

ISSN 2414-0171

**В**ОПРОСЫ  
**А**ТОМНОЙ  
**Н**АУКИ И  
**Т**ЕХНИКИ

Российский  
федеральный  
ядерный  
центр –  
ВНИИЭФ

---

СЕРИЯ

**Математическое моделирование  
физических процессов**

---

**2022**

ВЫПУСК 2

Главный редактор  
Шагалиев Р. М.

Заместители главного редактора:  
Алексеев А. В., Тишкин В. Ф.

Ответственный секретарь:  
Соколовская Е. В.

Члены редколлегии:

Бартенев Ю. Г., Бетелин В. Б., Бочков А. И., Вронский М. А.,  
Дрёмов В. В., Залялов Н. Н., Кибзун А. И., Козелков А. С.,  
Козманов М. Ю., Куркин А. А., Петров И. Б., Прилуцкий М. Х.,  
Смирнов Н. Н., Соколов С. С., Старостин Н. В., Степаненко С. А.,  
Храмченков М. Г., Четверушкин Б. Н., Шестаков А. А., Янилкин Ю. В.

Адрес редакции и издателя: 607188,  
г. Саров Нижегородской обл., пр. Мира, 37  
тел.: (83130)28406, *e-mail*: sokol@vniief.ru.  
Адрес сайта журнала: <http://vant.vniief.ru/>

---

# ВОПРОСЫ АТОМНОЙ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СЕРИЯ

## Математическое моделирование физических процессов

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ СБОРНИК

---

**ВЫПУСК 2**

**Саров — 2022**

Издается с 1978 г.

---

### СОДЕРЖАНИЕ

<i>Бибердорф Э. А., Митенкова Е. Ф., Семёнова Т. В., Соловьёва Е. В.</i> Метод ассоциированных инвариантных подпространств в задачах распределения нейтронов в слабосвязных системах . . .	3
<i>Янилкин Ю. В.</i> Двумерное численное моделирование опыта по перемешиванию в трехслойной газовой системе с условием прилипания на стенках ударной трубы . . . . .	17
<i>Понькин Е. И.</i> Математическое описание двух способов газодинамического воздействия на мишень с использованием решения Сучкова . . . . .	27
<i>Бликов А. О., Мочалов М. А., Шувалова Е. В., Бакулина Е. А., Пронин Е. А.</i> Доопытное численное моделирование квазиизентропической сжимаемости дейтерия и гелия в области высоких давлений по методике ЛЭГАК . . . . .	40
<i>Бабанов А. В., Воеводин А. В., Щербаков А. Н.</i> О применении средств машинного обучения для поддержания качества пространственной сетки при решении задач газовой динамики . . .	53
<i>Смолкина Д. Н.</i> Улучшение качества объемных ячеек путем удаления малых ребер при генерации сеток методом отсечения в пакете программ "Логос" . . . . .	61
Сведения об авторах . . . . .	72

## C O N T E N T S

<i>Biberdorf E. A., Mitenkova E. F., Semyenova T. V., Solovyeva E. V.</i> Method of associated invariant subspaces to solve neutron distribution problems in loosely coupled systems . . . . .	3
<i>Yanilkin Yu. V.</i> 2D numerical simulation of mixing experiment for a three-layer gas system with adhesion to shock tube's walls . . . . .	17
<i>Ponkin E. I.</i> A mathematical description using Suchkov's solution of the two methods of gas-dynamically impacting a target . . . . .	27
<i>Blikov A. O., Mochalov M. A., Shuvalova E. V., Bakulina E. A., Pronin E. A.</i> Pre-experimental numerical simulation of the quasi-isentropic compressibility of deuterium and helium in region of high pressures using the LEGAK code . . . . .	40
<i>Babanov A. V., Voevodin A. V., Shcherbakov A. N.</i> On the use of machine learning to maintain the spatial grid quality in solving gas dynamics problems . . . . .	53
<i>Smolkina D. N.</i> LOGOS software package: Qualitative improvement of volumetric cells by eliminating small edges with the cutoff method during the generation of meshes . . . . .	61
Information about authors . . . . .	73

Ответственный за выпуск Е. В. Соколовская

Редактор Е. Н. Старченко

Корректоры Т. А. Меркушева  
Е. А. Окальева  
А. В. Федоренко

---

Дата выхода в свет 25.06.2022

Усл. печ. л. ~ 9

Тираж 1000 экз.

Зак. тип. 889-2022

Формат 60×84/8

Уч.-изд. л. ~ 12

6 статей

---

Учредитель: ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ"

Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-29789 от 04 октября 2007 г.

выдано Роскомнадзором

---

Оригинал-макет подготовлен  
в Математическом отделении ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ"  
Отпечатано в ИПЦ ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ"  
607188, г. Саров Нижегородской обл., ул. Силкина, 23

УДК 621.039

## МЕТОД АССОЦИИРОВАННЫХ ИНВАРИАНТНЫХ ПОДПРОСТРАНСТВ В ЗАДАЧАХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НЕЙТРОНОВ В СЛАБОСВЯЗНЫХ СИСТЕМАХ

Э. А. Бибердорф\*, Е. Ф. Митенкова\*\*, Т. В. Семёнова, Е. В. Соловьёва\*\*

(\*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск; \*\*ИБРАЭ РАН, г. Москва; ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области)

При моделировании переноса нейтронов в сложных гетерогенных средах наиболее точное распределение нейтронов достигается применением статистических алгоритмов Монте-Карло. Однако алгоритмические особенности используемого при этом метода поколений могут приводить к значительным погрешностям и даже некорректным результатам в слабосвязных системах. Для вычисления распределения нейтронов в слабосвязных системах предлагается метод ассоциированных инвариантных подпространств на базе матрицы деления, сформированной с помощью программы TDMSS. В основу положен метод дихотомии матричного спектра, разработанный в Институте математики им. С. Л. Соболева СО РАН. Рассматривается новая постановка несимметричной спектральной проблемы для решения прикладных задач.

*Ключевые слова:* слабосвязная (слабосвязанная) система, матрица деления, спектральная задача, дихотомия матричного спектра.

### Введение

В нейтронной физике изначально были сформулированы несколько уравнений переноса, в которых составляющие транспортного оператора описывались в балансовых соотношениях нейтронов *генерация—поглощение—утечка* по-разному, и решение транспортного уравнения с разными допущениями и граничными условиями рассматривалось в рамках одной из  $\lambda$ -,  $c$ -,  $k_{эф}$ -проблем собственных значений [1]. В задачах на критичность при решении уравнения переноса с  $k_{эф}$ -проблемой вычислялось наибольшее собственное значение — эффективный коэффициент размножения нейтронов  $k_{эф}$ , в задачах, сформулированных в рамках  $c$ -проблемы, — несколько собственных значений. При этом собственные значения, определяемые в рамках  $\lambda$ -,  $c$ -,  $k_{эф}$ -проблем имели принципиальные различия. Исследованием математических аспектов решения уравнения переноса занимались многие специалисты, формулируя для транспортного оператора необходимые условия, обеспечивающие корректное вычисление отдельных собственных значений, спектра в целом и собственных векторов.

Вычисление  $k_{эф}$  в системах с максимально полным представлением пространственно-материальной структуры было главной целью прецизионных кодов, базирующихся на статистических методах моделирования переноса нейтронов. В расчетах на критичность корректность счета нейтронов методом Монте-Карло связывается с источником нейтронов деления. В традиционных реакторных системах при соответствующей статистике нейтронов формирование корректного источника с выходом на главную собственную функцию при любом начальном распределении нейтронов [2] обеспечивается использованием метода поколений (power iteration method).

Вместе с тем вычислительные особенности метода поколений, обусловленные итерационными процессами с присущими им автокорреляциями, могут приводить к значительным погрешностям в расчетах некоторых систем. Различный характер проявления автокорреляций отмечается в расчетах интегрального значения  $k_{эф}$  и локальных характеристик [3]. Так, автокорреляции, практически

не влияющие на точность расчета  $k_{эф}$  для традиционных реакторных систем, в некоторых случаях могут привести к смещению оценок локальных функционалов и недооценке их погрешностей [2, 4]. Для слабосвязных систем\* и систем с доминантным отношением, близким к единице, метод поколений не гарантирует получения адекватного источника нейтронов даже при очень большой статистике [5, 6], а некорректные результаты могут возникнуть даже при малых возмущениях [7, 8].

В настоящей работе вычисление функций распределения нейтронов деления в слабосвязных системах предлагается осуществлять на основе матрицы деления [9]. С помощью программы TDMCC формируется матрица деления  $M_f$  с размерами  $n \times n$ , в которой в полной мере учитывается пространственно-материальная структура системы, представленной  $n$  областями [10]. Корректность  $M_f$  оценивается, исходя из нейтронно-физических свойств — длины свободного пробега нейтрона, захвата и деления в  $i$ -областях ( $i = 1, \dots, n$ ) системы и др. [11]. По сути, матрица деления — это дискретное представление ядра интегрального оператора  $A(r', r)$  перехода нейтрона деления из точки  $r'$  в точку  $r$ .

Для сформированной матрицы деления  $M_f$  ставится задача на собственные значения. Предполагается, что полученные значения, характеризующие локальные свойства отдельных областей системы, обеспечат достоверное отображение распределения нейтронов деления во всей системе в целом.

### Задачи на собственные значения и новая постановка спектральной задачи

Задачи на собственные значения востребованы в различных прикладных областях физики и механики. В задачах механики и специализированных задачах, например, связанных с устойчивостью, собственные значения интерпретируются как собственные частоты колебаний, а собственные векторы, в том числе и не главные, отражают соответствующие моды колебаний. Для задач, решение которых не связано с колебательными процессами, интерпретация собственных векторов часто оказывается затруднительной и решение строится только на основе главных собственных значений.

Использование статистических алгоритмов в программе TDMCC приводит к формированию несимметричных матриц деления. При этом для одной и той же системы при разных расчетных параметрах формируются матрицы, различающиеся как размерами, так и значениями элементов. Для несимметричных матриц существуют математические сложности вычисления собственных значений и собственных векторов, обусловленные их непредсказуемой "чувствительностью" к возмущению матрицы и изменению отдельных ее элементов. Дополнительные трудности возникают при вычислении близких собственных значений. Универсальные алгоритмы, обеспечивающие необходимую устойчивость вычисляемых собственных значений и собственных векторов, отсутствуют даже для несимметричной трехдиагональной матрицы [12]. В этой связи проблема устойчивости для матрицы деления  $M_f$  становится одной из ключевых.

Классическая постановка спектральной задачи с матрицей деления для слабосвязной системы не обеспечивает получения достоверных распределений нейтронов [13]. В качестве альтернативы предлагается использовать метод ассоциированных инвариантных подпространств (АИП), основанный на методе дихотомии матричного спектра [14]. Задача дихотомии спектра представляет собой новую постановку несимметричной спектральной проблемы, ориентированную на характерные особенности многих прикладных задач [15].

В последние годы этот подход успешно применялся в различных областях. Так, в монографии [16] показано использование дихотомии матричного спектра относительно мнимой оси в задачах линейного управления. В задачах механики, например, при анализе колебаний гидродинамических решеток метод дихотомии позволил получить более полную информацию о характере колебаний механических систем в сравнении с традиционными подходами [17]. Эффективность метода продемонстрирована и в задаче о флаттере крыла в постановке М. В. Келдыша [18] при определении критической скорости набегающего потока, превышение которой приводит к потере устойчивости крыла и развитию флаттера. Модификация метода для матриц с большой нормой применялась в

\* В некоторых источниках используется термин *слабосвязанная система*.

задачах об устойчивости плоскопараллельных течений с определением критического значения числа Рейнольдса, приводящего к ламинарно-турбулентному переходу [19]. Алгоритм, реализованный для дихотомии матричного спектра гиперболой, может применяться для исследования устойчивости течения Блазиуса [20]. Разрабатываемый в настоящее время алгоритм дихотомии матричного спектра относительно ломаной, состоящей из отрезков прямых и дуг окружностей, ориентирован на исследования устойчивости автоматических систем управления.

Следует подчеркнуть, что метод дихотомии может применяться для матриц, не являющихся нормальными, позволяя оценивать влияние погрешности исходных данных на точность получаемых характеристик для неконсервативных систем, описываемых несамосопряженными матрицами [21].

## Математические основы метода АИП

**Критерий дихотомии.** В основу предлагаемого метода АИП положен метод дихотомии матричного спектра, разработанный в Институте математики им. С. Л. Соболева СО РАН под руководством академика С. К. Годунова [22]. С помощью метода дихотомии множество собственных значений  $\{\lambda_j\}$  матрицы  $A$  разделяется на две части в зависимости от их расположения относительно кривой  $\gamma$ . Мерой разделения спектра или, иными словами, критерием дихотомии служит норма матричного интеграла  $H = \oint_{\gamma} (\bar{\lambda}I - A^*)^{-1}(\lambda I - A)^{-1}d\lambda$ . Действительно, точки спектра матрицы  $A$  находятся на кривой  $\gamma$  тогда и только тогда, когда операторная норма  $\omega = \|H\|$  обращается в бесконечность. Если значение  $\omega$  конечно, то кривая  $\gamma$  делит спектр матрицы на две части, каждой из которых соответствует инвариантное подпространство, натянутое на собственные векторы.

Несмотря на то, что в основе метода дихотомии матричного спектра лежат контурные интегралы, для определения их значений разработан итерационный алгоритм, включающий  $QR$ -разложения и другие алгебраические матричные операции и не содержащий обращений матриц. Существует несколько базовых вариантов этого алгоритма, разница между которыми не существенна. Важно заметить, что одновременно с вычислением  $H$  происходит вычисление проекторов  $P$  и  $I - P$  ( $I$  — единичная матрица) на инвариантные подпространства матрицы  $A$ , соответствующие собственным значениям, лежащим по разные стороны кривой  $\gamma$ .

**Спектральный портрет и инвариантные подпространства.** Одномерный спектральный портрет в виде графика функции  $\omega(r) = \|H(r)\|$  для семейства кривых  $\gamma(r)$  позволяет разделить спектр матрицы  $A$  на подмножества, которые группируются в окрестностях кривых  $\gamma(r_i)$ , и вычислить соответствующие базисы инвариантных подпространств, используя матрицы-проекторы  $P_i$ , удовлетворяющие условию  $P_i^2 = P_i$ . В результате пространство разбивается на подпространства меньшей размерности. С помощью сингулярного разложения проекторов [23] могут быть получены матрицы  $U_i$ , состоящие из ортонормированных базисных векторов соответствующих инвариантных подпространств. Заметим, что если инвариантное подпространство имеет размерность 1, т. е. соответствует единственному собственному значению, то его базис совпадает с собственным вектором. Если размерность инвариантного подпространства больше единицы, то совпадение вычисленного базиса с собственными векторами не обязательно. Знание базисов инвариантных подпространств позволяет, в частности, привести матрицу  $A$  к клеточно-диагональному виду (вычислительно устойчивому аналогу формы Жордана).

Для произвольного нормированного вектора  $\mathbf{x}$  угол  $\alpha_i$  между ним и выбранным  $i$ -м инвариантным подпространством вычисляется по формуле  $\cos \alpha_i = 1 - \|[U_i, \mathbf{x}]\|^2$ , где берется евклидова норма матрицы  $[U_i, \mathbf{x}]$ , полученной из матрицы  $U_i$  присоединением к ней вектора-столбца  $\mathbf{x}$ . Проекция вектора  $\mathbf{x}$  на это подпространство получается его умножением на матрицу проектора:  $\mathbf{p}_x = P_i \mathbf{x}$ . Если подпространство, на которое осуществляется проецирование, одномерное, то проекция — это вектор, коллинеарный собственному. Если собственное подпространство двумерное, то имеем проекцию вектора на плоскость, и т. д.

**Ассоциированные инвариантные подпространства.** Рассмотрим векторы, состоящие из нулей и единиц, которые описывают положение зон системы. Например, вектор  $\mathbf{u} = (0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$  при длине системы 360 см и разбиении на  $n = 18$  областей указывает на зону

длиной 80 см, находящуюся в 40 см от левого края системы. При этом квадрат евклидовой нормы  $\|\mathbf{u}\|^2$  равен числу областей системы, составляющих заданную зону (для данного примера  $\|\mathbf{u}\|^2 = 4$ ). Такие векторы будем называть векторами-индикаторами.

Инвариантное подпространство матрицы деления является *ассоциированным* с заданной зоной системы, если вектор-индикатор зоны образует с этим подпространством угол меньший, чем с другими инвариантными подпространствами. Ассоциированное подпространство можно расширять за счет объединения с другими инвариантными подпространствами.

**Средние значения и нормировка.** Проекцию вектора можно нормировать произвольным образом. В предлагаемом варианте в нормировочные коэффициенты будут входить средние значения распределений в заданных зонах. Пусть вектор  $\boldsymbol{\rho}$  представляет распределение некоторой величины по длине системы, а  $\mathbf{u}$  — вектор-индикатор фиксированной зоны. Тогда скалярное произведение  $(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{u})$  равно сумме тех компонент  $\boldsymbol{\rho}$ , которые заданы в зоне, описываемой вектором  $\mathbf{u}$ . При этом  $(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{u}) / \|\mathbf{u}\|^2$  — среднее арифметическое значение распределения  $\boldsymbol{\rho}$  в зоне, заданной вектором-индикатором  $\mathbf{u}$ .

В частности, если  $\mathbf{u}$  описывает зону, содержащую в среднем максимальное число нейтронов, а  $\mathbf{D}$  — вектор диагональных элементов матрицы деления  $A = M_f$ , то  $m_{\max} = (\mathbf{D}, \mathbf{u}) / \|\mathbf{u}\|^2$  — среднее значение диагональных элементов в этой зоне. Если  $\mathbf{p}_u$  — проекция вектора-индикатора  $\mathbf{u}$ , то  $m_u = (\mathbf{p}_u, \mathbf{u}) / \|\mathbf{u}\|^2$  — усредненное значение компонент вектора-проекции  $\mathbf{p}_u$  в зоне, заданной  $\mathbf{u}$ .

Для сравнения результатов для разных  $n$  исходные матрицы деления также нормируются:  $A/m_{\max}$ .

**Описание метода.** Метод АИП включает следующие основные шаги:

1. Предварительная нормировка матрицы деления  $A$  (необязательный шаг).
2. Вычисление и анализ одномерного спектрального портрета матрицы  $A$ . В качестве кривых  $\gamma(r)$  используются окружности радиусом  $r$  с центром в начале координат. Пики спектрального портрета матрицы  $A$  определяют радиусы  $r_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) окружностей, на которых расположены собственные значения матрицы, в том числе  $r_{\max} = \max |\lambda_j|$ . Для каждого пика вычисляются проектор  $P_i$  и матрица  $U_i$ , образованная ортонормированными базисными векторами соответствующего инвариантного подпространства.
3. Выбор ассоциированного инвариантного подпространства. Осуществляется на основании вычисления и анализа углов, образованных заданным (соответствующим выделяемой зоне) вектором-индикатором  $\mathbf{u}$  с инвариантными подпространствами. Выбирается инвариантное подпространство, с которым  $\mathbf{u}$  образует минимальный угол. При этом  $r_u = |\lambda_u|$  — радиус окружности, на которой лежат собственные значения, соответствующие ассоциированному инвариантному подпространству.
4. Вычисление проекции  $\mathbf{p}_u$  вектора-индикатора  $\mathbf{u}$  на выбранное ассоциированное инвариантное подпространство.
5. Вычисление нормировочного множителя  $q = \frac{m_{\max}/m_u}{r_{\max}/r_u}$  с последующей нормировкой проекции  $\hat{\mathbf{p}} = q\mathbf{p}_u$ .

В результате имеем вектор  $\hat{\mathbf{p}}$ , принадлежащий инвариантному подпространству матрицы деления, который близок к вектору-индикатору, описывающему заданную зону. Далее показано, что нормированные проекции хорошо передают локальные свойства системы.

### Результаты численных экспериментов

С помощью метода АИП на основе матрицы деления вычисляются распределения нейтронов деления в бенчмарке *Pin-cell Array with Irradiated Fuel*, представляющем собой слабосвязную плоскую систему. Система состоит из топливных зон с разным обогащением  $w_l$  ( $l = 1, \dots, k$ ) общей длиной 360 см и 30-сантиметровых слоев воды на концах. На торцах она задается в виде бесконечной квадратной решетки с шагом 1,33 см с размещенным по центру твэлом диаметром 0,95 см, окруженным водой [24]. При этом решаются следующие задачи:

1. Вычисление распределений нейтронов в симметричной системе ( $k = 3; w_1 = w_3$ ).

2. Вычисление распределений нейтронов в несимметричной системе ( $k = 7$ ) и обеспечение хорошей согласованности результатов при разном пространственном представлении системы.

**Распределение нейтронов в симметричной системе.**

*Модельная задача.* Некоторые проблемы, связанные с особенностями алгебраической спектральной задачи в классической постановке, продемонстрируем на примере упрощенной симметричной матрицы с размерами  $9 \times 9$

$$S = \begin{pmatrix} \mathbf{60} & 3 & & & & & & & & \\ 3 & \mathbf{34} & 4 & & & & & & & \\ & 4 & \mathbf{35} & 4 & & & & & & \\ & & 4 & \mathbf{35} & 4 & & & & & \\ & & & 4 & \mathbf{35} & 4 & & & & \\ & & & & 4 & \mathbf{35} & 4 & & & \\ & & & & & 4 & \mathbf{35} & 4 & & \\ & & & & & & 4 & \mathbf{34} & 3 & \\ & & & & & & & 3 & \mathbf{60} & \end{pmatrix}.$$

Эта матрица характеризуется кратным главным собственным значением, для которого собственные векторы  $\mathbf{v}_8$  и  $\mathbf{v}_9$  не выделяют однозначно правую и левую концевые области системы, а осцилляции значений компонент остальных собственных векторов также не позволяют связать полученные собственные векторы с конкретными областями (табл. 1).

Собственные векторы (функции), вычисленные традиционными методами на базе сформированной симметричной матрицы деления, дают лишь схематичное представление о распределении нейтронов деления в слабосвязной системе [13]. В силу стандартной нормировки максимумы оказываются зависимыми от разбиения  $n$ , а области с одинаковыми размножающими свойствами не свидетельствуют о равномерном распределении нейтронов. Также стандартная нормировка вычисляемых собственных векторов не обеспечивает условий для сравнения распределений в зонах с разными нейтронно-физическими свойствами.

Таблица 1

**Собственные векторы симметричной матрицы  $S$  (выделены компоненты с максимальными по модулю значениями)**

Вектор	Компоненты								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\mathbf{v}_1$	0,025	-0,206	0,357	-0,457	<b>0,492</b>	-0,457	0,357	-0,206	0,025
$\mathbf{v}_2$	-0,049	0,373	<b>-0,493</b>	0,340	0,000	-0,340	<b>0,493</b>	-0,373	0,049
$\mathbf{v}_3$	-0,051	0,490	-0,288	-0,227	<b>0,495</b>	-0,227	-0,288	0,490	-0,051
$\mathbf{v}_4$	0,057	-0,488	-0,084	<b>0,502</b>	0,000	<b>-0,502</b>	0,084	0,488	-0,057
$\mathbf{v}_5$	-0,056	0,417	0,409	-0,160	<b>-0,510</b>	-0,160	0,409	0,417	-0,056
$\mathbf{v}_6$	0,046	-0,301	<b>-0,511</b>	-0,383	0,000	0,383	<b>0,511</b>	0,301	-0,046
$\mathbf{v}_7$	0,026	-0,156	-0,344	-0,472	<b>-0,517</b>	-0,472	-0,344	-0,156	0,026
$\mathbf{v}_8$	<b>0,702</b>	0,082	0,013	0,002	0,000	-0,002	-0,013	-0,082	<b>-0,702</b>
$\mathbf{v}_9$	<b>-0,702</b>	-0,082	-0,013	-0,002	-0,001	-0,002	-0,013	-0,082	<b>-0,702</b>



Приведенная картина подтверждает невозможность представления финального распределения для каждой конкретной области с учетом вкладов, вносимых в эту область соответствующими собственными векторами. Тем более неясно, каким образом можно представить распределение во всей системе.

*Метод АИП.* В отличие от традиционного подхода метод АИП позволяет получить адекватные распределения в симметричной (в физическом смысле) системе с приведенной выше несимметричной матрицей  $A_{100}$ . Для матрицы  $A_{100}$  определяем векторы-индикаторы  $\mathbf{e}, \mathbf{f}$  соответственно для левой и правой концевых зон длиной 40 см:  $\mathbf{e} = (\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{11}, 0, \dots, 0)^T$ ,  $\mathbf{f} = (0, \dots, 0, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{11})^T$ , а также вектор-индикатор  $\mathbf{g}$  — для центральной:  $\mathbf{g} = (0, 0, \dots, 0, \underbrace{1, 1, 1, 1}_{11}, \dots, 1, 1, 1, 1, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{11})^T$ .

Области разбиения с максимальными значениями диагональных элементов матрицы  $A_{100}$  приходятся на концевые зоны, которым соответствуют векторы-индикаторы  $\mathbf{e}$  и  $\mathbf{f}$ . Множитель для предварительной нормировки выбирается в виде  $m_{\max} = (\mathbf{D}, \mathbf{e}) / \|\mathbf{e}\|^2$ , где  $\mathbf{D}$  — вектор диагональных элементов матрицы  $A_{100}$ , и дальнейший анализ проводится для нормированной матрицы  $A_{100}/m_{\max}$  (далее сохраним обозначение  $A_{100}$ ).

Построение ассоциированных инвариантных подпространств осуществляется на основе спектрального портрета (рис. 2) и углов между векторами-индикаторами и инвариантными подпространствами (рис. 3), где по горизонтальной оси отложены номера инвариантных подпространств, пронумерованных по убыванию модулей собственных значений, а по вертикальной оси — значения углов в радианах. В результате определяются ассоциированные инвариантные подпространства: двумерные для векторов  $\mathbf{e}$  и  $\mathbf{f}$  (для  $\mathbf{e}$  — объединение подпространств 2 и 4, для  $\mathbf{f}$  — 1 и 3) и объединение подпространств 3—5, 7 и 9 для вектора  $\mathbf{g}$ . Таким образом, несмотря на то, что каждому из пиков спектрального портрета соответствуют одномерные подпространства, вектор  $\mathbf{g}$  проецируется на пятимерное подпространство. Нормировка для проекций  $\mathbf{p}_e$  и  $\mathbf{p}_f$  вычисляется по формуле, приведенной в п. 5 описания метода, а для нормировки  $\mathbf{p}_g$  используется усреднение модулей собственных значений, отвечающих подпространствам, вошедшим в ассоциированное подпространство:

$$\hat{\mathbf{p}}_g = \frac{1}{m_g} \frac{r_3 + r_4 + r_5 + r_7 + r_9}{5r_{\max}} \mathbf{p}_g.$$

Полученные проекции имеют ряд характерных особенностей. Заметим, что при использовании метода АИП они сопоставляются с конкретными выделенными зонами. Применение метода к системам с большим числом областей  $n$  (в отличие от малых  $n$ ) может приводить к появлению заметных ненулевых и даже отрицательных значений первых и последних компонент вектора проекции, приходящихся на области вне выделенной зоны. Эти значения не являются информативными ни для заданной, ни для соседних зон, и их наличие не требует корректировок при вычислении проекций.

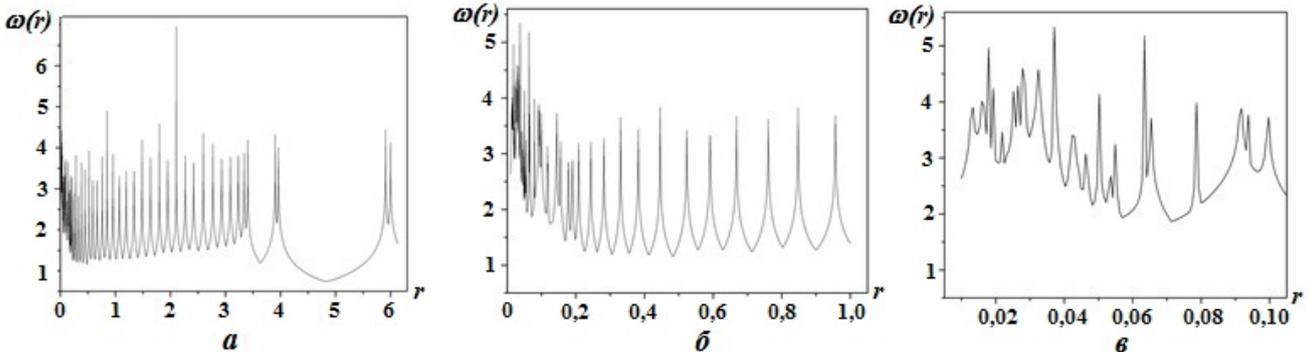


Рис. 2. Спектральные портреты матрицы  $A_{100}$  для разных диапазонов изменения радиуса  $r$ :  $a - 0 < r < 6$ ;  $b - 0 < r < 1$ ;  $v - 0 < r < 0,1$

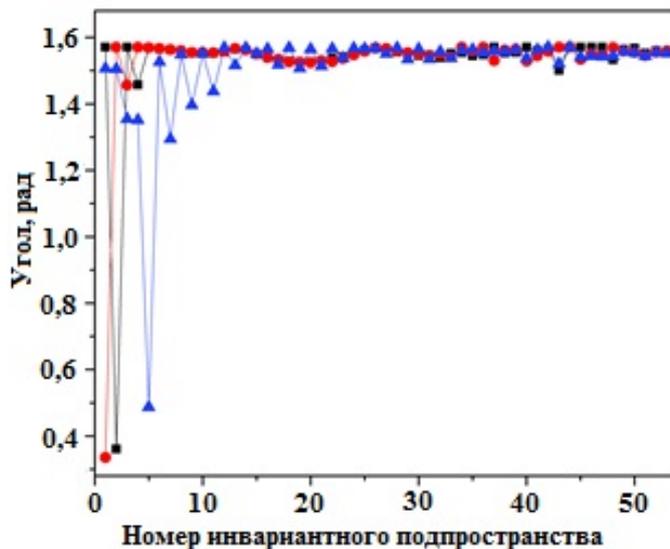


Рис. 3. Углы между векторами-индикаторами и инвариантными подпространствами для  $A_{100}$ : —■— e; —●— f; —▲— g

Следует особо отметить, что для протяженных однородных зон вид соответствующей проекции в сильной степени зависит от выбора подпространства, в котором она представляется. На рис. 4, а распределение нейтронов в центральной однородной зоне длиной 280 см приближается проекциями на подпространства разной размерности:

- одномерное, совпадающее с 5-м собственным вектором;
- четырехмерное — объединение инвариантных подпространств с номерами 3–5, 7;
- пятимерное — объединение инвариантных подпространств 3–5, 7, 9;
- шестимерное — объединение инвариантных подпространств 3–5, 7, 9, 11.

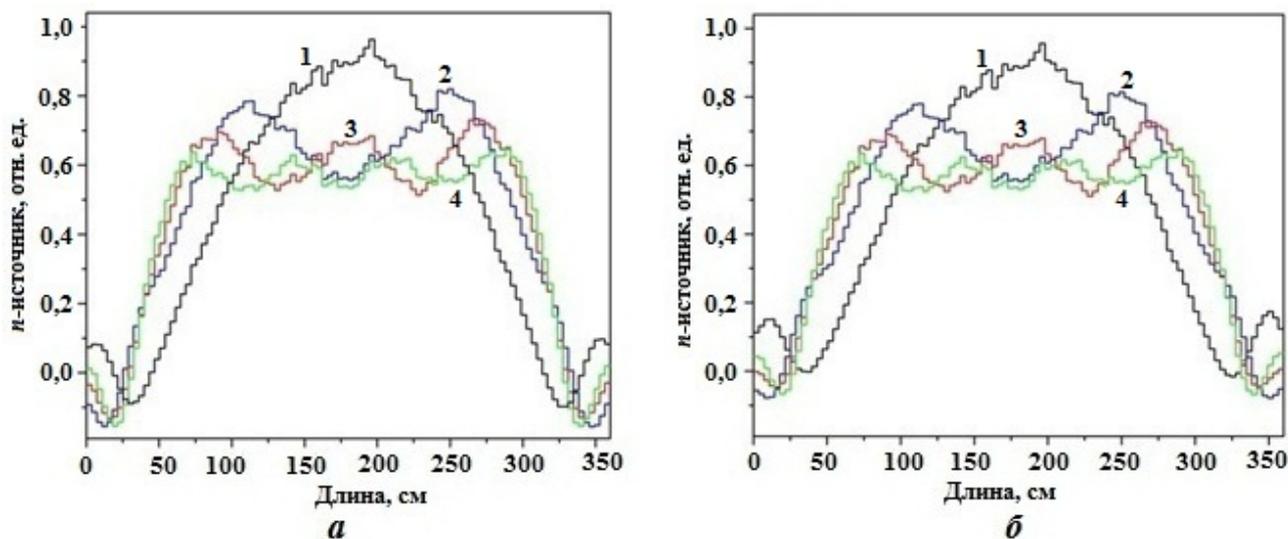


Рис. 4. Распределения нейтронов в зоне 40–320 см с матрицей  $A_{100}$ , полученные с помощью проекций на подпространства разной размерности (а) и соответствующие расширенные подпространства (б): — — одномерное; — — четырехмерное; — — пятимерное; — — шестимерное

При этом чем точнее проекция приближает границы зоны (круче спуск ее графика сверху вниз), тем значительнее "заныривание под ноль" вне зоны и тем точнее представление рассматриваемой зоны. Уменьшить "заныривание" во избежание "нефизичности" процесса помогает расширение описанных подпространств за счет включения собственных векторов 1 и 2 (рис. 4, б). Однако такой подход не отвечает приведенному описанию метода (п. 3, 4), поскольку собственные векторы 1 и 2 образуют большие углы с вектором  $\mathbf{g}$  (см. рис. 3) и не должны включаться в ассоциированное с ним подпространство. При этом важно, что подобное расширение не отражается на виде проекций внутри заданной зоны. В данном примере центральная зона на рис. 4, а наиболее точно представляется кривой 4, составляющей в окрестности границы зоны наибольший угол с осью абсцисс (наиболее крутая кривая). Вид этой кривой внутри центральной зоны остается неизменным и для расширенных подпространств (см. рис. 4, б).

Таким образом, можно констатировать, что проекции для симметричной системы с матрицей деления  $A_{100}$ , вычисленные с помощью метода АИП, обеспечивают адекватное отображение делящихся свойств системы и корректное распределение нейтронов деления в зонах с одинаковым обогащением (кривые 1 и 3 на рис. 5, а) и центральной зоне (кривая 2 на рис. 5, а).

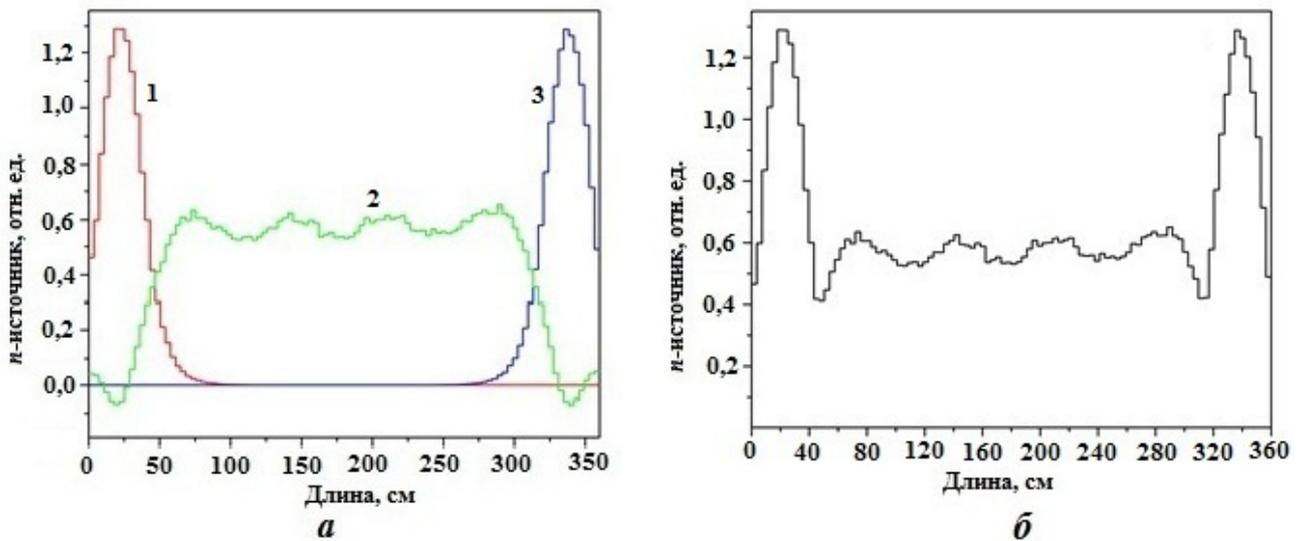


Рис. 5. Распределения нейтронов для симметричной системы с матрицей  $A_{100}$ , полученные методом АИП для трех выделенных зон (а) и системы в целом (б)

**Несимметричная система. Согласованность распределений при разных разбиениях.** Для корректного вычисления распределения нейтронов в системе с неизвестной априори материальной структурой нужно представить систему как можно подробнее — с большим числом  $n$  областей. При грубом задании системы нивелируются узкие зоны, которые с заметно отличающимися от соседних зон нейтронно-физическими свойствами окажутся незамеченными, не будут выделены и в результате предстанут усредненными с соседними зонами. Однако необходимо учитывать возникающие при уменьшении области дополнительные погрешности в элементах матрицы, а также вычислительные особенности использования метода АИП для систем с мелким пространственным разбиением. Максимально точную картину распределения можно получить только при сопоставлении вычисляемых проекций при разных  $n$ .

