

УДК 519.6

## УЛУЧШЕНИЕ КАЧЕСТВА ОБЪЕМНЫХ ЯЧЕЕК ПУТЕМ УДАЛЕНИЯ МАЛЫХ РЕБЕР ПРИ ГЕНЕРАЦИИ СЕТОК МЕТОДОМ ОТСЕЧЕНИЯ В ПАКЕТЕ ПРОГРАММ "ЛОГОС"

Д. Н. Смолкина  
(ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области)

Описан подход к удалению малых ребер в многогранных ячейках при генерации неструктурированных сеток методом отсечения в пакете программ "Логос". Удаление малых ребер выполняется при отсечении ячеек шаблонной сетки треугольниками поверхностной сетки. Под малым ребром понимается ребро многогранной ячейки, длина которого составляет меньше 30 % длины ребра ячейки шаблонной сетки. Отсекаемые ячейки разделяются на два типа — содержащие характерные особенности модели и простые ячейки. Подходы к удалению малых ребер для каждого типа ячеек существенно различаются. Для простых отсекаемых ячеек используется алгоритм, основанный на методе марширующих кубов. При удалении малых ребер в ячейках, содержащих характерные особенности модели, выполняется анализ совокупности объемов тетраэдров, построенных путем разбиения выпуклой отсеченной ячейки и ее окрестности. Способ построения тетраэдров, а также условие выпуклости ячейки и ее окрестности гарантируют положительность объемов всех сформированных тетраэдров, что является необходимым условием для удаления малых ребер. Тестирование предложенных алгоритмов показало, что данный подход позволяет удалять из сетки до 70 % малых ребер, является автоматическим и универсальным, так как не зависит от класса рассматриваемых задач. Это позволяет применять его для построения многогранных сеток на геометрических моделях произвольной сложности.

*Ключевые слова:* пакет программ "Логос", неструктурированная сетка, улучшение качества сетки, малые ребра, метод отсечения.

### Введение

В пакете программ "Логос" [1] одним из этапов подготовки расчетных сеток для численного моделирования задач аэро- и гидродинамики является генерация сеток методом отсечения [2]. Генератор позволяет выполнять построение сеточных моделей для объектов с произвольной геометрией, что делает его универсальным средством для проведения численных исследований в области аэро- и гидродинамики. Одна из главных отличительных особенностей этого генератора заключается в том, что он является полностью автоматическим. Автоматизация построения сетки неизбежно накладывает жесткие требования к алгоритмам генерации сетки.

Одним из наиболее ярких примеров является построение отсеченного многогранника (ячейки сетки) с заданными свойствами. Вне зависимости от входных данных отсеченная ячейка должна быть максимально хорошего качества (т. е. удовлетворять определенным критериям), иначе численное моделирование может завершиться неудачно. Вопросу качества сеток посвящено большое количество исследований. Так, например, в работах [3–7] приводится описание методов, позволяющих улучшать качество сеток, состоящих из таких элементов, как треугольник, призма, пирамида и шестигранник. В работах [8, 9] рассматриваются подходы к улучшению качества сеток с многогранными элементами.

В работе [8] отмечается, что в сетках с многогранными элементами к проблемам приводит

наличие малых ребер: образуются ячейки с малым объемом, грани с малой площадью и т. д. В данной статье описан метод, используемый для удаления малых ребер\* в выпуклых ячейках на основе разбиения выпуклых многогранных ячеек на тетраэдры.

### Формулировка подхода к удалению малых ребер

Модуль отсечения является одной из составных частей генератора объемных сеток на основе метода отсечения. Основные этапы работы генератора подробно описаны в работе [2]. Входными данными для работы модуля является поверхностная треугольная сетка (пример сетки

\*Под удалением ребра понимается замена одного его узла на другой.

показан на рис. 1, а) с выделенными характерными особенностями (если они имеются) (рис. 1, б), а также декартов адаптивный шаблон (рис. 1, в).

Под характерными особенностями понимаются острые края исходной поверхностной сетки. На рис. 2 более подробно показан пример модели, взятой из работы [10], с выделенными в ней характерными особенностями.

Ячейки декартова адаптивного шаблона — параллелепипеды, грани которых могут быть дополнительно разбиты, — далее будем называть *шаблонными ячейками*.

Отсечение треугольными ячейками (для краткости *треугольниками*) исходной поверхностной сетки проводится отдельно для каждой шаблонной ячейки, в которую они были распределены на предыдущем этапе работы генератора [2]. Пример шаблонной ячейки с попавшими в нее треугольниками показан на рис. 3.

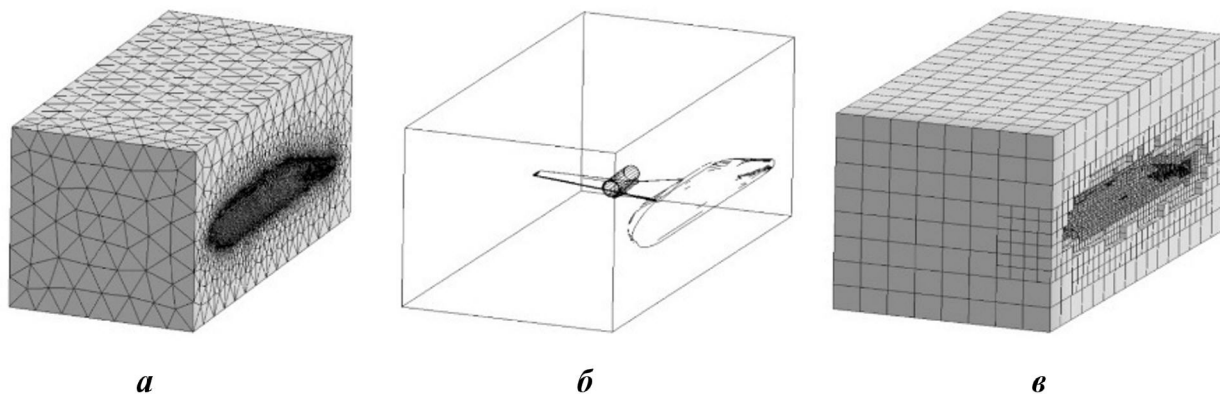


Рис. 1. Набор входных данных для работы модуля отсечения: а — поверхностная треугольная сетка; б — характерные особенности; в — декартов адаптивный шаблон

