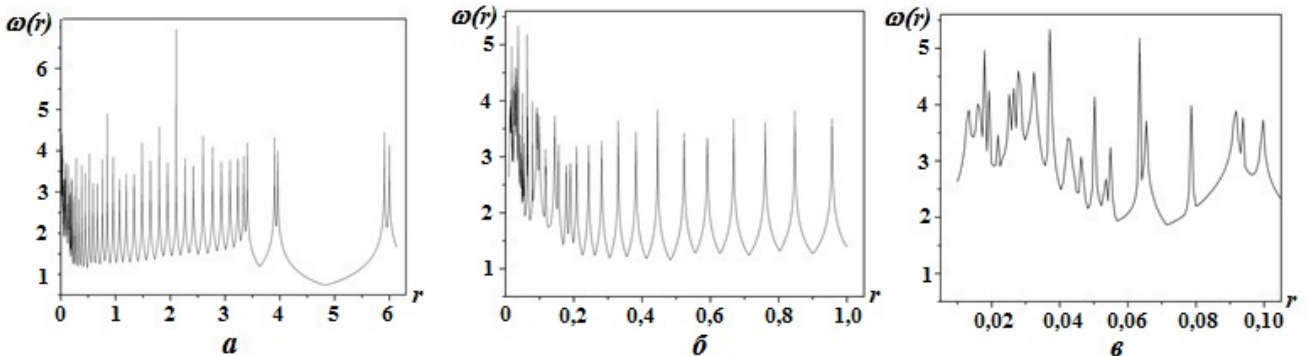


Рис. 2. Спектральные портреты матрицы  $A_{100}$  для разных диапазонов изменения радиуса  $r$ :  $a - 0 < r < 6$ ;  $b - 0 < r < 1$ ;  $v - 0 < r < 0,1$

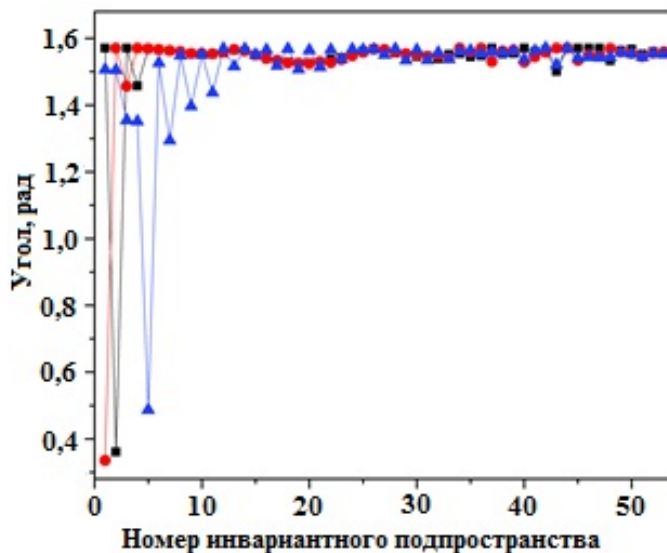


Рис. 3. Углы между векторами-индикаторами и инвариантными подпространствами для  $A_{100}$ : —■— — e; —●— — f; —▲— — g

Следует особо отметить, что для протяженных однородных зон вид соответствующей проекции в сильной степени зависит от выбора подпространства, в котором она представляется. На рис. 4, а распределение нейтронов в центральной однородной зоне длиной 280 см приближается проекциями на подпространства разной размерности:

- одномерное, совпадающее с 5-м собственным вектором;
- четырехмерное — объединение инвариантных подпространств с номерами 3–5, 7;
- пятимерное — объединение инвариантных подпространств 3–5, 7, 9;
- шестимерное — объединение инвариантных подпространств 3–5, 7, 9, 11.