Традиционный метод вычисления собственных векторов с компонентной зависимостью от  $n$  не позволяет проводить сравнения даже главных собственных векторов, полученных при разных  $n$ , что исключает возможность адекватных оценок изменений в распределениях, обусловленных включением в систему дополнительных зон с материальными свойствами, отличными от свойств соседних зон. Метод АИП обеспечивает адекватное сравнение распределений при разных  $n$ , что наглядно подтверждает следующий пример.



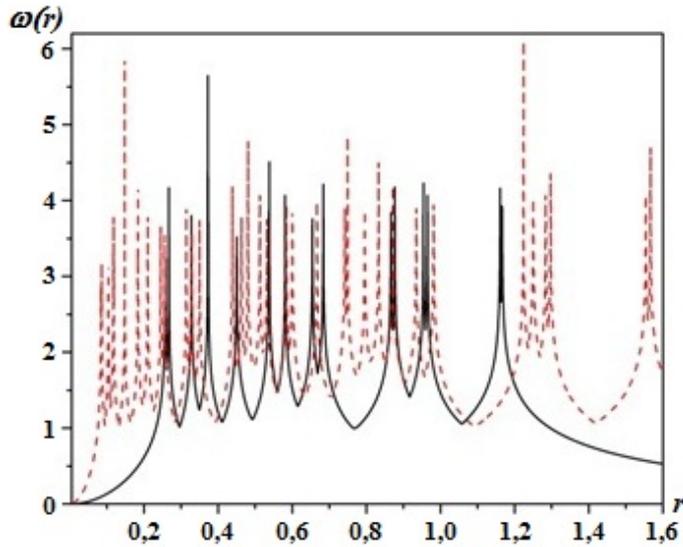


Рис. 6. Спектральные портреты матриц для  $n = 18$  (—) и  $n = 36$  (---)

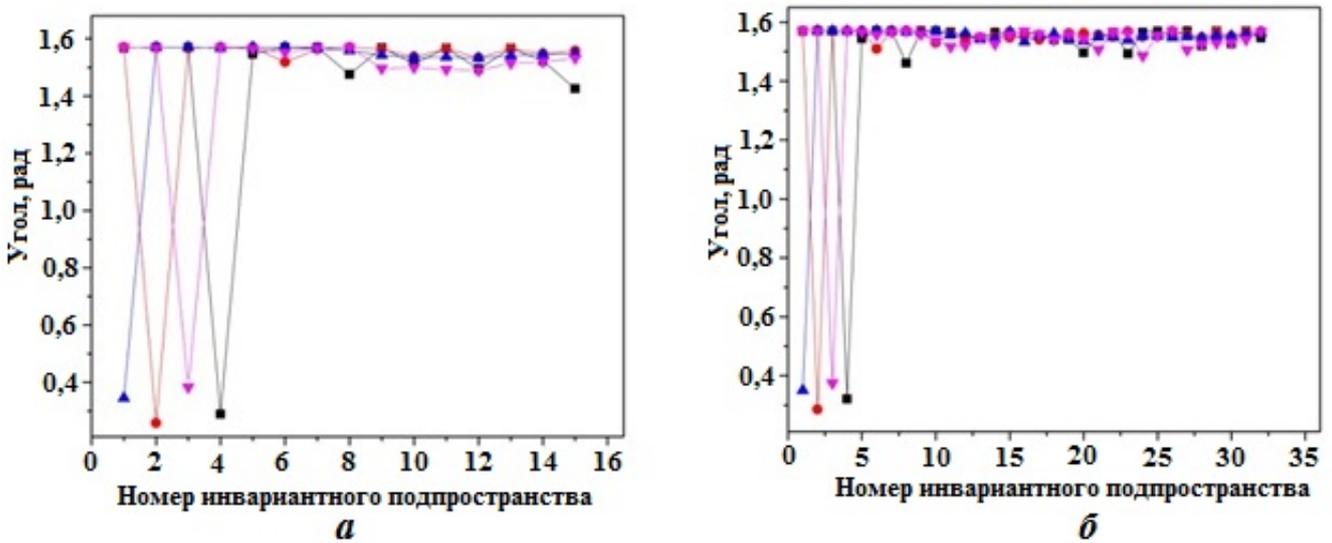


Рис. 7. Углы между векторами-индикаторами  $e$  (—■—),  $f$  (—●—),  $g$  (—▲—),  $h$  (—▼—) и инвариантными подпространствами для системы с  $n = 18$  (а) и  $n = 36$  (б)

Таблица 3

Отношения собственных значений для несимметричной системы

Размеры матрицы	$r_{\max} = r_g$	$r_e/r_{\max}$	$r_f/r_{\max}$	$r_h/r_{\max}$
18×18	1,1664	0,9952	0,8271	0,8181
36×36	1,5666	0,9920	0,8279	0,8195

4, 1 и 3). Такая "чувствительность" метода к исходным матрицам позволяет проводить детальные исследования систем с разными вариантами их представлений, в том числе пограничных областей, для которых получаемые проекции отражают усредненные показатели смежных зон с разными свойствами (например, разными  $w$ ).

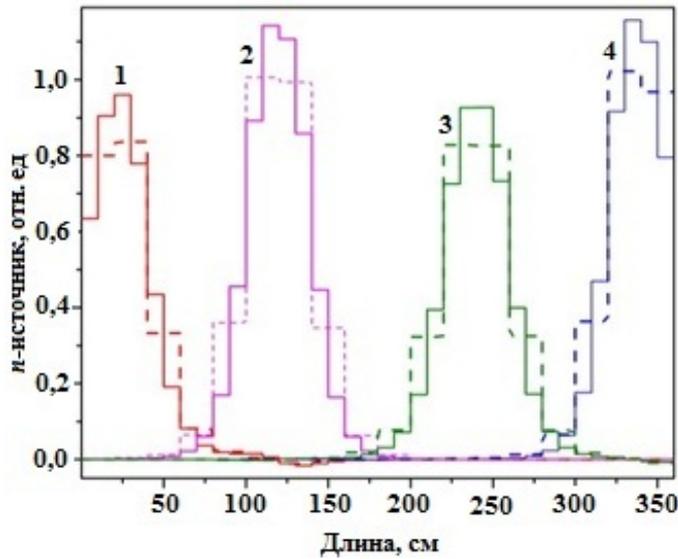


Рис. 8. Распределения нейтронов в несимметричной системе при  $n = 18$  (---) и  $n = 36$  (—), полученные в виде проекций векторов-индикаторов: 1 —  $e$ ; 2 —  $g$ ; 3 —  $h$ ; 4 —  $f$

Таким образом, представленные результаты показывают, что нормированные проекции векторов-индикаторов на указанные ассоциированные подпространства, вычисленные в соответствии с п. 5 описания метода АИП, достоверно отражают свойства зон системы.

### Заключение

Классическая постановка спектральной задачи с матрицей деления не обеспечивает получения достоверных распределений нейтронов для слабосвязных систем. Для решения задач в таких системах представлен метод АИП, основанный на методе дихотомии матричного спектра.

При работе с несимметричными матрицами метод АИП имеет ряд преимуществ по сравнению с традиционным подходом. Данный метод, наследуя особенности метода дихотомии матричного спектра, не чувствителен к кратности, вещественности или комплексности собственных значений. Алгоритмы метода АИП позволяют оценить точность результата и гарантировать быструю сходимость. В алгоритмах предусмотрена возможность выполнения итерационного процесса без обращения матриц [21].

Алгоритм дихотомии матричного спектра, лежащий в основе метода АИП, разработан не только для локализации собственных значений  $\lambda$  матрицы  $A$ ,  $\det(A - \lambda I) = 0$ , где  $I$  — единичная матрица, но и для спектра матричных пучков  $\det(A - \lambda B) = 0$ , где  $B$  — произвольная квадратная матрица. Это позволит в ближайшем будущем распространить данный подход на задачи о распределениях нейтронов в системах, представляемых не одной, а несколькими матрицами, описывающими как размножающие, так и поглощающие свойства системы.

Предполагается исследование эффективности метода АИП для вычисления распределений нейтронов в слабосвязных системах с более сложной пространственной структурой, например, с выделенными узкими (меньше длины свободного пробега нейтрона) пространственными зонами, свойства которых заметно отличаются от свойств смежных зон.

Работа выполнена частично в рамках государственного задания Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН (проект FWNF-2022-0008).

## Список литературы

1. *Sahni D. C.* Some new results pertaining to criticality and time eigenvalues of one-speed neutron-transport equation // Prog. in Nucl. Eng. 1996. Vol. 10, No 3. P. 305–320.
2. *Shim H. J., Kim C. H.* Real variance estimation using an intercycle fission source correlation for Monte Carlo eigenvalue calculations // Nucl. Sci. Eng. 2009. Vol. 162. P. 98–108.
3. *Ueki T., Brown F. B., Parsons D. K., Kornreich D. E.* Autocorrelation and dominance ratio in Monte Carlo criticality calculations // Ibid. 2003. Vol. 145. P. 279–290.
4. *Ueki T.* Standard deviation of local tallies in global Monte Carlo calculation of nuclear reactor core // J. Nucl. Sci. Technol. 2010. Vol. 47. P. 739–753.
5. *Кизуб П. А., Митенкова Е. Ф.* Источник нейтронов деления в расчетах методом Монте-Карло для слабосвязанных систем: Препринт № ИБРАЕ-2015-02. М.: ИБРАЭ РАН.  
*Kizub P. A., Mitenkova E. F.* Istochnik neytronov deleniya v raschyetakh metodom Monte-Karlo dlya slabosvyazannykh system: Preprint № ИБРАЕ-2015-02. М.: ИБРАЭ РАН.
6. *Митенкова Е. Ф., Семенова Т. В.* Использование программы TDMCC для решения задач с доминантным отношением, близким к единице // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2015. Вып. 4. С. 3–13.  
*Mitenkova E. F., Semyenova T. V.* Ispolzovanie programmy TDMCC dlya resheniya zadach s dominantnym otnosheniem, blizkim k edinitse // Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov. 2015. Vyp. 4. S. 3–13.
7. *Brissenden R. J., Garlick A. R.* Biases in the estimation of  $K_{eff}$  and its error by Monte Carlo methods // Ann. Nucl. Energy. 1986. Vol. 13. P. 63–83.
8. *Митенкова Е. Ф., Колташев Д. А., Кизуб П. А.* Распределение скорости реакции деления в слабосвязанной системе для тестовой модели "шахматная доска" // Атомная энергия. 2014. Т. 116. Вып. 6. С. 345–350.  
*Mitenkova E. F., Koltashyev D. A., Kizub P. A.* Raspredelenie skorosti reaktсии deleniya v slabosvyazannoy sisteme dlya testovoy modeli "shakhmatnaya doska" // Atomnaya energiya. 2014. T. 116. Vyp. 6. S. 345–350.
9. *Ueki T.* Monte Carlo criticality calculation under extreme condition // J. Nucl. Sci. Tech. 2012. Vol. 49, No 12. P. 1134–1143.
10. *Семенова Т. В., Митенкова Е. Ф.* Расширение возможностей программы TDMCC для исследования больших и слабосвязанных систем // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Ядерно-реакторные константы. 2015. Вып. 1. С. 31–35.  
*Semyenova T. V., Mitenkova E. F.* Rasshirenie vozmozhnostey programmy TDMCC dlya issledovaniya bolshikh i slabosvyazannykh system // Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Yaderno-reaktornye konstanty. 2015. Vyp. 1. S. 31–35.
11. *Митенкова Е. Ф., Семенова Т. В.* Счет функций распределения нейтронов в плоских системах с протяженными неоднородными топливными областями // Атомная энергия. 2019. Т. 126. Вып. 1. С. 15–19.  
*Mitenkova E. F., Semyenova T. V.* Schyet funktsiy raspredeleniya neytronov v ploskikh sistemakh s protyazhyennymi neodnorodnymi toplivnymi oblstyami // Atomnaya energiya. 2019. T. 126. Vyp. 1. S. 15–19.
12. *Уилкинсон Дж. Х.* Алгебраическая проблема собственных значений. М.: Наука, 1970.  
*Uilkinson Dzh. Kh.* Algebraicheskaya problema sobstvennykh znacheniy. М.: Nauka, 1970.
13. *Семенова Т. В., Митенкова Е. Ф., Соловьева Е. В.* Матрица деления в программе TDMCC для расчета слабосвязанных систем // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Ядерно-реакторные константы. 2019. Вып. 2. С. 31–37.  
*Semyenova T. V., Mitenkova E. F., Solovyeva E. V.* Matritsa deleniya v programme TDMCC dlya raschyeta slabosvyazannykh system // Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Yaderno-reaktornye konstanty. 2019. Vyp. 2. S. 31–37.

14. *Годунов С. К.* Задача о дихотомии спектра матрицы // Сибирский математический журнал. 1986. Т. 27, № 5. С. 24–37.  
*Godunov S. K.* Zadacha o dikhotomii spectra matritsy // Sibirskiy matematicheskiy zhurnal. 1986. Т. 27, № 5. S. 24–37.
15. *Biberdorf E.* Development of the matrix spectrum dichotomy method // Continuum Mechanics, Applied Mathematics and Scientific Computing: Godunov's Legacy. A Liber Amicorum to Prof. Godunov. Springer, 2020. P. 37–40.
16. *Godunov S. K.* Ordinary differential equations with constant coefficient. Providence, Rhode Island: AMS, 1997.
17. *Курзин В. Б.* Определение динамических характеристик механических систем методом построения одномерных спектральных портретов // ПМТФ. 2008. Т. 49, № 1. С. 104–113.  
*Kurzin V. B.* Opredelenie dinamicheskikh kharakteristik mekhanicheskikh system metodom postroeniya odnomernykh spektralnykh portretov // PMTF. 2008. Т. 49, № 1. S. 104–113.
18. *Буньков В. Г., Годунов С. К., Курзин В. Б., Садкейн М.* Применение нового математического аппарата "Одномерные спектральные портреты матриц" к решению проблемы аэроупругих колебаний решеток и лопастей // Ученые записки ЦАГИ. 2009. Т. XL(6). С. 3–13.  
*Bunkov V. G., Godunov S. K., Kurzin V. B., Sadkeyn M.* Primenenie novogo matematicheskogo apparata "Odnomernye spektralnye portrety matrits" k resheniyu problem aerouprugikh kolebaniy reshyetok i lopastey // Uchyenye zapiski TsAGI. 2009. Т. XL(6). S. 3–13.
19. *Бибердорф Э. А., Блинова М. А., Попова Н. И.* Модификации метода дихотомии матричного спектра и их применение к задачам устойчивости // Сибирский журнал вычисл. мат. 2018. Т. 21, № 2. С. 139–153.  
*Biberdorf E. A., Blinova M. A., Popova N. I.* Modifikatsii metodom dikhotomii matrichnogo spectra i ikh primenenie k zadacham ustoychivosti // Sibirskiy zhurnal vychisl. mat. 2018. Т. 21, № 2. S. 139–153.
20. *Блинова М. А., Попова Н. И., Бибердорф Э. А.* Приложение дихотомии матричного спектра к исследованию устойчивости течений // Тр. межд. науч. конф. "Марчуковские чтения". Новосибирск: ИВМиМГ СО РАН, 2017. С. 106–112.  
*Blinova M. A., Popova N. I., Biberdorf E. A.* Prilozhenie dikhotomii matrichnogo spectra k issledovaniyu ustoychivosti techeniy // Tr. mezhhd. nauch. konf. "Marchukovskie chteniya". Novosibirsk: IVMiMG SO RAN, 2017. S. 106–112.
21. *Малышев А. Н.* Введение в вычислительную линейную алгебру. Новосибирск: Наука, 1991.  
*Malyshev A. N.* Vvedenie v vychislitelnuyu lineynuyu algebru. Novosibirsk: Nauka, 1991.
22. *Годунов С. К.* Современные аспекты линейной алгебры. Новосибирск: Научная книга, 1997.  
*Godunov S. K.* Sovremennye aspekty lineynoy algebrы. Novosibirsk: Nauchnaya kniga, 1997.
23. *Бибердорф Э. А., Попова Н. И.* Несимметричная матричная проблема: Препринт ИЯФ 2010-39. Новосибирск: ИЯФ СО РАН, 2010.  
*Biberdorf E. A., Popova N. I.* Nesimmetrichnaya matrichnaya problema: Preprint IYaF 2010-39. Novosibirsk: IYaF SO RAN, 2010.
24. *Blomquist R., Amirshaw M., Hanlon D., Smith N., Naito Yo., Yang J., Mioshi Yo., Yamamoto T., Jacquet O., Miss J.* Source Convergence in Criticality Safety Analysis. Phase I: Results of Four Test Problems. № 5431. OECD/NEA, 2006.

УДК 519.6

## ДВУМЕРНОЕ ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОПЫТА ПО ПЕРЕМЕШИВАНИЮ В ТРЕХСЛОЙНОЙ ГАЗОВОЙ СИСТЕМЕ С УСЛОВИЕМ ПРИЛИПАНИЯ НА СТЕНКАХ УДАРНОЙ ТРУБЫ

Ю. В. Янилкин

(ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области)

Представлены результаты двумерного численного моделирования течения, формирующегося в трубе постоянного сечения при прохождении ударной волны через трехслойную газовую систему. Использовалось как прямое численное моделирование (решение двумерных уравнений Эйлера или Навье—Стокса без каких-либо моделей турбулентности), так и моделирование по  $(k, \varepsilon)$ -модели турбулентности. Расчеты проводились без учета и с учетом пограничного слоя на боковых стенках ударной трубы. В начальный момент времени газы находятся в состоянии покоя при атмосферном давлении и разделяются двумя тонкими пленками. Первая контактная граница наклонена под углом  $45^\circ$  к фронту ударной волны, вторая расположена параллельно фронту. Центральный слой системы заполняется ксеноном, перед первой и за второй контактными границами содержится воздух. Ударная волна формируется на одном конце трубы и движется в сторону первой контактной границы. Выполнено сравнение результатов численного моделирования задачи в разных постановках как между собой, так и с экспериментальными данными.

*Ключевые слова:* модельные опыты, трехслойная газовая система, численное моделирование, неустойчивость Кельвина—Гельмгольца, неустойчивость Рихтмайера—Мешкова.

### Введение

Существует ряд подходов и физических моделей для расчета турбулентных течений. К широко используемым подходам можно отнести прямое численное моделирование с решением уравнений Эйлера или Навье—Стокса и моделирование с применением полуэмпирических моделей турбулентности (RANS-методы). Представляет интерес сравнение этих подходов на конкретной достаточно сложной задаче, содержащей разные типы неустойчивости, генерирующие турбулентность. В настоящей работе такое сравнение проводится по методике ЭГАК [1], позволяющей проводить как прямое моделирование, так и с использованием  $(k, \varepsilon)$ -модели турбулентности.

Тестирование проводится на задаче [2], представляющей собой трехслойную систему разноплотных газов с разнонаклоненными контактными границами (КГ), помещенную в ударную трубу, по которой распространяется ударная волна (УВ), проходя все КГ системы. Задача представляет значительный интерес, так как в ней присутствует неустойчивость как Рихтмайера—Мешкова, так и Кельвина—Гельмгольца. К сожалению, экспериментальная информация скупа и ограничивается теньвыми кадрами на два момента времени.

Численное исследование задачи проводилось ранее в двумерной постановке с использованием прямого численного моделирования (решением уравнений Эйлера) по методике МИМОЗА [3] в упомянутой работе [2]. Получено качественное согласие результатов расчетов с экспериментальными данными, однако имеются заметные отличия расчетов от экспериментов по некоторым деталям течения, которые в указанной работе не нашли своего объяснения.

Основная цель настоящей работы — дать объяснение имеющимся расхождениям в результатах расчетов и экспериментов. Для этого в расчетах был реализован учет молекулярной вязкости и пограничного слоя (далее для краткости *погранслоя*). Кроме того, были проведены расчеты с вариацией счетной сетки.

### Постановка экспериментов

Постановка экспериментов подробно описана в работе [2].

Эксперименты проведены на ударной трубе, в которой устанавливались две тонкие пленки, а пространство между ними заполнялось газами различной плотности. Экспериментальная картина течения фиксировалась на несколько моментов времени после прохождения основной УВ через КГ.

В экспериментах специальные начальные возмущения на КГ не задавались, их источниками служили кусочки разрушающейся под действием проходящей УВ пленки.

Выполнено несколько опытов в одной и той же постановке. При сравнении полученных в различных опытах картин течения выявлено, что они отличаются друг от друга некоторыми деталями. К сожалению, в работе [2] не приведены результаты отдельных опытов, они позволили бы понять погрешность экспериментов. Авторы работы [2] также отмечают, что на всех экспериментальных фотокадрах течение не просматривается вблизи стенок трубы (в погранслое) из-за технических особенностей.

### Постановки расчетов и использованные численные методы

Численные исследования в настоящей работе выполнялись в нескольких постановках:

1. Численное моделирование задачи осуществлялось по стандартной (*невязкой*) двумерной газодинамической методике ЭГАК, предназначенной для решения уравнения Эйлера без привлечения каких-либо моделей учета турбулентного перемешивания (ТП) (прямое численное моделирование). Характерной особенностью данной методики является использование метода концентраций (VOF) [4] для расчета движения КГ. Качественно такие же уравнения и их аппроксимации используются и в работе [2].
2. Счет выполнялся по стандартной методике ЭГАК, в которой дополнительно на боковых границах ударной трубы задавалось условие прилипания. Это приближенный способ учета погранслоя напрямую, однако надо иметь в виду, что в этом случае в качестве молекулярной вязкости выступает схемная вязкость. Точность такого моделирования вязкости невысока, поэтому данный подход позволяет понять влияние погранслоя лишь на качественном уровне, не претендуя на количественное описание.
3. Уравнения Навье—Стокса (с динамическим коэффициентом вязкости  $\nu = 0,000006$  для всех газов) решались как без учета, так и с учетом погранслоя, т. е. с граничным условием прилипания на боковых стенках.
4. Еще два расчета проводились с использованием ( $k, \varepsilon$ )-модели турбулентности [5] без учета и с учетом погранслоя по алгоритмам [6] с амплитудой шероховатости 0,000005.

Геометрия задачи приведена на рис. 1 (позаимствована из [2]). Труба заполнена разноплотными газами, которые находятся в состоянии покоя при атмосферном давлении. Первая КГ (КГ1) наклонена под углом  $45^\circ$  к фронту УВ, вторая КГ (КГ2) расположена параллельно фронту. В центральном слое системы содержится ксенон, перед КГ1 и за КГ2 — воздух. УВ формируется на верхнем конце трубы и движется в сторону КГ1. Для УВ число Маха  $M \approx 2,4$ .

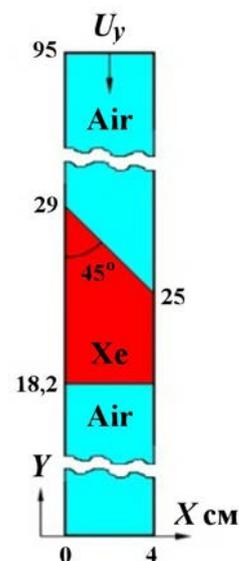


Рис. 1. Геометрия задачи из [2]

Начальные параметры воздуха:  $\rho = 0,00125 \text{ г/см}^3$  — плотность;  $\gamma = 1,4$  — показатель адиабаты;  $P = 1,01325 \text{ г/(см} \cdot \text{мс}^2)$  — давление. Начальные параметры ксенона (Xe):  $\rho = 0,0055 \text{ г/см}^3$ ;  $\gamma = 1,667$ ;  $P = 1,01325 \text{ г/(см} \cdot \text{мс}^2)$ . Параметры сжатого воздуха за фронтом УВ:  $P_2 = 6,64 \text{ г/(см} \cdot \text{мс}^2)$ ;  $\rho_2 = 0,004015 \text{ г/см}^3$ ;  $U_y = 55,7 \text{ см/мс}$ . Уравнение состояния — как для идеального газа.

Геометрия задачи плоская. Граничные условия на стенках трубы задавались в соответствии с постановками расчетов (таблица).

В качестве исходной в расчетах использовалась квадратная сетка с ячейками  $h_x = h_y = 0,005 \text{ см}$ . Такая сетка была взята в соответствии с данными из работы [2], в которой указано, что самая подробная сетка содержала  $22 \times 10^6$  ячеек, что примерно соответствует взятому размеру ячейки. В нескольких расчетах в окрестности КГ *ксенон—воздух* сетка получалась с помощью технологии drobных ячеек [1] и была в два (расчет  $2N$ ) и четыре (расчет  $4N$ ) раза мельче.

### Постановки расчетов

Номер расчета	Особенности счета
1	Стандартная газовая динамика, сетка $N$ , внешние границы — жесткие стенки
2	Стандартная газовая динамика, сетка $2N$ , внешние границы — жесткие стенки
3	Стандартная газовая динамика, сетка $4N$ , внешние границы — жесткие стенки
4	Стандартная газовая динамика, сетка $2N$ , на боковых границах задано условие прилипания
5	Вязкая газовая динамика, динамический коэффициент вязкости обоих газов $\nu = 0,00006$ , сетка $2N$ , на боковых границах задано условие жесткая стенка
6	Вязкая газовая динамика, динамический коэффициент вязкости обоих газов $\nu = 0,00006$ , сетка $2N$ , на боковых границах задано условие прилипания
7	$(k, \varepsilon)$ -модель, сетка $N$ , внешние границы — жесткие стенки
8	$(k, \varepsilon)$ -модель, сетка $N$ , учет погранслоя на боковых стенках

### Результаты расчетов и сравнение с экспериментальными данными

**Вводная часть.** Поскольку экспериментальная картина течения в виде теневых фотографий имеется на два момента времени, то сравнение результатов численного моделирования с экспериментами в виде растровых картин далее будет приведено на всех рисунках на эти два момента. Первая серия рисунков соответствует экспериментальному времени  $t \approx 0,27 \text{ мс}$ , когда КГ2 прошла расстояние  $\Delta x \approx 4 \text{ см}$ , вторая — времени  $t \approx 0,345 \text{ мс}$ , когда КГ2 прошла расстояние  $\Delta x \approx 8 \text{ см}$ . Далее в тексте и на рисунках единицы измерения времени и расстояния не приводятся.

На рис. 2 показаны картины течения из расчета по методике МИМОЗА на указанные два момента времени в сравнении с экспериментальными данными, взятые из работы [2].

Отметим, что положения основной УВ и КГ2 в выполненных расчетах удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными и результатами расчета по МИМОЗА, поэтому они здесь не приводятся.

Как отмечено ранее, в расчетах по методике МИМОЗА имеются количественные расхождения с экспериментальными данными по некоторым деталям. Рассмотрим отличия в течении на момент  $t = 0,345 \text{ мс}$ , характерные и для другого момента времени. Во-первых, заметно отличаются картины перемешивания, особенно в области первого вихря (на рис. 2 обозначен стрелкой с номером 1): в расчете вихрь имеет почти в 1,5 раза больший размер в поперечном направлении, и видно различие в координате его "носика" на стенке ударной трубы. Во-вторых, второй вихрь (на рис. 2 обозначен стрелкой с номером 2) в расчете сильно сдвинут вправо. В-третьих, в расчете практически отсутствует перемешивание на плоской границе *ксенон—воздух*, расположенной перпендикулярно оси  $OX$  (обозначена стрелкой с номером 4), в то время как в эксперименте перемешивание ярко выражено.

Возникает вопрос о возможных причинах указанных отличий. Первая напрашивающаяся причина — малое количество ячеек. Вторая возможная причина — наличие погранслоя, который мог

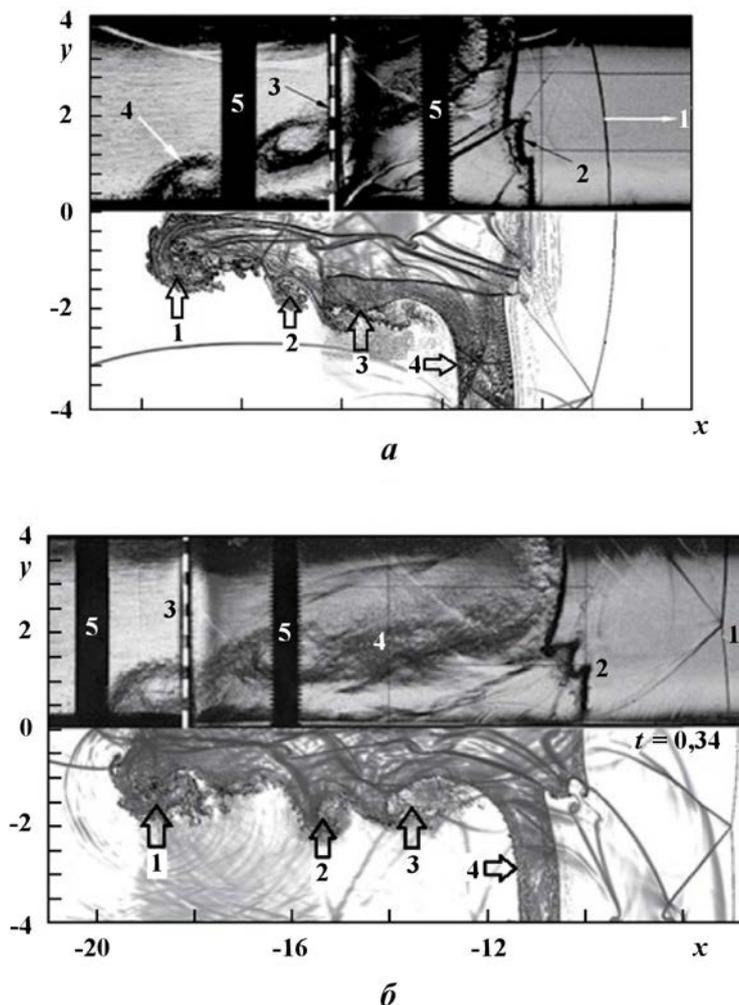


Рис. 2. Поле течения в эксперименте (верхняя половина) и в расчете по МИМОЗА (нижняя половина) из [2]:  $a - t = 0,27$  мс;  $b - t = 0,345$  мс; на экспериментальных кадрах 1 — УВ; 2 — текущее положение КГ2; 3 — начальное положение КГ2; 4 — зона перемешивания; 5 — шпилька крепления; на расчетных картинах стрелки (нанесены автором) указывают положение вихрей 1–3, стрелка 4 — *плоскую* КГ

иметь место в эксперименте и не учитывался в расчетах. В работе [6] показано, что в аналогичных опытах на этой ударной трубе по исследованию движения УВ по зоне ТП наличие погранслоя играет важную роль. И, наконец, третья причина — молекулярная вязкость, которая также не учитывалась в расчетах.

На приводимых далее рисунках показанные сверху экспериментальные картины — это одни и те же уже упомянутые теневые фотографии. Как они построены, не указывается — они взяты из работы [2]. Для большей наглядности растровые картины плотности в расчетах построены в режиме инверсии, т. е. темные тона изображения плотности становятся светлее по мере ее увеличения. При этом использовались 20 оттенков черно-белого изображения, распределенных равномерно. В расчетах трудно было добиться абсолютной синхронизации с экспериментом по времени, поэтому при построении сравнительных рисунков совмещались расчетное и экспериментальное положения КГ2 (на рис. 3 они обозначены стрелками), на которой движение носит одномерный характер. Масштабы рисунков совмещались с использованием известных экспериментальных рисок, линейные координаты которых указаны над левым рис. 3,  $a$ . На остальных рисунках эти риски не нанесены. Видно, что приведенные на рисунках расчетные координаты немного не соответствуют экспериментальным, однако отличия небольшие и они не сильно сказываются на общей картине течения.

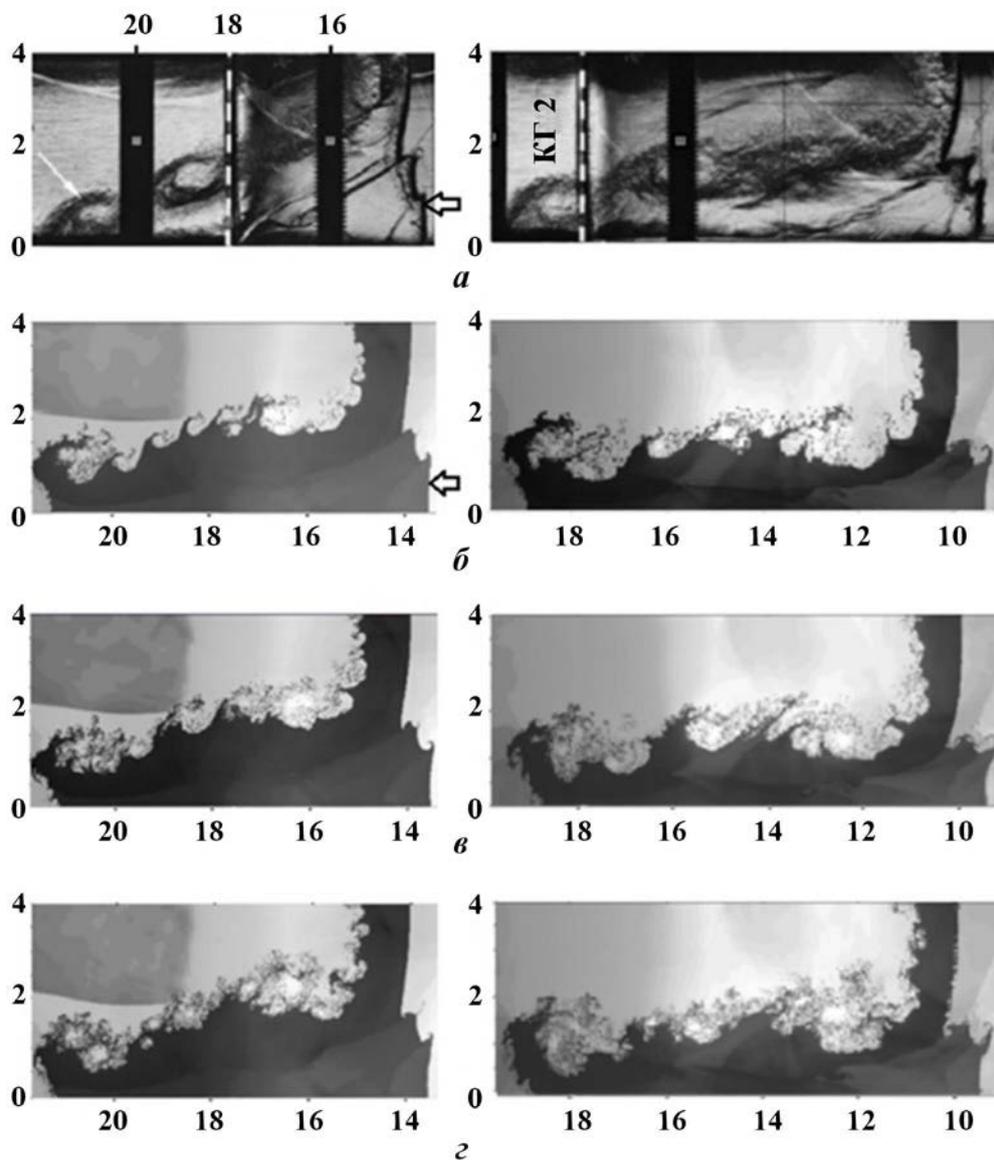


Рис. 3. Сравнение результатов эксперимента и расчетов в стандартной постановке без учета вязкости на разных сетках: *а* — эксперимент; *б* — расчет  $N$ ; *в* — расчет  $2N$ ; *г* — расчет  $4N$ ; слева —  $t = 0,27$ ; справа —  $t = 0,345$

На рисунках используются следующие обозначения: *стандартная* или *невязкая газодинамика* — это решение уравнений Эйлера без молекулярной вязкости; *вязкая газодинамика* — решение уравнений Навье—Стокса; *погранслои* — расчет с занулением скорости на боковых границах ударной трубы для имитации погранслоя (отметим, что это грубое приближение может использоваться лишь для качественного анализа течения, не претендуя на точность; для более корректного моделирования необходимо размещать несколько ячеек на вязком подслое).