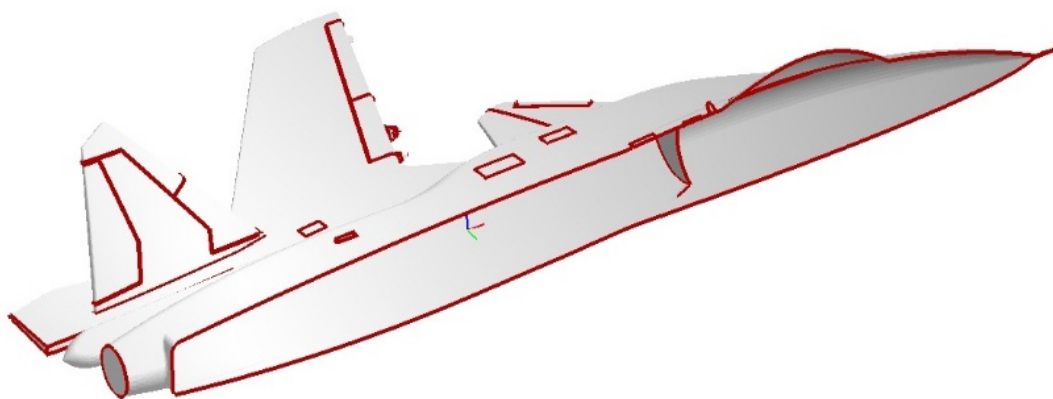


Рис. 2. Пример модели с выделенными характерными особенностями

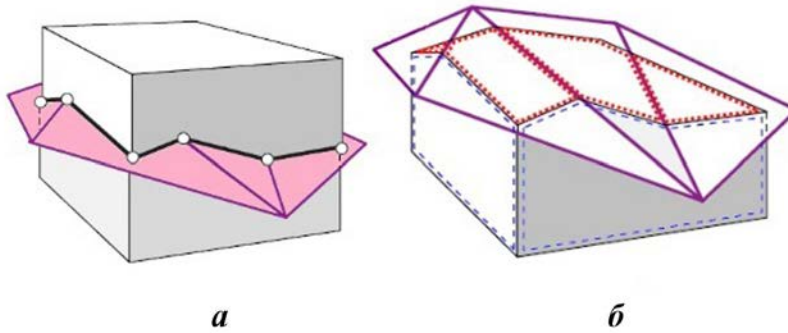


Рис. 3. Исходная шаблонная ячейка: *a* — с набором треугольников; *б* — с отброшенной внешней частью относительно сетки из треугольников

В зависимости от наличия или отсутствия характерных особенностей в рассматриваемой ячейке формируется одна или несколько поверхностных граней. Под поверхностной гранью понимается грань отсеченной ячейки, узлы которой лежат на исходной поверхностной треугольной сетке. Грани отсеченной ячейки, расположенные внутри объема, ограниченного исходной поверхностной сеткой, будем называть внутренними. Грани отсеченной ячейки, полученные в результате отсечения треугольниками, — отсеченные.

Так как в основе модуля отсечения лежит поиск пересечений треугольников с ячейками шаблонной сетки, при построении могут возникать ребра малой длины, которые приводят к появлению многогранных ячеек с малым объемом (меньше  $10^{-20} \text{ м}^3$ ), неудовлетворительным отношением длин сторон (больше 1000), малыми площадями граней (меньше  $10^{-20} \text{ м}^2$ ) и т. д. Пример фрагмента сетки с такими ячейками показан на рис. 4.

В свою очередь, малые поверхностные грани в отсеченных ячейках приводят к появлению малых призматических ячеек, так как построение призматических слоев в генераторе проводится на основе поверхностных граней, полученных после отсечения треугольниками ячеек шаблонной сетки. В результате одна малая грань отсеченной ячейки приводит к образованию нескольких слоев малых призматических ячеек.

В зонах сетки, не содержащих характерных особенностей, проблема малых ребер была успешно решена путем выделения основных типовых случаев пересечения шаблонной ячейки треугольниками поверхностной сетки. Пример показан на рис. 5: желтым цветом отмечены внутренние узлы шаблонной ячейки и треугольники, попавшие в ячейку. Для всех представленных случаев был реализован единый алгоритм удаления малых ребер из сетки. При разработке алгоритма использовался метод марширующих кубов [11].