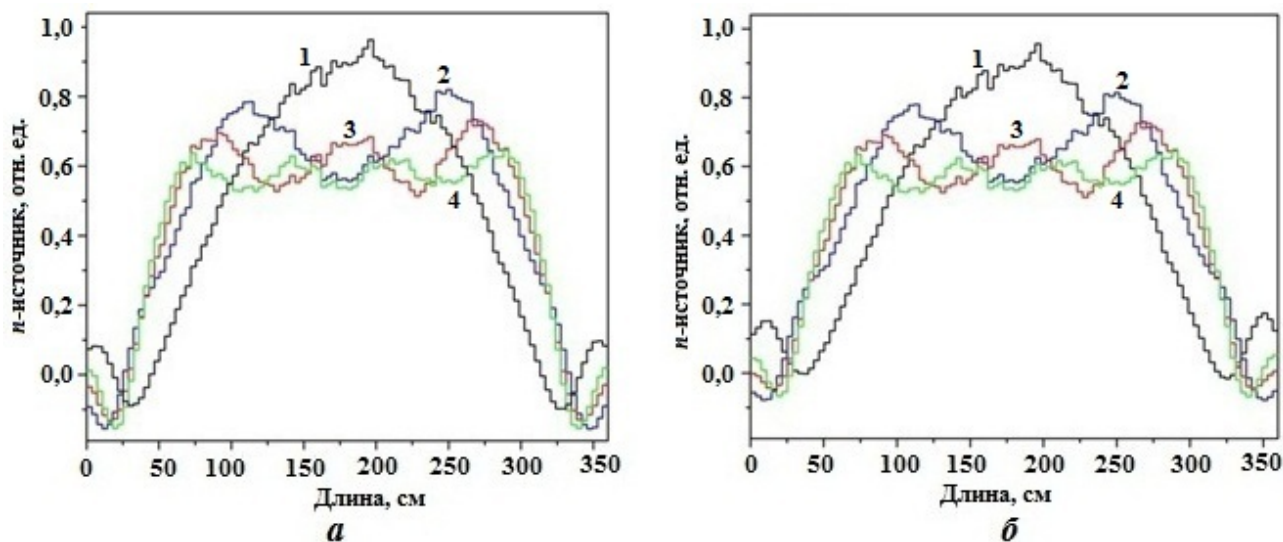


Рис. 4. Распределения нейтронов в зоне 40–320 см с матрицей  $A_{100}$ , полученные с помощью проекций на подпространства разной размерности (а) и соответствующие расширенные подпространства (б): — — одномерное; — — четырехмерное; — — пятимерное; — — шестимерное



При этом чем точнее проекция приближает границы зоны (круче спуск ее графика сверху вниз), тем значительнее "заныривание под ноль" вне зоны и тем точнее представление рассматриваемой зоны. Уменьшить "заныривание" во избежание "нефизичности" процесса помогает расширение описанных подпространств за счет включения собственных векторов 1 и 2 (рис. 4, б). Однако такой подход не отвечает приведенному описанию метода (п. 3, 4), поскольку собственные векторы 1 и 2 образуют большие углы с вектором  $\mathbf{g}$  (см. рис. 3) и не должны включаться в ассоциированное с ним подпространство. При этом важно, что подобное расширение не отражается на виде проекций внутри заданной зоны. В данном примере центральная зона на рис. 4, а наиболее точно представляется кривой 4, составляющей в окрестности границы зоны наибольший угол с осью абсцисс (наиболее крутая кривая). Вид этой кривой внутри центральной зоны остается неизменным и для расширенных подпространств (см. рис. 4, б).

Таким образом, можно констатировать, что проекции для симметричной системы с матрицей деления  $A_{100}$ , вычисленные с помощью метода АИП, обеспечивают адекватное отображение делящихся свойств системы и корректное распределение нейтронов деления в зонах с одинаковым обогащением (кривые 1 и 3 на рис. 5, а) и центральной зоне (кривая 2 на рис. 5, а).