**Результаты расчетов.** Рассмотрим результаты расчетов на сходимость. На рис. 3 представлены расчеты 1—3 в стандартной постановке, отличающиеся только сетками (см. таблицу). Прежде всего отметим, что расчет на сетке  $N$  (близкой к сетке в расчете по методике МИМОЗА) дает близкие к расчету по МИМОЗА результаты.

При сравнении расчетов на разных сетках можно отметить, что при качественном согласии их между собой в течении имеются заметные отличия. Во-первых, с уменьшением размеров ячеек пе-

ремешивание происходит более интенсивно, в частности, на плоской границе увеличиваются ширина зоны ТП и мелкомасштабная часть смешения. Во-вторых, более четко проявляются крупные вихри, в частности второй и третий. Таким образом, уменьшение размеров ячеек приводит к лучшему согласию с экспериментом, однако положение и размеры первого вихря остаются без изменения и не согласуются с экспериментом.

Расчеты на сетках  $4N$  требуют больших вычислительных ресурсов, поэтому в остальных расчетах для экономии использовались лишь сетки  $N$  и  $2N$ .

Теперь сравним результаты расчетов на сетке  $2N$  с наличием и отсутствием молекулярной вязкости без учета погранслоя (рис. 4). Видно, что наличие вязкости способствует большей степени перемешивания, особенно в области за третьим вихрем, что приближает результаты расчетов к экспериментальным данным, однако положение и размеры первого вихря остаются без изменения и не согласуются с экспериментом. Таким образом, учет молекулярной вязкости решает проблему несоответствия результатов расчетов экспериментальным данным не полностью.

На рис. 5 приводятся результаты расчетов с учетом и без учета молекулярной вязкости на сетке  $2N$  (расчеты 4 и 6), в обоих случаях с учетом погранслоя (занулением скорости на боковых стенках). Сравнение с рис. 3, 4 показывает, что влияние погранслоя на течение заметно независимо от типа газовой динамики (вязкая или невязкая), его учет приближает расчет к эксперименту по положению, форме и размерам первого вихря.

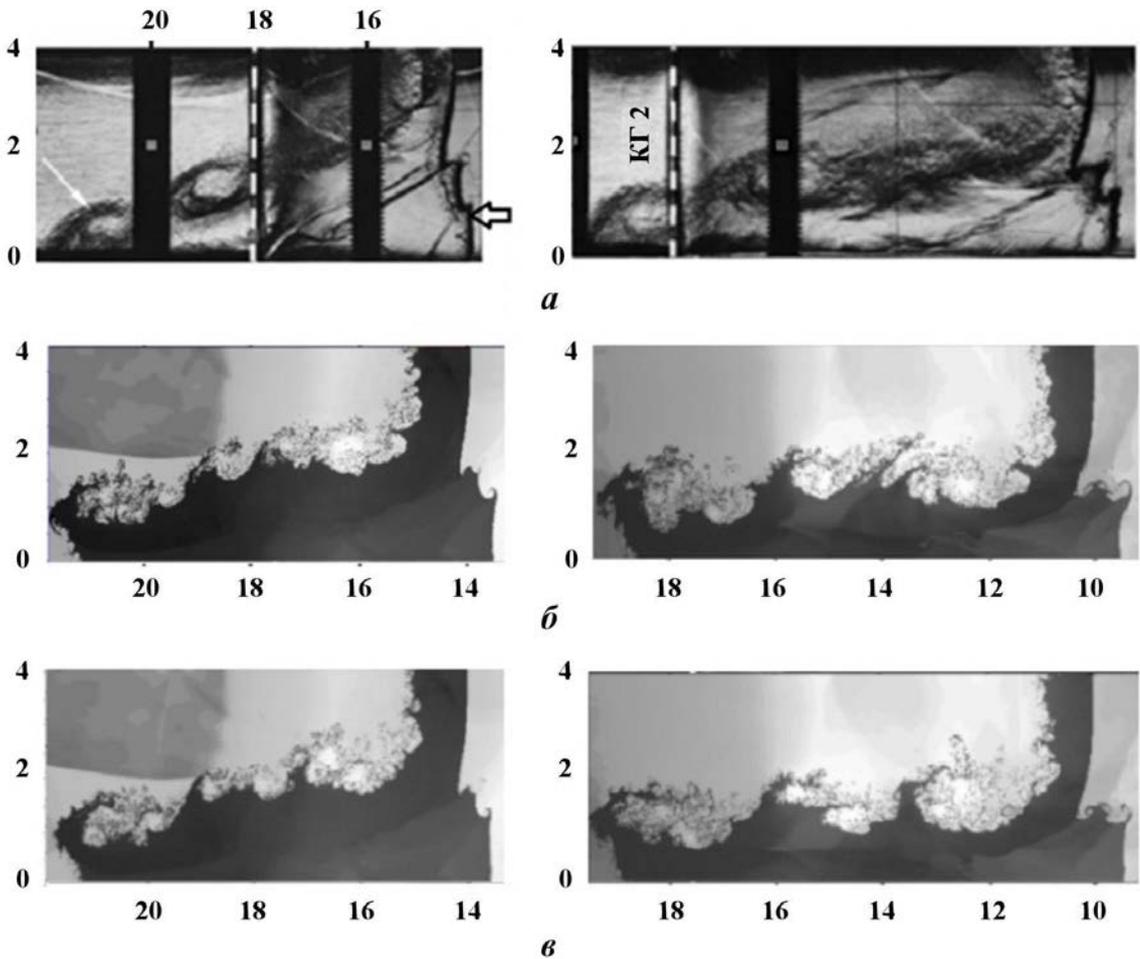


Рис. 4. Сравнение результатов эксперимента и расчетов на сетке  $2N$  без учета и с учетом молекулярной вязкости: *a* — эксперимент; *б* — расчет без вязкости; *в* — расчет с вязкостью; слева —  $t = 0,27$ ; справа —  $t = 0,345$

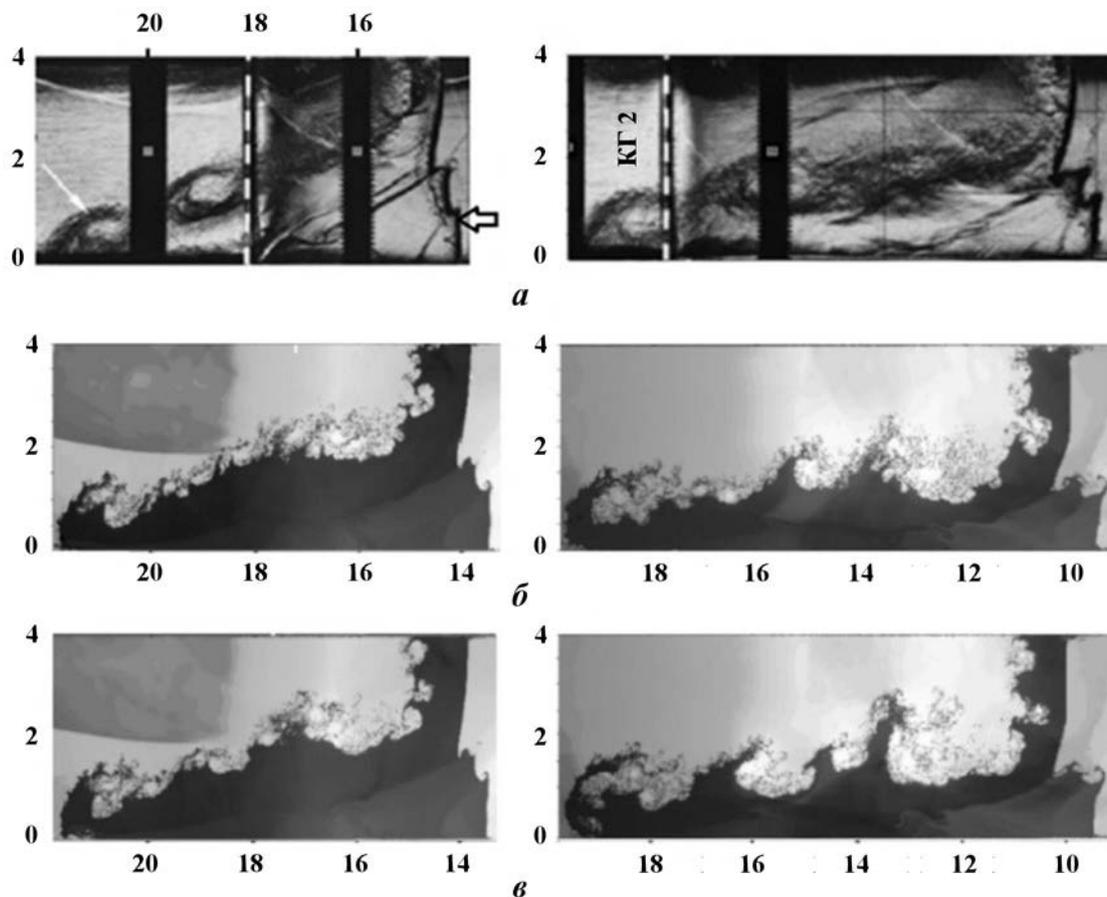


Рис. 5. Результаты эксперимента и расчетов по невязкой и вязкой газодинамикам на сетке  $2N$  с учетом погранслоя: *a* — эксперимент; *б* — расчет по невязкой газодинамике; *в* — расчет по вязкой газодинамике; слева —  $t = 0,27$ ; справа —  $t = 0,345$

Таким образом, для корректного моделирования рассматриваемых экспериментов необходим учет наличия погранслоя. Малая зависимость результатов от типа газовой динамики свидетельствует о заметном влиянии схемной вязкости на течение сравнительно с молекулярной вязкостью. Отметим также возросшую степень смешения на плоской границе при наличии погранслоя независимо от типа газовой динамики.

Далее приводятся результаты расчетов по  $(k, \varepsilon)$ -модели турбулентности. На рис. 6 показаны результаты расчетов без учета и с учетом погранслоя по алгоритму из работы [6]. Отметим, что в указанной работе при вводе модели погранслоя выбор коэффициента шероховатости не производился, поэтому его учет носит качественный характер без претензий на точный результат.

В расчете без погранслоя по  $(k, \varepsilon)$ -модели присутствуют те же погрешности, что и при прямом моделировании: размеры первого вихря значительно больше, и отличается его местоположение. На плоских границах ксенона и воздуха в верхней части рис. 6 видно заметное перемешивание, хотя на нижней границе оно выражено слабее. Отметим, что длинноволновые возмущения в зоне ТП в расчетах по  $(k, \varepsilon)$ -модели не наблюдаются.

Учет погранслоя, как и при прямом моделировании, приближает расчет к экспериментальным данным по размерам и положению первого вихря. Однако на плоской границе, как и прежде, крупномасштабные возмущения не развиваются. Таким образом, расчеты с  $(k, \varepsilon)$ -моделью также подтверждают необходимость учета погранслоя для получения корректного результата при моделировании данной задачи.

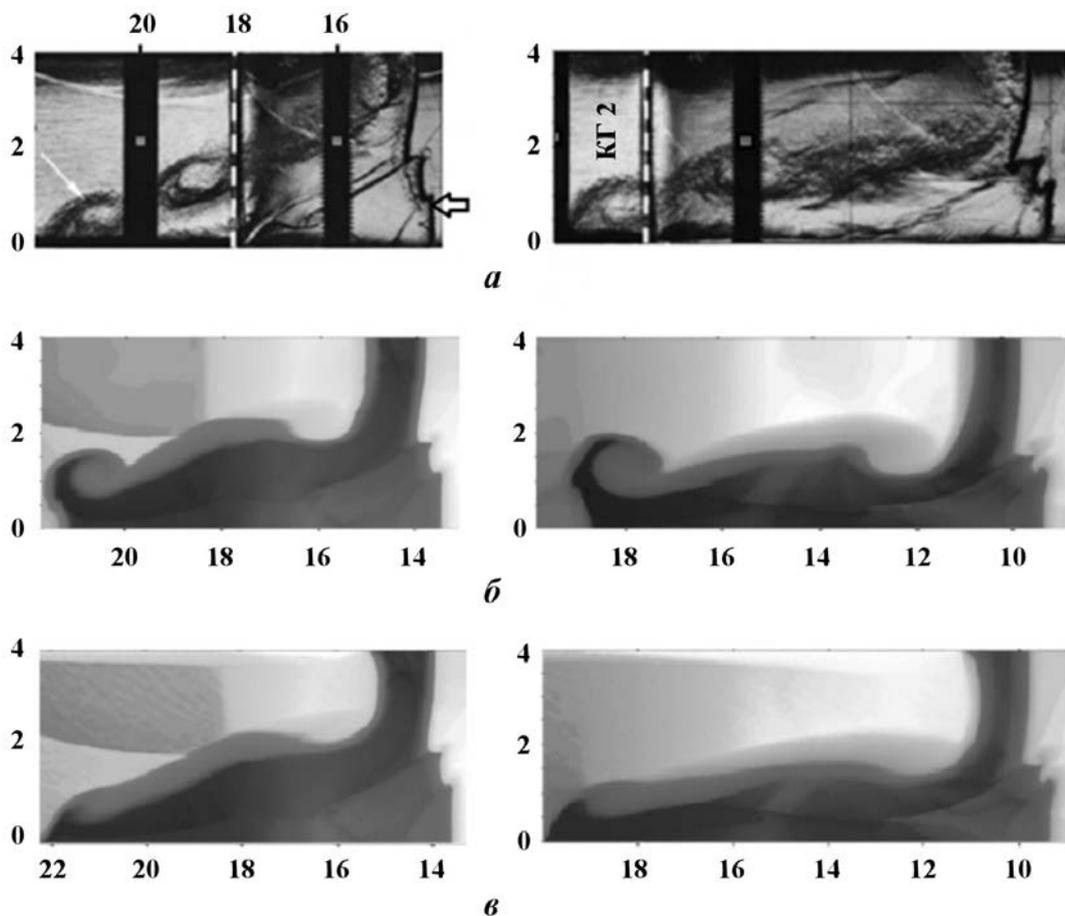


Рис. 6. Сравнение результатов эксперимента и расчетов на сетке  $N$  по  $(k, \varepsilon)$ -модели без учета и с учетом погранслоя:  $a$  — эксперимент;  $б$  — расчет без погранслоя;  $в$  — расчет с погранслоем; слева —  $t = 0,27$ ; справа —  $t = 0,345$

### Заключение

Подчеркнем, что автор не ставил перед собой задачу точного описания результатов экспериментов. Главная цель работы — дать объяснение имеющимся расхождениям в расчетах и экспериментах и выяснить, какие физические процессы необходимо учесть в расчетах для получения более точного результата.

В данной работе имеются два приближения. Во-первых, автору не известны точные значения динамического коэффициента вязкости для воздуха и ксенона — были взяты некоторые правдоподобные значения. Во-вторых, в работе использовался грубый алгоритм учета погранслоя. Несмотря на это, полученные результаты позволяют на качественном уровне объяснить имеющиеся расхождения между результатами эксперимента и расчета при прямом двумерном моделировании по стандартной (невязкой) газовой динамике.

Таким образом, для получения более адекватных результатов при прямом численном моделировании рассматриваемого опыта необходимо выполнить следующие условия:

- 1) использовать подробную сетку с размером ячейки не больше  $h = 0,0025$  см (речь идет о методике ЭГАК, для других методик сетка может быть другой);
- 2) решать уравнения вязкой среды (уравнения Навье—Стокса), так как в некоторых деталях это позволяет лучше описывать эксперименты;
- 3) учитывать погранслои на боковых стенках, так как интересующая часть рассматриваемого течения расположена вблизи стенок.

Моделирование по  $(k, \epsilon)$ -модели также подтверждает необходимость учета погранслоя. Отметим, что этот результат носит более общий характер, он справедлив и для других аналогичных опытов, проводимых на ударных трубах.

В настоящей работе остался в стороне вопрос о влиянии на результаты трехмерного характера ТП. Однако проведение расчетов трехмерных задач на столь мелких сетках требует очень больших ресурсов ЭВМ, поэтому они не проводились.

Автор выражает искреннюю благодарность О. Г. Синьковой и И. Н. Тюриной за помощь в проведении расчетов и обработке их результатов, а также В. В. Змушко за ценные замечания по тексту статьи.

### Список литературы

1. Янилкин Ю. В., Беляев С. П., Бондаренко Ю. А., Гаврилова Е. С., Гончаров Е. А., Горбенко А. Д., Городничев А. В., Губков Е. В., Гужова А. Р., Дегтяренко Л. И., Жарова Г. В., Колобянин В. Ю., Софронов В. Н., Стадник А. Л., Ховрин Н. А., Чернышова О. Н., Чистякова И. Н., Шемяков В. Н. Эйлеровы численные методики ЭГАК и ТРЭК для моделирования многомерных течений многокомпонентной среды // Труды РФЯЦ-ВНИИЭФ. 2008. Вып. 12. С. 54–66.  
Yanilkin Yu. V., Belyaev S. P., Bondarenko Yu. A., Gavrilova E. S., Goncharov E. A., Gorbenko A. D., Gorodnichev A. V., Gubkov E. V., Guzhova A. R., Degtyarenko L. I., Zharova G. V., Kolobyainin V. Yu., Sofronov V. N., Stadnik A. L., Khovrin N. A., Chernyshova O. N., Chistyakova I. N., Shemyakov V. N. Eulerovy chislennyye metodiki EGAK i TREK dlya modelirovaniya mnogomernykh techeniy mnogokomponentnoy sredy // Trudy RFYaTs-VNIIEF. 2008. Vyp. 12. S. 54–66.
2. Бодров Е. В., Змушко В. В., Невмержицкий Н. В., Разин А. Н., Сеньковский Е. Д., Сотсков Е. А. Расчетно-экспериментальное исследование развития турбулентного перемешивания в газовой слоеке при прохождении ударной волны // Механика жидкости и газа. 2018. Т. 3. С. 54–62.  
Bodrov E. V., Zmushko V. V., Nevmerzhitskiy N. V., Razin A. N., Senkovskiy E. D., Sotskov E. A. Raschyetno-eksperimentalnoe issledovanie razvitiya turbulentnogo peremeshivaniya v gazovoy sloyke pri prokhozhdenii udarnoy volny // Mekhanika zhidkosti i gaza. 2018. T. 3. S. 54–62.
3. Змушко В. В., Плетенев Ф. А., Сараев В. А., Софронов И. Д. Методика решения трехмерных уравнений газовой динамики в смешанных лагранжево-эйлеровых координатах // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Методики и программы численного решения задач математической физики. 1988. Вып. 1. С. 22–27.  
Zmushko V. V., Pletenyev F. A., Saraev V. A., Sofronov I. D. Metodika resheniya tryekhmernykh uravneniy gazovoy dinamiki v smeshannykh lagranzhevo-eylerovykh koordinatakh // Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Metodiki i programmy chislennogo resheniya zadach matematicheskoy fiziki. 1988. Vyp. 1. S. 22–27.
4. Бахрах С. М., Глаголева Ю. П., Самигулин М. С., Фролов В. Д., Яненко Н. Н., Янилкин Ю. В. Расчет газодинамических течений на основе метода концентраций // Докл. АН СССР. 1981. Т. 257, № 3. С. 566–569.  
Bakhrakh S. M., Glagoleva Yu. P., Samigulin M. S., Frolov V. D., Yanenko N. N., Yanilkin Yu. V. Raschet gazodinamicheskikh techeniy na osnove metoda kontsentratsiy // Dokl. AN SSSR. 1981. T. 257, № 3. S. 566–569.
5. Янилкин Ю. В. Численное моделирование турбулентного перемешивания в многомерных течениях сжимаемой среды // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1999. Вып. 4. С. 88–94.  
Yanilkin Yu. V. Chislennoe modelirovanie turbulentnogo peremeshivaniya v mnogomernykh techeniyakh szhimaemoy sredy // Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov. 1999. Vyp. 4. S. 88–94.

6. Синькова О. Г., Стаценко В. П., Третьяченко Ю. В., Янилкин Ю. В. Расчетно-теоретическое исследование взаимодействия ударной волны с зоной турбулентного перемешивания, происходящего на плоской границе воздух—аргон в экспериментах на ударной трубе // ПМТФ. 2020. Т. 61, № 6. С. 5—15.
- Sinkova O. G., Statsenko V. P., Tretyachenko Yu. V., Yanilkin Yu. V. Raschyetno-teoreticheskoe issledovanie vzaimodeystviya udarnoy volny s zonoj turbulentnogo peremeshivaniya, proiskhodyashchego na ploskoy granitse vozdukh-argon v eksperimentakh na udarnoy trube // PMTF. 2020. T. 61, № 6. S. 5—15.*

Статья поступила в редакцию 03.09.21.

---

УДК 532.5+519.673

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ДВУХ СПОСОБОВ ГАЗОДИНАМИЧЕСКОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ НА МИШЕНЬ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РЕШЕНИЯ СУЧКОВА

Е. И. Понькин

(СФТИ НИЯУ МИФИ, г. Снежинск Челябинской области)

Двойную волну Сучкова как частное решение системы уравнений, описывающей двумерное газодинамическое течение, прилегающее к кривой стенке, предлагается использовать при моделировании двух способов воздействия на мишень в экспериментах по управляемому термоядерному синтезу. При первом способе воздействия на мишень движением сжимающего непроницаемого поршня установлено, что в окрестности точки примыкания поршня к кривой стенке возникает область большой локальной кумуляции. Эта область и параметры кумуляции тем больше, чем более острым является угол наклона поверхности непроницаемого поршня к кривой стенке в начальный момент времени. При втором способе воздействия на мишень газ в области двойной волны Сучкова сжимается проницаемым поршнем с заданным давлением. Линия этого поршня всегда перпендикулярна кривой стенке, и эффекта большой локальной кумуляции, естественно, не наблюдается. Для обоих рассмотренных случаев исследованы значения газодинамических параметров и интегральные характеристики течений сжатия. В том числе определено, какие массы газа сжаты до разных значений давления и какие энергетические вклады в процесс сжатия дают разные участки сжимающих поршней.

*Ключевые слова:* центрированная волна, двойная волна Сучкова, закон движения поршня, газодинамические параметры.

### Введение

В физических экспериментах по реализации управляемого термоядерного синтеза (УТС) на мишень воздействуют двумя способами: движением сжимающего непроницаемого поршня и заданным внешним давлением. Один из вариантов мишени [1], для которой реализуется первый способ воздействия, приведен на рис. 1. Здесь энергия (ток тяжелых ионизированных частиц) вкладывается в бериллий, который, расширяясь, давит на золотой цилиндр, а последний как непроницаемый поршень воздействует на DT-мишень.

Мишень со вторым способом внешнего воздействия используется в установке NIF (рис. 2, а). Импульс 192 лазеров направляется в капсулу с шаровой мишенью из DT (рис. 2, б), что соответствует воздействию на мишень со всех сторон одинаковым давлением. Положительных результатов подобных экспериментов нет из-за неустойчивости этого сжатия [2], что, в частности, видно из рис. 2, в.

В работах [3, 4] предложены другие конфигурации мишеней, в которых в процессе сжатия радиусы кривизны непроницаемых сжимающих поверхностей не стремятся к нулю. Роль таких поверхностей выполняют грани тетраэдра (рис. 3, а) или треугольной призмы (рис. 3, б), выпуклые соответственно к центру или оси симметрии. Это геометрическое свойство мишеней повышает устойчивость течений сжатия. В процессе сжатия мишеней характер выпуклости поверхностей не изменяется.

Математическое описание безударного сжатия мишени при различных способах воздействия можно получить, используя решение [5, 6] задачи об истечении газа в вакуум с кривой стенки в пространстве физических переменных  $x/t$ ,  $y/t$ .

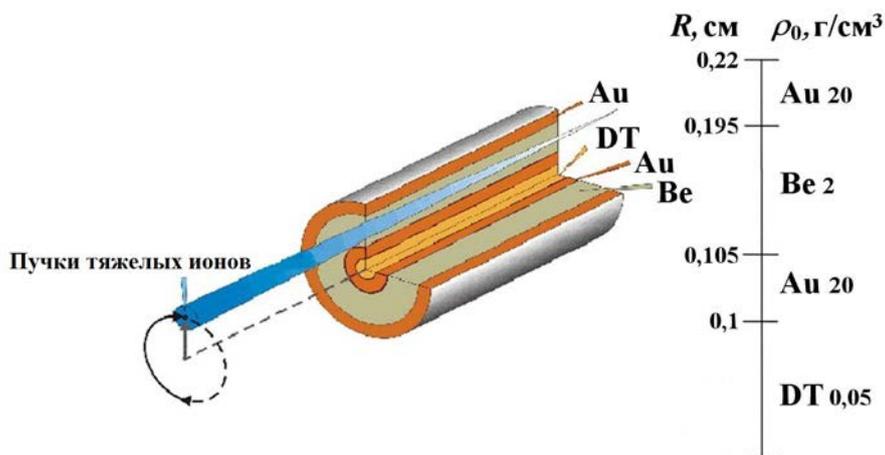


Рис. 1. Цилиндрическая мишень для реализации УТС

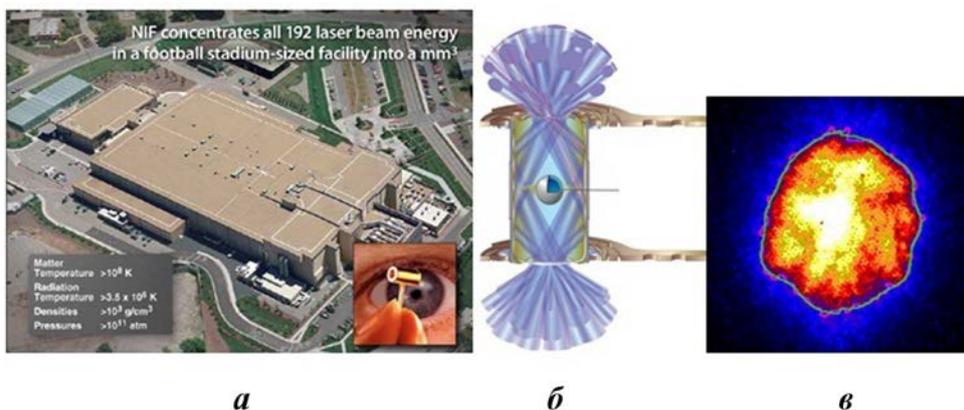


Рис. 2. Установка NIF в Ливерморской национальной лаборатории (США) для реализации УТС [2]

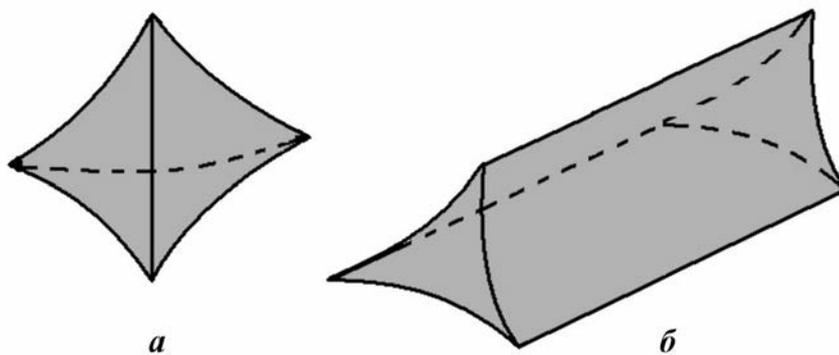


Рис. 3. Возможные конфигурации мишеней для УТС: *a* — тетраэдр с гранями, выпуклыми к центру; *б* — треугольная призма с гранями, выпуклыми к оси симметрии

В работе [6] в пространстве физических переменных  $x/t$ ,  $y/t$  построено автомодельное решение системы уравнений газовой динамики (СУГД) в виде сходящегося ряда по степеням  $\vartheta$ , где  $\vartheta$  — известная функция независимых переменных  $x/t$ ,  $y/t$ . Это решение при  $t \geq 0$  описывает истечение политропного газа в вакуум с косою стенкой, а при  $t \leq 0$  — неограниченное сжатие газа, первоначально заполнявшего призматический объем. В задаче об истечении в вакуум момент времени  $t = 0$  является начальным моментом движения газа. В задаче о сжатии момент  $t = 0$  является конеч-

ным моментом движения газа — моментом сильного сжатия, коллапса, когда весь газ оказывается сжатым до двумерной поверхности и плотность газа обращается в бесконечность.

Для согласованного случая, когда выполняется соотношение

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{(\gamma + 1)}{(3 - \gamma)}, \quad (1)$$

где  $\alpha$  — угол наклона косо́й стенки,  $\gamma$  — показатель политропы газа, получается одно известное [7] частное решение, задаваемое конечным отрезком сходящегося ряда, — двойная волна Сучкова (ДВС). В работе [7] это решение построено в пространстве годографа, т. е. независимых переменных  $u, v$  — компонент вектора скорости газа. ДВС переходит в упомянутое выше частное решение в пространстве физических переменных  $x/t, y/t$ , имеющее вид конечного отрезка сходящегося ряда [5, 6], после применения к ДВС обратного перехода от независимых переменных  $u, v$  к независимым переменным  $x/t, y/t$ .

В работе [8] ДВС была интерпретирована для описания сильного сжатия газа, заполняющего специальный призматический объем. При этом была установлена принципиально бо́льшая степень кумуляции газа, чем при неограниченном сжатии плоских, цилиндрических и сферических объемов газа. Однако в работе [8] и последующих работах А. Ф. Сидорова законы движения сжимающих поршней не найдены, конкретные свойства течений не исследованы и конфигурации течений не замкнуты.

В данной работе построено математическое описание двух способов воздействия на мишень: первый способ — движением сжимающего непроницаемого поршня, второй — заданным внешним давлением (с помощью проницаемого поршня). Также найдены законы движения сжимающих поршней с использованием решения СУГД [5, 6] в согласованном случае (1).

Для рассматриваемых способов воздействия на мишень исследовано распределение давления в области, образованной течениями централизованной волны (ЦВ) сжатия и ДВС (для краткости область ЦВ+ДВС), в том числе вдоль участка поршня, сжимающего газ в области ДВС. Также исследованы интегральные характеристики течения в области ЦВ+ДВС: определены энергетические вклады отдельных участков поршней в процессе сжатия и массы газа, сжатые до разных значений давления различными участками сжимающих поршней.

Кроме того, в работе исследована зависимость характера кумуляции газа от геометрического положения непроницаемого поршня в начальный момент времени.

### Описание с использованием ДВС сильного сжатия мишени по первому способу воздействия

**Постановка задачи.** Пусть в начальный момент времени  $t_0 = -1$  политропный газ покоится в области плоскости  $OXY$ , ограниченной четырьмя прямыми непроницаемыми стенками (рис. 4, а):

- 1)  $x = 0$  при  $0 \leq y \leq y_*$ ;
- 2)  $y = y_* > 0$  при  $x_0 \leq x \leq 0$ ;
- 3)  $x = x_0$  при  $x_0 \operatorname{tg} \alpha \leq y \leq y_*$ ;
- 4)  $y = x \operatorname{tg} \alpha$  при  $x_0 \leq x \leq 0$ ,

где значение  $x_0$  равно значению  $t_0$ , а значение константы  $y_*$  определяет массу сжимаемого газа при  $t > t_0$ .

Скорость звука покоящегося газа равна единице. В момент времени  $t_0$  поршень (вертикальная стенка  $x = x_0$ ) начинает плавно вдвигаться в газ так, чтобы сжатие газа происходило безударно, и при  $t = 0$  весь газ сжимается до бесконечной плотности на прямой  $x = 0$  (при  $y \geq 0$ ).

На рис. 4, б область ЦВ отделена от покоящегося газа вертикальной звуковой характеристикой  $AB$ , которая распространяется по закону [9]

$$x = t.$$

Слева область ЦВ ограничена участком  $CD$  сжимающего непроницаемого поршня. Закон движения  $CD$ , сжимающего течение вида ЦВ в момент времени  $t = 0$  до прямой  $x = 0$  ( $y \geq 0$ ), известен [10, 11]:

$$x^p(t) = \left(x_0 + \frac{t_0}{\varkappa}\right) \left(\frac{t}{t_0}\right)^{1/(\varkappa+1)} - \frac{t}{\varkappa}, \quad (2)$$

где  $\varkappa = (\gamma - 1)/2$ . В случае воздуха  $\gamma = 1,402 \approx 7/5$ ,  $\varkappa = 0,201 \approx 1/5$ ; для водорода  $\gamma = 5/3$ ,  $\varkappa = 1/3$ .

Области ЦВ и ДВС разделены звуковой характеристикой  $AD$  (см. рис. 4, б), которая в рассматриваемом согласованном случае (1) является прямой, задаваемой уравнением [10, 11]

$$y = \frac{\sqrt{\beta}\varkappa}{\varkappa+1}x + \frac{\sqrt{\beta}}{\varkappa+1}t,$$

где  $\beta = (\varkappa + 1)/(1 - \varkappa) = (\gamma + 1)/(3 - \gamma)$ . Область ДВС ограничена слева участком  $DE$  непроницаемого сжимающего поршня.

Точное автомодельное решение СУГД для согласованного случая в области ДВС в пространстве физических переменных  $x/t$ ,  $y/t$  задается функциями  $c$ ,  $u$  и  $v$  [5, 6]:

$$c = \frac{1}{\beta} \left(1 + \varkappa \frac{x}{t} + \varkappa \sqrt{\beta} \frac{y}{t}\right); \quad u = \left(1 - \frac{\varkappa}{\beta}\right) \frac{x}{t} - \frac{\varkappa}{\sqrt{\beta}} \frac{y}{t} - \frac{1}{\beta}; \quad v = -\frac{\varkappa}{\sqrt{\beta}} \frac{x}{t} + (1 - \varkappa) \frac{y}{t} - \frac{1}{\sqrt{\beta}}. \quad (3)$$

Здесь  $u$ ,  $v$  — декартовы компоненты вектора скорости газа;  $c = \rho^{(\gamma-1)/2}$  — скорость звука газа в рассматриваемом случае изэнтропических течений;  $\rho$  — плотность газа. Связь между плотностью и давлением газа устанавливается через уравнение состояния для политропного газа  $p = \rho^\gamma/\gamma$ .

Все переменные в задаче стандартным образом сделаны безразмерными с использованием конкретных значений размерных масштабных значений  $t_{00}$ ,  $x_{00}$ ,  $u_{00}$ ,  $\rho_{00}$  — времени, расстояния, скорости и плотности соответственно. При этом положено

$$t_{00} = \frac{x_{00}}{u_{00}}; \quad u_{00} = c_{00}; \quad c_{00} = \rho_{00}^{(\gamma-1)/2}.$$

Оценка мощности энерговложения  $A_r$  в мишень (область ЦВ+ДВС + покоящийся газ) выполнялась по формуле

$$A_r = \frac{1}{\Delta t} \int_{V_1}^{V_2} p dV, \quad (4)$$

где  $\Delta t$  — время, за которое в мишень вкладывается энергия, затрачиваемая на изменение объема области ЦВ+ДВС + покоящийся газ от значения  $V_1$  до значения  $V_2$ ;  $p$  — распределение давления в данной области.