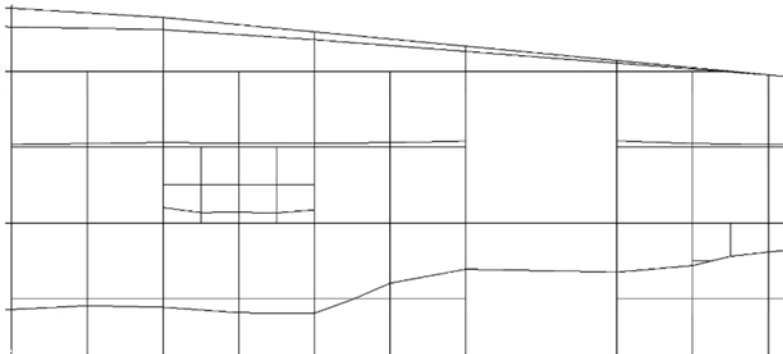


Рис. 4. Пример сетки с ячейками, содержащими малые ребра

Поясним на примере использование алгоритма удаления малых ребер при отсутствии характерных особенностей. Некоторые случаи пересечения шаблонной ячейки с треугольниками, показанные на рис. 5, можно сгруппировать с точки зрения удаления малых ребер (рис. 6). После этого, независимо от расположения узлов, отмеченных на рис. 6 желтым цветом (внутри объема, ограниченного исходной треугольной сеткой или вне его), малые ребра из данных ячеек удаляются единообразно по следующим правилам. Узлы  $A, B, C, D$  (рис. 7) будут объединены в один узел  $D$ . Затем узел  $D$  будет спроецирован на поверхность треугольной сетки.

В областях же, через которые проходят характерные кривые, могут возникать ячейки достаточно сложной формы (как выпуклые, так и невыпуклые). Примеры таких ячеек показаны на рис. 8. Формы таких ячеек могут быть любыми, и они не подлежат обобщению.

В работе [12] приводится *условие допустимости* многогранной ячейки сетки. Многогранная ячейка считается допустимой, если:

- a) она является *звездной* относительно центра тяжести своих вершин (отрезок, соединяю-

щий центр тяжести с любой из вершин ячейки, располагается внутри ячейки);

- б) центр тяжести каждой грани лежит внутри конуса, натянутого на ребра грани, с вершиной в точке  $C$  центра тяжести многогранника.

Пример допустимой ячейки показан на рис. 9.

Координаты центра тяжести  $C_f$  грани  $f$  определяются по формуле

$$\vec{C}_f = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \vec{n}_i, \quad (1)$$

где  $N$  — количество узлов грани;  $\vec{n}_i$  — координаты  $i$ -го узла грани.

Координаты центра тяжести ячейки  $C$  вычисляются следующим образом:

$$\vec{C} = \frac{1}{N_f} \sum_{i=1}^{N_f} \vec{C}_{f_i},$$

где  $N_f$  — количество граней ячейки;  $\vec{C}_{f_i}$  — координаты центра грани, вычисленные по форму-

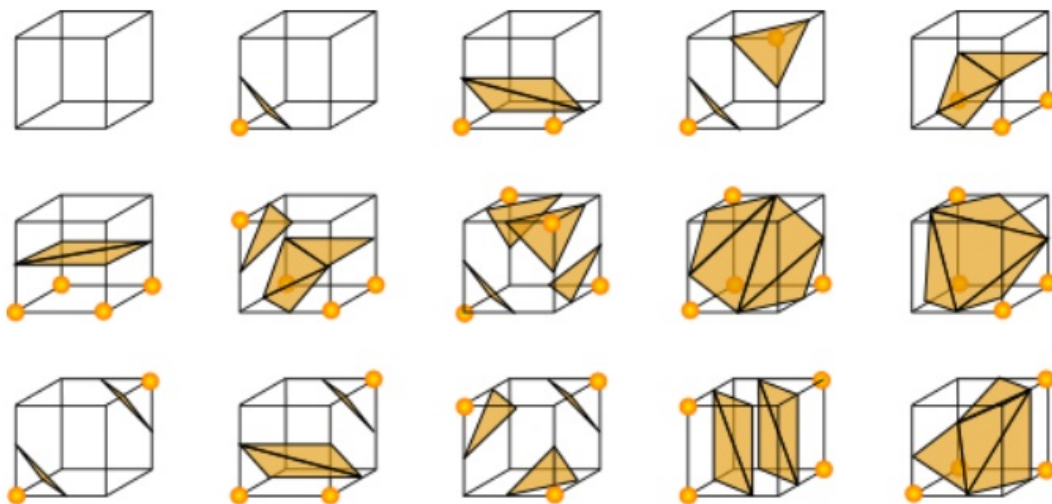


Рис. 5. Возможные варианты пересечений треугольника с кубом



Рис. 6. Пример обобщения случаев пересечения шаблонных ячеек с треугольниками для единообразного удаления малых ребер

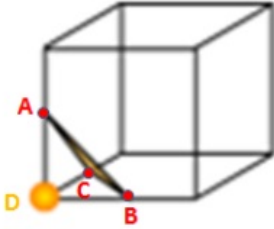


Рис. 7. Пример удаления малых ребер из ячейки, не содержащей характерных особенностей

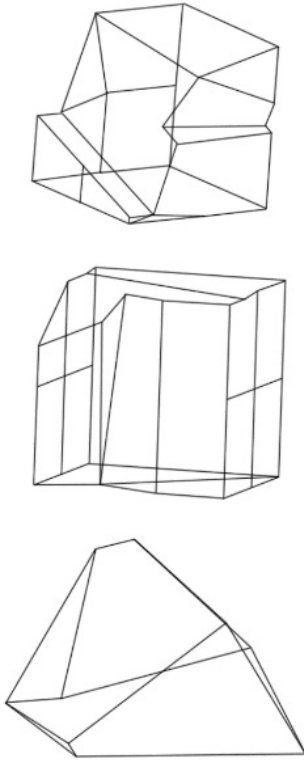


Рис. 8. Примеры отсеченных ячеек, построенных на основе шаблонных ячеек, содержащих характерные особенности модели

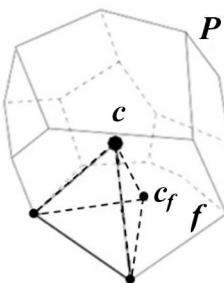


Рис. 9. Допустимая многогранная ячейка

ле (1). Таким образом, в работе [12] делается вывод, что многогранная ячейка является допустимой, если каждый из тетраэдров вида, показанного на рис. 9, имеет положительный объем. Полное количество таких тетраэдров равно  $2n_e$ , где  $n_e$  — количество ребер.