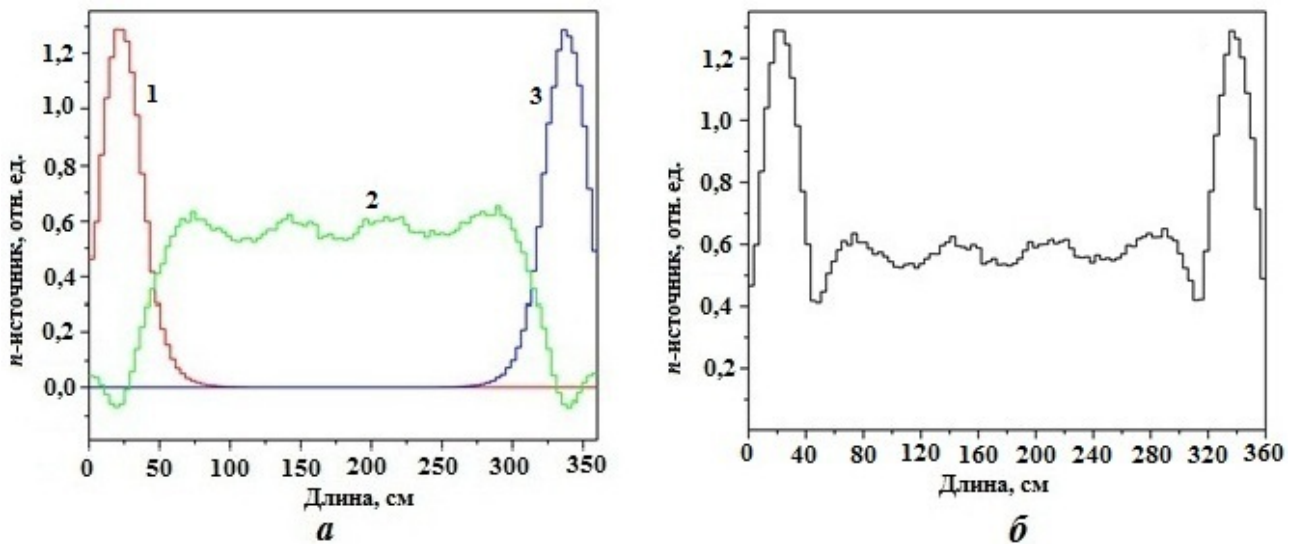


Рис. 5. Распределения нейтронов для симметричной системы с матрицей  $A_{100}$ , полученные методом АИП для трех выделенных зон (а) и системы в целом (б)

**Несимметричная система. Согласованность распределений при разных разбиениях.** Для корректного вычисления распределения нейтронов в системе с неизвестной априори материальной структурой нужно представить систему как можно подробнее — с большим числом  $n$  областей. При грубом задании системы нивелируются узкие зоны, которые с заметно отличающимися от соседних зон нейтронно-физическими свойствами окажутся незамеченными, не будут выделены и в результате предстанут усредненными с соседними зонами. Однако необходимо учитывать возникающие при уменьшении области дополнительные погрешности в элементах матрицы, а также вычислительные особенности использования метода АИП для систем с мелким пространственным разбиением. Максимально точную картину распределения можно получить только при сопоставлении вычисляемых проекций при разных  $n$ .

Традиционный метод вычисления собственных векторов с компонентной зависимостью от  $n$  не позволяет проводить сравнения даже главных собственных векторов, полученных при разных  $n$ , что исключает возможность адекватных оценок изменений в распределениях, обусловленных включением в систему дополнительных зон с материальными свойствами, отличными от свойств соседних зон. Метод АИП обеспечивает адекватное сравнение распределений при разных  $n$ , что наглядно подтверждает следующий пример.

Рассматривается несимметричная система, пространственно-материальная структура которой представлена в табл. 2. Анализируются распределения нейтронов при  $n = 18$  и  $36$ . Здесь ограничимся матрицей деления  $M_f = A_{18}$  с размерами  $18 \times 18$ :