Расчет массы сжимаемого в моменты времени  $t_0 < t < 0$  газа выполнялся для областей давления  $A_p$ ,  $B_p$  и  $C_p$ , задаваемых следующими неравенствами:

$$A_p: \frac{3}{4}p_{\max} \leq p \leq p_{\max}; \quad B_p: \frac{2}{3}p_{\max} \leq p \leq p_{\max}; \quad C_p: \frac{1}{2}p_{\max} \leq p \leq p_{\max}, \quad (5)$$

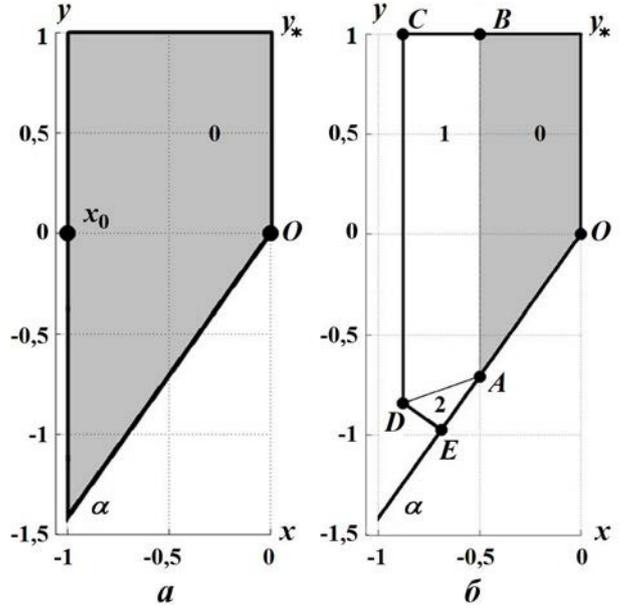


Рис. 4. Начальная конфигурация течения при  $t_0 = -1$  (а) и его конфигурация при  $t_0 < t < 0$  (б): 0 — покоящийся газ; 1 — область ЦВ; 2 — область ДВС

где  $p_{\max}$  — максимальное давление в ДВС между участком  $DE$  сжимающего поршня, косой стенкой и характеристикой  $AD$ .

**Алгоритм построения поверхности непроницаемого поршня, сжимающей газ в области ДВС.** Контактная характеристика  $DE$  будет совпадать с поверхностью непроницаемого поршня, сжимающего газ в области ДВС, когда каждая точка поверхности поршня будет иметь скорость, равную скорости частиц газа в данный момент времени. Закон движения частиц газа в области ДВС, согласно [5, 6], задается следующими выражениями:

$$x(t) = \frac{x_0 + \sqrt{\beta}y_0 + \frac{t_0}{\varkappa} \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{1-\varkappa}{1+\varkappa}} - 1 + \sqrt{\beta}\varkappa \left(\frac{y_0}{t_0} - \sqrt{\beta}\frac{x_0}{t_0}\right) \frac{t}{\varkappa}}{1 + \beta}; \quad (6)$$

$$y(t) = \frac{\left(x_0 + \sqrt{\beta}y_0 + \frac{t_0}{\varkappa}\right) \sqrt{\beta}}{1 + \beta} \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{1-\varkappa}{1+\varkappa}} + \frac{\varkappa \left(\frac{y_0}{t_0} - \sqrt{\beta}\frac{x_0}{t_0}\right) - \sqrt{\beta}}{1 + \beta} \frac{t}{\varkappa}. \quad (7)$$

В момент времени  $t = t_0 + \varepsilon$ , где  $\varepsilon = 0,1$ , рассмотрим поверхность поршня  $CDE$ , показанную на рис. 4, б, как набор  $m$  точек. Дискретизируем ось времени  $t$ :  $t_i = (t_0 + \varepsilon) \frac{n-1}{n}i$ , где  $n$  — число интервалов разбиения промежутка времени от  $t_0 + \varepsilon$  до 0;  $i$  задает номер временного интервала. Тогда для моментов времени  $t_i \geq t_0 + \varepsilon$  формулы (2), (6) и (7) переписываются в следующем виде:

– в области ЦВ, когда  $y_{i,j} \geq y_{D,i}$  и  $x_{i,j}^p = x_{i,j} = x_{D,i}$ :

$$x_{i,j}^p = \left(x_{i-1,j}^p + \frac{t_{i-1}}{\varkappa}\right) \left(\frac{t_i}{t_{i-1}}\right)^{1/(\varkappa+1)} - \frac{t_i}{\varkappa}; \quad (8)$$

– в области ДВС, когда  $y_{i,j} < y_{D,i}$  и  $x_{i,j} < x_{D,i}$ :

$$x_{i,j} = \frac{x_{i-1,j} + \sqrt{\beta}y_{i-1,j} + \frac{t_{i-1}}{\varkappa} \left(\frac{t_i}{t_{i-1}}\right)^{\frac{1-\varkappa}{1+\varkappa}} - 1 + \sqrt{\beta}\varkappa \left(\frac{y_{i-1,j}}{t_{i-1}} - \sqrt{\beta}\frac{x_{i-1,j}}{t_{i-1}}\right) \frac{t_i}{\varkappa}}{1 + \beta}; \quad (9)$$

$$y_{i,j} = \frac{\left(x_{i-1,j} + \sqrt{\beta}y_{i-1,j} + \frac{t_{i-1}}{\varkappa}\right) \sqrt{\beta}}{1 + \beta} \left(\frac{t_i}{t_{i-1}}\right)^{\frac{1-\varkappa}{1+\varkappa}} + \frac{\varkappa \left(\frac{y_{i-1,j}}{t_{i-1}} - \sqrt{\beta}\frac{x_{i-1,j}}{t_{i-1}}\right) - \sqrt{\beta}}{1 + \beta} \frac{t_i}{\varkappa}. \quad (10)$$

Здесь  $x_{i,j} = x_j(t_i)$ ;  $y_{i,j} = y_j(t_i)$ ;  $j$  задает точку на поверхности поршня  $CDE$ ,  $j = \overline{1, m}$ ;  $i = \overline{1, n}$ . Пара  $(x_{D,i}, y_{D,i})$  задает координаты точки  $D$ , которые определяются выражениями

$$x_{D,i} = \left(x_{D,i-1} + \frac{t_{i-1}}{\varkappa}\right) \left(\frac{t_i}{t_{i-1}}\right)^{1/(\varkappa+1)} - \frac{t_i}{\varkappa}; \quad y_{D,i} = \frac{\varkappa\sqrt{\beta}}{1 + \varkappa}x_{D,i} + \frac{\sqrt{\beta}}{1 + \varkappa}t_i. \quad (11)$$

При  $i = 1$   $x_{D,1} = x^p(-1 + \varepsilon)$ ;  $y_{D,1} = \frac{\varkappa\sqrt{\beta}}{1 + \varkappa}x^p(-1 + \varepsilon) + \frac{\sqrt{\beta}}{1 + \varkappa}(-1 + \varepsilon)$ .

Точка  $D$  по закону (11) движется вверх по поверхности поршня на участке  $CD$ , сжимающей газ в области ЦВ. Тем самым количество точек поршня на участке  $CD$  уменьшается, а количество точек поршня на участке  $DE$  увеличивается.

### Результаты математического моделирования первого способа воздействия на мишень.

Рассмотрим случай, когда в момент времени  $t = t_0 + \varepsilon$  участок  $DE$  непроницаемого поршня перпендикулярен косой стенке (см. рис. 4, б). Введем обозначения:  $t_{0\varepsilon} = t_0 + \varepsilon$ ;  $x_{0\varepsilon}^p = x^p(t_{0\varepsilon})$ ;  $m_1$  — начальное количество точек на участке  $DE$ ;  $m_2$  — начальное количество точек на участке  $CD$ . Тогда можно определить координаты  $m = m_1 + m_2$  точек поверхности непроницаемого поршня  $CDE$  в начальный момент времени:

– для участка  $DE$  в области ДВС, когда  $j = \overline{1, m_1}$ :

$$M_{1,j} = \left( x_{1,j} = \frac{m_1 (x_{0\varepsilon}^p + t_{0\varepsilon}) + (x_{0\varepsilon}^p - t_{0\varepsilon}) j}{2m_1}, y_{1,j} = \frac{x_{0\varepsilon}^p + t_{0\varepsilon}}{\sqrt{\beta(1-\varkappa)}} - \frac{x_{1,j}}{\sqrt{\beta}} \right); \quad (12)$$

– для участка  $CD$  в области ЦВ, когда  $j = \overline{(m_1 + 1), m}$ :

$$M_{1,j} = \left( x_{1,j} = x_{0\varepsilon}^p, y_{1,j} = \frac{\varkappa x_{0\varepsilon}^p + t_{0\varepsilon}}{\sqrt{\beta(1-\varkappa)}} + \left[ 1 - \frac{\varkappa x_{0\varepsilon}^p + t_{0\varepsilon}}{\sqrt{\beta(1-\varkappa)}} \right] \frac{j - m_1}{m_2} \right). \quad (13)$$

Координаты точек исходной поверхности поршня  $CDE$ , задаваемые формулами (12), (13), используются для определения координат точек поверхности непроницаемого поршня в последующие моменты времени  $t > t_{0\varepsilon}$  по формулам (7)–(9).

На рис. 5 показаны результаты расчета положения поршня  $CDE$  от времени и функции  $p$  в области ЦВ+ДВС для исходного наклона участка непроницаемого поршня  $DE$ , перпендикулярного косоугольной стенке в области ДВС.

Из рис. 5 видно, что характеристика  $AD$ , разделяющая области ЦВ и ДВС, движется вверх по одномерному течению, и поэтому газ, пересекая эту характеристику, попадает из области ЦВ в область ДВС. Это добавляет точки в расчет по формулам (9), (10) удаляя их из расчета по формуле (8). Расчеты показывают, что точки поверхности непроницаемого поршня, которые в момент времени  $t_{0\varepsilon}$  находились в области ДВС, сохраняют свою исходную ориентацию относительно косоугольной стенки (лежат на перпендикулярной прямой – см. рис. 5, а, б) и двигаются по направлению к ней. Движение точек поверхности поршня, которые в результате сжатия перешли из области ЦВ в область ДВС, уже не определяется исходным наклоном стенки  $DE$ , а определяется только газодинамическими параметрами течения ДВС. Видно, что со временем эта, как бы новая, часть поверхности сжимающегося непроницаемого поршня начинает выгибаться в сторону косоугольной стенки, фактически касаясь ее в своей крайней точке. Исходный наклон сжимающегося непроницаемого поршня по отношению к косоугольной стенке фактически пропадает. Там, где поршень касается косоугольной стенки, возникает область повышенного давления – локальная кумуляция газа (см. рис. 5, в).

Для оценки характера кумуляции газа в области ДВС выполнен расчет масс газа для интервалов давления  $A_p, B_p$  и  $C_p$ , задаваемых неравенствами (5). Для этого вводится величина  $\delta m$  – отношение

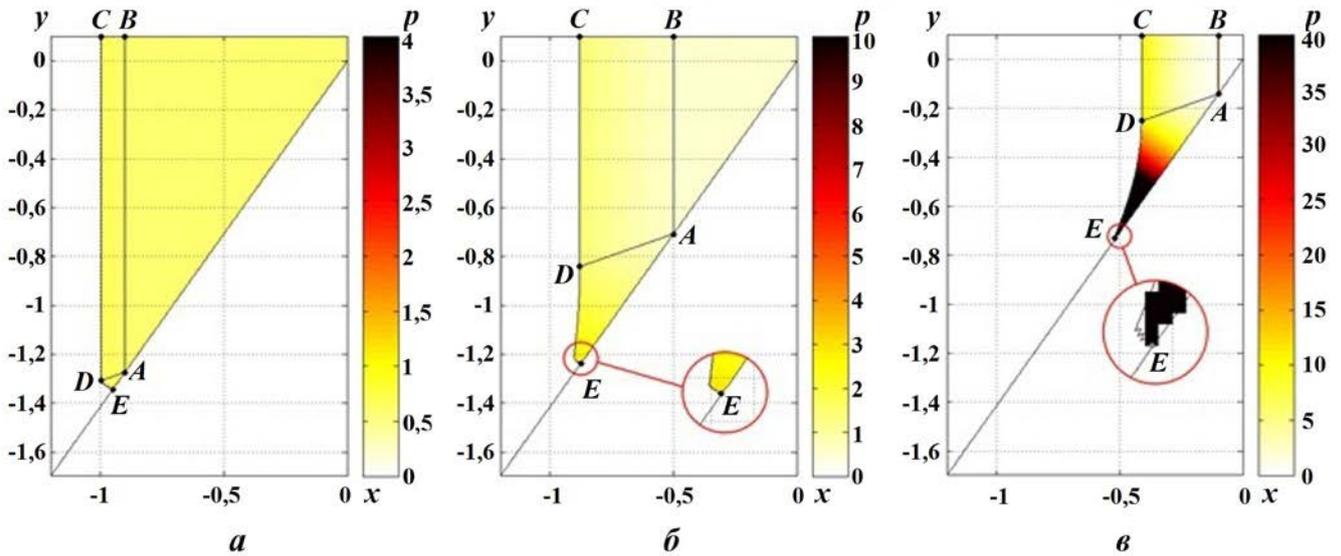


Рис. 5. Распределение давления газа в призматическом объеме при его сжатии непроницаемым поршнем  $CDE$ : а –  $t_1 = -0,9$ ; б –  $t_2 = -0,5$ ; в –  $t_3 = -0,1$

массы газа в области ДВС, задаваемой неравенством как  $A_p$ ,  $B_p$  или  $C_p$ , к массе газа в области ДВС или во всей области сжатия. То есть, например, для интервала давления  $A_p$  и области ДВС будем иметь выражение

$$\delta m = \frac{m_{A_p}}{m_{ADE}}.$$

Результаты расчета  $\delta m$  для рассматриваемого исходного наклона участка сжимающего поршня  $DE$  к косо́й стенке показаны на рис. 6, а, б. На рис. 6, в приведен график зависимости от времени мощности энерговложения в мишень, определяемой по формуле (4).

При приближении к моменту коллапса нижние границы интервалов давления  $A_p$ ,  $B_p$  и  $C_p$  сдвигаются к точке  $E$  (см. рис. 5, в) из-за роста давления в области сильной кумуляции и выгибания участка поверхности поршня  $DE$  к косо́й стенке. Область пространства, занимаемого газом с давлением из интервалов  $A_p$ ,  $B_p$  и  $C_p$ , уменьшается. При этом газ из области ЦВ перетекает в область ДВС, что обусловлено движением характеристики  $AD$  по основному (одномерному) течению. Как следствие, масса газа в области ДВС растет, что приводит к уменьшению значений  $\delta m$  с течением времени в этой области (см. рис. 6, а).

Масса сильно сжатого газа для всей области ЦВ+ДВС невелика и составляет не более 10% от общей массы сжимаемого газа. Из рис. 6, б видно, что с течением времени значения  $\delta m$  растут, что связано с перетоком газа из области ЦВ в область ДВС.

Функция  $A_r$  зависимости мощности энерговложения в мишень от времени (см. рис. 6, в) на промежутке времени от  $t_0$  до  $0,1t_0$  — линейная функция времени, максимум которой не превышает 10% от  $A_r^{\max}$ . На интервале времени от  $0,1t_0$  до нуля наблюдается резкое возрастание мощности энерговложения в мишень (значение  $A_r$  изменяется от  $0,1A_r^{\max}$  до  $A_r^{\max}$ ). Из анализа характера изменения мощности энерговложения в мишень качество сжатия можно разделить на два этапа: медленное сжатие газа при  $t_0 < t < 0,1t_0$  и последующий резкий удар при  $0,1t_0 < t < 0$ .

**Определение зависимости характера кумуляции газа от исходного положения участка поршня  $DE$  относительно косо́й стенки.** В работах [5, 6] показано, что в однозначно определенном течении ДВС (3) линию  $DE$ , являющуюся участком поверхности непроницаемого поршня, сжимающим газ в ДВС, можно задавать разными способами (рис. 7). На рис. 8 показаны результаты расчета функции  $p$  вдоль поверхности непроницаемого поршня  $CDE$  в моменты времени  $t_1 = -0,9$ ,  $t_2 = -0,5$  и  $t_3 = -0,1$  для показанных на рис. 7 трех случаев исходного наклона участка  $DE$

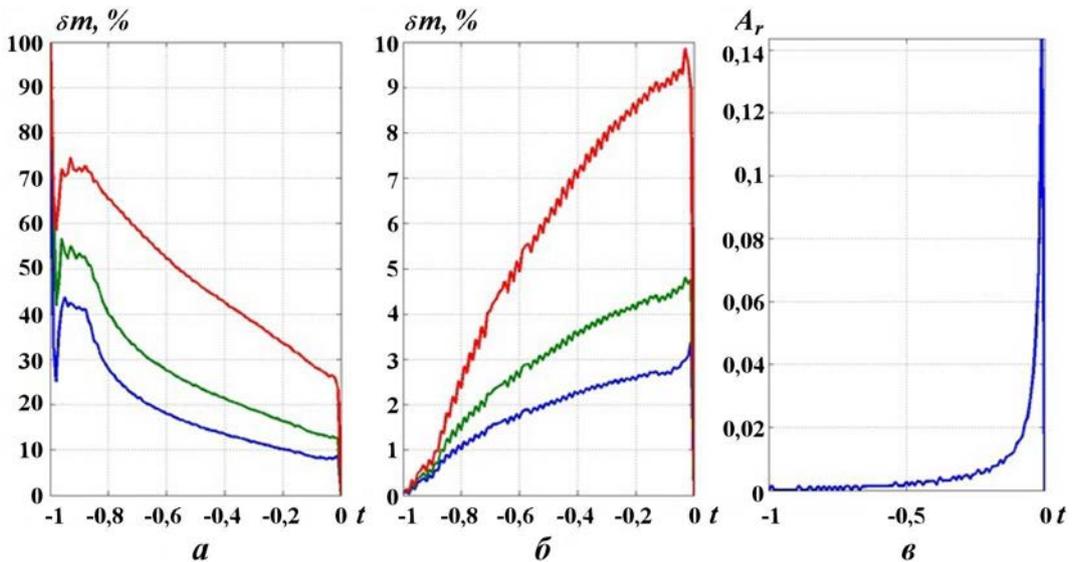


Рис. 6. Значения  $\delta m$  для интервалов давлений  $A_p$  (—),  $B_p$  (—),  $C_p$  (—) в областях ДВС (а), ЦВ+ДВС (б) и мощность энерговложения в мишень (в)

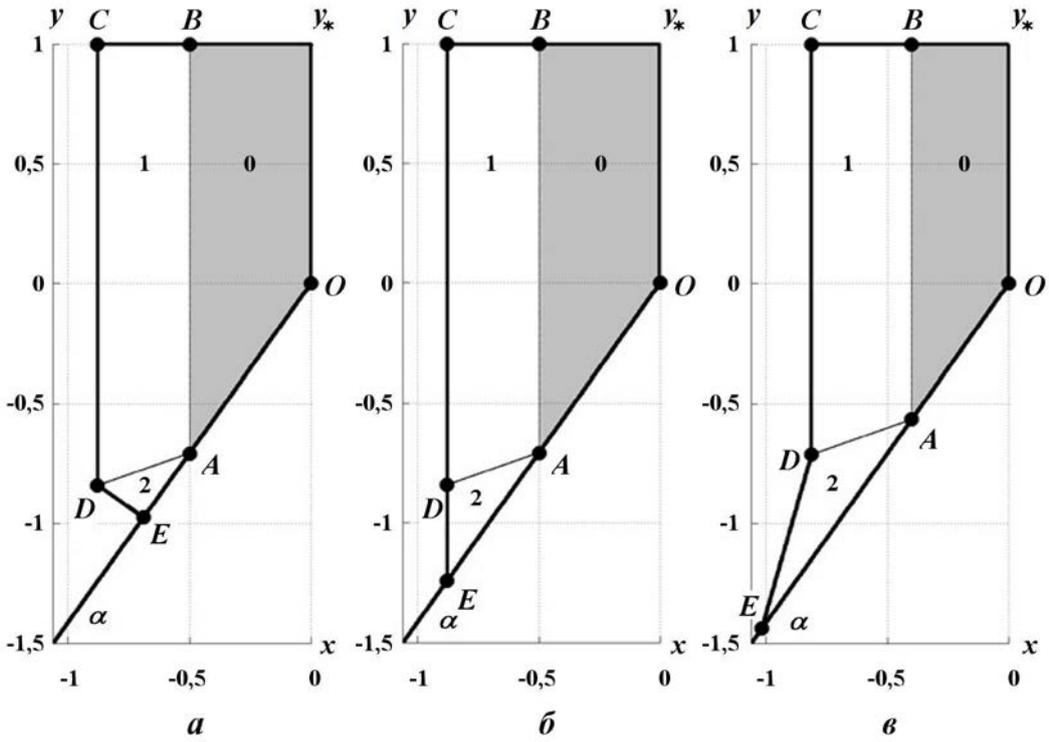


Рис. 7. Способы задания исходного положения ( $t = t_{0\varepsilon}$ ) участка  $DE$  непроницаемого поршня в области ДВС относительно косой стенки:  $a$  — перпендикулярен косой стенке;  $б$  — является продолжением линии  $CD$ ;  $в$  — наклонен под острым углом к косой стенке

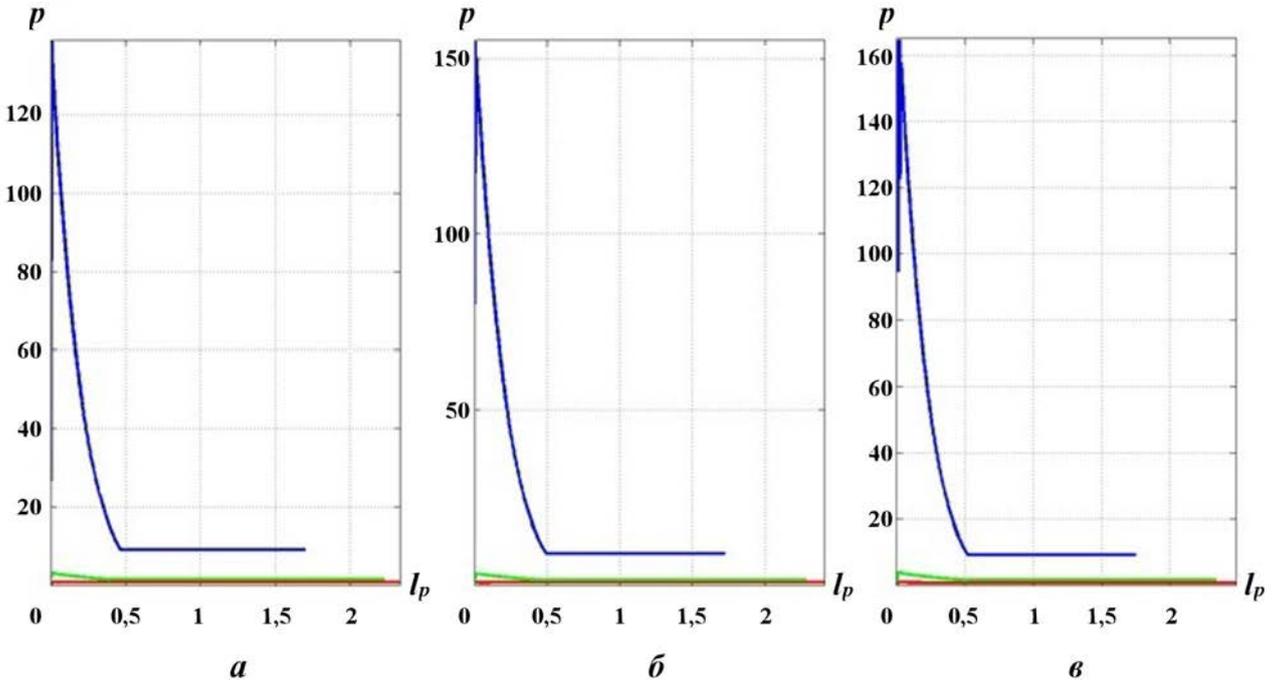


Рис. 8. График функции  $p$  в моменты времени  $t_1$  (—),  $t_2$  (—) и  $t_3$  (—) вдоль поршня  $CDE$  в области ЦВ+ДВС для различных исходных положений поршня  $DE$ :  $a$  — перпендикулярен косой стенке;  $б$  — является продолжением линии  $CD$ ;  $в$  — наклонен под острым углом к косой стенке

непроницаемого поршня к кривой стенке. На рис. 8  $l_p$  обозначает расстояние вдоль поршня  $CDE$ ; горизонтальные участки соответствуют участку  $CD$  поршня.

Из графиков на рис. 8 видно, что при приближении к коллапсу:

- давление газа в области сильной кумуляции превышает давление газа в области ЦВ более чем на порядок;
- степень кумуляции давления газа в области ДВС зависит от исходного положения линии  $DE$ . При смещении положения линии  $DE$  влево относительно перпендикуляра к кривой стенке давление газа в основании угла между кривой стенкой и непроницаемым поршнем увеличивается, несмотря на то, что в конце движения исходный вид поршня полностью утрачивается;
- значение максимума давления вдоль участка  $DE$  для случая, когда линия  $DE$  наклонена к кривой стенке под острым углом, является наибольшим для трех рассматриваемых случаев (см. рис. 8, в).

### Описание с использованием ДВС сильного сжатия мишени по второму способу воздействия

**Постановка задачи.** В работе [12, с. 184–187] рассматривалась постановка задачи о плавном движении проницаемого поршня (*мягкий поршень*) по фоновому течению при заданном давлении на поршне. В этом случае не предполагается выполнение на поршне условия непротекания. В качестве краевого условия для рассматриваемой в [12] характеристической задачи Коши (ХЗК) на поршне задается давление. Из единственного решения данной ХЗК стандартного вида однозначно определяются закон движения проницаемого поршня и значения газодинамических параметров на нем [12].

Рассмотрим поверхность проницаемого поршня, перпендикулярного кривой стенке в любой момент времени, который движется по фоновому течению, задаваемому решением ДВС в согласованном случае (1). Поверхность такого поршня в момент времени  $t_0 < t < 0$  задается уравнением

$$y = \frac{\sqrt{\beta}}{\varkappa + 1} \left( x_0 + \frac{t_0}{\varkappa} \right) \left( \frac{t}{t_0} \right)^{\frac{1}{\varkappa+1}} - \frac{x}{\sqrt{\beta}} - \frac{t}{\varkappa\sqrt{\beta}}. \quad (14)$$

Движение поверхности (14) согласовано с движением участка  $CD$  поршня в области ЦВ и характеристикой  $AD$  таким образом, что в любой момент времени точка  $D$  принадлежит поверхности проницаемого поршня. Закон движения точек поверхности (14) задается выражениями

$$x(t) = \frac{x_0 + \sqrt{\beta}y_0 + \frac{t_0}{\varkappa}}{1 + \beta} \cdot \left( \frac{t}{t_0} \right)^{\frac{1}{1+\varkappa}} - \frac{1 + \sqrt{\beta}\varkappa \left( \frac{y_0}{t_0} - \sqrt{\beta} \frac{x_0}{t_0} \right) t}{1 + \beta} \frac{t}{\varkappa}; \quad (15)$$

$$y(t) = \frac{\left( x_0 + \sqrt{\beta}y_0 + \frac{t_0}{\varkappa} \right) \sqrt{\beta}}{1 + \beta} \left( \frac{t}{t_0} \right)^{\frac{1}{1+\varkappa}} + \frac{\varkappa \left( \frac{y_0}{t_0} - \sqrt{\beta} \frac{x_0}{t_0} \right) - \sqrt{\beta}}{1 + \beta} \frac{t}{\varkappa}. \quad (16)$$

Отличие формул (15), (16) от формул (6), (7) — в показателе степени в первом слагаемом.

Контактная поверхность, задаваемая уравнением (14), удовлетворяет постановке стандартной ХЗК о движении мягкого поршня по фоновому течению типа ДВС с заданным давлением. Это легко показать, вычислив значение скорости звука вдоль линии  $DE$ :

$$c(t) = \frac{1}{\beta} + \frac{\varkappa}{\sqrt{\beta}} \left( \frac{1}{\sqrt{\beta}} \frac{x}{t} + \frac{y}{t} \right) = \frac{\varkappa}{\varkappa + 1} \left( \frac{x_0}{t_0} + \frac{1}{\varkappa} \right) \left( \frac{t}{t_0} \right)^{-\frac{\varkappa}{\varkappa+1}}.$$

Видно, что значение скорости звука вдоль прямой  $DE$  не зависит от  $x$ ,  $y$ , т. е. в каждый фиксированный момент времени оно постоянно и свое. Отсюда очевидно, что поверхность проницаемого

поршня в области ДВС, задаваемая выражением (14), является поверхностью постоянного давления. Тем самым доказано, что построенное решение описывает второй способ сжатия — давлением на мишень, одинаковым со всех сторон.

**Алгоритм построения поверхности проницаемого поршня, сжимающей газ в области ДВС.** Алгоритм построения поверхности проницаемого поршня постоянного давления в области ДВС при  $t_0 \leq t \leq 0$  повторяет алгоритм построения поверхности непроницаемого поршня для первого способа воздействия на мишень. Координаты точек участка  $CD$  (см. рис. 4, б) поршня в области ЦВ вычисляются по формуле (8), а координаты участка  $DE$  поршня в области ДВС вычисляются по дискретизированным формулам (15), (16), а именно:

$$x_{i,j} = \frac{x_{i-1,j} + \sqrt{\beta}y_{i-1,j} + \frac{t_{i-1}}{\varkappa}}{1 + \beta} \left( \frac{t_i}{t_{i-1}} \right)^{\frac{1}{1+\varkappa}} - \frac{1 + \sqrt{\beta}\varkappa \left( \frac{y_{i-1,j}}{t_{i-1}} - \sqrt{\beta} \frac{x_{i-1,j}}{t_{i-1}} \right) t_i}{1 + \beta} \frac{t_i}{\varkappa}, \quad (17)$$

$$y_{i,j} = \frac{\left( x_{i-1,j} + \sqrt{\beta}y_{i-1,j} + \frac{t_{i-1}}{\varkappa} \right) \sqrt{\beta}}{1 + \beta} \left( \frac{t_i}{t_{i-1}} \right)^{\frac{1}{1+\varkappa}} + \frac{\varkappa \left( \frac{y_{i-1,j}}{t_{i-1}} - \sqrt{\beta} \frac{x_{i-1,j}}{t_{i-1}} \right) - \sqrt{\beta}}{1 + \beta} \frac{t_i}{\varkappa}. \quad (18)$$

При переходе частиц газа из области ЦВ в область ДВС, как указано выше, за счет движения характеристики  $AD$  точки поверхности поршня  $CDE$  исключаются из расчета по формуле (8) и добавляются в расчет по формулам (17) и (18).

*Замечание.* В работе [6] допущена неточность. Формулы (20), (21) из [6], совпадающие с формулами (6), (7) из настоящей работы, не описывают движение поверхности поршня с постоянным давлением в области ДВС рассмотренного здесь второго случая. Указанное движение описывается формулами (17) и (18) из данной работы.

**Анализ свойств течения сжатия газа в области ДВС под действием проницаемого поршня.** На рис. 9 показаны результаты расчета функции  $p$  в области ЦВ+ДВС для поршня  $CDE$  (участок  $DE$  поршня в области ДВС проницаем), точки поверхности которого в области ДВС движутся по закону (17), (18), в моменты времени  $t_1 = -0,9$ ,  $t_2 = -0,5$  и  $t_3 = -0,1$ . Видно, что уча-

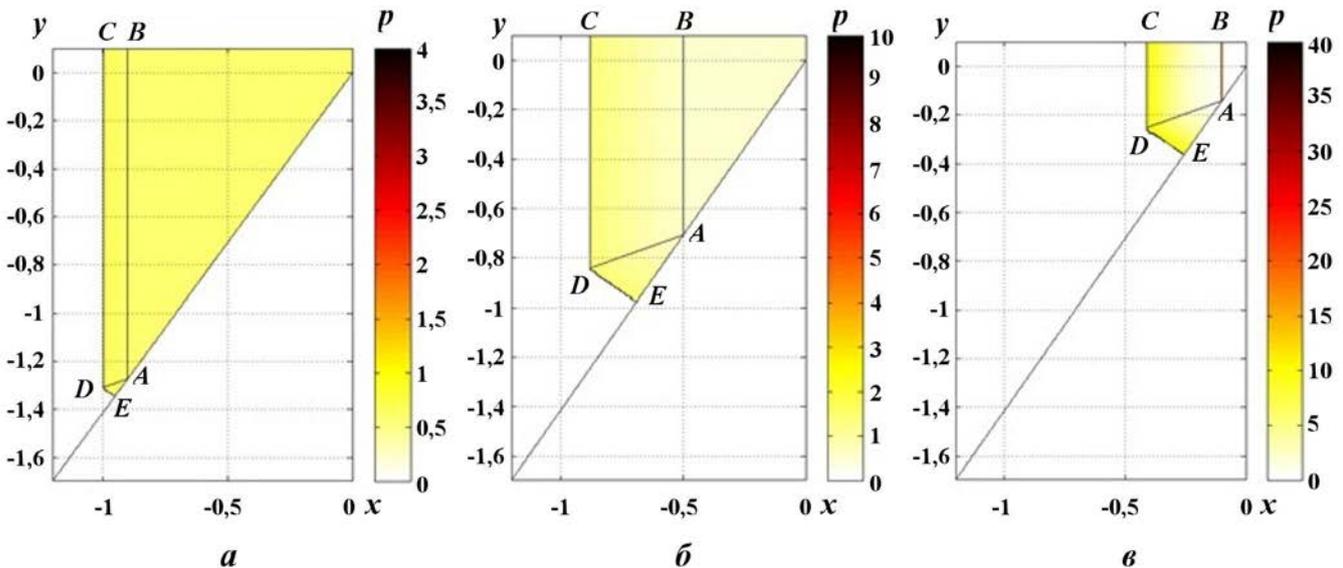


Рис. 9. Распределение давления газа в призматическом объеме в моменты времени  $t_1$  (а),  $t_2$  (б),  $t_3$  (в) при его сжатии поршнем  $CDE$  (участок  $DE$  поршня в области ДВС проницаем)

сток  $DE$  проникаемого поршня в рассматриваемые моменты времени перпендикулярен косо́й стенке. Газ из области ЦВ с течением времени перетекает в область ДВС, но при этом области локальной сильной кумуляции не наблюдается, потому что часть газа покидает область сжатия через проникаемый поршень.

На рис. 10 показаны результаты расчета функции  $p$  вдоль поверхности поршня  $CDE$  в моменты времени  $t_1-t_3$ . Видно, что давление газа на поршне в области ДВС совпадает с давлением газа на поршне в области ЦВ для рассматриваемых моментов.

На рис. 11 показаны интегральные характеристики сжатия (значения  $\delta m$  в интервалах давлений  $A_p, B_p, C_p$  для областей ДВС и ЦВ+ДВС и  $A_r$  — мощности энергозложения в мишень) течения типа ЦВ+ДВС поршнем  $CDE$ , участок  $DE$  которого в области ДВС (см. рис. 9) является проникаемым.