Исходя из такого определения допустимости многогранной ячейки, можно сделать вывод, что при удалении малого ребра из ячейки достаточно проверить положительность объемов тетраэдров преобразованной ячейки. Если объемы всех тетраэдров, полученных после удаления ребра, остаются положительными, то удаление ребра является допустимой операцией над сеткой, в противном случае — недопустимой, и ребро остается в сетке.

Отметим, что данное правило справедливо только для выпуклых многогранных ячеек. Выпуклость ячейки определяется по формуле [13] (рис. 10)

$$\alpha = \begin{cases} \arccos \left( - \left( \vec{N}_1, \vec{N}_2 \right) \right), & \left[ \vec{N}, \left( \vec{N}_1, \vec{N}_2 \right) \right] > 0; \\ 2\pi - \arccos \left( - \left( \vec{N}_1, \vec{N}_2 \right) \right), & \left[ \vec{N}, \left( \vec{N}_1, \vec{N}_2 \right) \right] \leq 0, \end{cases}$$

где  $\vec{N}_1$  — нормаль к первой поверхностной грани;  $\vec{N}_2$  — нормаль ко второй поверхностной грани;  $\vec{N}$  — вектор ребра между двумя гранями, ориентированный против часовой стрелки относительно первой грани. Если  $\alpha \geq \pi$ , то ячейка выпуклая; если  $\alpha < \pi$  — невыпуклая.

При генерации сеток методом отсечения реализован алгоритм разрезания невыпуклых многогранных ячеек на множество выпуклых, поэтому алгоритм удаления ребер в ячейках может быть использован для всех выпуклых ячеек сетки после выполнения разрезания.

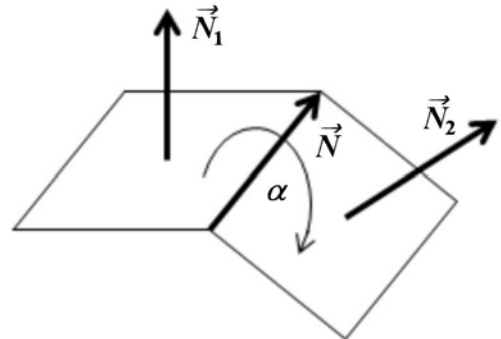


Рис. 10. Иллюстрация к формуле определения выпуклости ячейки



## Алгоритм удаления малых ребер из выпуклых многогранных ячеек

**Разбиение ячейки на тетраэдры.** Алгоритм удаления малых ребер в выпуклых ячейках с характерными кривыми является одной из составляющих частей модуля отсечения. Под малыми ребрами в данном алгоритме подразумеваются ребра ячейки, длина которых меньше 30% длины ребра шаблонной ячейки до отсечения. При выполнении алгоритма рассматриваются все выпуклые ячейки, через которые проходят характерные кривые. Все ячейки, в окрестности которых есть невыпуклые ячейки, не участвуют в преобразовании. Под окрестностью ячейки понимаются все соседи по узлам текущей рассматриваемой ячейки.

Для каждой рассматриваемой ячейки производится оценка ее ребер, т. е. формируется список ребер — кандидатов на удаление. Если список пуст, то выполняется переход к следующей ячейке по списку, иначе текущая рассматриваемая ячейка разбивается на множество тетраэдров. Пример ячейки, разбитой на тетраэдры, показан на рис. 11.

Разбиение ячейки проводится аналогично тому, как было предложено в работе [12]: каждый тетраэдр натянут на центр тяжести многогранника  $S$ , центр тяжести одной из граней  $S_f$ , а также одно из ребер этой грани (см. рис. 9). Окрестность рассматриваемой ячейки также разбивается на тетраэдры. В результате получаем фрагмент сетки, состоящий из тетраэдров (рис. 12).

Следует отметить, что разбиение ячейки на множество тетраэдров является лишь вспомогательным средством для оценки возможности удаления ребер из многогранной ячейки и не является частью результирующей многогранной сетки.

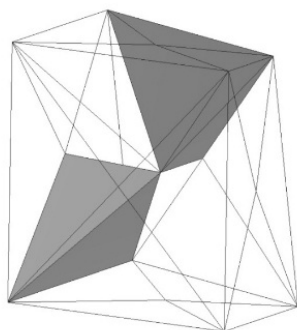


Рис. 11. Пример разбиения ячейки на тетраэдры

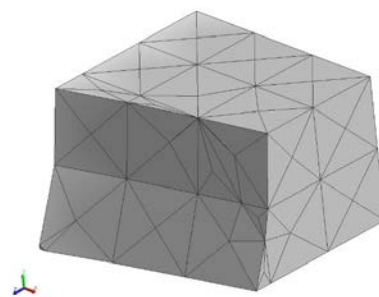


Рис. 12. Разбиение на тетраэдры рассматриваемой ячейки и ее окрестности

**Удаление ребра из сетки.** Для проверки возможности удаления малых ребер из ячейки, содержащейся в полученном фрагменте, из этих ребер формируются все возможные сочетания без повторов (кортежи). Все кортежи обрабатываются последовательно в порядке уменьшения количества содержащихся в них ребер.