$$A_{18} = \begin{pmatrix} \mathbf{308375} & 64015 & 856 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 63603 & \mathbf{301485} & 33154 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1995 & 77760 & \mathbf{165397} & \dots & 62 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 73 & 2649 & 40511 & \dots & 1149 & \dots & 2 & \dots & 2 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 4 & 92 & 1452 & \dots & 59935 & \dots & 41 & \dots & 2 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & 4 & 26 & \dots & \mathbf{391376} & \dots & 1358 & \dots & 90 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & 2 & \dots & 100858 & \dots & 40001 & \dots & 1979 & \dots & 2 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & \dots & 3596 & \dots & \mathbf{171133} & \dots & 63966 & \dots & 2 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & & 133 & \dots & 40682 & \dots & \mathbf{302308} & \dots & 55 & 10 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & & 7 & \dots & 1351 & \dots & 78505 & \dots & 1350 & 149 & 9 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & & & \dots & 63 & \dots & 2739 & \dots & 39886 & 3428 & 54 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & & & & 2 & \dots & 82 & \dots & \mathbf{160028} & 101902 & 1118 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & & & & & \dots & 4 & \dots & 22684 & \mathbf{393208} & 58778 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & & & & & & & \dots & 354 & 59318 & \mathbf{394163} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

В качестве примера укажем векторы-индикаторы для зон с обогащением 4,5 и 90% (см. табл. 2). Для  $n = 18$   $\mathbf{e} = (1, 1, 0, \dots, 0)^T$ ;  $\mathbf{f} = (0, \dots, 0, 1, 1)^T$ ;  $\mathbf{g} = (0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, \dots, 0)^T$ ;  $\mathbf{h} = (0, \dots, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0)^T$ ; для  $n = 36$   $\mathbf{e} = (1, 1, 1, 1, 0, \dots, 0)^T$ ;  $\mathbf{f} = (0, \dots, 0, 1, 1, 1, 1)^T$ ;  $\mathbf{g} = (\underbrace{0, 0, \dots, 0, 1, 1, 1, 0, \dots, 0}_{10})^T$ ;  $\mathbf{h} = (0, \dots, 0, 1, 1, 1, 1, 0, \underbrace{0, \dots, 0}_{10})^T$ . В соответствии с описанным методом для каждого пика на спектральных портретах (рис. 6) вычисляются инвариантные подпространства. На рис. 7 показаны значения углов между векторами-индикаторами и инвариантными подпространствами. Видно, что достигается хорошее приближение при проецировании каждого вектора-индикатора на одномерное инвариантное подпространство.

Согласованность получаемых распределений для несимметричной системы при  $n = 18$  и  $36$  продемонстрирована на рис. 8. Можно констатировать, что проекции векторов-индикаторов на ассоциированные подпространства указывают на выделенные зоны вне зависимости от разбиения. Высокая степень совпадения отношений собственных значений, используемых при нормировке (табл. 3), подтверждает адекватность отображения свойств рассматриваемой системы при разных разбиениях. Также отметим высокую точность вычисляемых проекций.

Некоторое различие в проекциях для зон с одинаковыми свойствами в симметричной системе (см. кривые 1 и 3 на рис. 5, а) обусловлено несимметричностью исходной матрицы  $A_{100}$ . Подобные различия можно наблюдать и для несимметричной системы при  $n = 18$  и  $36$  (рис. 8, проекции 2 и