Из рис. 11, а видно, что изменение с течением времени значений  $\delta m$  носит качественно иной характер, чем при предыдущем способе воздействия на мишень. Так как давления на поршне  $CDE$  для областей ЦВ и ДВС совпадают, то при приближении к моменту коллапса минимальная граница интервалов давлений  $A_p, B_p$  и  $C_p$  сдвигается к точке  $E$  таким образом, что площади областей пространства, занимаемых газом с давлением из интервалов  $A_p, B_p$  и  $C_p$ , по отношению к площади области ДВС остаются неизменны-

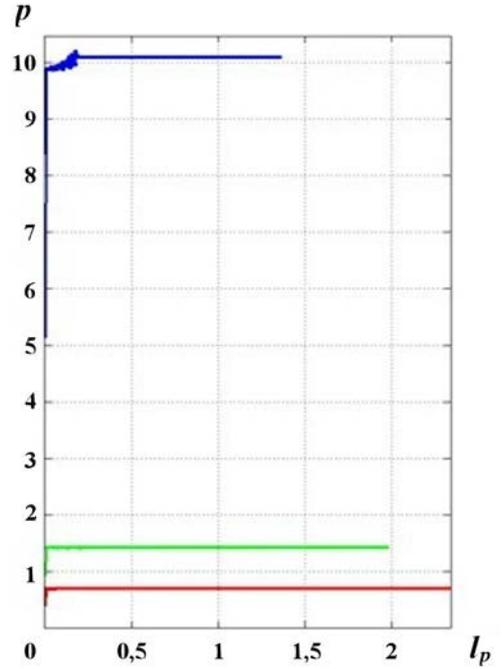


Рис. 10. График функций  $p$  в моменты времени  $t_1$  (—),  $t_2$  (—) и  $t_3$  (—) вдоль поверхности поршня  $CDE$  в области ЦВ+ДВС

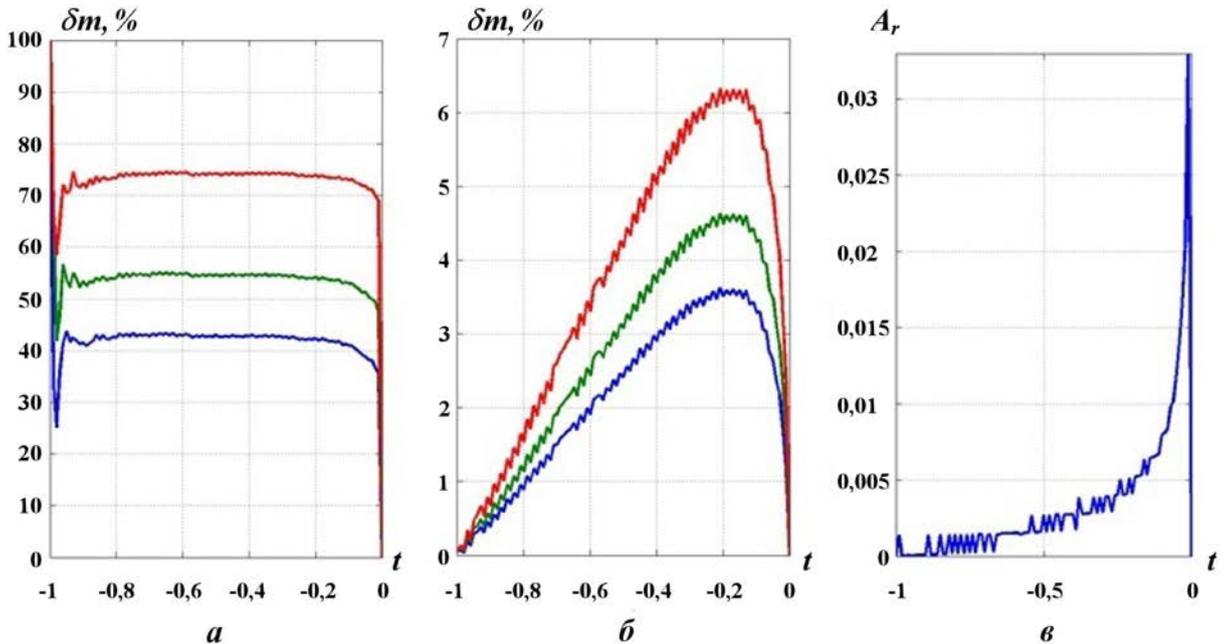


Рис. 11. Значения  $\delta m$  для интервалов давлений  $A_p$  (—),  $B_p$  (—) и  $C_p$  (—) в областях ДВС (а), ЦВ+ДВС (б) и мощность энергозложения в мишень (в)

ми. Поэтому на рис. 11, *а* значения  $\delta t$  в области ДВС для интервалов давлений  $A_p$ ,  $B_p$ ,  $C_p$  постоянны и для каждого свои.

Рост значений  $\delta t$  на рис. 11, *б* связан с перетоком газа из области ЦВ в область ДВС. Значения  $\delta t$  меньше по сравнению с предыдущим способом воздействия на мишень (см. рис. 6, *в*), так как часть газа покидает область сжатия через участок  $DE$  проницаемого поршня, и не превышают 7% от общей массы сжимаемого газа.

Из сравнения графиков функции  $A_r$ , приведенных на рис. 6, *в* и 11, *в*, видно, что качественно процессы сжатия для обоих способов воздействия на мишень подобны друг другу и разделяются на два этапа: медленное сжатие и последующий резкий удар. При этом для варианта воздействия на мишень проницаемым поршнем с заданным давлением значение  $A_r^{\max}$  меньше, чем для непроницаемого поршня, приблизительно в 5 раз.

### Заключение

В данной работе частное решение СУГД — ДВС — применено к математическому описанию двух способов воздействия на мишень, используемых в физических экспериментах по УТС.

Установлено, что если газ в области ДВС сжимать первым способом воздействия на мишень — движением непроницаемого поршня, то вне зависимости от начальной геометрической конфигурации поршень с течением времени начинает выгибаться в сторону кривой стенки. В окрестности крайней точки поршня, в которой он касается кривой стенки, возникает область большой локальной кумуляции. Размер области и параметры кумуляции тем больше, чем более острый угол наклона поверхности непроницаемого поршня к кривой стенке в начальный момент времени.

В случае, когда газ в области ДВС сжимается вторым способом воздействия на мишень — проницаемым поршнем с заданным давлением, равным давлению на поршне, сжимающем ЦВ, линия этого поршня всегда перпендикулярна кривой стенке в течении ДВС и эффекта большой локальной кумуляции, естественно, не наблюдается.

Автор выражает признательность и благодарность своему научному руководителю профессору С. П. Баутину за внимание, помощь и поддержку.

### Список литературы

1. Долголёва Г. В., Забродин А. В. Кумуляция энергии в слоистых системах и реализация безударного сжатия: учеб. пособие. М.: Физматлит, 2004.  
*Dolgolyeva G. V., Zabrodin A. V. Kumulyatsiya energii v sloistykh sistemakh i realizatsiya bezudarnogo szhatiya: ucheb. posobie. M: Fizmatlit, 2004.*
2. Spaeth M. L. Description of the NIF laser // Fusion Science and Technology. 2016. Vol. 69. P. 25–145.
3. Баутин С. П. Об одной конструкции мишеней для управляемого термоядерного синтеза // Забабахинские науч. чтения: сб. материалов X Межд. конф. Снежинск: РФЯЦ-ВНИИТФ, 2010. С. 30–31.  
*Bautin S. P. Ob odnoy konstruksii misheney dlya upravlyаемого termoyadernogo sinteza // Zababakhinskije nauch. chteniya: sb. materialov X Mezhd. konf. Snezhinsk: RFYaTs-VNIITF, 2010. S. 30–31.*
4. Пат. 2432627, МПК G21B 1/19 (2006.01). Мишень для получения термоядерных реакций / С. П. Баутин. Бюллетень. 2011. № 30.  
Pat. 2432627, МПК G21B 1/19 (2006.01). Mishen dlya polucheniya termoyadernykh reaktsiy / S. P. Bautin. Vyulleten. 2011. № 30.
5. Баутин С. П., Понькин Е. И. Автомодельные решения задачи об истечении политропного газа в вакуум с кривой стенки // Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике: Тез. докл. Новосибирск, 2020. С. 19.

- Bautin S. P., Ponkin E. I.* Avtomodelnye resheniya zadachi ob istechenii politropnogo gaza v vakuum s kosoy stenki // Lavrentevskie chteniya po matematike, mekhanike i fizike: Tez. dokl. Novosibirsk, 2020. S. 19.
6. *Баутин С. П., Понькин Е. И.* Автомодельные решения задачи об истечении политропного газа в вакуум с косою стенкой // ПМТФ. 2021. Т. 62, № 1. С. 32–40.  
*Bautin S. P., Ponkin E. I.* Avtomodelnye resheniya zadachi ob istechenii politropnogo gaza v vakuum s kosoy stenki // PMTF. 2021. T. 62, № 1. S. 32–40.
7. *Сучков В. А.* Истечение газа в вакуум на косою стенке // ПММ. 1963. Т. 27, № 4. С. 739–740.  
*Suchkov V. A.* Istechenie gaza v vakuum na kosoy stenke // PMM. 1963. T. 27, № 4. S. 739–740.
8. *Сидоров А. Ф.* Некоторые оценки степени кумуляции энергии при плоском и пространственном сжатии газа // Докл. АН. 1991. Т. 318, № 3. С. 548–552.  
*Sidorov V. F.* Nekotorye otsenki stepeni kumulyatsii energii pri ploskom i prostranstvennom szhatii gaza // Dokl. AN. 1991. T. 318, № 3. S. 548–552.
9. *Станюкович К. П.* Неустановившиеся движения сплошной среды. М.: Гос. изд-во тех.-теор. лит-ры, 1955.  
*Stanyukovich K. P.* Neustanovivshiesya dvizheniya sploshnoy sredy. M.: Gos. izd-vo tekhn.-teor. lit-ry, 1955.
10. *Баутин С. П.* Математическое моделирование сильного сжатия газа. Новосибирск: Наука, 2007.  
*Bautin S. P.* Matematicheskoe modelirovanie silnogo szhatiya gaza. Novosibirsk: Nauka, 2007.
11. *Баутин С. П., Дерябин С. Л.* Математическое моделирование истечения идеального газа в вакуум. Новосибирск: Наука, 2005.  
*Bautin S. P., Deryabin S. L.* Matematicheskoe modelirovanie istecheniya idealnogo gaza v vakuum. Novosibirsk: Nauka, 2005.
12. *Баутин С. П.* Характеристическая задача Коши и ее приложения в газовой динамике. Новосибирск: Наука, 2009.  
*Bautin S. P.* Kharakteristicheskaya zadacha Koshi i eye prilozheniya v gazovoy dinamike. Novosibirsk: Nauka, 2009.

Статья поступила в редакцию 30.04.21.

---

УДК 519.6

## ДООПЫТНОЕ ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КВАЗИИЗЭНТРОПИЧЕСКОЙ СЖИМАЕМОСТИ ДЕЙТЕРИЯ И ГЕЛИЯ В ОБЛАСТИ ВЫСОКИХ ДАВЛЕНИЙ ПО МЕТОДИКЕ "ЛЭГАК"

А. О. Бликов, М. А. Мочалов, Е. В. Шувалова, Е. А. Бакулина, Е. А. Пронин  
(ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области;  
НГТУ им. Р. Е. Алексеева, г. Нижний Новгород)

Приводятся результаты численного моделирования по методике ЛЭГАК процесса сжатия дейтерия и гелия в области давлений до 12 ТПа и плотностей до  $11 \text{ г/см}^3$ , проведенного до получения результатов опытов. Расчетные постановки соответствуют трем типам экспериментальных устройств регистрации параметров квазиизэнтропической сжимаемости газов и их макетам, в которых регистрируются кинематические параметры движения границ оболочек. Основными целями доопытного численного исследования данных экспериментов являются получение параметров сжатия газов, в том числе тех, определение которых во время проведения опыта не представляется возможным, а также при необходимости оптимизация постановки эксперимента для эффективного его проведения. Представлено сравнение полученных результатов численного моделирования с результатами опытов, проведенных после расчетного исследования. Согласие этих результатов позволило расширить применимость методики ЛЭГАК для нового класса задач и в дальнейшем использовать результаты расчетов по методике ЛЭГАК с целью оптимизации технологии экспериментальной регистрации параметров квазиизэнтропической сжимаемости газов.

*Ключевые слова:* гелий, дейтерий, сжимаемость, двухкаскадное сферическое устройство, расчеты двумерных задач, методика ЛЭГАК.

### Введение

Как известно, для моделирования состояний, характерных для астрофизических объектов, в лабораторных условиях используются различные методы: электрофизические [1, 2], лазерные [3], взрывные [4]. В РФЯЦ-ВНИИЭФ с 1960-х гг. развивается метод квазиизэнтропического сжатия. С использованием этого метода исследована сжимаемость изотопов водорода, гелия, аргона, азота и других газов в диапазоне давлений 50—12 000 ГПа, получаемая с помощью нагружающих устройств на основе взрывчатых веществ (ВВ) с двумя типами геометрии — цилиндрической [5] и сферической [6]. В подобных устройствах экспериментально измеряется средняя плотность сжатого газа на несколько моментов времени. При этом соответствующие значения давления определяются из результатов рас-

четного моделирования. Экспериментальное исследование проводится в два этапа: 1) опыт с макетом, в котором регистрируются кинематические параметры движения границ оболочек; 2) опыт с полноразмерным устройством для измерения сжимаемости газов.

Особая роль отводится расчетному моделированию обоих этапов. При численном моделировании сжатия макета (первый этап исследования) проводятся расчеты с целью определения места расположения датчиков измерительной системы, в которой должны отсутствовать наводящие возмущения, и с целью отработки технологии счета для описания работы полноразмерного устройства, в том числе для выбора размеров коллиматоров и моментов времени рентгенографирования.

Численное моделирование сжатия полноразмерного устройства (второй этап исследования),

помимо определения значений плотности и давления газов в фазах сжатия, также преследует цель оценки влияния двумерных факторов (элементы крепления, система инициирования, эксцентриситет расположения каскадов и др.) на основные результаты.

В настоящей статье представлены результаты доопытного двумерного численного моделирования квазиизэнтропического сжатия с помощью сферических устройств и их макетов по методике ЛЭГАК [7, 8].

### Постановка опытов

Опыты проводились на рентгенографическом комплексе РФЯЦ-ВНИИЭФ [9–15]. Общая схема постановки экспериментов со сферическими устройствами показана на рис. 1. Подробное описание технологии проведения экспериментов представлено, например, в работе [12].

Следует упомянуть о некоторых моментах, существенных при планировании опытов. Изображение границ оболочек устройства 1 (см. рис. 1) фиксируется во время опыта при одновременном использовании тормозного излучения трех мощных бетатронов 2. Особенностью рентгенографического комплекса является возможность регистрировать несколько (до девяти) фаз дви-

жения оболочек за один эксперимент и, следовательно, проследивать динамику сжатия [12]. Кроме того, для устранения влияния рассеянного излучения на регистраторы 3 размер поля регистрации ограничен коллиматорами 4 и защитными конусами 5. Таким образом, при подготовке к эксперименту для применения всех возможностей рентгенографического комплекса необходимо правильно оценить временной интервал его работы, включающий момент максимального сжатия оболочки нагружающего устройства, что является одной из целей расчетного исследования, а также определить размеры рабочего поля для системы регистрации.

В настоящей работе рассмотрены двухкаскадные устройства трех типов, конструкция которых схематично показана на рис. 2. Под каскадом подразумеваются однотипные последовательно соединенные элементы конструкции, включающие оболочку и газ. Параметры устройств приведены в табл. 1, где  $R_I$  и  $h_I$  — внешний радиус и толщина оболочки первого (внешнего) каскада;  $R_{II}$  и  $h_{II}$  — внешний радиус и толщина оболочки второго (внутреннего) каскада;  $R_{ВВ}$  — внешний радиус заряда ВВ. В устройствах 1 и 3 присутствует вставка из оргстекла между внешним каскадом и ВВ.

В экспериментах с данными сферическими устройствами рентгенографическим комплексом

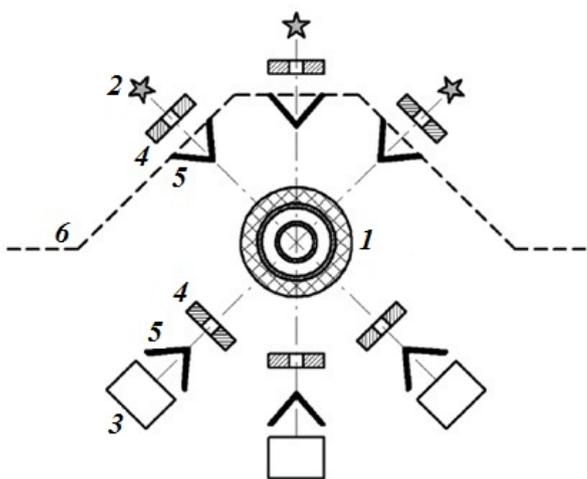


Рис. 1. Схема постановки эксперимента с устройством сферической геометрии на рентгенографическом комплексе РФЯЦ-ВНИИЭФ: 1 — экспериментальное устройство; 2 — рентгеновские источники; 3 — регистраторы рентгеновских изображений; 4 — свинцовые коллиматоры; 5 — защитные конусы (Al); 6 — защитное устройство

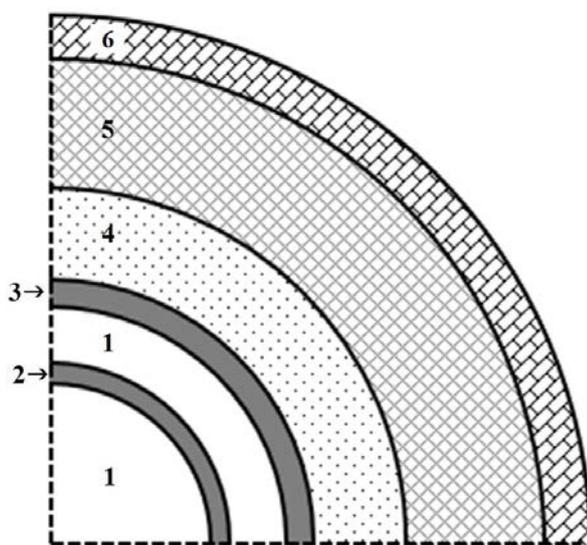


Рис. 2. Схематичное изображение экспериментальных устройств: 1 — газ; 2 — внутренняя оболочка (оболочка второго каскада); 3 — внешняя оболочка (оболочка первого каскада); 4 — оргстекло; 5 — ВВ; 6 — система инициирования

**Характеристики сферических устройств**

Номер устройства	Первый каскад		Второй каскад		$R_{ВВ}$ , см	Наличие оргстекла
	$R_I$ , см	$h_I$ , см	$R_{II}$ , см	$h_{II}$ , см		
1	7,5	0,4	5,8	0,4	18	+
2	10,16	0,7	4,5	0,5	18	-
3	10,16	0,7	3,6	0,5	22	+

зарегистрирован процесс квазиизэнтропического сжатия. По экспериментальным рентгенограммам по методике [16] восстановлены границы оболочек каскадов и определен момент максимального сжатия газа.

Для каждого устройства были проведены эксперименты с соответствующим макетом. Конструкция макета представляет собой в верхней части полусферу (1/2 часть сферического устройства), нижняя часть содержит измерительный блок различных экспериментальных методик [12].

Целями проведения экспериментов с макетами являлись исследование динамики разгона, симметрии полета оболочек и, соответственно, регистрация диаграмм радиальной скорости,  $(R, t)$ -диаграмм радиусов контактных границ и времен прихода детонационной и ударной волн. Времена прихода волн в зависимости от углов в сферической системе координат фиксировались электроконтактными датчиками. Точки на начальных участках  $(R, t)$ -диаграмм получены при использовании рентгенографической методики. Для измерения скорости полета оболочек применялась гетеродин-интерферометрическая методика с PDV-датчиками [17].

**Методика ЛЭГАК**

Доопытное двумерное численное моделирование квазиизэнтропического сжатия газов проведено по методике ЛЭГАК [7, 8], которая предназначена для расчета многомерных нестационарных течений многокомпонентной сплошной среды. Основные положения методики ЛЭГАК следующие:

- конечно-разностные схемы строятся на основе метода расщепления по физическим процессам;
- используется лагранжево-эйлеров подход на регулярной счетной сетке (четырёхугольной в двумерном случае);

- на каждом временном шаге расчет течений сплошной среды осуществляется в два этапа:

- на первом (лагранжевом) этапе сетка увлекается веществом; рассчитываются изменения величин за счет действующих сил;
- на втором (эйлеровом) этапе происходит перестроение счетной сетки по заданным правилам и конвективные потоки величин пересчитываются с одной сетки на другую;

- для локализации сильнодеформируемых контактных границ при расчете многокомпонентных течений используется метод концентраций, в основу которого положены:

- введение концентраций компонентов в смешанной ячейке (массовых и объемных долей);
- определение уравнений замыкания для компонентов смешанной ячейки на лагранжевом этапе вычислений;
- использование специального донорно-акцепторного алгоритма, ограничивающего счетную диффузию [18], для расчета конвективных потоков величин компонентов из смешанных ячеек.

Для уменьшения дисбаланса полной энергии временная и пространственная аппроксимации строятся на основе принципа полной консервативности и согласованности. Разностная схема является явной, условно устойчивой, с ограничением на шаг по времени.

Одноименная программа функционирует как на однопроцессорных, так и на многопроцессорных вычислительных системах [8].

**Постановка расчетов**

Экспериментальные сферические устройства имеют секторную симметрию. В расчетах использовалась начальная постановка задачи с

1/4 частью центральной плоскости конструкции сферического нагружающего устройства.

Расчеты двумерной осесимметричной задачи проведены в однообластной постановке на неподвижной сферической сетке. Внешний радиус математической области выбран равным 25 см в устройствах 1, 2 и 40 см — в устройстве 3. В качестве вещества окружения экспериментальной сборки задан вакуум. По результатам предварительных расчетов на последовательно сгущающейся сетке выбрано следующее пространственное разбиение: размер ячейки по радиусу 0,01 см, по углу —  $0,5^\circ$ . Во всей области, за исключением вакуума, построена равномерная счетная сетка. Общее количество точек в расчетах составило  $0,35 \div 0,5$  млн.

В табл. 2 для каждого экспериментального устройства представлены названия веществ в постановках расчетов и их начальные состояния, определяемые по значениям плотности  $\rho_0$  и давления  $P_0$ . Номера веществ (кроме вакуума) соответствуют рис. 2. Система инициирования на рис. 2 определяется заданием соответствующей области продуктов взрыва, которые обозначены в табл. 2 аббревиатурой ПВ.

Для устройств 1 и 2 использовалось ВВ на основе гексогена, для устройства 3 — на основе октогена. Для описания поведения веществ использовались уравнения состояния из библиотеки общего фонда УРС-ОФ [19]. Для моделирования поведения газов выбраны уравнения состояния, описание которых можно найти, например, в работах [20–22]. Отметим, что начальное состояние газа характеризуется заданием нену-

левого начального давления  $P_0$ . В расчетах газ находился в покое до прихода ударной волны.

Для моделирования упругопластического поведения стальных оболочек использовалась феноменологическая модель сдвиговой прочности Б. Л. Глушака [23]. Учет откольной прочности стали осуществлялся с помощью модели хрупкого откола с критериальным параметром разрушения  $P_{кр} = -4$  ГПа [24].

В экспериментах подрыв ВВ реализовывался при помощи системы инициирования, из-за конструкции которой наблюдалась асимметрия выхода детонационной волны на внутреннюю границу заряда ВВ [12]. В расчетах для всех устройств учет системы инициирования ВВ осуществлялся путем задания слоя мгновенной детонации с криволинейной внутренней поверхностью. Контактная граница этого слоя и ВВ построена с помощью функции  $R(\varphi) = R_0 - A \sin\left(\frac{2\pi\varphi}{b} + c\right)$  со специально подобранными параметрами  $R_0, A, b, c$ . Процесс распространения детонационной волны моделировался с помощью пошагового алгоритма контроля скорости детонации [25].

## Результаты расчетов

Для демонстрации процесса сжатия на примере моделирования работы устройства 3 с дейтерием на рис. 3 приведены поля распределения веществ с изолиниями давления на характерные моменты времени:  $t = 9$  мкс — приближение детонационной волны к внешней границе оргстек-

Таблица 2

### Начальные параметры веществ

Номер вещества	Вещество	Устройство					
		1		2		3	
		$\rho_0$	$P_0$	$\rho_0$	$P_0$	$\rho_0$	$P_0$
1	D <sub>2</sub>	0,02	0,013	0,036	0,026	0,036	0,026
1	He	0,025	0,0168	0,038	0,0268	0,038	0,0252
2, 3	Сталь	7,85	0	7,85	0	7,85	0
4	Оргстекло	1,18	0	—	—	1,18	0
5	ВВ гексоген	1,86	0	1,86	0	—	—
5	ВВ октоген	—	—	—	—	1,88	0
6	ПВ гексоген	1,86	0	1,86	0	—	—
6	ПВ октоген	—	—	—	—	1,88	0
	Вакуум	0,001	0	0,001	0	0,001	0

ла;  $t = 14$  и  $25$  мкс — выход ударной волны на внешние границы первого и второго каскадов соответственно;  $t = 31,17$  мкс — время максимального сжатия центрального газа.

С целью обоснования выбора сеточного разбиения проведена оценка влияния пространственной дискретизации на характеристики сжатия устройства 2 с дейтерием. В табл. 3 приведены зависимость значения средней плотности  $\rho_{\max}$  центрального газа в момент максимального сжатия от размера счетной ячейки по радиусу  $h_r$  и относительное отклонение  $\rho_{\max}(h_r)$  от значения линейной экстраполяции на ось ординат ( $h_r \rightarrow 0$ ). Как видно из табл. 3, для сетки с размером  $0,01$  см  $\rho_{\max}$  отличается от значения линейной экстраполяции не более чем на 2%, что соответствует удовлетворительной точности для задач подобного класса.

Для устройства 2 проведены дополнительные исследования с целью оценки влияния на основные параметры сжатия газа характерного размера счетной ячейки, наличия конструктивных особенностей в виде элементов крепления или отверстий в оболочках каскада, а также влияния упругопластических свойств оболочек.

Таблица 3

Результаты расчетов с вариацией  $h_r$

$h_r$ , см	$\rho_{\max}$ , г/см <sup>3</sup>	Относительное отклонение $\rho_{\max}$ , %
0,02	8,1096	3,07
0,01	8,2045	1,93
0,005	8,3187	0,56

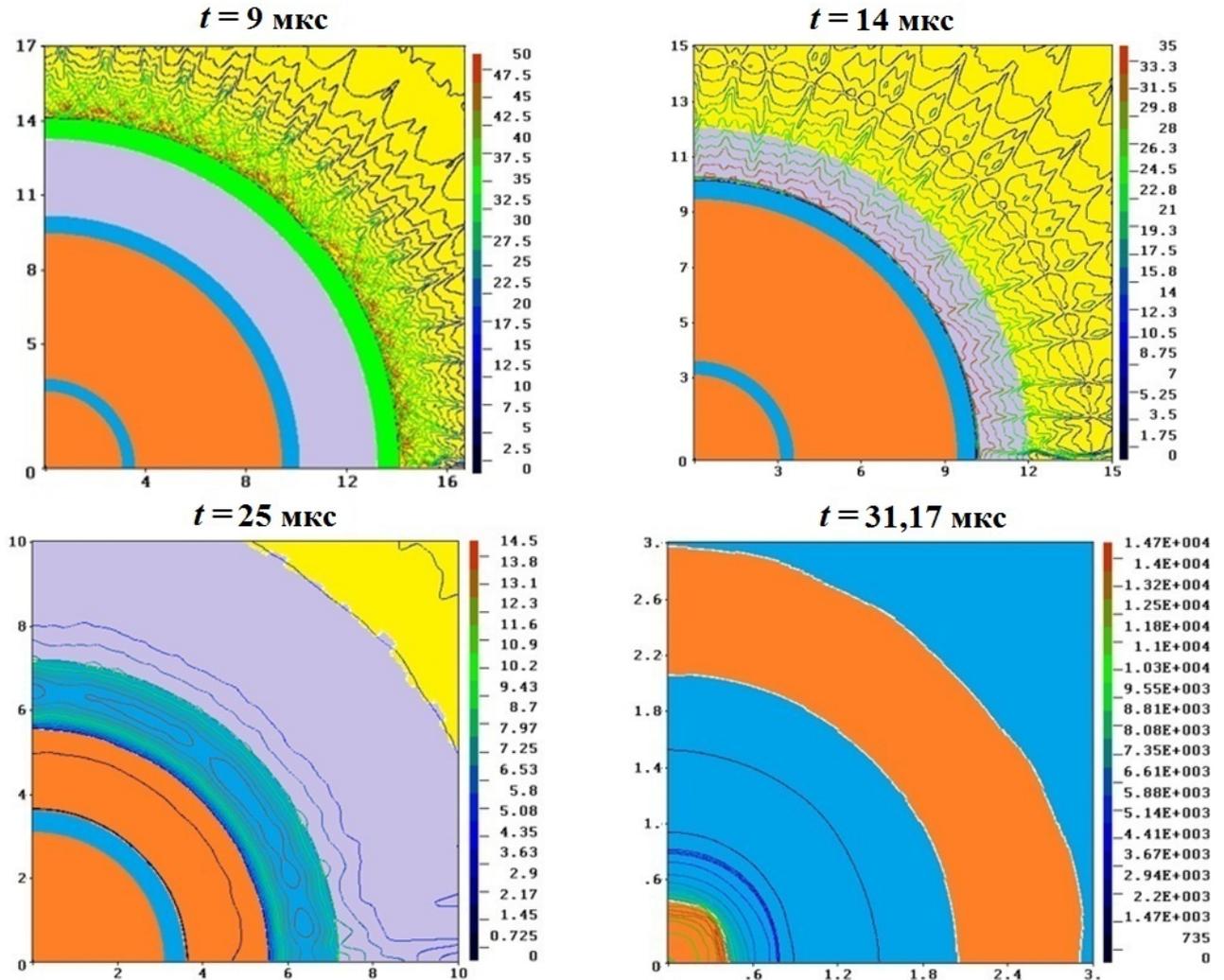


Рис. 3. Динамика сжатия устройства 3 (газ — дейтерий) с изолиниями давления (ГПа)

Анализ влияния наличия элементов крепления внутреннего каскада к оболочке внешнего каскада на параметры сжатия проведен для опыта с дейтерием. Учет элементов крепления приводит к снижению максимального значения средней плотности газа в центральной области на 0,1 %.

Перед экспериментом для напуска газа в центральную полость используют небольшое отверстие в оболочке внутреннего каскада, диаметр которого составляет 0,1 см. При расчетном моделировании с учетом отверстия максимальное значение средней плотности дейтерия центральной области увеличилось примерно на 1,5 % по сравнению с расчетом без отверстия.

Исследование влияния упругопластических свойств оболочки внутреннего каскада проведено в расчетах с дейтерием и гелием. Результаты показывают, что отсутствие упругопластических свойств оболочки приводит к увеличению максимального значения средней плотности центрального газа: на 2 % для дейтерия и на 2,6 % для гелия.

В целом, отмечено незначительное влияние этих факторов на параметры сжатия газа с учетом экспериментальной погрешности измерения его средней плотности, составляющей ~15 %.

Для каждого устройства проведено расчетное моделирование сжатия полусферического макета с целью выбора тактики счета и определения моментов рентгенографирования в эксперименте. В качестве результатов расчетов полусферических макетов приводятся  $(R, t)$ -диаграммы движения границ оболочек для каждого устройства.

На рис. 4 показано сравнение расчетных временных зависимостей радиусов оболочек ( $(R, t)$ -диаграмм) с экспериментальными данными из работ [10, 12] для устройства 1. Расчетные временные зависимости внутреннего радиуса оболочки второго каскада приведены для лучей, находящихся под углами  $\varphi = 0, 30, 90^\circ$ ; остальные зависимости приведены для  $\varphi = 0$ .

На рис. 5 показаны результаты для устройства 2. Приведено сравнение расчетных временных зависимостей радиусов внешней и внутренней границ стальных оболочек с экспериментальными данными из работ [12, 15]. Расчетные временные зависимости внутренних радиусов оболочки второго каскада приведены для углов исследования  $\varphi = 0, 45, 90^\circ$ ; остальные зависимости приведены для  $\varphi = 0$ .

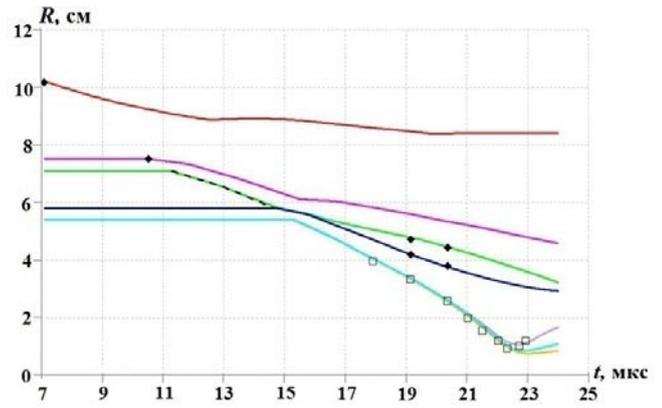


Рис. 4.  $(R, t)$ -диаграммы движения границ оболочек устройства 1: эксперимент [10, 12]:  $\square$  — результаты рентгенографирования;  $\blacklozenge$  — данные электроконтактной методики; — — — данные PDV; расчет: — — — внешняя граница оргстекла; — — — внешняя граница первого каскада; — — — внутренняя граница оболочки первого каскада; — — — внешняя граница второго каскада; — — —, — — —, — — — — внутренние границы оболочки второго каскада для  $\varphi = 0, 30, 90^\circ$  соответственно

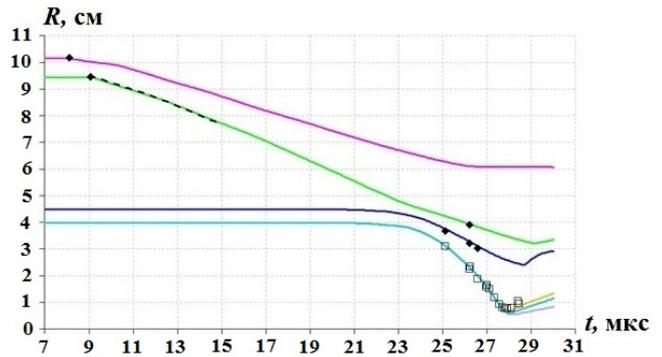


Рис. 5.  $(R, t)$ -диаграммы движения границ оболочек устройства 2: эксперимент [12, 15]:  $\square$  — результаты рентгенографирования;  $\blacklozenge$  — данные электроконтактной методики; — — — данные PDV; расчет: — — — внешняя граница первого каскада; — — — внутренняя граница оболочки первого каскада; — — — внешняя граница второго каскада; — — —, — — —, — — — — внутренние границы оболочки второго каскада для  $\varphi = 0, 45, 90^\circ$  соответственно

На рис. 6 показаны результаты расчета для устройства 3 в виде временных зависимостей радиусов внешней и внутренней границ стальных оболочек, а также оргстекла в сравнении с экспериментальными данными из работы [13]. Расчетные временные зависимости приведены толь-

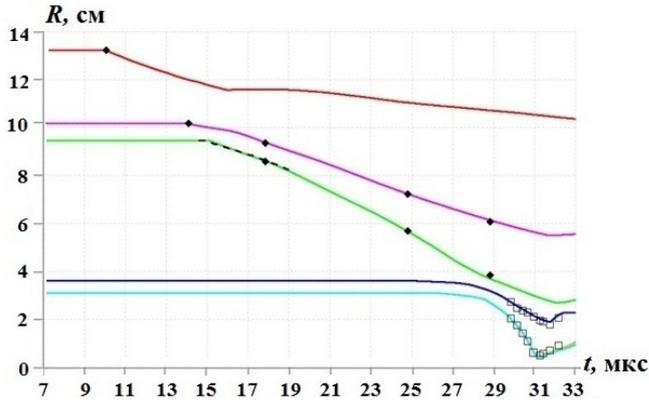


Рис. 6.  $(R, t)$ -диаграммы движения границ оболочек устройства 3: эксперимент [13]:  $\square$  — результаты рентгенографирования;  $\blacklozenge$  — данные электроконтактной методики; — — — данные PDV; расчет: — — — внешняя граница оргстекла; — — — внешняя граница первого каскада; — — — внутренняя граница оболочки первого каскада; — — — внешняя граница второго каскада; — — — внутренняя граница оболочки второго каскада для  $\varphi = 0$

ко для  $\varphi = 0$ , для остальных углов исследования зависимости практически неразличимы.

Отметим, что представленные результаты получены только при экспериментальном и расчетном моделировании сжатия дейтерия. Аналогичные результаты исследований гелия концептуально близки к результатам с дейтерием.