При рассмотрении кортежа производится удаление всех его ребер из тетраэдральной сетки. В результате вместо исходной сетки получается преобразованная сетка из тетраэдров. После этого оцениваются знаки объемов всех тетраэдров, в которые входят узлы удаляемых ребер. Объем положителен, если

$$\begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix} > 0,$$

т. е. если векторы  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ ,  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ ,  $\vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$ , направленные вдоль ребер одного из трехгранных углов тетраэдра, образуют правую тройку.

Если хотя бы один из тетраэдров имеет отрицательный объем, то переходим к рассмотрению следующего кортежа. Операция повторяется до тех пор, пока не будет найден подходящий кортеж или не будут рассмотрены все кортежи.

Отдельно следует отметить, что на измененные многогранные ячейки также накладываются ряд ограничений. Удаление малых ребер из сетки не должно приводить к образованию *вырожденных* многогранных ячеек (состоящих менее чем из четырех граней):

- содержащих *внутренние* точки (находящиеся внутри объема, ограниченного исходной поверхностной сеткой);
- не являющихся плоскими.

**Дополнительное движение узлов сетки.**

Удаление малых ребер не всегда приводит к укрупнению поверхностных граней отсеченной сетки. Подобная ситуация показана на рис. 13. В данном случае условие положительности объемов тетраэдров в окрестности ячейки выполнено, но фактически удаление малых ребер грани привело к ухудшению качества сетки: пятиузловая грань  $GABCM$  преобразовалась в трехузловую  $GBM$  меньшей площади.

Из данного примера следует, что производить удаление малых ребер из сетки недостаточно. Чтобы предотвратить возникновение подобных ситуаций, были добавлены операции перемещения узла и разбиения ребра сетки узлом. Кратко опишем эти операции.

Пусть дана грань многогранной сетки, показанная на рис. 14. Грань состоит из узлов 1—5. Узлы 2—4 расположены внутри треугольной исходной сетки, а узлы 1, 5 — на ее поверхности. Ребра 1-2, 4-5 — малые, их желательно из сетки удалить. Но ребра можно удалять тогда и только тогда, когда узел 3 переместится в новый узел  $3^*$ . Если узлы 1 и 5 — обычные поверхностные узлы, то узел должен быть просто спроецирован на поверхность исходной треугольной сетки;

если же узлы 1 и 5 принадлежат одному характерному ребру, то узел  $3^*$  также должен быть "посажен" на это характерное ребро. Предположим, что в текущей рассматриваемой ячейке нет больше малых ребер. Тогда ребро 1-2 получит локальный номер 1, ребро 4-5 — локальный номер 2, а движение точки 3 в узел  $3^*$  — номер 3. Таким образом, единственно возможный кортеж удаляемых ребер в ячейке —  $1\_2\_3$ . Других вариантов удаления нет.

После перемещения узла необходимо произвести разбиение ребра сетки. Так, для примера, показанного на рис. 14, в сетку будет добавлено два ребра: 1- $3^*$  и  $3^*$ -5, а сама грань будет удалена из сетки. Даже если отсеченная грань имеет более сложный вид, принцип удаления ребер из нее является одним и тем же как для поверхностных, так и для внутренних граней. Имеется одна лишь разница: поверхностные грани вырождаются, если удаление малых ребер приводит к образованию сильно вытянутой грани, т. е. грани, в которой периметр много больше ее площади. Определение таких граней осуществляется согласно формуле

$$k = \frac{P^2}{4\pi S},$$

где  $P$  — периметр грани;  $S$  — площадь грани. Если  $k > 25$ , то грань считается сильно вытянутой.

Помимо образования сильно вытянутых граней при удалении малых ребер, необходимо избегать образования граней, все узлы которых принадлежат одному характерному ребру. Такие грани необходимо удалять из сетки.

**Результаты апробации алгоритма**

При тестировании на задачах, переданных представителями предприятий разных отраслей промышленности, была получена следующая статистика: предложенный алгоритм позволяет удалять до 70% малых ребер из сетки; улучшения по изменению соотношений объемов наблюдалось на 85% задач, по соотношению площадей — на 60% задач. Данные для некоторых задач по критерию *Неудовлетворительное соотношение длин ребер в ячейке* ( $> 1000$ ) приводятся в таблице.

На рис. 15, 16 показаны результаты работы модуля отсечения для моделей DLRF6 и SU37 [3].