Таблица 2

Пространственно-материальная структура несимметричной системы

$w, \%$	4,5	0,7	90	0,7	4,5	0,7	90
Длина, см	40	60	40	80	40	60	40

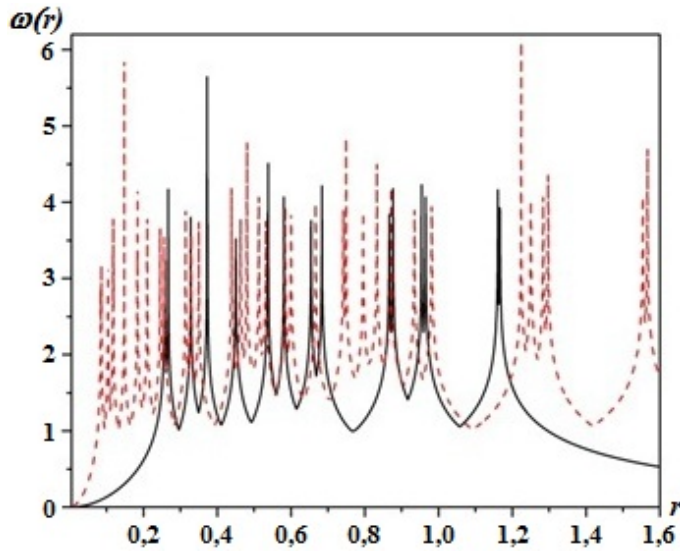


Рис. 6. Спектральные портреты матриц для  $n = 18$  (—) и  $n = 36$  (---)

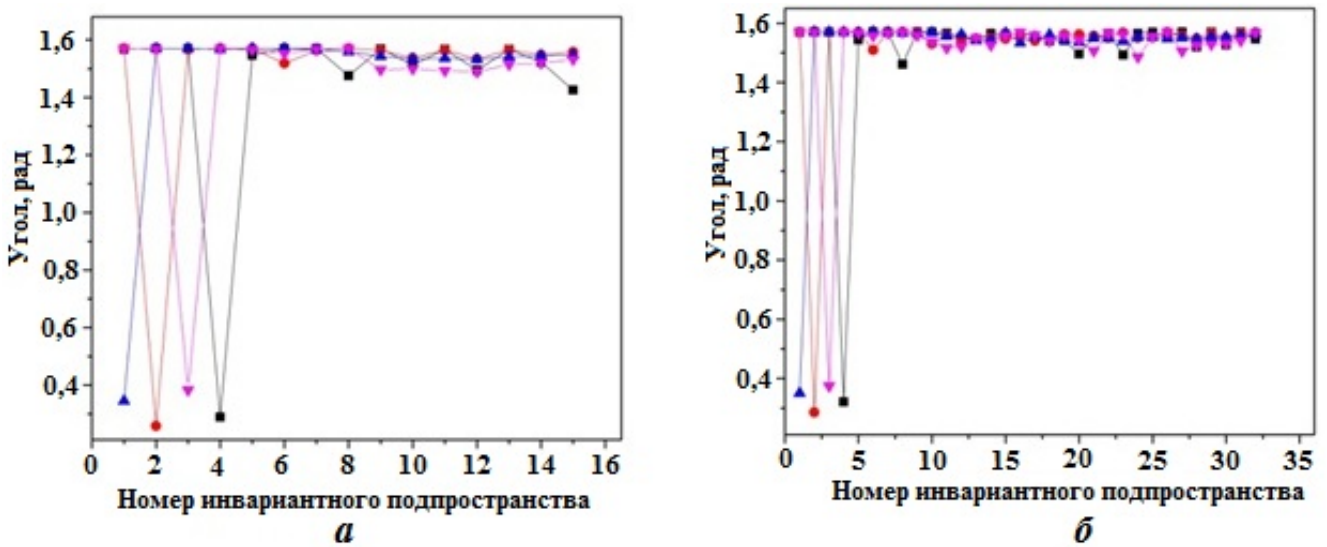


Рис. 7. Углы между векторами-индикаторами  $e$  (—■—),  $f$  (—●—),  $g$  (—▲—),  $h$  (—▼—) и инвариантными подпространствами для системы с  $n = 18$  (а) и  $n = 36$  (б)

Таблица 3

Отношения собственных значений для несимметричной системы

Размеры матрицы	$r_{\max} = r_g$	$r_e/r_{\max}$	$r_f/r_{\max}$	$r_h/r_{\max}$
18×18	1,1664	0,9952	0,8271	0,8181
36×36	1,5666	0,9920	0,8279	0,8195

4, 1 и 3). Такая "чувствительность" метода к исходным матрицам позволяет проводить детальные исследования систем с разными вариантами их представлений, в том числе пограничных областей, для которых получаемые проекции отражают усредненные показатели смежных зон с разными свойствами (например, разными  $w$ ).