Как видно из рис. 4–6, наибольшее отличие в результатах с использованием того или иного газа наблюдается в моменты, близкие к макси-

мальному сжатию. Время максимального сжатия, необходимое для выбора времен рентгенографирования, определяется моментом, при котором происходит увеличение внутреннего радиуса второго каскада, и находится по расчетным  $(R, t)$ -диаграммам из рис. 4–6. Максимальное отличие расчетных данных от экспериментальных значений, полученных с помощью электроконтактных датчиков, не превышает 3,5%.

Расчетное моделирование сжатия газов в полноразмерных сферических устройствах проводится с целью получения параметров состояния сжатого газа, т. е. определения значений плотности и давления. На рис. 7 показаны поля распределения давления и плотности вблизи центральной области в момент остановки внутреннего каскада, полученные в расчете полноразмерного сферического устройства 3 с дейтерием. Черной линией обозначена граница центральной газовой полости.

Как видно из рис. 7, диапазон разброса значений давления и плотности по объему центральной полости на момент максимального сжатия достаточно велик. Учитывая сложный характер распределения, для оценки основных термодинамических параметров сжатого газа использованы их средневзвешенные величины.

В табл. 4 приведены основные результаты расчетов и экспериментальные данные для трех типов экспериментальных устройств. Представлены расчетные значения средней плотности  $\rho_{\text{max}}$  и давления  $P_{\text{max}}$  центрального газа в момент его максимального сжатия. Расчетное давление

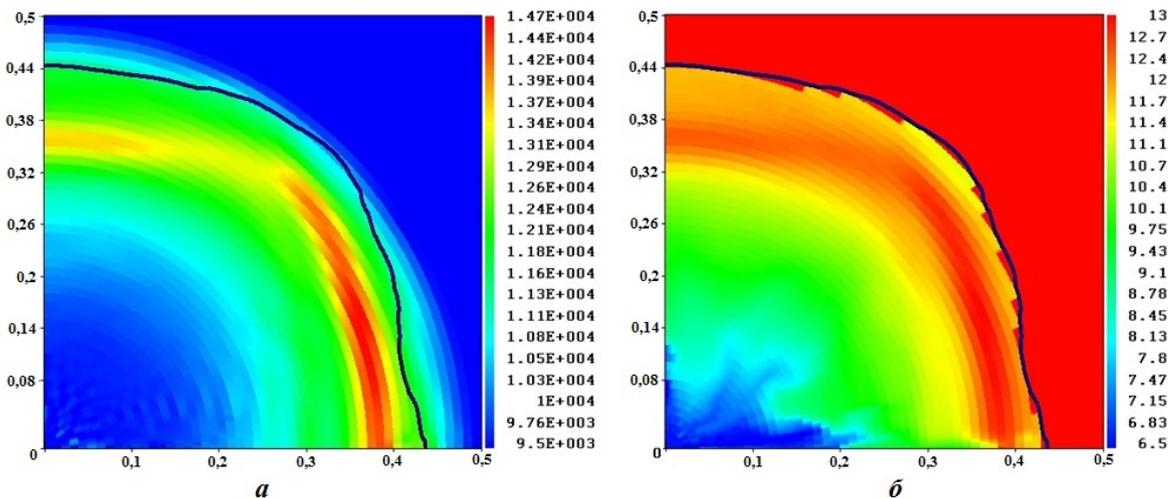


Рис. 7. Поля величин на момент остановки внутренней оболочки устройства 3 (газ — дейтерий):  $a$  — давление (ГПа);  $b$  — плотность ( $\text{г}/\text{см}^3$ )

Результаты экспериментов и расчетов

Номер устройства	Газ	$\rho_0$ , г/см <sup>3</sup>	$R_{\min}$ , мм	$\rho_{\text{exp}}$ , г/см <sup>3</sup>	$P_{\text{calc}}$ , ГПа	ЛЭГАК	
						$\rho_{\text{max}}$ , г/см <sup>3</sup>	$P_{\text{max}}$ , ГПа
1	D <sub>2</sub>	0,020	9,1	4,3 ± 0,9	2 210	4,76	2 059
	He	0,025	10,0	3,8 ± 0,9	1 580	3,57	1 466
2	D <sub>2</sub>	0,036	7,07	6,5 ± 1,1	5 650	7,64	5 341
	He	0,038	6,6	8,4 ± 1,9	4 750	6,98	4 574
3	D <sub>2</sub>	0,0353	4,76	10,0 <sup>+1,3</sup> <sub>-0,9</sub>	11 400	10,455	10 136
	He	0,0365	4,98	8,8 ± 1,3	10 062	10,38	10 086

$P_{\text{max}}$  вычислялось как средневзвешенное по формуле  $P_{\text{max}} = \frac{\sum_i M_i P_i}{\sum_i M_i}$ . Здесь  $i$  — номер ячейки счетной области;  $M_i = \rho_i V_i \alpha_i$  — масса  $i$ -й ячейки, где  $\rho_i$ ,  $V_i$  — плотность и объем ячейки,  $\alpha_i$  — массовая концентрация центрального газа в  $i$ -й ячейке. Прямое измерение в опытах давления газа на момент максимального сжатия не представляется возможным, поэтому оно определяется посредством проведения расчетов одномерной задачи [26] и обозначено в табл. 4 как  $P_{\text{calc}}$ . Экспериментальное значение средней плотности газа при максимальном сжатии  $\rho_{\text{exp}}$  вычисляется из предположения сферической формы внутренней границы оболочки второго каскада [10]. Значение внутреннего усредненного радиуса  $R_{\min}$  оболочки второго каскада определяется по результатам трассировки заре-

гистрированной рентгенограммы [10–15] по методике обработки [16].

Для оценки погрешности расчетных данных из табл. 4 выбрана максимальная средняя плотность  $\rho_{\text{max}}$ , значения которой напрямую определяются из эксперимента. Анализ показал, что расчетные отклонения меньше, чем максимальная экспериментальная погрешность, определенная из табл. 4.

Для визуализации результатов на рис. 8, 9 собраны экспериментальные данные в виде зависимостей давления от плотности для дейтерия и гелия из работ [8–15, 22, 27, 28] и расчетные значения из сводной табл. 4, которым соответствуют эксперименты 2011 г. для устройства 1, 2020 г. — для устройства 2 с дейтерием, 2013 г. — для устройства 2 с гелием, а также эксперимент 2016 г. для устройства 3. Как видно из рис. 8, 9, расчетные значения согласо-

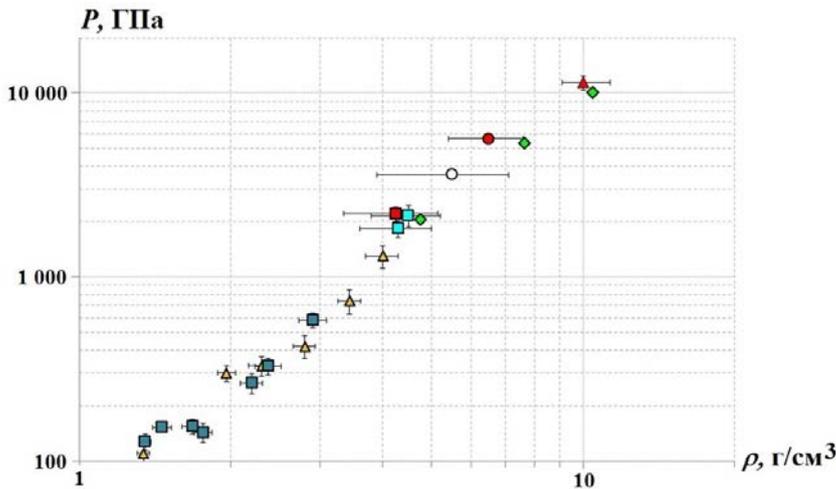


Рис. 8. Сравнение результатов расчетов по методике ЛЭГАК (◆) с экспериментальными зависимостями  $P(\rho)$  для дейтерия: ■ — из [28]; ▲ — из [8, 22]; ■ — из [9, 12]; ○ — из [27]; ■ — для устройства 1 [10]; ● — для устройства 2 [15]; ▲ — для устройства 3 [13]

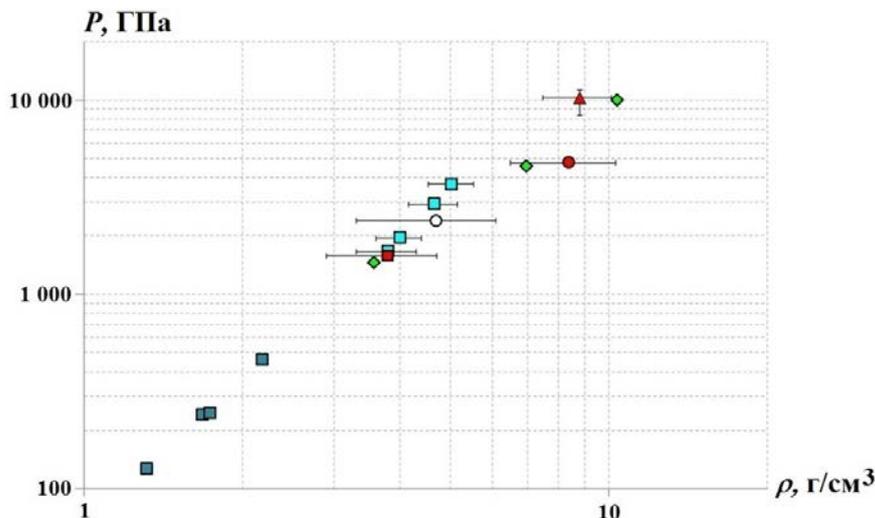


Рис. 9. Сравнение результатов расчетов по методике ЛЭГАК (♦) с экспериментальными зависимостями  $P(\rho)$  для гелия: ■ — из [11]; ■ — из [14]; ○ — из [27]; ■ — для устройства 1 [10]; ● — для устройства 2 [12]; ▲ — для устройства 3 [14]

ются с общей картиной экспериментальных данных по квазиизэнтропическому сжатию газов.

### Заключение

В работе представлены результаты доопытного численного моделирования работы сферических устройств трех типов для регистрации параметров квазиизэнтропической сжимаемости дейтерия и гелия в области давлений 2 000–12 000 ГПа и плотностей 3,5–11  $\text{г/см}^3$ , впервые проведенного по методике ЛЭГАК. Полученные после численного моделирования экспериментальные результаты с приемлемой точностью согласуются с расчетными. На основании сравнения расчетных и экспериментальных данных можно сделать вывод о том, что методика ЛЭГАК позволяет с удовлетворительной точностью получать численные результаты, предваряющие экспериментальные исследования квазиизэнтропической сжимаемости дейтерия и гелия, и использовать эти результаты с целью оптимизации постановки опыта для эффективного его проведения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках программы по созданию молодежных лабораторий (научная тема № FSWE-2021-0010 "Газодинамика и физика взрыва") и Национального центра физики и математики (г. Саров Нижегородской обл.).

### Список литературы

1. Knudson M. D., Hanson D. L., Bailey J. E., Hall C. A., Asay J. R., Anderson W. W. Equation of state measurements in liquid deuterium to 70 GPa // *Physical Review Letters*. 2001. Vol. 87. Paper 225501.
2. Борисков Г. В., Быков А. И., Егоров Н. И., Жерножлетов М. В., Павлов В. Е., Стрелков И. С., Сурдин О. М., Тимарева В. И., Белов С. И. Исследование нулевой изотермы изотопов водорода в области сверхвысоких давлений // *ЖЭТФ*. 2020. Т. 157. Вып. 2. С. 221–237.  
*Boriskov G. V., Bykov A. I., Egorov N. I., Zhernokletov M. V., Pavlov V. E., Strelkov I. S., Surdin O. M., Timaryeva V. I., Belov S. I. Issledovanie nulevoy izotermiy izotopov vodoroda v oblasti sverkhvysokikh davleniy // ZhETF. T. 157. Vyp. 2. 2020. S. 221–237.*
3. Da Silva L. B., Celliers P., Collins G. W., Budil K. S., Holmes N. C., Barbee T. W. (Jr.), Hammel B. A., Kilkenny J. D., Wallace R. J., Ross M., Cauble R., Ng A., Chiu G. Absolute equation of state measurements on shocked liquid deuterium up to 200 GPa (2 Mbar) // *Physical Review Letters*. 1997. Vol. 78. P. 483–486.
4. Альтшулер Л. В., Трунин Р. Ф., Крупников К. К., Панов Н. В. Взрывные

- лабораторные устройства для исследования сжатия веществ в ударных волнах // УФН. 1996. Т. 166. С. 575—581.
- Altshuler L. V., Trunin R. F., Krupnikov K. K., Panov N. V.* Vzryvnye laboratornye ustroystva dlya issledovaniya szhatiya veshchestv v udarnykh volnakh // UFN. 1996. Т. 166. S. 575—581.
5. *Fortov V. E., Ilkaev R. I., Arinin V. A., Burtsev V. V., Golubev V. A., Iosilevskiy I. L., Khrustalev V. V., Mikhailov A. L., Mochalov M. A., Ternovoi V. Ya., Zhernokletov M. V.* Phase transition in a strongly nonideal deuterium plasma generated by quasi-isentropical compression at megabar pressures // *Physical Review Letters*. 2007. Vol. 99, No 18. Paper 185001.
  6. *Григорьев Ф. В., Кормер С. Б., Михайлова О. Л., Толочко А. П., Урлин В. Д.* Экспериментальное определение сжимаемости водорода при плотностях  $0,5 \div 2 \text{ г/см}^3$ . Металлизация водорода // Письма в ЖЭТФ. 1972. Т. 16. Вып. 5. С. 286—290.  
*Grigorev F. V., Kormer S. B., Mikhaylova O. L., Tolochko A. P., Urlin V. D.* Eksperimentalnoe opredelenie szhimaemosti vodoroda pri plotnostyakh  $0,5 \div 2 \text{ g/cm}^3$ . Metalizatsiya vodoroda // *Pisma v ZhETF*. 1972. Т. 16. Вып. 5. S. 286—290.
  7. *Бахрах С. М., Величко С. В., Спиридонов В. Ф., Авдеев П. А., Артамонов М. В., Бакулина Е. А., Безрукова И. Ю., Борляев В. В., Володина Н. А., Наумов А. О., Огнева Н. Э., Резвова Т. В., Резяпов А. А., Стародубов С. В., Тарадай И. Ю., Тихонова А. П., Циберев К. В., Шанин А. А., Ширшова М. О., Шувалова Е. В.* Методика ЛЭГАК-3D расчета трехмерных нестационарных течений многокомпонентной сплошной среды и принципы ее реализации на многопроцессорных ЭВМ с распределенной памятью // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2004. Вып. 4. С. 41—50.  
*Bakhrakh S. M., Velichko S. V., Spiridonov V. F., Avdeev P. A., Artamonov M. V., Bakulina E. A., Bezrukova I. Yu., Borlyayev V. V., Volodina N. A., Naumov A. O., Ogneva N. E., Rezvova T. V., Rezyapov A. A., Starodubov S. V., Taraday I. Yu., Tikhonova A. P., Tsiberev K. V., Shanin A. A.,*
  8. *Авдеев П. А., Артамонов М. В., Бахрах С. М., Величко С. В., Володина Н. А., Воробьева Н. М., Егоршин С. П., Есаева Е. Н., Ковалева А. Д., Лучинин М. В., Проневич С. Н., Спиридонов В. Ф., Тарадай И. Ю., Тарасова А. Н., Шувалова Е. В.* Комплекс программ ЛЭГАК для расчета нестационарных течений многокомпонентной сплошной среды и принципы реализации комплекса на многопроцессорных ЭВМ с распределенной памятью // Там же. 2001. Вып. 3. С. 14—18.  
*Avdeev A. P., Artamonov M. V., Bakhrakh S. M., Velichko S. V., Volodina N. A., Vorobyeva N. M., Egorshin S. P., Esayeva E. N., Kovalyeva A. D., Luchinin M. V., Pronevich S. N., Spiridonov V. F., Taraday I. Yu., Tarasova A. N., Shuvalova E. V.* Kompleks programm LEGAK dlya raschyeta nestatsionarnykh techeniy mnogo-komponentnoy sploshnoy sredy i printsipy realizatsii kompleksa na mnogoprotsessornykh EVM s raspredelyennoy pamyatyu // Там же. 2001. Вып. 3. S. 14—18.
  9. *Мочалов М. А., Илькаев Р. И., Форттов В. Е., Михайлов А. Л., Макаров Ю. М., Аринин В. А., Гришечкин С. К., Бликов А. О., Огородников В. А., Рыжков А. В., Грязнов В. К.* Измерение сжимаемости дейтериевой плазмы при давлении 1800 ГПа // Письма в ЖЭТФ. 2010. Т. 92. Вып. 5. С. 336—340.  
*Mochalov M. A., Ilkaev R. I., Fortov V. E., Mikhailov A. L., Makarov Yu. A., Arinin V. A., Grishechkin S. K., Blikov A. O., Ogorodnikov V. A., Ryzhkov A. V., Gryaznov V. K.* Izmerenie szhimaemosti deyterievoy plazmy pri davlenii 1800 GPa // *Pisma v ZhETF*. 2010. Т. 92. Вып. 5. S. 336—340.
  10. *Мочалов М. А., Илькаев Р. И., Форттов В. Е., Михайлов А. Л., Макаров Ю. М., Аринин В. А., Бликов А. О., Баурин А. Ю., Комраков В. А., Огородников В. А., Рыж-*

- ков А. В., Пронин Е. А., Юхимчук А. А. Измерение квазиизэнтропической сжимаемости гелия и дейтерия при давлениях 1500–2000 ГПа // ЖЭТФ. 2012. Т. 142. Вып. 4 (10). С. 696–709.
- Mochalov M. A., Ilkaev R. I., Fortov V. E., Mikhaylov A. L., Makarov Yu. A., Arinin V. A., Grishechkin S. K., Blikov A. O., Baurin A. Yu., Komrakov V. A., Ogorodnikov V. A., Ryzhkov A. V., Pronin E. A., Yukhimchuk A. A.* Izmerenie kvaziizentropicheskoy szhimaemosti geliya i deuteriya pri davleniyakh 1500–2000 GPa // ZhETF. 2012. T. 142. Vyp. 4 (10). S. 696–709.
11. Мочалов М. А., Илькаев Р. И., Форттов В. Е., Михайлов А. Л., Аринин В. А., Бликов А. О., Баурин А. Ю., Комраков В. А., Огородников В. А., Рыжков А. В., Юхимчук А. А. Измерение квазиизэнтропической сжимаемости гелия при давлении ~5000 ГПа // Письма в ЖЭТФ. 2012. Т. 96. Вып. 3. С. 172–177.  
*Mochalov M. A., Ilkaev R. I., Fortov V. E., Mikhaylov A. L., Arinin V. A., Grishechkin S. K., Blikov A. O., Baurin A. Yu., Komrakov V. A., Ogorodnikov V. A., Ryzhkov A. V., Yukhimchuk A. A.* Izmerenie kvaziizentropicheskoy szhimaemosti geliya pri davlenii ~5000 GPa // Pisma v ZhETF. 2012. T. 96. Vyp. 3. S. 172–177.
  12. Мочалов М. А., Илькаев Р. И., Форттов В. Е., Михайлов А. Л., Раевский В. А., Огородников В. А., Юхимчук А. А., Давыдов А. И., Анашкин Н. Н., Аринин В. А., Бликов А. О., Баурин А. Ю., Давыдов Н. Б., Комраков В. А., Логвинов А. И., Маначкин С. Ф., Рыжков А. В., Ткаченко Б. И., Федоров А. В., Финюшин С. А., Калашников Д. А., Чудаков Е. А., Пронин Е. А., Бакулина Е. А. Исследование квазиизэнтропической сжимаемости дейтерия и гелия при давлениях 1500 – 5000 ГПа // ЖЭТФ. 2014. Т. 146. Вып. 1 (7). С. 169–185.  
*Mochalov M. A., Ilkaev R. I., Fortov V. E., Mikhaylov A. L., Rayevskiy V. A., Ogorodnikov V. A., Yukhimchuk A. A., Davydov A. I., Anashkin N. N., Arinin V. A., Blikov A. O., Baurin A. Yu., Davydov N. B., Komrakov V. A., Logvinov A. I., Manachkin S. F., Ryzhkov A. V., Tkachenko B. I., Fyedorov A. V., Finyushin S. A., Kalashnikov D. A., Chudakov E. A., Pro-*
  - nin E. A., Bakulina E. A.* Izmerenie kvaziizentropicheskoy szhimaemosti deuteriya i geliya pri davleniyakh 1500 – 5000 GPa // ZhETF. 2014. T. 146. Vyp. 1 (7). S. 169–185.
  13. Мочалов М. А., Илькаев Р. И., Форттов В. Е., Михайлов А. Л., Аринин В. А., Бликов А. О., Комраков В. А., Максимкин И. П., Огородников В. А., Рыжков А. В. Квазиизэнтропическая сжимаемость дейтерия в области давлений ~12 ТПа // Письма в ЖЭТФ. 2018. Т. 107. Вып. 3. С. 173–179.  
*Mochalov M. A., Ilkaev R. I., Fortov V. E., Mikhaylov A. L., Arinin V. A., Blikov A. O., Komrakov V. A., Maksimkin I. P., Ogorodnikov V. A., Ryzhkov A. V.* Kvaziizentropicheskaya szhimaemost deuteriya v oblasti davleniy ~12 TPa // Pisma v ZhETF. 2018. T. 107. Vyp. 3. S. 173–179.
  14. Мочалов М. А., Илькаев Р. И., Форттов В. Е., Михайлов А. Л., Аринин В. А., Бликов А. О., Огородников В. А., Рыжков А. В., Комраков В. А., Максимкин И. П. Измерение квазиизэнтропической сжимаемости газообразного гелия при давлении ~10 ТПа // Там же. 2018. Т. 108. Вып. 10. С. 692–696.  
*Mochalov M. A., Ilkaev R. I., Fortov V. E., Mikhaylov A. L., Arinin V. A., Blikov A. O., Ogorodnikov V. A., Ryzhkov A. V., Komrakov V. A., Maksimkin I. P.* Izmerenie kvaziizentropicheskoy szhimaemosti gazoobraznogo geliya pri davlenii ~10 TPa // Tam zhe. 2018. T. 108. Vyp. 10. S. 692–696.
  15. Мочалов М. А., Илькаев Р. И., Форттов В. Е., Ерунов С. В., Аринин В. А., Бликов А. О., Комраков В. А., Максимкин И. П., Огородников В. А., Рыжков А. В., Грязнов В. К., Иосилевский И. Л., Левашов П. Р. Сжимаемость неидеальной плазмы дейтерия и гелия до 20 ТПа // ЖЭТФ. 2021. Т. 160. Вып. 5 (11). С. 735–756.  
*Mochalov M. A., Ilkaev R. I., Fortov V. E., Erunov S. V., Arinin V. A., Blikov A. O., Komrakov V. A., Maksimkin I. P., Ogorodnikov V. A., Ryzhkov A. V., Gryaznov V. K., Iosilevskiy I. L., Levashov P. R.* Szhimaemost idealnoy plazmy deuteriya i geliya do 20 TPa // ZhETF. 2021. T. 160. Vyp. 5 (11). S. 735–756.

16. *Аринин В. А.* Функциональный метод трассировки границ раздела двух сред, имеющих цилиндрическую геометрию // Цифровая обработка сигналов. 2006. Вып. 2. С. 52—55.  
*Arinin A. V.* Funktsionalnyy metod trassirovki granits razdela dvukh sred, imeyushchikh tsilindricheskuyu geometriyu // Tsifrovaya obrabotka signalov. 2006. Vyp. 2. S. 52—55.
17. *Strand O. T., Goosman D. R., Martinez C., Whitworth T. L., Kuhlow W. W.* Compact system for high-speed velocimetry using heterodyne techniques // Review Scientific Instruments. 2006. Vol. 77. Paper 083108.
18. *Бахрах С. М., Спиридонов В. Ф.* Метод концентраций расчета нестационарных течений сплошной среды // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1999. Вып. 4. С. 32—36.  
*Bakhrakh S. M., Spiridonov V. F.* Metod kontsentratsiy raschyeta nestatsionarnykh techeniy sploshnoy sredy // Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Matematicheskoe modelirovaniye fizicheskikh protsessov. 1999. Vyp. 4. S. 32—36.
19. *Гордеев Д. Г., Голубкова Е. Ф., Гударенко Л. Ф., Куделькин В. Г., Сапронова О. В.* Современное состояние пакета программ УРС-ОФ для расчета термодинамических и механических свойств веществ // XII Межд. конф. "Супервычисления и математическое моделирование": сб. науч. тр. Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2010. С. 115—118.  
*Gordeev D. G., Golubkova E. F., Gudarenko L. F., Kudelkin V. G., Sapronova O. V.* Sovremennoye sostoyaniye paketa programm URS-OF dlya raschyeta termodinamicheskikh i mekhanicheskikh svoystv veshchestv // XII Mezhd. konf. "Supervychisleniya i matematicheskoe modelirovaniye": sb. nauch. tr. Sarov: RFYaTs-VNIIEF, 2010. S. 115—118.
20. *Копышев В. П., Хрусталева В. В.* Уравнение состояния водорода до 10 Мбар // ПМТФ. 1980. Вып. 1. С. 122—128.  
*Kopyshchev V. P., Khrustal'eva V. V.* Uravneniye sostoyaniya vodoroda do 10 Mbar // PMTF. 1980. Vyp. 1. S. 122—128.
21. *Копышев В. П.* Термодинамическая модель плотной жидкости // Там же. 1971. Вып. 1. С. 119—122.  
*Kopyshchev V. P.* Termodinamicheskaya model plotnoy zhidkosti // PMTF. 1971. Vyp. 1. P. 119—122.
22. *Григорьев Ф. В., Кормер С. Б., Михайлова О. Л., Толочко А. П., Урлин В. Д.* Уравнение состояния молекулярного водорода. О фазовом переходе в металлическое состояние // ЖЭТФ. 1978. Т. 75. Вып. 5 (11). С. 1683—1693.  
*Grigorev F. V., Kormer S. B., Mikhaylova O. L., Tolochko A. P., Urlin V. D.* Uravneniye sostoyaniya molekulyarnogo vodoroda. O fazovom perekhode v metallicheskoye sostoyaniye // ZhETF. 1978. T. 75. Vyp. 5 (11). S. 1683—1693.
23. *Глушак Б. Л., Игнатова О. Н.* Уругопластическая модель динамического деформирования  $^{238}\text{U}$  и его сплава с Мо // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1998. Вып. 2. С. 45—49.  
*Glushak B. L., Ignatova O. N.* Urugoplasticheskaya model dinamicheskogo deformirovaniya  $^{238}\text{U}$  u ego splava s Mo // Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Matematicheskoe modelirovaniye fizicheskikh protsessov. 1998. Vyp. 2. S. 45—49.
24. *Бахрах С. М., Михайлов С. В., Наумов А. О., Спиридонов В. Ф., Шувалова Е. В.* Реализация в комплексе ЛЭГАК разностной схемы расчета уругопластичности с определением ускорений на сторонах счетных ячеек и использование ее для расчета разрушения материалов // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2001. Вып. 3. С. 72—79.  
*Bakhrakh S. M., Mikhaylov S. V., Naumov A. O., Spiridonov V. F., Shuvalova E. V.* Realizatsiya v komplekse LEGAK raznostnoy skhemy raschyeta uprugoplastichnosti s opredeleniem uskoreniy na storonakh schetnykh yacheek i ispolzovanie ee dlya raschyeta razrusheniya materialov // Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Matematicheskoe modelirovaniye fizicheskikh protsessov. 2001. Vyp. 3. S. 72—79.
25. *Володина Н. А., Краюхин С. А.* Алгоритм итерационной коррекции времен детонации

- за счет учета направления движения детонационной волны в методике ЛЭГАК // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2019. Вып. 3. С. 35–47.
- Volodina N. A., Krayukhin S. A.* Algoritm iteratsionnoy korrektsii vremen detonatsii za schyet uchyeta napravleniya dvizheniya detonatsionnoy volny v metodike LEGAK // Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov. 2019. Вып. 3. С. 35–47.
26. *Гаврилов Н. Ф., Иванова Г. Г., Селин В. И., Софронов В. Н.* Программа УП-ОК для решения одномерных задач механики сплошной среды в одномерном комплексе // Там же. 1982. Вып. 3. С. 11–14.
- Gavrilov N. F., Ivanova G. G., Selin V. I., Sofronov V. N.* Programma UP-OK dlya resheniya odnomernykh zadach mekhaniki sploshnoy sredy v odnomernom komplekse // Tam zhe. 1982. Вып. 3. С. 11–14.
27. *Жерноклетов М. В., Раевский В. А., Маначкин С. Ф., Давыдов Н. Б., Панов К. Н., Рыжков А. В., Аринин В. А., Ткаченко Б. И., Логвинов А. И., Комраков В. А., Давыдов А. И., Анашкин Н. Н.* Результаты экспериментов по квазиизэнтропическому сжатию дейтерия и гелия до экстремальных давлений  $\approx 3000$  ГПа // ФГВ. 2018. Т. 54. Вып. 5. С. 13–17.
- Zhernokletov M. V., Raevskiy V. A., Manachkin S. F., Davydov N. B., Panov K. N., Ryzhkov A. V., Arinin V. A., Tkachenko B. I., Logvinov A. I., Komrakov V. A., Davydov A. I., Anashkin N. N.* Rezultaty eksperimentov po kvaziizentropicheskomu szhatiyyu deyteriya i geliya do ekstremalnykh davleniy  $\approx 3000$  GPa // FGV. 2018. Т. 54. Вып. 5. С. 13–17.
28. *Мочалов М. А., Илькаев Р. И., Форттов В. Е., Михайлов А. Л., Бликов А. О., Огородников В. А., Грязнов В. К., Иосилевский И. Л.* Квазиизэнтропическая сжимаемость сильнонеидеальной плазмы дейтерия при давлениях до 5500 ГПа: эффекты неидеальности и вырождения // ЖЭТФ. 2017. Т. 151. Вып. 3. С. 592–620.
- Mochalov M. A., Ilkaev R. I., Fortov V. E., Mikhaylov A. L., Blikov A. O., Ogorodnikov V. A., Gryaznov V. K., Iosilevskiy I. L.* Kvaziizentropicheskaya szhimaemost silno neidealnoy plazmy deyteriya pri davleniyakh do 5500 GPa: efekty neidealnosti i vyrozhdeniya // ZhETF. 2017. Т. 151. Вып. 3. С. 592–620.

Статья поступила в редакцию 11.03.21.

---

УДК 519.6

## О ПРИМЕНЕНИИ СРЕДСТВ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ ДЛЯ ПОДДЕРЖАНИЯ КАЧЕСТВА ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СЕТКИ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

А. В. Бабанов, А. В. Воеводин, А. Н. Щербаков  
(ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области)

Рассматривается проблема автоматической коррекции разностной сетки в процессе численного решения задач газовой динамики. В лагранжево-эйлеровой методике МИМОЗА проблема неудовлетворительного качества пространственной сетки связана с деформациями линий разностной сетки, выделенных *лагранжевым признаком*, который запрещает перестроение расположенных на этих линиях узлов после лагранжева этапа численного решения уравнений газовой динамики. Как правило, подобное свойство узлов используется для выделения контактных границ веществ, которые совпадают с линиями разностной сетки. При больших деформациях разностной сетки в задаче рано или поздно наступает момент, когда лагранжев признак узлов необходимо удалить. В методике МИМОЗА эта процедура обычно выполняется в ручном режиме, что вносит в численное решение фактор неопределенности времени удаления лагранжева признака.

Проблему идентификации дефектных узлов разностной сетки с лагранжевым признаком с последующей своевременной его заменой на другой тип перестроения авторы решают средствами технологии машинного обучения. Представлен шаблон набора входных данных для обучения искусственной нейронной сети, характеризующий предпосылки образования дефектных конфигураций для узлов с лагранжевым признаком. Приведены результаты апробации алгоритмов новой технологии на двух тестах с сильными деформациями лагранжевых линий.

*Ключевые слова:* искусственная нейронная сеть, многослойный персептрон, поддержание качества пространственной разностной сетки, газовая динамика.

### Введение

При использовании ALE (Arbitrary Lagrangian-Eulerian) метода [1] для моделирования задач механики сплошной среды вычисления на временном шаге проводятся в два этапа. На первом (*лагранжевом*) этапе узлы пространственной разностной сетки перемещаются вместе с веществом. На следующем (*эйлеровом*) этапе по определенным правилам перестраивается пространственная разностная сетка, а затем на нее производится пересчет сеточных величин, полученных после лагранжева этапа.

В ALE-методике МИМОЗА [2] при построении начальной пространственной сетки контактные границы раздела веществ обычно совпадают с линиями сетки, называемыми в этом слу-

чае лагранжевыми линиями (ЛЛ), и выделяются специальным *лагранжевым типом перестроения* сетки. После лагранжева этапа узлы разностной сетки, расположенные на ЛЛ (имеющие *лагранжев признак*), не изменяют своего геометрического положения при перестроении пространственной сетки и ограничивают (запрещают) движение потоков объема через границу счетной ячейки при пересчете величин. Такой подход в случае малых деформаций пространственной сетки позволяет проводить расчет многокомпонентной среды с более высокой точностью.

Для построения новой пространственной сетки между ЛЛ используются локальные итерационные алгоритмы, которые, однако, не гарантируют, что новая разностная сетка не будет со-

держат сильно вытянутых или даже вырожденных счетных ячеек. Для предотвращения перекрытий (перехлестов) в соседних счетных ячейках при сильной деформации вещества лагранжевы тип перестроения сетки в узлах заменяют другим типом, который открывает возможность для свободного движения вещества через границу счетной ячейки, что приводит к появлению в задаче смешанных ячеек [3], содержащих более одного вещества.

До настоящего времени в методике МИМОЗА процедура замены лагранжева типа перестроения сетки в узле не была строго формализована и вносила в проблему актуального состояния пространственной сетки на счетных временных шагах фактор неопределенности.

В статье рассматривается возможность использования механизма автоматического снятия лагранжева признака узлов, основанного на наборе индикаторов (значений геометрических параметров), учитывающих состояние пространственной сетки в задаче, без участия человека. Такой механизм должен анализировать выбранные параметры программными средствами на счетных временных шагах. Однако даже для структурированной криволинейной сетки, состоящей из четырехугольников, таких параметров может быть выбрано много, что неизбежно приводит к появлению в программе многочисленных логических ветвлений и условных переходов с недостаточно обоснованным определением пороговых критериев. В итоге программная реализация такого алгоритма по сложности механизма принятия решения становится близкой к проблеме распознавания образов.

Одним из современных и мощных инструментов решения задачи выявления зависимостей среди многочисленных параметров, которые характеризуют рассматриваемый объект, являются алгоритмы машинного обучения [4–6]. Технология машинного обучения может находить трудноуловимые для когнитивных способностей человеческого мозга многопараметрические зависимости (критерии). Данное свойство машинного обучения позволяет пропустить этап формирования точного программного алгоритма для механизма решения проблемы ЛЛ и помогает выбрать обобщенные критерии идентификации "дефектных" узлов на ЛЛ. Таким образом, решение исходной проблемы сводится к задаче классификации данных для сегментов (отрезков) ЛЛ: либо сегмент не влияет на качество разностной сетки, либо он вскоре приведет к об-

разованию перекрытия (перехлеста) в соседних счетных ячейках.

В противоположность традиционному подходу программирования механизм принятия решения, основанный на принципах машинного обучения, является менее затратным, простым в сопровождении и более гибким в его настройке на разные классы задач. Технология машинного обучения, основанная на искусственных нейронных сетях (ИНС), позволяет решать задачу классификации данных, оперируя информацией об объекте и набором весовых синаптических коэффициентов связей между нейронами.

С учетом вышеизложенного авторы разработали и реализовали в методике МИМОЗА искусственную интеллектуальную систему (ИИС) для поддержания качества пространственной сетки. ИИС позволяет решать связанные с этим проблемы с помощью нейросетевого классификатора, построенного на основе ИНС прямого распространения — многослойного персептрона [7, 8], обученной классическим методом обратного распространения ошибки [9, 10].

### Определение шаблона входных данных ИНС

Для решения проблемы заблаговременного снятия лагранжева признака для узлов пространственной сетки необходимо выявить условия и предпосылки образования деформаций сегментов ЛЛ, которые на следующих временных шагах могут привести к образованию перекрытий и перехлестов счетных ячеек. Отметим, что здесь данный вопрос рассматривается только для случая двумерных сферических сеток.