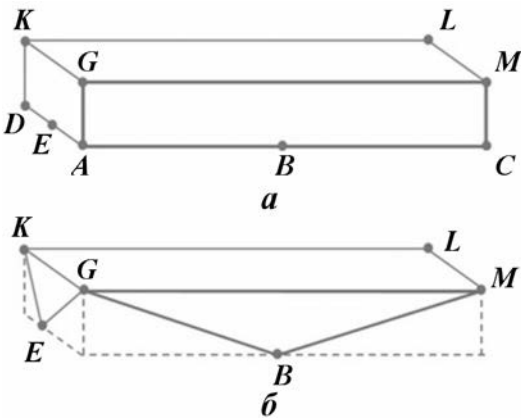


Рис. 13. Пример уменьшения площади поверхностной грани:  $a$  — ячейка до удаления малых ребер;  $b$  — ячейка после удаления малых ребер

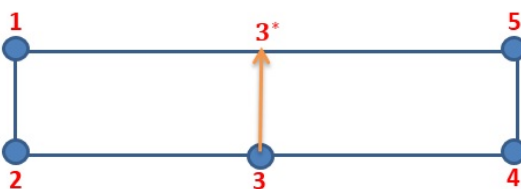
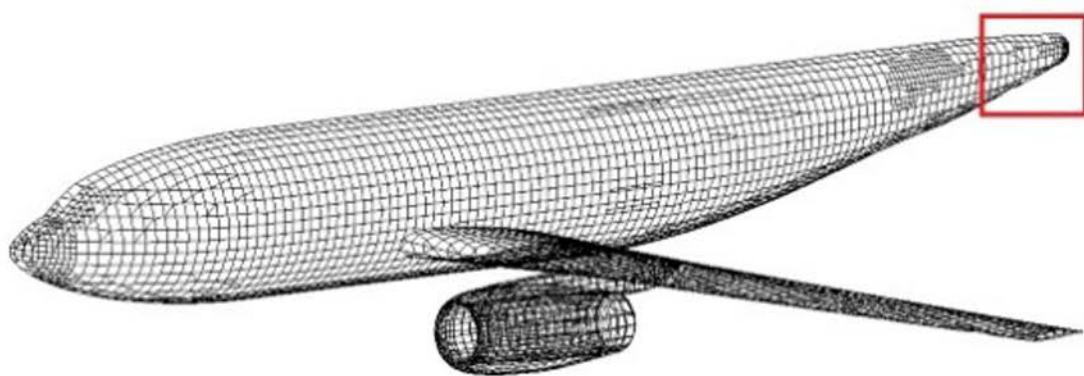
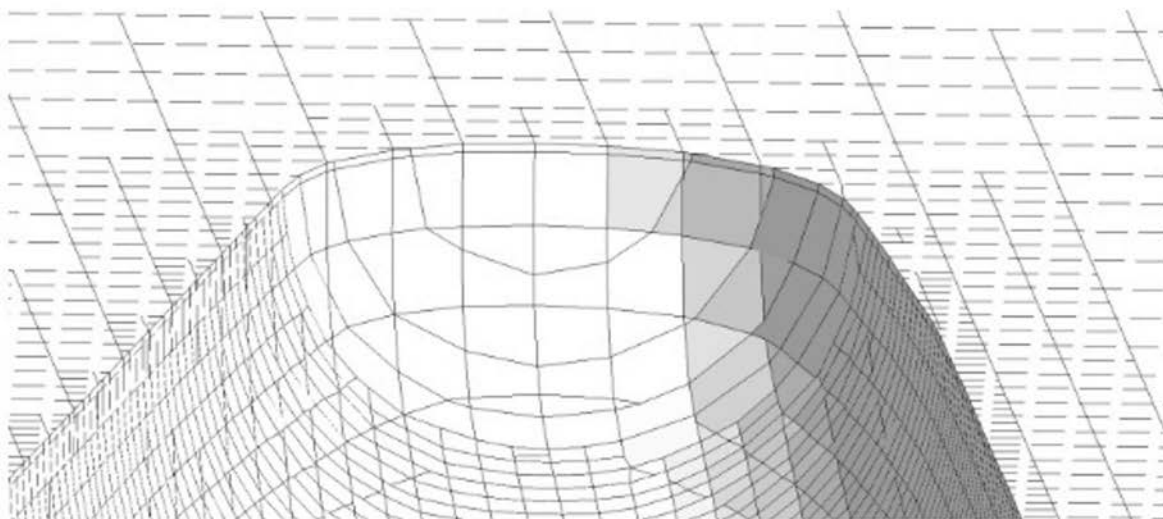