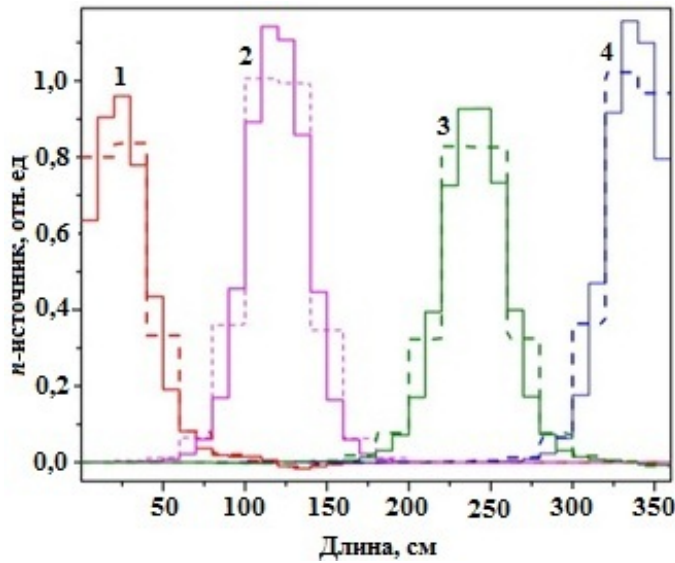


Рис. 8. Распределения нейтронов в несимметричной системе при  $n = 18$  (---) и  $n = 36$  (—), полученные в виде проекций векторов-индикаторов: 1 —  $e$ ; 2 —  $g$ ; 3 —  $h$ ; 4 —  $f$

Таким образом, представленные результаты показывают, что нормированные проекции векторов-индикаторов на указанные ассоциированные подпространства, вычисленные в соответствии с п. 5 описания метода АИП, достоверно отражают свойства зон системы.

### Заключение

Классическая постановка спектральной задачи с матрицей деления не обеспечивает получения достоверных распределений нейтронов для слабосвязных систем. Для решения задач в таких системах представлен метод АИП, основанный на методе дихотомии матричного спектра.

При работе с несимметричными матрицами метод АИП имеет ряд преимуществ по сравнению с традиционным подходом. Данный метод, наследуя особенности метода дихотомии матричного спектра, не чувствителен к кратности, вещественности или комплексности собственных значений. Алгоритмы метода АИП позволяют оценить точность результата и гарантировать быструю сходимость. В алгоритмах предусмотрена возможность выполнения итерационного процесса без обращения матриц [21].

Алгоритм дихотомии матричного спектра, лежащий в основе метода АИП, разработан не только для локализации собственных значений  $\lambda$  матрицы  $A$ ,  $\det(A - \lambda I) = 0$ , где  $I$  — единичная матрица, но и для спектра матричных пучков  $\det(A - \lambda B) = 0$ , где  $B$  — произвольная квадратная матрица. Это позволит в ближайшем будущем распространить данный подход на задачи о распределениях нейтронов в системах, представляемых не одной, а несколькими матрицами, описывающими как размножающие, так и поглощающие свойства системы.

Предполагается исследование эффективности метода АИП для вычисления распределений нейтронов в слабосвязных системах с более сложной пространственной структурой, например, с выделенными узкими (меньше длины свободного пробега нейтрона) пространственными зонами, свойства которых заметно отличаются от свойств смежных зон.

Работа выполнена частично в рамках государственного задания Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН (проект FWNF-2022-0008).