Рассмотрим наиболее распространенный тип деформации сегментов пространственной сетки на ЛЛ — пики, показанные на рис. 1. В процессе счета такие пики образуют нежелательную геометрическую конфигурацию ячеек пространственной сетки из-за потери свойства квазиортogonalности над (под) точками излома.

Рассмотрим сегмент пространственной сетки (блок узлов разностной сетки  $3 \times 3$ ) с сильным изломом (рис. 2), где данные собираются для центральной точки 1. ЛЛ, отмеченную пунктирными линиями, в выбранном сегменте характеризуют три точки: 1–3. Существует связь между пикообразными деформациями ЛЛ и некоторыми геометрическими параметрами. Продемонстри-

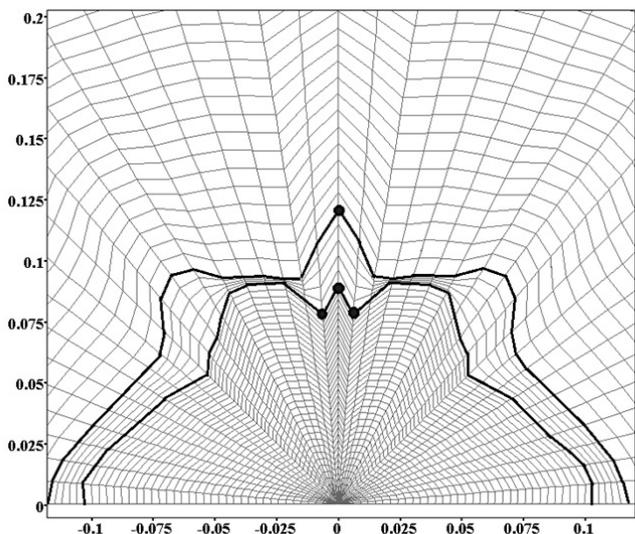


Рис. 1. Пример деформации ЛЛ: — — ЛЛ; • — точки излома

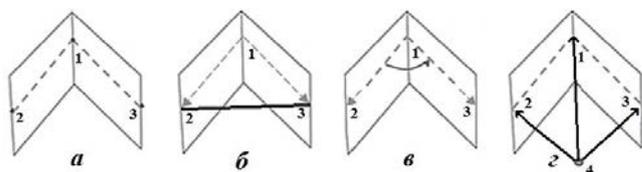


Рис. 2. Построение шаблонного набора входных данных для нейронной сети: *а* — сегмент ЛЛ с изломом; *б* — треугольник для определения первого параметра шаблона; *в* — угол — второй параметр шаблона; *г* — векторы для формирования третьего—пятого параметров

руем получение этих параметров на примере излома ЛЛ в точке 1.

Сформировавшийся излом можно идентифицировать по следующим производным геометрическим параметрам:

- площадь треугольника, образованного точками 1—3, нормированная на длину ребра (жирная линия на рис. 2, б);
- угол между двумя векторами  $\vec{1-2}$  и  $\vec{1-3}$ , на рис. 2, в;
- длины трех векторов, образованных точкой 4 начала разбиения столбца (см. рис. 2, г) и точками 1—3, нормированные на корень из суммы квадратов длин этих векторов.

Пять указанных геометрических параметров формируют шаблон набора входных данных, который описывает ситуацию для одного узла на

ЛЛ и является вектором-входом для нейронной сети. Совокупность подобных шаблон-наборов и соответствующих им ответов — "хорошим" или дефектным является узел ЛЛ — формирует базу обучающей выборки.

Стоит отметить, что ИНС проводит классификацию узлов ЛЛ не по набору конкретных значений геометрических параметров (площадь, угол, длины векторов), а на основе набора примеров. То есть не требуется четко формализовать критерии отбора дефектных узлов.

### Разметка данных для обучающей выборки

В пакете визуализации и инженерного анализа IZOMIM [11] реализована процедура сбора данных для выбранного шаблонного набора из задач, решенных с использованием лагранжево-эйлерова подхода на сферической сетке. Для создания обучающей выборки выделялись узлы на ЛЛ в местах сильных изломов пространственной разностной сетки, для которых неминуемо приходилось снимать лагранжев признак. При обучении нейронной сети соответствующий желаемый ответ для таких точек устанавливался равным единице. Для остальных узлов на ЛЛ устанавливался желаемый ответ, равный нулю, свидетельствующий о том, что в этих точках лагранжев признак снимать еще рано. Обучающая выборка создавалась на основе расчета 1 обучающей задачи (см. разд. "Тестовые расчеты"). Данные расчетов верификационной задачи из того же раздела не входили в обучающую выборку.

Для качественного обучения и достижения стабильных результатов в задаче классификации нейронные сети должны обучаться на больших объемах данных. Если данных для качественного обучения ИНС недостаточно, то иногда над набором данных выполняется операция аугментации. Аугментация данных [7] — специальный прием для создания дополнительных обучающих данных из имеющихся шаблонных наборов. С этой целью авторами на языке программирования Python была реализована вспомогательная программа увеличения объема данных обучающей выборки, полученных из пакета IZOMIM.

## Архитектура искусственной нейронной сети

Таблица 1

Начальные данные обучающей задачи

Номер подобласти	Внешний радиус, см	$\gamma$	Плотность, г/см <sup>3</sup>	Количество счетных ячеек по радиусу
1	0,20	1,50000	1,8	34
2	0,25	1,50000	1,6	5
3	0,72	1,66667	1,4	22
4	0,80	1,66667	1,2	3
5	1,00	1,66667	1,0	16

Для решения поставленной задачи классификации данных (хороший/дефектный узел лагранжева типа) авторы реализовали ИНС с архитектурой многослойного персептрона [7, 8], которую и использовали в расчетах.

Топология ИНС — количество слоев, равное 3, и число нейронов в них 5, 30 и 2 — подбиралась исходя из следующих условий:

- 1) успешность обучения ИНС — процент правильных ответов;
- 2) минимизация количества скрытых слоев (не первый и не последний слой) и числа персептронов в них, так как существует прямая зависимость вычислительной нагрузки от числа персептронов в ИНС.

Количество персептронов входного (первого) слоя обуславливается шаблоном входных данных. Количество персептронов выходного (последнего) слоя указывает на использование классификационной парадигмы обучения нейронной сети. В предлагаемой парадигме решаются задачи классификации данных: номер персептрона с максимальным активированным значением есть номер множества, с которым будет соотнесен представленный на вход ИНС объект. Узлы на ЛЛ в местах сильных изломов счетной сетки, для которых необходимо убрать лагранжев признак, — первое множество, остальные узлы на ЛЛ — второе множество.

### Тестовые расчеты

**Обучающая задача.** В момент времени  $t = 0$  в области, представляющей полусферу радиусом 1 см, находится идеальный газ с уравнением состояния  $p = (\gamma - 1)\rho e$ . Удельная внутренняя энергия равна нулю. Полусфера разделена на пять подобластей, каждая из которых ограничена замкнутым контуром, представляющим собой ЛЛ, с внутренним и внешним радиусами. В каждой подобласти заданы вещества с различными термодинамическими свойствами (табл. 1).

При дискретизации области каждый столбец пространственной сетки получался равномерным разбиением внешней границы задачи по углу на 40 интервалов. Каждая строка разностной сетки получалась разбиением столбца задачи равномерно по массе на 80 интервалов. На

границах раздела веществ для 35-й, 40-й, 62-й, 65-й строк задавались ЛЛ.

Скорости в узлах внешней границы полусферы задавались по следующему принципу:

— в каждом узле 81-й строки, кроме столбца с номером 21:

$$U_{j,k} = -0,1x_{j,k};$$

$$U_{y,j,k} = -0,1y_{j,k};$$

— в столбце с номером 21

$$U_{x,j,k} = -0,1x_{j,k} + 0,01x_{j,k};$$

$$U_{y,j,k} = -0,1y_{j,k} + 0,01y_{j,k}.$$

Обучающая задача была рассчитана тремя различными способами. В расчете 1 задача считалась без использования ИНС и без снятия признака ЛЛ в местах сильных деформаций. Расчет 2 выполнялся без ИНС, но в точках выраженных изломов на ЛЛ лагранжев признак заблаговременно снимался расчетчиком в ручном режиме, исходя из результатов расчета 1, показавших, когда и из-за каких узлов ожидается перехлест разностной сетки. Данные узлы вносились в обучающую выборку для ИНС, которая использовалась в расчете 3. В расчете 3 признак ЛЛ счетной сетки снимался автоматически в процессе счета без прерывания на основе прогноза ИНС. Узлы с лагранжевым признаком, выделенные для создания обучающей выборки, имели следующие индексы (строка; столбец): (65;21), (40;20), (40;21), (40;22), (35;20), (35;21), (35;22).

В расчете 1 некоторые ячейки пространственной сетки приводили к ситуации перехлеста, когда внутри счетной ячейки находилась вершина соседней ячейки. Расчет закончился аварийной остановкой в момент времени  $t = 11$ .

При проведении расчета 2 до момента аварийного останова ( $t < 11$ ) были выполнены записи

Таблица 2

Результат работы ИНС в расчете 3

Момент времени	Индексы узла ( $j; k$ )
7,1	(65; 21)
8,8	(35; 21)
8,9	(35; 20)
8,9	(35; 22)
9,1	(40; 21)
10,2	(40; 20)
10,2	(40; 22)

разрезов (значений всех газодинамических и сеточных величин), с прерыванием процесса счета, затем в ручном режиме вносились изменения в ЛЛ разностной сетки и производился запуск на продолжение расчета. Снятие лагранжева признака было произведено в узлах с индексами (65;21), (40;20), (40;21), (40;22), (35;20), (35;21), (35;22). Вследствие этого на момент времени  $t = 11$  пространственная сетка не имела перехлестов.

В расчете 3 на основе прогноза ИНС в процессе счета идентифицировались дефектные узлы разностной сетки с лагранжевым признаком и автоматически вносились соответствующие изменения. В пространственной сетке на контрольный момент времени перехлестов не обнаружено. В табл. 2 представлены данные о моментах времени автоматического снятия лагранжева признака с узлов и индексы этих узлов.

На рис. 3 показан вид счетной сетки на контрольный момент времени для трех вариантов расчета обучающей задачи.

**Верификационная задача.** В области, представляющей в момент времени  $t = 0$  полусферу радиусом 1 см, находится идеальный газ с уравнением состояния  $p = (\gamma - 1)\rho e$  и показателем адиабаты  $\gamma = 1,666667$ . Удельная внутренняя энергия равна нулю. Данная полусфера

разделена на три подобласти, каждая из которых ограничена замкнутым контуром, представляющим собой ЛЛ, с внутренним и внешним радиусами. В каждой подобласти заданы вещества с одинаковым уравнением состояния (идеальный газ), но с разными плотностями. Радиусы и плотности для каждой подобласти приведены в табл. 3.

При дискретизации области каждый столбец пространственной сетки получался равномерным разбиением внешней границы задачи по углу на 40 интервалов. Каждая строка разностной сетки получалась разбиением столбца задачи равномерно по массе на 80 интервалов. На границах раздела веществ — в 65-й и 70-й строках — задавались ЛЛ.

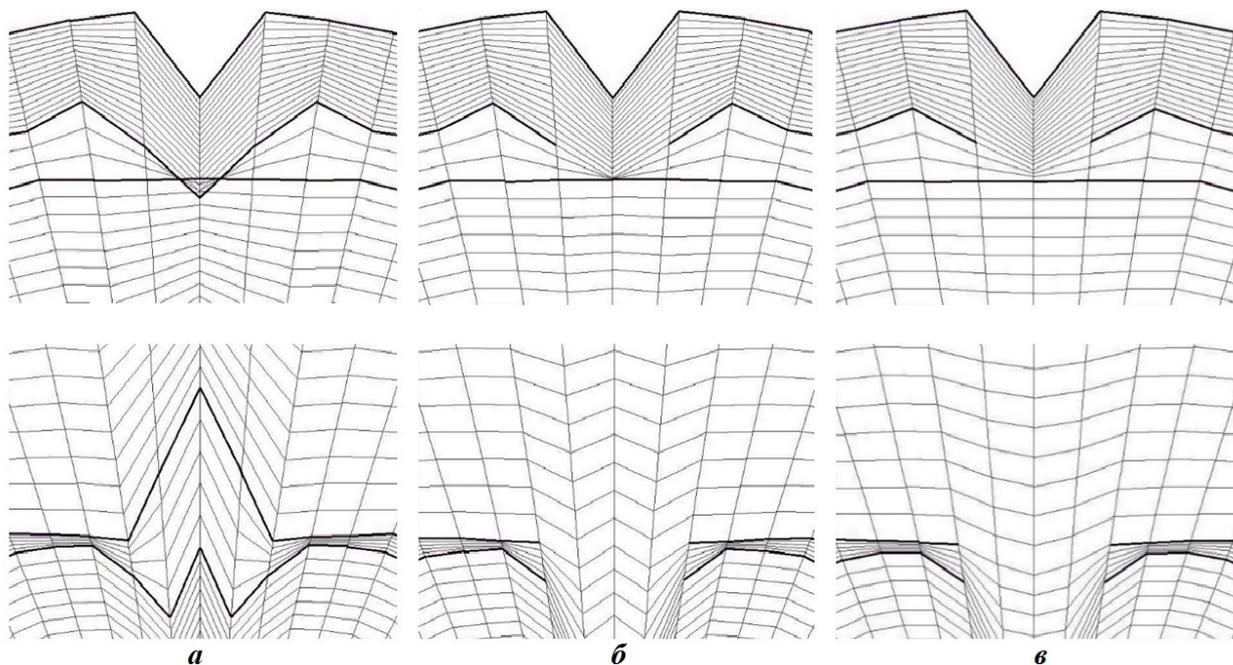


Рис. 3. Вид счетной сетки для трех вариантов расчета обучающей задачи,  $t = 11$ : а — расчет 1; б — расчет 2; в — расчет 3

Таблица 3

Начальные данные для верификационной задачи

Номер подобласти	Внешний радиус, см	Плотность, г/см <sup>3</sup>	Количество счетных ячеек по радиусу
1	0,8	2,0	64
2	0,9	1,0	5
3	1,0	5,0	11

Скорости в узлах задавались следующим образом:

— в каждом узле 81-й строки, кроме узлов с номерами столбцов 6, 11, 16, 21, 26, 31, 36:

$$Ux_{j,k} = -0,1x_{j,k};$$

$$Uy_{j,k} = -0,1y_{j,k};$$

— в узлах 81-й строки с номерами столбцов 6, 11, 16, 21, 26, 31, 36

$$Ux_{j,k} = -0,1x_{j,k} + 0,01x_{j,k};$$

$$Uy_{j,k} = -0,1y_{j,k} + 0,01y_{j,k}.$$

Аналогично предыдущей задаче данный тест рассчитывался в трех различных вариантах. В расчете 1 задача считалась без использования ИНС и без снятия признака ЛЛ в местах сильных деформаций. Расчет 2 выполнялся без ИНС, но в точках выраженных изломов на ЛЛ лагранжев признак заблаговременно снимался расчетчиком в ручном режиме. В расчете 3 признак ЛЛ счетной сетки снимался автоматически в процессе счета без прерывания на основе прогноза ИНС с весовыми коэффициентами, полученными при обучении на первой задаче.

В расчете 1 на момент времени  $t = 7,3$  образовались сильные изломы на ЛЛ и перехлесты в сетке.

В расчете 2 на момент времени  $t = 6$  в узлах с индексами (70;4), (70;6), (70;11), (70;16), (70;21), (70;26), (70;31), (70;36), (70;38) лагранжев признак был снят и на момент времени  $t = 7,3$  пространственная сетка не имела самопересечений.

В расчете 3 верификационной задачи решение о снятии с сегментов пространственной разностной сетки признака ЛЛ принималось ИНС без участия человека и на контрольный момент времени в пространственной сетке отсутствовали перехлесты. В табл. 4 представлены данные о

Таблица 4

Результат работы ИНС в расчете 3 верификационной задачи

Момент времени	Индексы узла (j;k)
5,1	(70; 4)
5,1	(70; 38)
5,3	(70; 21)
5,4	(70; 11)
5,4	(70; 16)
5,4	(70; 26)
5,4	(70; 31)
5,5	(70; 6)
5,5	(70; 36)

моментах времени снятия лагранжева признака в узлах и индексы этих узлов.

На рис. 4 показан вид счетной сетки на контрольный момент времени для разных вариантов расчета.

В результате серии расчетов можно сделать вывод о том, что реализованная ИИС позволяет производить заблаговременное автоматическое снятие признака ЛЛ с линейных сегментов пространственной сетки с сильными деформациями. Можно отметить универсальный характер построенного шаблонного набора, архитектуры сети и синаптических весов, полученных с использованием обучающих данных в ходе подготовки и проведения серии расчетов двумерных задач газовой динамики на сферических сетках, постановка которых напоминает обучающую задачу для разных веществ.

## Заключение

В статье представлены некоторые методические аспекты наполнения обучающей выборки для ИНС прямого распространения, построенной на базе модели многослойного перцептрона и предназначенной для классификации данных при решении проблемы заблаговременного снятия лагранжева признака в узлах пространственной разностной сетки во время проведения расчета.

Для двумерных сферических разностных сеток выбран шаблонный набор признаков, служащих входными данными для ИНС. Построенная ИНС в совокупности с выбранным шаблоном признаков позволяет для двумерных пространственных сеток описанного типа с высокой вероятностью предупреждать и устранять изломы

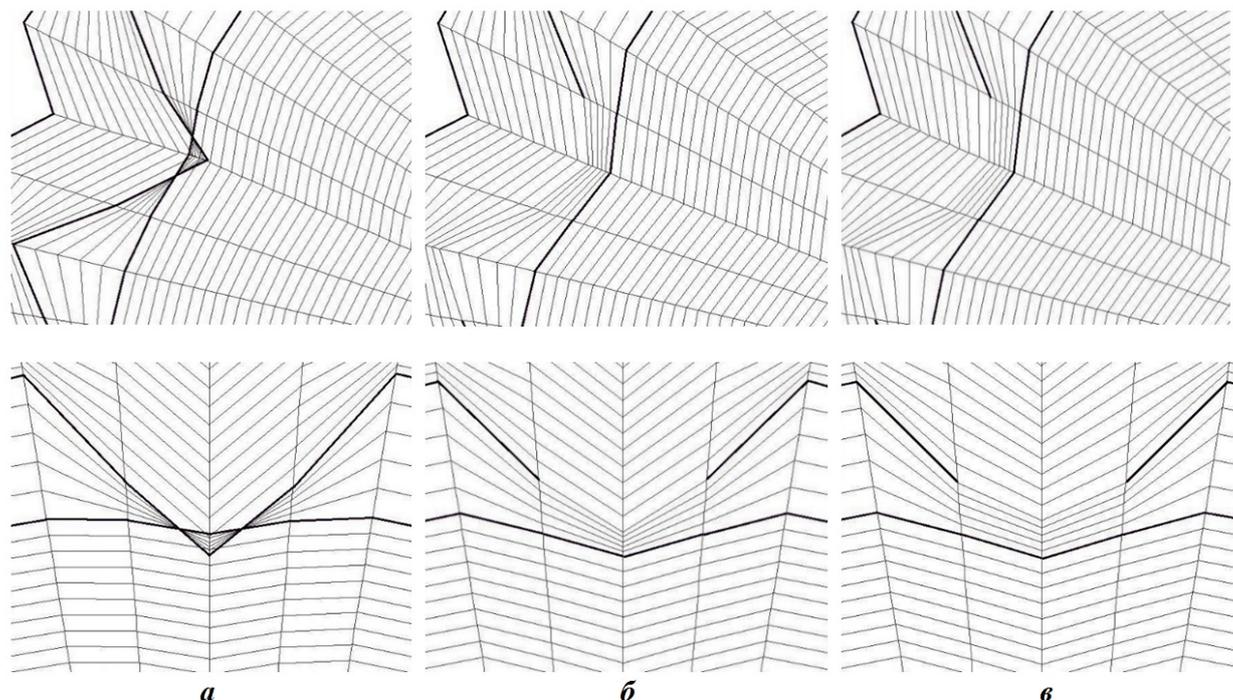


Рис. 4. Вид счетной сетки для трех вариантов расчета верификационной задачи,  $t = 7,3$ : а — расчет 1; б — расчет 2; в — расчет 3

на ЛЛ, которые могут создавать потенциально опасные области разностной сетки и приводить к преждевременной остановке расчета. Таким образом, с помощью технологии машинного обучения для расчетов по методике МИМОЗА удалось решить задачу заблаговременного снятия лагранжева признака у множества точек на ЛЛ, образующих пикообразные конфигурации.

Для структурированной четырехугольной разностной сетки общего вида представленный в статье шаблонный набор признаков будет недостаточным. Однако разработанная ИНС легко модернизируется под более сложные расчеты, содержащие сетки с ЛЛ, путем добавления новых признаков и расширения обучающей выборки.

### Список литературы

1. *Hirt C. W., Amsden A., Cook J.* An arbitrary Lagrangian-Eulerian computing method for all flow speeds // *J. Comp. Phys.* 1974. Vol. 14. P. 227–253.
2. *Софронов И. Д., Афанасова Е. А., Винокуров О. А., Воропинов А. И., Змушко В. В., Плетенев Ф. А., Рыбаченко П. В., Сарев В. А., Соколова Н. А., Шамраев Б. Н.*

Комплекс программ МИМОЗА для решения многомерных задач механики сплошной среды на ЭВМ "Эльбрус-2" // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1990. Вып. 2. С. 3–9.

*Sofronov I. D., Afanasova E. A., Vinokurov O. A., Voropinov A. I., Zmushko V. V., Pletenyev F. A., Rybachenko P. V., Sarayev V. A., Sokolova N. A., Shamraev B. N.* Kompleks programm MIMOZA dlya resheniya mnogomernykh zadach mekhaniki sploshnykh sred na EVM "Elbrus-2" // *Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov.* 1990. Vyp. 2. S. 3–9.

3. *Бахрах С. М., Спиридонов В. Ф.* Метод концентраций расчета нестационарных течений сплошной среды // Там же. 1999. Вып. 4. С. 32–36.  
*Bakhrakh S. M., Spiridonov V. F.* Metod kontsentratsiy raschyeta nestatsionarnykh techeniy sploshnoy sredy // Там же. 1999. Vyp. 4. S. 32–36.
4. *Червоненкис А. Я.* Компьютерный анализ данных. Лекции школы анализа данных

- Яндекс. 2010. <http://bookos.org/book/1022363/1286b4>.  
*Chervonenkis A.* Ya Kompyuternyy analiz dannykh. Lektsii shkoly analiza dannykh Yandeks. 2010. <http://bookos.org/book/1022363/1286b4>.
5. *Айвазян С. А., Енюков И. С., Мешалкин Л. Д.* Прикладная статистика: основы моделирования и первичная обработка данных. М.: Финансы и статистика, 1983.  
*Ayvazyan S. A., Enyukov I. S., Meshalkin L. D.* Prikladnaya statistika: osnovy modelirovaniya i pervichnaya obrabotka dannykh. M.: Financy i statistika, 1983.
  6. *Загоруйко Н. Г.* Прикладные методы анализа данных и знаний. Новосибирск: ИМ СО РАН, 1999.  
*Zagoruyko N. G.* Prikladnye metody analiza dannykh i znaniy. Novosibirsk: IM SO RAN, 1999.
  7. *Хайкин С.* Нейронные сети: полный курс, 2-е изд. М.: Вильямс, 2006.  
*Khaikin S.* Neyronnye seti: polnyy kurs, 2-e izd. M.: Vilyams, 2006.
  8. *Розенблатт Ф.* Принципы нейродинамики: Перцептроны и теория механизмов мозга. М.: Мир, 1965.  
*Rozenblatt F.* Printsipy neyrodinamiki: Pertseptrony i teoriya mekhanizmov mozga. M.: Mir, 1965.
  9. *Рутковская Д., Пилинский М., Рутковский Л.* Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы. М.: Горячая линия-Телеком, 2006.  
*Rutkovskaya D., Pilinskiy M., Rutkovskiy L.* Neyronnye seti, geneticheskie algoritmy i nechetkie sistemy. Goryachaya liniya-Telekom, 2006.
  10. *Уоссермен Ф.* Нейрокомпьютерная техника: Теория и практика. М.: Мир, 1992.  
*Uosserman F.* Neyrokompyuternaya tekhnika: Teoriya i praktika. M.: Mir, 1992.
  11. *Змушко В. В.* IZOMIM Программа графической обработки двумерных задач в комплексе программ МИМОЗА // Сб. тез. Межд. конф. "Супервычисления и математическое моделирование". Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2002. С. 49.  
*Zmushko V. V.* IZOMIM Programma graficheskoy obrabotki dvumernykh zadach v komplekse programm MIMOZA // Sb. tez. Mezhd. konf. "Supervychisleniya i matematicheskoe modelirovanie". Sarov: RFYaTs-VNIIEF, 2002. S. 49.
- Статья поступила в редакцию 13.09.21.
-

УДК 519.6

## УЛУЧШЕНИЕ КАЧЕСТВА ОБЪЕМНЫХ ЯЧЕЕК ПУТЕМ УДАЛЕНИЯ МАЛЫХ РЕБЕР ПРИ ГЕНЕРАЦИИ СЕТОК МЕТОДОМ ОТСЕЧЕНИЯ В ПАКЕТЕ ПРОГРАММ "ЛОГОС"

Д. Н. Смолкина  
(ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области)

Описан подход к удалению малых ребер в многогранных ячейках при генерации неструктурированных сеток методом отсечения в пакете программ "Логос". Удаление малых ребер выполняется при отсечении ячеек шаблонной сетки треугольниками поверхностной сетки. Под малым ребром понимается ребро многогранной ячейки, длина которого составляет меньше 30 % длины ребра ячейки шаблонной сетки. Отсекаемые ячейки разделяются на два типа — содержащие характерные особенности модели и простые ячейки. Подходы к удалению малых ребер для каждого типа ячеек существенно различаются. Для простых отсекаемых ячеек используется алгоритм, основанный на методе марширующих кубов. При удалении малых ребер в ячейках, содержащих характерные особенности модели, выполняется анализ совокупности объемов тетраэдров, построенных путем разбиения выпуклой отсеченной ячейки и ее окрестности. Способ построения тетраэдров, а также условие выпуклости ячейки и ее окрестности гарантируют положительность объемов всех сформированных тетраэдров, что является необходимым условием для удаления малых ребер. Тестирование предложенных алгоритмов показало, что данный подход позволяет удалять из сетки до 70 % малых ребер, является автоматическим и универсальным, так как не зависит от класса рассматриваемых задач. Это позволяет применять его для построения многогранных сеток на геометрических моделях произвольной сложности.

*Ключевые слова:* пакет программ "Логос", неструктурированная сетка, улучшение качества сетки, малые ребра, метод отсечения.

### Введение

В пакете программ "Логос" [1] одним из этапов подготовки расчетных сеток для численного моделирования задач аэро- и гидродинамики является генерация сеток методом отсечения [2]. Генератор позволяет выполнять построение сеточных моделей для объектов с произвольной геометрией, что делает его универсальным средством для проведения численных исследований в области аэро- и гидродинамики. Одна из главных отличительных особенностей этого генератора заключается в том, что он является полностью автоматическим. Автоматизация построения сетки неизбежно накладывает жесткие требования к алгоритмам генерации сетки.

Одним из наиболее ярких примеров является построение отсеченного многогранника (ячейки сетки) с заданными свойствами. Вне зависимости от входных данных отсеченная ячейка должна быть максимально хорошего качества (т. е. удовлетворять определенным критериям), иначе численное моделирование может завершиться неудачно. Вопросу качества сеток посвящено большое количество исследований. Так, например, в работах [3–7] приводится описание методов, позволяющих улучшать качество сеток, состоящих из таких элементов, как треугольник, призма, пирамида и шестигранник. В работах [8, 9] рассматриваются подходы к улучшению качества сеток с многогранными элементами.

В работе [8] отмечается, что в сетках с многогранными элементами к проблемам приводит

наличие малых ребер: образуются ячейки с малым объемом, грани с малой площадью и т. д. В данной статье описан метод, используемый для удаления малых ребер\* в выпуклых ячейках на основе разбиения выпуклых многогранных ячеек на тетраэдры.

### Формулировка подхода к удалению малых ребер

Модуль отсечения является одной из составных частей генератора объемных сеток на основе метода отсечения. Основные этапы работы генератора подробно описаны в работе [2]. Входными данными для работы модуля является поверхностная треугольная сетка (пример сетки

\*Под удалением ребра понимается замена одного его узла на другой.

показан на рис. 1, а) с выделенными характерными особенностями (если они имеются) (рис. 1, б), а также декартов адаптивный шаблон (рис. 1, в).

Под характерными особенностями понимаются острые края исходной поверхностной сетки. На рис. 2 более подробно показан пример модели, взятой из работы [10], с выделенными в ней характерными особенностями.

Ячейки декартова адаптивного шаблона — параллелепипеды, грани которых могут быть дополнительно разбиты, — далее будем называть *шаблонными ячейками*.

Отсечение треугольными ячейками (для краткости *треугольниками*) исходной поверхностной сетки проводится отдельно для каждой шаблонной ячейки, в которую они были распределены на предыдущем этапе работы генератора [2]. Пример шаблонной ячейки с попавшими в нее треугольниками показан на рис. 3.

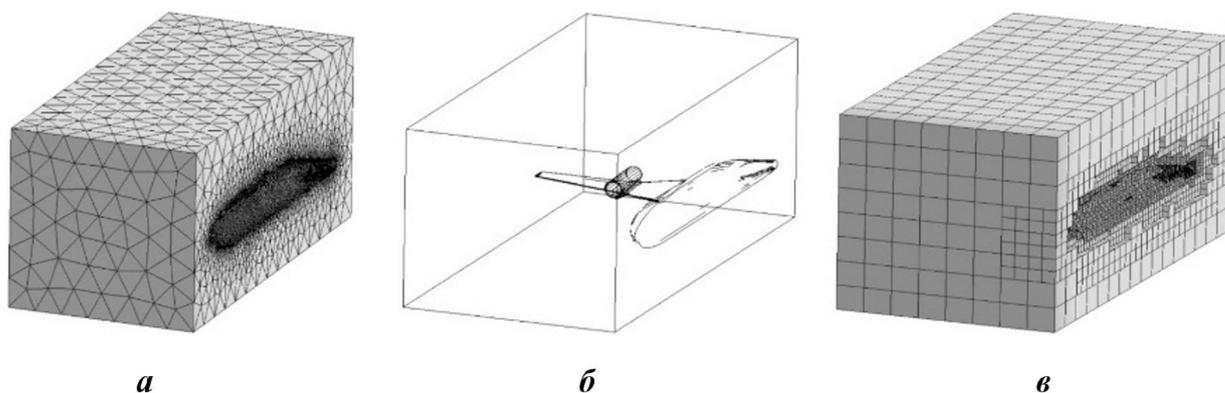


Рис. 1. Набор входных данных для работы модуля отсечения: а — поверхностная треугольная сетка; б — характерные особенности; в — декартов адаптивный шаблон

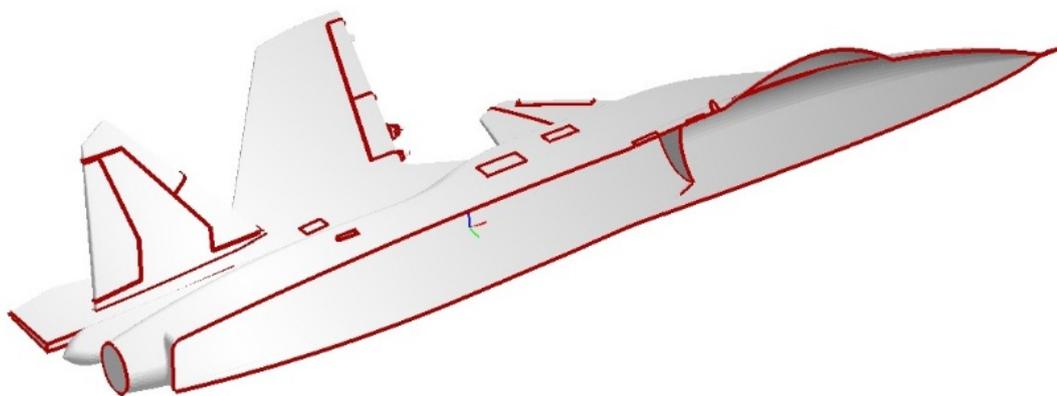


Рис. 2. Пример модели с выделенными характерными особенностями

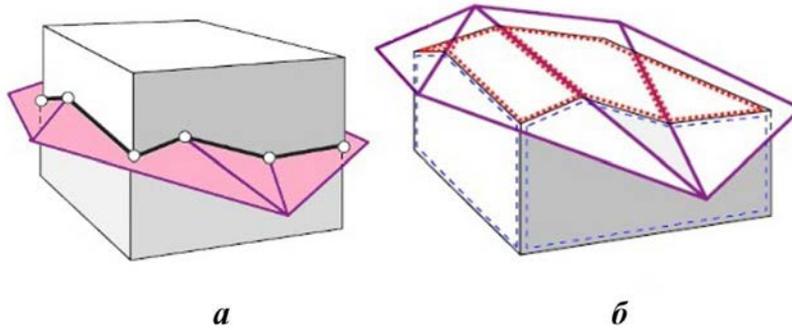


Рис. 3. Исходная шаблонная ячейка: *a* — с набором треугольников; *б* — с отброшенной внешней частью относительно сетки из треугольников

В зависимости от наличия или отсутствия характерных особенностей в рассматриваемой ячейке формируется одна или несколько поверхностных граней. Под поверхностной гранью понимается грань отсеченной ячейки, узлы которой лежат на исходной поверхностной треугольной сетке. Грани отсеченной ячейки, расположенные внутри объема, ограниченного исходной поверхностной сеткой, будем называть внутренними. Грани отсеченной ячейки, полученные в результате отсечения треугольниками, — отсеченные.

Так как в основе модуля отсечения лежит поиск пересечений треугольников с ячейками шаблонной сетки, при построении могут возникать ребра малой длины, которые приводят к появлению многогранных ячеек с малым объемом (меньше  $10^{-20} \text{ м}^3$ ), неудовлетворительным отношением длин сторон (больше 1 000), малыми площадями граней (меньше  $10^{-20} \text{ м}^2$ ) и т. д. Пример фрагмента сетки с такими ячейками показан на рис. 4.

В свою очередь, малые поверхностные грани в отсеченных ячейках приводят к появлению малых призматических ячеек, так как построение призматических слоев в генераторе проводится на основе поверхностных граней, полученных после отсечения треугольниками ячеек шаблонной сетки. В результате одна малая грань отсеченной ячейки приводит к образованию нескольких слоев малых призматических ячеек.

В зонах сетки, не содержащих характерных особенностей, проблема малых ребер была успешно решена путем выделения основных типовых случаев пересечения шаблонной ячейки треугольниками поверхностной сетки. Пример показан на рис. 5: желтым цветом отмечены внутренние узлы шаблонной ячейки и треугольники, попавшие в ячейку. Для всех представленных случаев был реализован единый алгоритм удаления малых ребер из сетки. При разработке алгоритма использовался метод марширующих кубов [11].

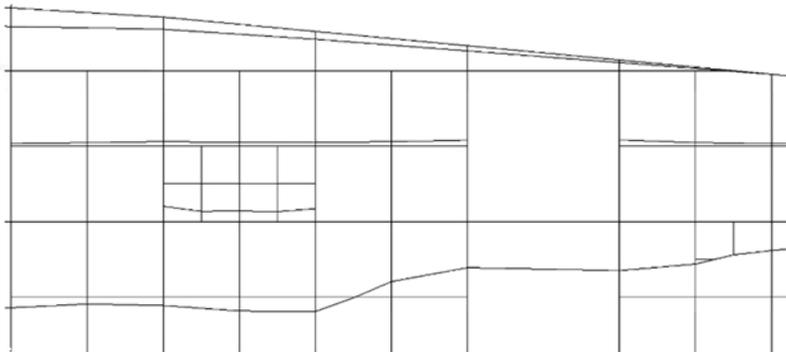


Рис. 4. Пример сетки с ячейками, содержащими малые ребра

Поясним на примере использование алгоритма удаления малых ребер при отсутствии характерных особенностей. Некоторые случаи пересечения шаблонной ячейки с треугольниками, показанные на рис. 5, можно сгруппировать с точки зрения удаления малых ребер (рис. 6). После этого, независимо от расположения узлов, отмеченных на рис. 6 желтым цветом (внутри объема, ограниченного исходной треугольной сеткой или вне его), малые ребра из данных ячеек удаляются единообразно по следующим правилам. Узлы  $A, B, C, D$  (рис. 7) будут объединены в один узел  $D$ . Затем узел  $D$  будет спроецирован на поверхность треугольной сетки.