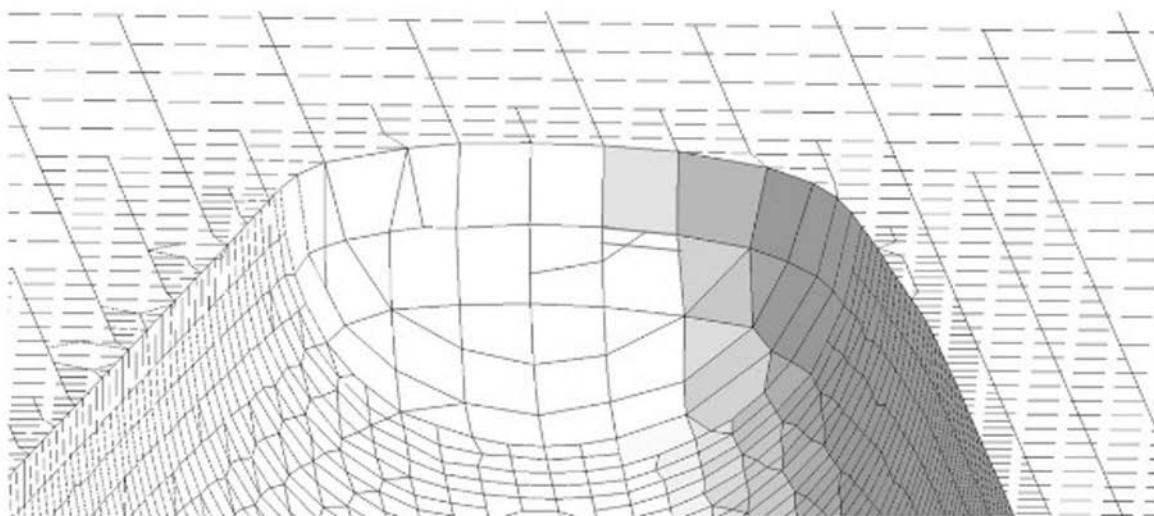
Рис. 14. Схематичный пример грани



*a*



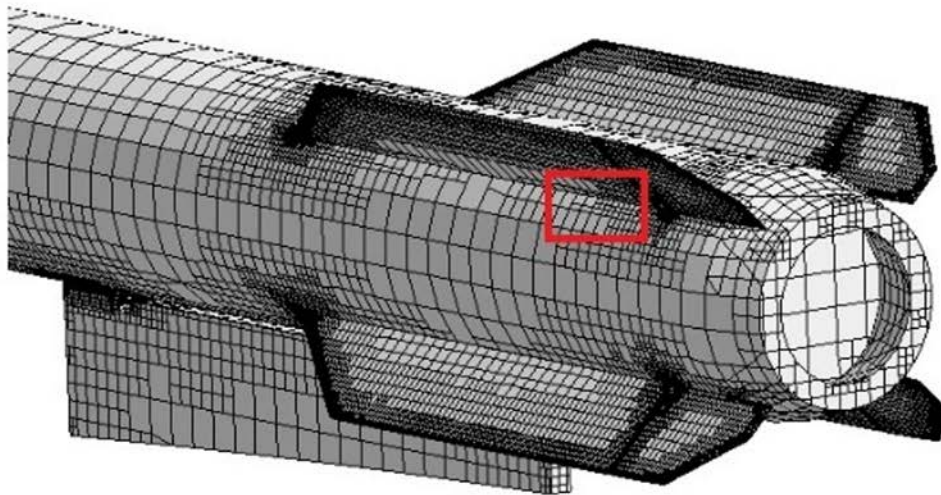
*б*



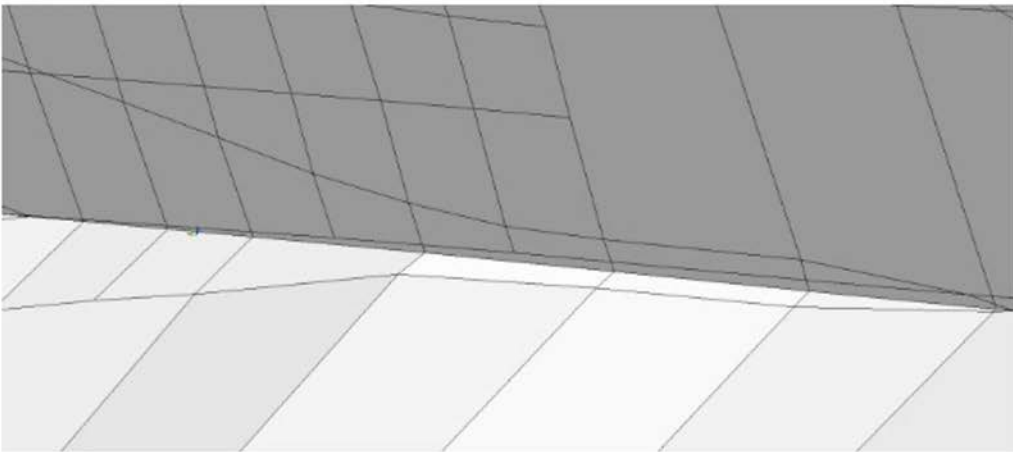
*в*

Рис. 15. Результат работы модуля отсечения для модели DLR F6: *a* — исходная сетка с выделенным фрагментом; *б* — фрагмент сетки до исправления; *в* — фрагмент сетки после исправления

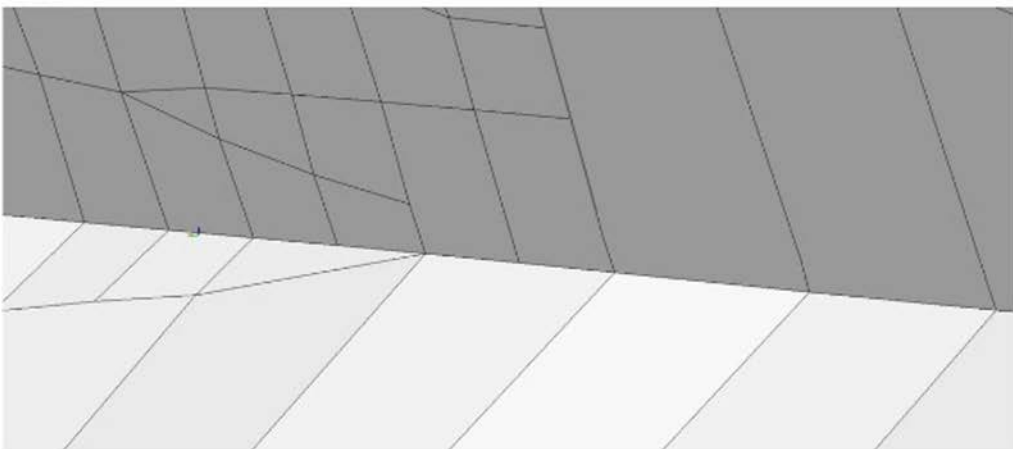




*a*



*б*



*в*

Рис. 16. Результат работы модуля отсечения для фрагмента модели SU37: *a* — исходная сетка с выделенным фрагментом в области крыла ракеты; *б* — фрагмент сетки до исправления; *в* — фрагмент сетки после исправления

**Данные для некоторых задач по критерию Неудовлетворительное соотношение длин ребер в ячейке**

Номер задачи	Количество неудовлетворительных отсеченных ячеек	
	до удаления малых ребер	после удаления малых ребер
1	666	15
2	222	26
3	243	3
4	13	0
5	177	15
6	206	21

**Заключение**

В данной работе приведено описание подхода к удалению малых ребер при генерации сеток методом отсечения в пакете программ "Логос". При реализации подхода были учтены особенности формирования ячеек в генераторе. На основании этого был предложен ряд ограничений и условий по корректному удалению малых ребер в ячейках, а также дополнительные операции по модификации сетки, что позволило повысить эффективность применения подхода.