## Список литературы

1. *Sahni D. C.* Some new results pertaining to criticality and time eigenvalues of one-speed neutron-transport equation // Prog. in Nucl. Eng. 1996. Vol. 10, No 3. P. 305–320.
2. *Shim H. J., Kim C. H.* Real variance estimation using an intercycle fission source correlation for Monte Carlo eigenvalue calculations // Nucl. Sci. Eng. 2009. Vol. 162. P. 98–108.
3. *Ueki T., Brown F. B., Parsons D. K., Kornreich D. E.* Autocorrelation and dominance ratio in Monte Carlo criticality calculations // Ibid. 2003. Vol. 145. P. 279–290.
4. *Ueki T.* Standard deviation of local tallies in global Monte Carlo calculation of nuclear reactor core // J. Nucl. Sci. Technol. 2010. Vol. 47. P. 739–753.
5. *Кизуб П. А., Митенкова Е. Ф.* Источник нейтронов деления в расчетах методом Монте-Карло для слабосвязанных систем: Препринт № ИБРАЕ-2015-02. М.: ИБРАЭ РАН.  
*Kizub P. A., Mitenkova E. F.* Istochnik neytronov deleniya v raschyetakh metodom Monte-Karlo dlya slabosvyazannykh system: Preprint № ИБРАЕ-2015-02. М.: ИБРАЭ РАН.
6. *Митенкова Е. Ф., Семенова Т. В.* Использование программы TDMCC для решения задач с доминантным отношением, близким к единице // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2015. Вып. 4. С. 3–13.  
*Mitenkova E. F., Semyenova T. V.* Ispolzovanie programmy TDMCC dlya resheniya zadach s dominantnym otnosheniem, blizkim k edinitse // Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov. 2015. Vyp. 4. S. 3–13.
7. *Brissenden R. J., Garlick A. R.* Biases in the estimation of  $K_{eff}$  and its error by Monte Carlo methods // Ann. Nucl. Energy. 1986. Vol. 13. P. 63–83.
8. *Митенкова Е. Ф., Колташев Д. А., Кизуб П. А.* Распределение скорости реакции деления в слабосвязанной системе для тестовой модели "шахматная доска" // Атомная энергия. 2014. Т. 116. Вып. 6. С. 345–350.  
*Mitenkova E. F., Koltashyev D. A., Kizub P. A.* Raspredelenie skorosti reaktсии deleniya v slabosvyazannoy sisteme dlya testovoy modeli "shakhmatnaya doska" // Atomnaya energiya. 2014. T. 116. Vyp. 6. S. 345–350.
9. *Ueki T.* Monte Carlo criticality calculation under extreme condition // J. Nucl. Sci. Tech. 2012. Vol. 49, No 12. P. 1134–1143.
10. *Семенова Т. В., Митенкова Е. Ф.* Расширение возможностей программы TDMCC для исследования больших и слабосвязанных систем // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Ядерно-реакторные константы. 2015. Вып. 1. С. 31–35.  
*Semyenova T. V., Mitenkova E. F.* Rasshirenie vozmozhnostey programmy TDMCC dlya issledovaniya bolshikh i slabosvyazannykh system // Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Yaderno-reaktornye konstanty. 2015. Vyp. 1. S. 31–35.
11. *Митенкова Е. Ф., Семенова Т. В.* Счет функций распределения нейтронов в плоских системах с протяженными неоднородными топливными областями // Атомная энергия. 2019. Т. 126. Вып. 1. С. 15–19.  
*Mitenkova E. F., Semyenova T. V.* Schyet funktsiy raspredeleniya neytronov v ploskikh sistemakh s protyazhyennymi neodnorodnymi toplivnymi oblstyami // Atomnaya energiya. 2019. T. 126. Vyp. 1. S. 15–19.
12. *Уилкинсон Дж. Х.* Алгебраическая проблема собственных значений. М.: Наука, 1970.  
*Uilkinson Dzh. Kh.* Algebraicheskaya problema sobstvennykh znacheniy. М.: Nauka, 1970.
13. *Семенова Т. В., Митенкова Е. Ф., Соловьева Е. В.* Матрица деления в программе TDMCC для расчета слабосвязанных систем // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Ядерно-реакторные константы. 2019. Вып. 2. С. 31–37.  
*Semyenova T. V., Mitenkova E. F., Solovyeva E. V.* Matritsa deleniya v programme TDMCC dlya raschyeta slabosvyazannykh system // Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Yaderno-reaktornye konstanty. 2019. Vyp. 2. S. 31–37.