В областях же, через которые проходят характерные кривые, могут возникать ячейки достаточно сложной формы (как выпуклые, так и невыпуклые). Примеры таких ячеек показаны на рис. 8. Формы таких ячеек могут быть любыми, и они не подлежат обобщению.

В работе [12] приводится *условие допустимости* многогранной ячейки сетки. Многогранная ячейка считается допустимой, если:

- a) она является *звездной* относительно центра тяжести своих вершин (отрезок, соединяю-

щий центр тяжести с любой из вершин ячейки, располагается внутри ячейки);

- б) центр тяжести каждой грани лежит внутри конуса, натянутого на ребра грани, с вершиной в точке  $C$  центра тяжести многогранника.

Пример допустимой ячейки показан на рис. 9.

Координаты центра тяжести  $C_f$  грани  $f$  определяются по формуле

$$\vec{C}_f = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \vec{n}_i, \quad (1)$$

где  $N$  — количество узлов грани;  $\vec{n}_i$  — координаты  $i$ -го узла грани.

Координаты центра тяжести ячейки  $C$  вычисляются следующим образом:

$$\vec{C} = \frac{1}{N_f} \sum_{i=1}^{N_f} \vec{C}_{f_i},$$

где  $N_f$  — количество граней ячейки;  $\vec{C}_{f_i}$  — координаты центра грани, вычисленные по форму-

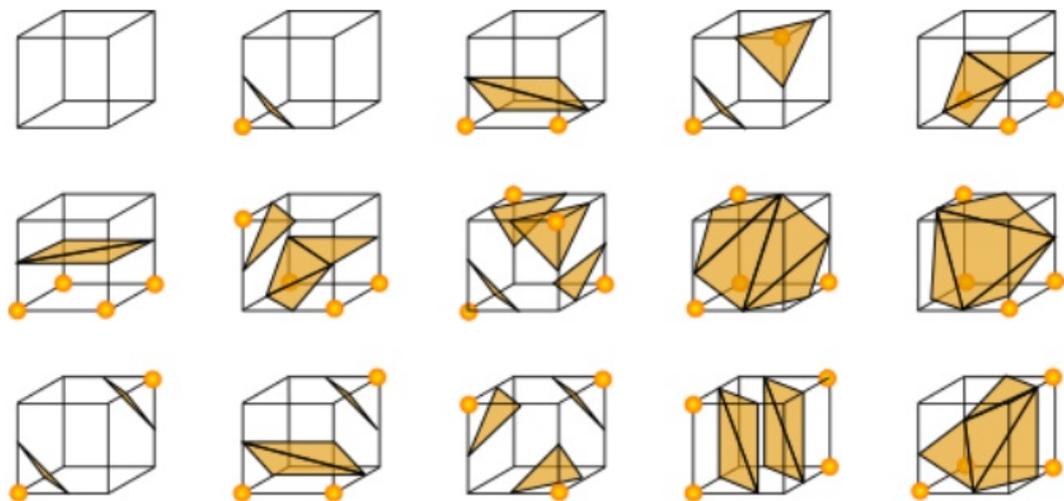


Рис. 5. Возможные варианты пересечений треугольника с кубом



Рис. 6. Пример обобщения случаев пересечения шаблонных ячеек с треугольниками для единообразного удаления малых ребер

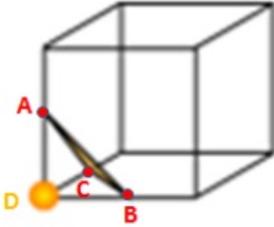


Рис. 7. Пример удаления малых ребер из ячейки, не содержащей характерных особенностей

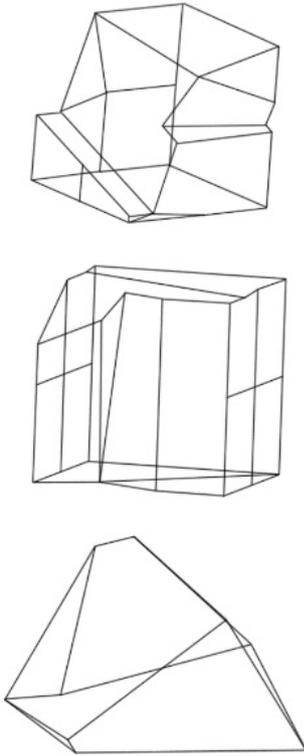


Рис. 8. Примеры отсеченных ячеек, построенных на основе шаблонных ячеек, содержащих характерные особенности модели

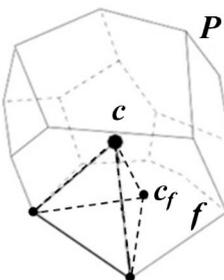


Рис. 9. Допустимая многогранная ячейка

ле (1). Таким образом, в работе [12] делается вывод, что многогранная ячейка является допустимой, если каждый из тетраэдров вида, показанного на рис. 9, имеет положительный объем. Полное количество таких тетраэдров равно  $2n_e$ , где  $n_e$  — количество ребер.

Исходя из такого определения допустимости многогранной ячейки, можно сделать вывод, что при удалении малого ребра из ячейки достаточно проверить положительность объемов тетраэдров преобразованной ячейки. Если объемы всех тетраэдров, полученных после удаления ребра, остаются положительными, то удаление ребра является допустимой операцией над сеткой, в противном случае — недопустимой, и ребро остается в сетке.

Отметим, что данное правило справедливо только для выпуклых многогранных ячеек. Выпуклость ячейки определяется по формуле [13] (рис. 10)

$$\alpha = \begin{cases} \arccos \left( - \left( \vec{N}_1, \vec{N}_2 \right) \right), & \left[ \vec{N}, \left( \vec{N}_1, \vec{N}_2 \right) \right] > 0; \\ 2\pi - \arccos \left( - \left( \vec{N}_1, \vec{N}_2 \right) \right), & \left[ \vec{N}, \left( \vec{N}_1, \vec{N}_2 \right) \right] \leq 0, \end{cases}$$

где  $\vec{N}_1$  — нормаль к первой поверхностной грани;  $\vec{N}_2$  — нормаль ко второй поверхностной грани;  $\vec{N}$  — вектор ребра между двумя гранями, ориентированный против часовой стрелки относительно первой грани. Если  $\alpha \geq \pi$ , то ячейка выпуклая; если  $\alpha < \pi$  — невыпуклая.

При генерации сеток методом отсечения реализован алгоритм разрезания невыпуклых многогранных ячеек на множество выпуклых, поэтому алгоритм удаления ребер в ячейках может быть использован для всех выпуклых ячеек сетки после выполнения разрезания.

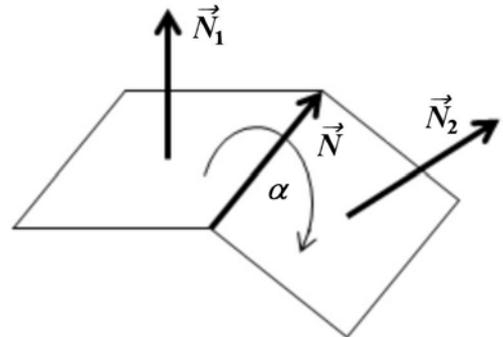


Рис. 10. Иллюстрация к формуле определения выпуклости ячейки

## Алгоритм удаления малых ребер из выпуклых многогранных ячеек

**Разбиение ячейки на тетраэдры.** Алгоритм удаления малых ребер в выпуклых ячейках с характерными кривыми является одной из составляющих частей модуля отсечения. Под малыми ребрами в данном алгоритме подразумеваются ребра ячейки, длина которых меньше 30% длины ребра шаблонной ячейки до отсечения. При выполнении алгоритма рассматриваются все выпуклые ячейки, через которые проходят характерные кривые. Все ячейки, в окрестности которых есть невыпуклые ячейки, не участвуют в преобразовании. Под окрестностью ячейки понимаются все соседи по узлам текущей рассматриваемой ячейки.

Для каждой рассматриваемой ячейки производится оценка ее ребер, т. е. формируется список ребер — кандидатов на удаление. Если список пуст, то выполняется переход к следующей ячейке по списку, иначе текущая рассматриваемая ячейка разбивается на множество тетраэдров. Пример ячейки, разбитой на тетраэдры, показан на рис. 11.

Разбиение ячейки проводится аналогично тому, как было предложено в работе [12]: каждый тетраэдр натянут на центр тяжести многогранника  $S$ , центр тяжести одной из граней  $S_f$ , а также одно из ребер этой грани (см. рис. 9). Окрестность рассматриваемой ячейки также разбивается на тетраэдры. В результате получаем фрагмент сетки, состоящий из тетраэдров (рис. 12).

Следует отметить, что разбиение ячейки на множество тетраэдров является лишь вспомогательным средством для оценки возможности удаления ребер из многогранной ячейки и не является частью результирующей многогранной сетки.

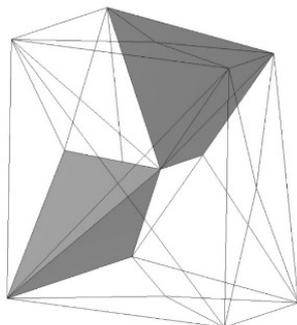


Рис. 11. Пример разбиения ячейки на тетраэдры

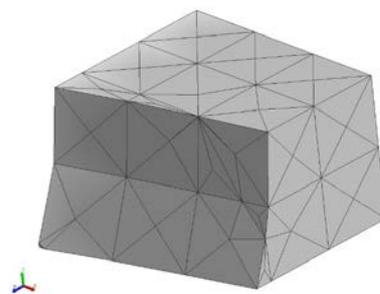


Рис. 12. Разбиение на тетраэдры рассматриваемой ячейки и ее окрестности

**Удаление ребра из сетки.** Для проверки возможности удаления малых ребер из ячейки, содержащейся в полученном фрагменте, из этих ребер формируются все возможные сочетания без повторов (кортежи). Все кортежи обрабатываются последовательно в порядке уменьшения количества содержащихся в них ребер.

При рассмотрении кортежа производится удаление всех его ребер из тетраэдральной сетки. В результате вместо исходной сетки получается преобразованная сетка из тетраэдров. После этого оцениваются знаки объемов всех тетраэдров, в которые входят узлы удаляемых ребер. Объем положителен, если

$$\begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix} > 0,$$

т. е. если векторы  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ ,  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ ,  $\vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$ , направленные вдоль ребер одного из трехгранных углов тетраэдра, образуют правую тройку.

Если хотя бы один из тетраэдров имеет отрицательный объем, то переходим к рассмотрению следующего кортежа. Операция повторяется до тех пор, пока не будет найден подходящий кортеж или не будут рассмотрены все кортежи.

Отдельно следует отметить, что на измененные многогранные ячейки также накладываются ряд ограничений. Удаление малых ребер из сетки не должно приводить к образованию *вырожденных* многогранных ячеек (состоящих менее чем из четырех граней):

- содержащих *внутренние* точки (находящиеся внутри объема, ограниченного исходной поверхностной сеткой);
- не являющихся плоскими.

**Дополнительное движение узлов сетки.**

Удаление малых ребер не всегда приводит к укрупнению поверхностных граней отсеченной сетки. Подобная ситуация показана на рис. 13. В данном случае условие положительности объемов тетраэдров в окрестности ячейки выполнено, но фактически удаление малых ребер грани привело к ухудшению качества сетки: пятиузловая грань  $GABCM$  преобразовалась в трехузловую  $GBM$  меньшей площади.

Из данного примера следует, что производить удаление малых ребер из сетки недостаточно. Чтобы предотвратить возникновение подобных ситуаций, были добавлены операции перемещения узла и разбиения ребра сетки узлом. Кратко опишем эти операции.

Пусть дана грань многогранной сетки, показанная на рис. 14. Грань состоит из узлов 1—5. Узлы 2—4 расположены внутри треугольной исходной сетки, а узлы 1, 5 — на ее поверхности. Ребра 1-2, 4-5 — малые, их желательно из сетки удалить. Но ребра можно удалять тогда и только тогда, когда узел 3 переместится в новый узел  $3^*$ . Если узлы 1 и 5 — обычные поверхностные узлы, то узел должен быть просто спроецирован на поверхность исходной треугольной сетки;

если же узлы 1 и 5 принадлежат одному характерному ребру, то узел  $3^*$  также должен быть "посажен" на это характерное ребро. Предположим, что в текущей рассматриваемой ячейке нет больше малых ребер. Тогда ребро 1-2 получит локальный номер 1, ребро 4-5 — локальный номер 2, а движение точки 3 в узел  $3^*$  — номер 3. Таким образом, единственно возможный кортеж удаляемых ребер в ячейке —  $1\_2\_3$ . Других вариантов удаления нет.

После перемещения узла необходимо произвести разбиение ребра сетки. Так, для примера, показанного на рис. 14, в сетку будет добавлено два ребра: 1- $3^*$  и  $3^*$ -5, а сама грань будет удалена из сетки. Даже если отсеченная грань имеет более сложный вид, принцип удаления ребер из нее является одним и тем же как для поверхностных, так и для внутренних граней. Имеется одна лишь разница: поверхностные грани вырождаются, если удаление малых ребер приводит к образованию сильно вытянутой грани, т. е. грани, в которой периметр много больше ее площади. Определение таких граней осуществляется согласно формуле

$$k = \frac{P^2}{4\pi S},$$

где  $P$  — периметр грани;  $S$  — площадь грани. Если  $k > 25$ , то грань считается сильно вытянутой.

Помимо образования сильно вытянутых граней при удалении малых ребер, необходимо избегать образования граней, все узлы которых принадлежат одному характерному ребру. Такие грани необходимо удалять из сетки.

**Результаты апробации алгоритма**

При тестировании на задачах, переданных представителями предприятий разных отраслей промышленности, была получена следующая статистика: предложенный алгоритм позволяет удалять до 70% малых ребер из сетки; улучшения по изменению соотношений объемов наблюдалось на 85% задач, по соотношению площадей — на 60% задач. Данные для некоторых задач по критерию *Неудовлетворительное соотношение длин ребер в ячейке* ( $> 1000$ ) приводятся в таблице.

На рис. 15, 16 показаны результаты работы модуля отсечения для моделей DLRF6 и SU37 [3].

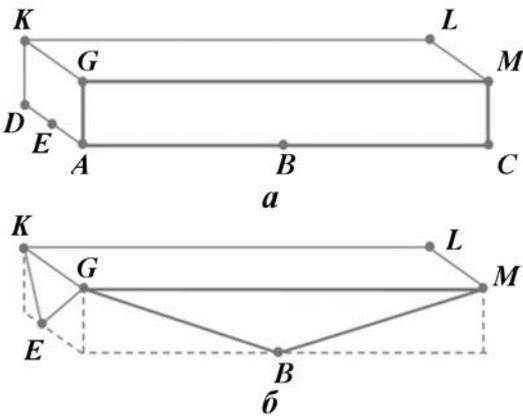


Рис. 13. Пример уменьшения площади поверхностной грани:  $a$  — ячейка до удаления малых ребер;  $b$  — ячейка после удаления малых ребер

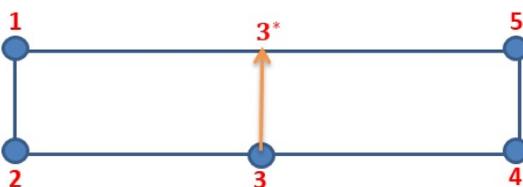
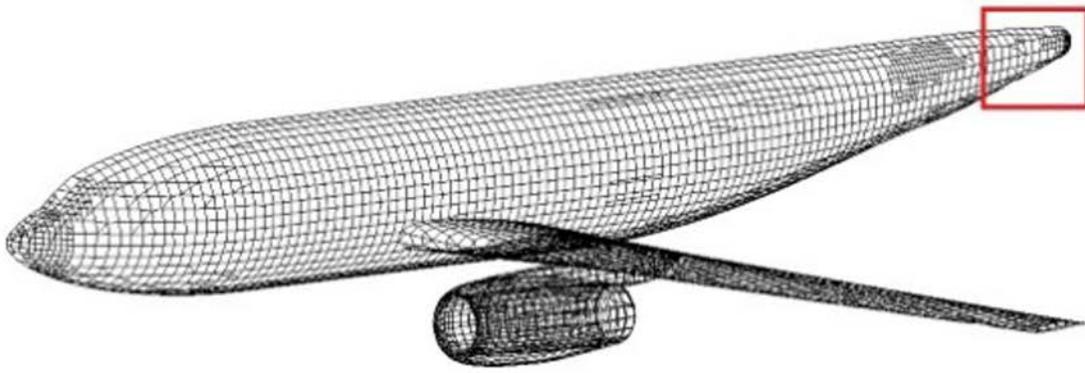
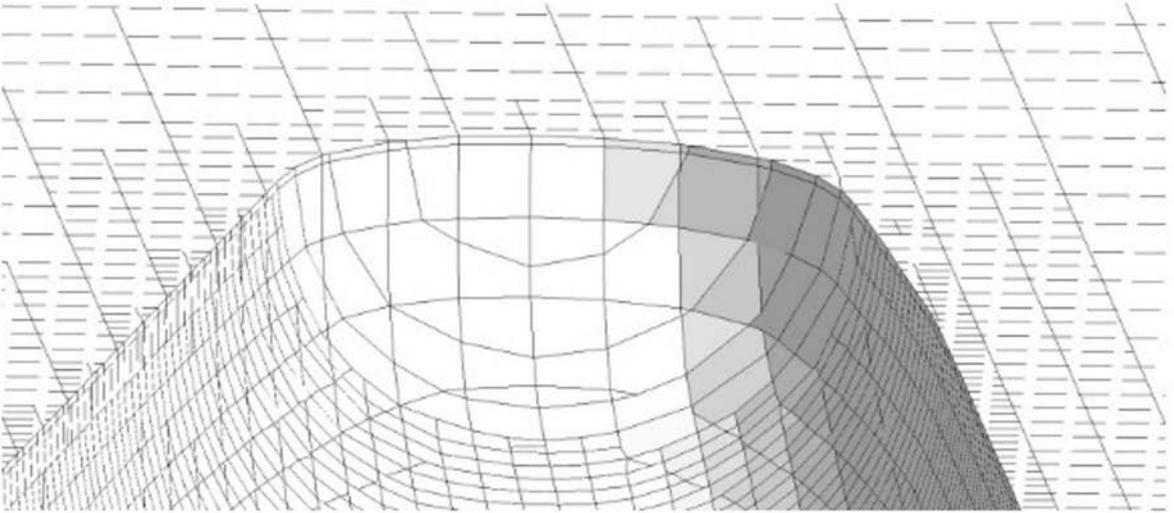


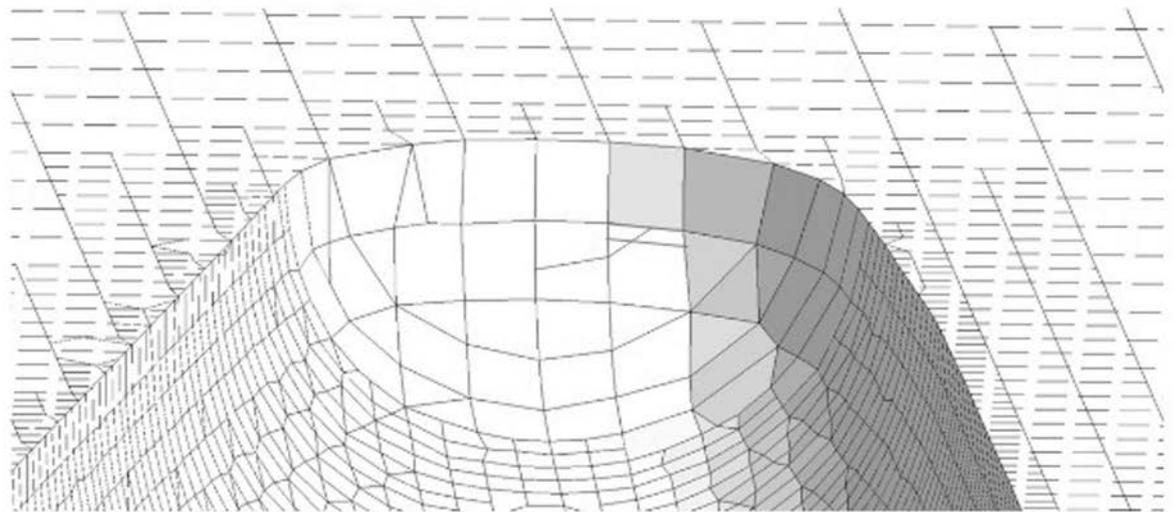
Рис. 14. Схематичный пример грани



*a*

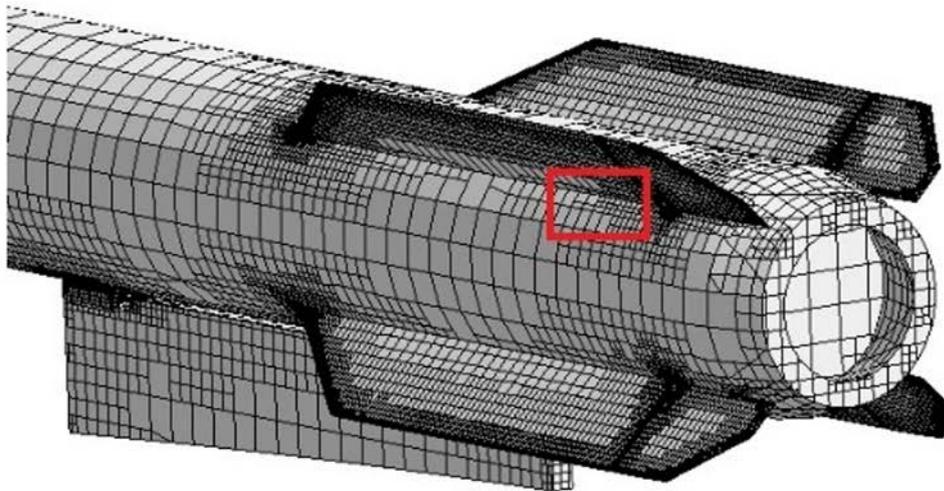


*б*

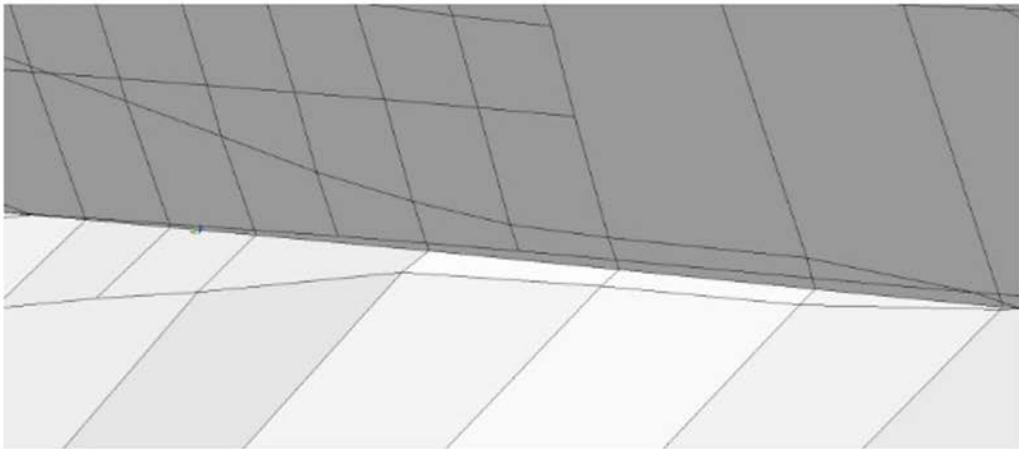


*в*

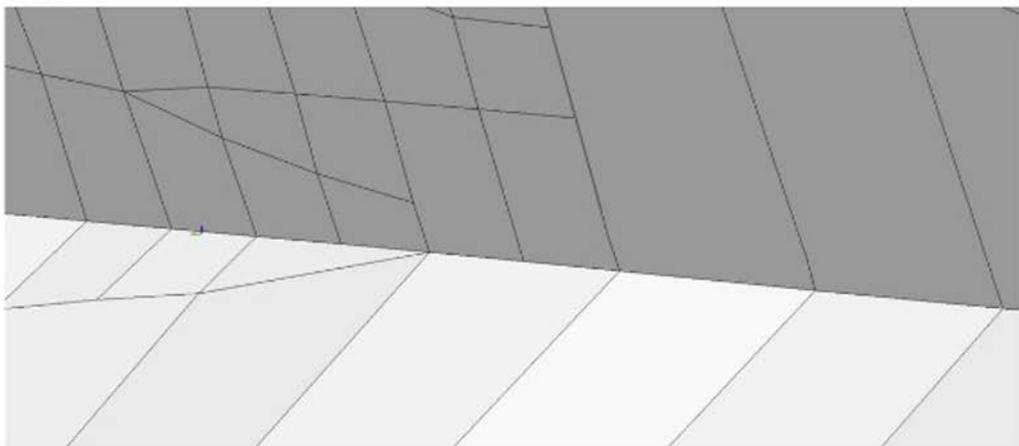
Рис. 15. Результат работы модуля отсечения для модели DLR F6: *a* — исходная сетка с выделенным фрагментом; *б* — фрагмент сетки до исправления; *в* — фрагмент сетки после исправления



*a*



*б*



*в*

Рис. 16. Результат работы модуля отсечения для фрагмента модели SU37: *a* — исходная сетка с выделенным фрагментом в области крыла ракеты; *б* — фрагмент сетки до исправления; *в* — фрагмент сетки после исправления

**Данные для некоторых задач по критерию Неудовлетворительное соотношение длин ребер в ячейке**

Номер задачи	Количество неудовлетворительных отсеченных ячеек	
	до удаления малых ребер	после удаления малых ребер
1	666	15
2	222	26
3	243	3
4	13	0
5	177	15
6	206	21

**Заключение**

В данной работе приведено описание подхода к удалению малых ребер при генерации сеток методом отсечения в пакете программ "Логос". При реализации подхода были учтены особенности формирования ячеек в генераторе. На основании этого был предложен ряд ограничений и условий по корректному удалению малых ребер в ячейках, а также дополнительные операции по модификации сетки, что позволило повысить эффективность применения подхода.

Реализованный алгоритм является автоматическим и универсальным, так как не зависит от класса рассматриваемых задач, что позволяет применять его для построения многогранных сеток на геометрических моделях произвольной сложности.

Описанный подход позволил повысить качество расчетных сеток, обеспечив существенное расширение возможностей по проведению численного моделирования задач аэро- и гидродинамики на данных сетках.

**Список литературы**

1. Фархутдинов В. Ф., Тарасов В. И., Соловьёв А. Н., Борисенко О. Н., Лазарев В. В., Логинов Д. В., Аверина Н. С., Марунин А. В., Гриднев А. И., Федякина М. Г., Кузнецов М. Г., Черенкова М. В., Фролова Е. А., Лукичёв А. Н., Смолкина Д. Н., Купалова А. Г., Кузьменко М. В., Сергеева А. С., Попова Н. В., Баканова Т. Ю. Обзор возможностей по обработке геометрических и построению сеточных моделей в

Логос.Препост // Тр. XIV Межд. конф. "Супервычисления и математическое моделирование". Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2013. С. 585—592.

*Farkhutdinov V. F., Tarasov V. I. Solov'yev A. N., Borisenko O. N., Lazarev V. V., Averina N. S., Marunin A. V., Gridnev A. I., Fedyakina M. G., Kuznetsov M. G., Cherenkova M. V., Frolova E. A., Lukichyev A. N., Smolkina D. N., Kupalova A. G., Kuzmenko M. V., Sergeeva A. S., Popova N. V., Bakanova T. Yu.* *Obzor vozmozhnostey po obrabotke geometricheskikh i postroeniyu setochnykh modeley v Logos.Prepost // Tr. XIV Mezhd. konf. "Supervychisleniya i matematicheskoe modelirovanie". Sarov: RFYaTs-VNIIEF. 2013. S. 585—592.*

2. Смолкина Д. Н., Борисенко О. Н., Черенкова М. В., Гиниятуллина А. Г., Кузьменко М. В., Чухманов Н. В., Потехина Е. В., Попова Н. В., Турусов М. Р. Автоматический генератор неструктурированных многогранных сеток в препроцессоре пакета программ ЛОГОС // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2018. Вып. 2. С. 25—37.

*Smolkina D. N., Borisenko O. N., Cherenkova M. V., Giniyatullina A. G., Kuzmenko M. V., Chukhmanov N. V., Potekhina E. V., Popova N. V., Turusov M. R.* *Avtomaticheskij generator nestrukturirovannykh mnogogrannykh setok v preprotsessore paketa programm LOGOS // Voprosy atomnoy nauki i tekhniki . Ser. Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov. 2018. Vyp. 2. S. 25—37.*

3. Knupp P. Achieving finite element mesh quality via optimization of the jacobian matrix norm and associated quantities. Part I — A framework for surface mesh optimization & the contition number of the jacobian matrix // Proc. 8th Int. Meshing Roundtable. Sandia National Laboratories. 1999. P. 13—22.

4. Knupp P. Achieving finite element mesh quality via optimization of the jacobian matrix norm and associated quantities. Part II — A framework for volume mesh optimization & the contition number of the jacobian matrix // Int. J. Num. Meth. 2000. Vol. 48. P. 1165—1185.

5. *Freitag L.* On combining Laplacian and optimization based smoothing techniques in trends in unstructured mesh generation // Applied Mechanics Division. 1997. Vol. 220. P. 37–44.
6. *Zavattieri P.* Optimization strategies in unstructured mesh generation // Int. J. Num. Meth. 1996. Vol. 39. P. 2055–2071.
7. *Paoletti S.* Practical optimization based smoothing of tetrahedral meshes // Proc. 7th Int. Conf. on Numerical Grid Generation in Computational Field Simulation. Whistler, September 25–28. British Columbia, Canada, 2000. P. 45–53.
8. *Oaks W., Paoletti S.* Polyhedral mesh generation // Proc. 9th Int. Meshing Roundtable. New Orleans, Louisiana, USA, 2000. P. 57–67.
9. *Paoletti S.* Polyhedral mesh optimization using the interpolation tensor // Proc. 11th Int. Meshing Roundtable. New Orleans, Louisiana, USA, 2002. P. 19–28.
10. GrabCad. <http://www.grabcad.com>.
11. *William E. Lorensen, Harvey E. Cline.* Marching cubes: A high resolution 3D surface construction algorithm // Computer Graphics. 1987. Vol. 21. P. 163–169.
12. *Ivanenko S. A.* Grid generation with cell shape control // Computational Mathematical Physics. 2000. Vol. 40, No 11. P. 1662–1684.
13. *Owen S. J.* Non-Simplicial Unstructured Mesh Generation. Ph. D. Dissertation. Pittsburg, Pennsylvania: Carnegie Mellon University, 1999.

Статья поступила в редакцию 18.10.21.

---

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

**Бабанов Алексей Викторович** — ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области, начальник научно-исследовательского отдела, *e-mail*: AVBabanov@vniief.ru

**Бакулина Елена Анатольевна** — ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области, старший научный сотрудник, *e-mail*: EABakulina@vniief.ru

**Бибердорф Элина Арнольдовна** — институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, старший научный сотрудник, *e-mail*: biberdorf@ngs.ru

**Бликов Антон Олегович** — ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области, заместитель директора ИФВ по ОКР и программам неядерного вооружения – начальник научно-исследовательского отделения, *e-mail*: AOBlikov@vniief.ru

**Воеводин Алексей Валерьевич** — ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области, математик, *e-mail*: alvvoevodin@vniief.ru

**Мочалов Михаил Алексеевич** — ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области, главный научный сотрудник, *e-mail*: MAMochalov@vniief.ru

**Митенкова Елена Федоровна** — ИБРАЭ РАН, г. Москва, заведующая лабораторией, *e-mail*: mit@ibrae.ac.ru

**Пронин Евгений Алексеевич** — ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области, старший научный сотрудник, *e-mail*: EAPronin@vniief.ru

**Понькин Евгений Игоревич** — СФТИ НИЯУ МИФИ, г. Снежинск Челябинской области, аспирант, *e-mail*: epnk@ Rambler.ru

**Семёнова Татьяна Викторовна** — ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области, начальник научно-исследовательской лаборатории, *e-mail*: TVSemanova@vniief.ru

**Соловьёва Елена Викторовна** — ИБРАЭ РАН, г. Москва, старший научный сотрудник, *e-mail*: sol@ibrae.ac.ru

**Смолкина Дина Николаевна** — ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области, научный сотрудник, *e-mail*: DNSmolkina@vniief.ru

**Щербаков Алексей Николаевич** — ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области, математик

**Шувалова Екатерина Владимировна** — ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области, начальник научно-исследовательской лаборатории, *e-mail*: EVShuvalova@vniief.ru

**Янилкин Юрий Васильевич** — ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области, главный научный сотрудник, *e-mail*: YVYanilkin@vniief.ru

## INFORMATION ABOUT AUTHORS

**Babanov Aleksey Viktorovich** — FSUE "RFNC-VNIIEF", Sarov, N. Novgorod region, head of research department, *e-mail*: AVBabanov@vniief.ru

**Bakulina Elena Anatolevna** — FSUE "RFNC-VNIIEF", Sarov, N. Novgorod region, senior scientist, *e-mail*: EABakulina@vniief.ru

**Biberdorf Elina Arnoldovna** — S. L. Sobolev Institute of Mathematics of RAS SB, Novosibirsk, senior scientist, *e-mail*: biberdorf@ngs.ru

**Blikov Anton Olegovich** — FSUE "RFNC-VNIIEF", Sarov, N. Novgorod region, Deputy Director of DPI for DDW and non-nuclear weapon programs — Head of Research Division, *e-mail*: AOBlikov@vniief.ru

**Voevodin Aleksey Valerevich** — FSUE "RFNC-VNIIEF", Sarov, N. Novgorod region, mathematician, *e-mail*: alvvoevodin@vniief.ru

**Mochalov Mikhail Alekseevich** — FSUE "RFNC-VNIIEF", Sarov, N. Novgorod region, chief scientist, *e-mail*: MAMochalov@vniief.ru

**Mitenkova Elena Fyedorovna** — IBRAE of RAS, Moscow, head of laboratory, *e-mail*: mit@ibrae.ac.ru

**Pronin Evgeniy Alekseevich** — FSUE "RFNC-VNIIEF", Sarov, N. Novgorod region, senior scientist, *e-mail*: EAPronin@vniief.ru

**Ponkin Evgeniy Igorevich** — SPhTI NRNU MEPhI, Snezhinsk, Chelyabinsk region, post-graduate student, *e-mail*: epnk@rambler.ru

**Semyenova Tatyana Viktorovna** — FSUE "RFNC-VNIIEF", Sarov, N. Novgorod region, head of research laboratory, *e-mail*: TVSemenova@vniief.ru

**Solovyeva Elena Viktorovna** — IBRAE of RAS, Moscow, senior scientist, *e-mail*: sol@ibrae.ac.ru

**Smolkina Dina Nikolaevna** — FSUE "RFNC-VNIIEF", Sarov, N. Novgorod region, scientist, *e-mail*: DNSmolkina@vniief.ru

**Shcherbakov Aleksey Nikolaevich** — FSUE "RFNC-VNIIEF", Sarov, N. Novgorod region, mathematician

**Shuvalova Ekaterina Vladimirovna** — FSUE "RFNC-VNIIEF", Sarov, N. Novgorod region, head of research laboratory, *e-mail*: EVShuvalova@vniief.ru

**Yanilkin Yuriy Vasilevich** — FSUE "RFNC-VNIIEF", Sarov, N. Novgorod region, chief scientist, *e-mail*: YVYanilkin@vniief.ru