Реализованный алгоритм является автоматическим и универсальным, так как не зависит от класса рассматриваемых задач, что позволяет применять его для построения многогранных сеток на геометрических моделях произвольной сложности.

Описанный подход позволил повысить качество расчетных сеток, обеспечив существенное расширение возможностей по проведению численного моделирования задач аэро- и гидродинамики на данных сетках.

**Список литературы**

1. Фархутдинов В. Ф., Тарасов В. И., Соловьёв А. Н., Борисенко О. Н., Лазарев В. В., Логинов Д. В., Аверина Н. С., Марунин А. В., Гриднев А. И., Федякина М. Г., Кузнецов М. Г., Черенкова М. В., Фролова Е. А., Лукичёв А. Н., Смолкина Д. Н., Купалова А. Г., Кузьменко М. В., Сергеева А. С., Попова Н. В., Баканова Т. Ю. Обзор возможностей по обработке геометрических и построению сеточных моделей в

Логос.Препост // Тр. XIV Межд. конф. "Супервычисления и математическое моделирование". Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2013. С. 585—592.

*Farkhutdinov V. F., Tarasov V. I. Solov'yev A. N., Borisenko O. N., Lazarev V. V., Averina N. S., Marunin A. V., Gridnev A. I., Fedyakina M. G., Kuznetsov M. G., Cherenkova M. V., Frolova E. A., Lukichyev A. N., Smolkina D. N., Kupalova A. G., Kuzmenko M. V., Sergeeva A. S., Popova N. V., Bakanova T. Yu. Obzor vozmozhnostey po obrabotke geometricheskikh i postroeniyu setochnykh modeley v Logos.Prepost // Tr. XIV Mezhd. konf. "Supervychisleniya i matematicheskoe modelirovanie". Sarov: RFYaTs-VNIIEF. 2013. S. 585—592.*

2. Смолкина Д. Н., Борисенко О. Н., Черенкова М. В., Гиниятуллина А. Г., Кузьменко М. В., Чухманов Н. В., Потехина Е. В., Попова Н. В., Турусов М. Р. Автоматический генератор неструктурированных многогранных сеток в препроцессоре пакета программ ЛОГОС // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2018. Вып. 2. С. 25—37.

*Smolkina D. N., Borisenko O. N., Cherenkova M. V., Giniyatullina A. G., Kuzmenko M. V., Chukhmanov N. V., Potekhina E. V., Popova N. V., Turusov M. R. Avtomaticheskij generator nestrukturovannykh mnogogrannykh setok v preprotsessore paketa programm LOGOS // Voprosy atomnoy nauki i tekhniki . Ser. Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov. 2018. Vyp. 2. S. 25—37.*

3. Knupp P. Achieving finite element mesh quality via optimization of the jacobian matrix norm and associated quantities. Part I — A framework for surface mesh optimization & the contition number of the jacobian matrix // Proc. 8th Int. Meshing Roundtable. Sandia National Laboratories. 1999. P. 13—22.

4. Knupp P. Achieving finite element mesh quality via optimization of the jacobian matrix norm and associated quantities. Part II — A framework for volume mesh optimization & the contition number of the jacobian matrix // Int. J. Num. Meth. 2000. Vol. 48. P. 1165—1185.

5. *Freitag L.* On combining Laplacian and optimization based smoothing techniques in trends in unstructured mesh generation // Applied Mechanics Division. 1997. Vol. 220. P. 37–44.
6. *Zavattieri P.* Optimization strategies in unstructured mesh generation // Int. J. Num. Meth. 1996. Vol. 39. P. 2055–2071.
7. *Paoletti S.* Practical optimization based smoothing of tetrahedral meshes // Proc. 7th Int. Conf. on Numerical Grid Generation in Computational Field Simulation. Whistler, September 25–28. British Columbia, Canada, 2000. P. 45–53.
8. *Oaks W., Paoletti S.* Polyhedral mesh generation // Proc. 9th Int. Meshing Roundtable. New Orleans, Louisiana, USA, 2000. P. 57–67.
9. *Paoletti S.* Polyhedral mesh optimization using the interpolation tensor // Proc. 11th Int. Meshing Roundtable. New Orleans, Louisiana, USA, 2002. P. 19–28.
10. GrabCad. <http://www.grabcad.com>.
11. *William E. Lorensen, Harvey E. Cline.* Marching cubes: A high resolution 3D surface construction algorithm // Computer Graphics. 1987. Vol. 21. P. 163–169.
12. *Ivanenko S. A.* Grid generation with cell shape control // Computational Mathematical Physics. 2000. Vol. 40, No 11. P. 1662–1684.
13. *Owen S. J.* Non-Simplicial Unstructured Mesh Generation. Ph. D. Dissertation. Pittsburg, Pennsylvania: Carnegie Mellon University, 1999.

Статья поступила в редакцию 18.10.21.

---