14. *Годунов С. К.* Задача о дихотомии спектра матрицы // Сибирский математический журнал. 1986. Т. 27, № 5. С. 24–37.  
*Godunov S. K.* Zadacha o dikhotomii spectra matritsy // Sibirskiy matematicheskiy zhurnal. 1986. Т. 27, № 5. S. 24–37.
15. *Biberdorf E.* Development of the matrix spectrum dichotomy method // Continuum Mechanics, Applied Mathematics and Scientific Computing: Godunov's Legacy. A Liber Amicorum to Prof. Godunov. Springer, 2020. P. 37–40.
16. *Godunov S. K.* Ordinary differential equations with constant coefficient. Providence, Rhode Island: AMS, 1997.
17. *Курзин В. Б.* Определение динамических характеристик механических систем методом построения одномерных спектральных портретов // ПМТФ. 2008. Т. 49, № 1. С. 104–113.  
*Kurzin V. B.* Opredelenie dinamicheskikh kharakteristik mekhanicheskikh system metodom postroeniya odnomernykh spektralnykh portretov // PMTF. 2008. Т. 49, № 1. S. 104–113.
18. *Буньков В. Г., Годунов С. К., Курзин В. Б., Садкейн М.* Применение нового математического аппарата "Одномерные спектральные портреты матриц" к решению проблемы аэроупругих колебаний решеток и лопастей // Ученые записки ЦАГИ. 2009. Т. XL(6). С. 3–13.  
*Bunkov V. G., Godunov S. K., Kurzin V. B., Sadkeyn M.* Primenenie novogo matematicheskogo apparata "Odnomernye spektralnye portrety matrits" k resheniyu problem aerouprugikh kolebaniy reshyetok i lopastey // Uchyenye zapiski TsAGI. 2009. Т. XL(6). S. 3–13.
19. *Бибердорф Э. А., Блинова М. А., Попова Н. И.* Модификации метода дихотомии матричного спектра и их применение к задачам устойчивости // Сибирский журнал вычисл. мат. 2018. Т. 21, № 2. С. 139–153.  
*Biberdorf E. A., Blinova M. A., Popova N. I.* Modifikatsii metodom dikhotomii matrichnogo spectra i ikh primeneniye k zadacham ustoychivosti // Sibirskiy zhurnal vychisl. mat. 2018. Т. 21, № 2. S. 139–153.
20. *Блинова М. А., Попова Н. И., Бибердорф Э. А.* Приложение дихотомии матричного спектра к исследованию устойчивости течений // Тр. межд. науч. конф. "Марчуковские чтения". Новосибирск: ИВМиМГ СО РАН, 2017. С. 106–112.  
*Blinova M. A., Popova N. I., Biberdorf E. A.* Prilozhenie dikhotomii matrichnogo spectra k issledovaniyu ustoychivosti techeniy // Tr. mezhd. nauch. konf. "Marchukovskie chteniya". Novosibirsk: IVMiMG SO RAN, 2017. S. 106–112.
21. *Малышев А. Н.* Введение в вычислительную линейную алгебру. Новосибирск: Наука, 1991.  
*Malyshev A. N.* Vvedenie v vychislitelnyuyu lineynuyu algebru. Novosibirsk: Nauka, 1991.
22. *Годунов С. К.* Современные аспекты линейной алгебры. Новосибирск: Научная книга, 1997.  
*Godunov S. K.* Sovremennye aspekty lineynoy algebrы. Novosibirsk: Nauchnaya kniga, 1997.
23. *Бибердорф Э. А., Попова Н. И.* Несимметричная матричная проблема: Препринт ИЯФ 2010-39. Новосибирск: ИЯФ СО РАН, 2010.  
*Biberdorf E. A., Popova N. I.* Nesimmetrichnaya matrichnaya problema: Preprint IYaF 2010-39. Novosibirsk: IYaF SO RAN, 2010.
24. *Blomquist R., Amirshaw M., Hanlon D., Smith N., Naito Yo., Yang J., Mioshi Yo., Yamamoto T., Jacquet O., Miss J.* Source Convergence in Criticality Safety Analysis. Phase I: Results of Four Test Problems. № 5431. OECD/NEA, 2006.