

УДК 519.6

КВАЗИСПЕКТРАЛЬНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ В ДВУМЕРНОЙ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ПОСТАНОВКЕ

А. Д. Хмельницкая, Н. Г. Карлыханов
(ФГУП "РФЯЦ-ВНИИТФ им. академ. Е. И. Забабахина",
г. Снежинск Челябинской области)

Предлагается квазиспектральный метод для решения уравнения переноса излучения в двумерном осесимметричном случае на прямоугольной сетке. Метод заключается в усреднении уравнения по спектру и угловой переменной и приведении усредненного кинетического уравнения переноса к уравнению лучистой теплопроводности. Достоинство метода в том, что вся сложность итерационного процесса переложена на уравнение лучистой теплопроводности, для которого задача существенно упрощается. Кроме того, метод позволяет организовать распараллеливание по спектральной переменной, а также по пространству для вычисления усредненных по энергии пробегов и эффективной энергии излучения. Показана работоспособность метода на второй задаче Флека, решение сравнивалось со спектральным расчетом в одномерном сферическом случае.

Ключевые слова: квазиспектральный метод, спектральное уравнение переноса излучения, уравнение квазидиффузии, квазиперенос, лучистая теплопроводность, лучевой эффект.

Введение

Данная работа является развитием метода для учета спектральных и кинетических эффектов при расчете задач переноса излучения в приближении лучистой теплопроводности, предложенного и реализованного в одномерном случае [1]. Суть метода заключается в усреднении по энергетической и угловой переменным уравнения переноса излучения и приведении усредненного уравнения к виду, максимально близкому к уравнению лучистой теплопроводности (ЛТ). Решение уравнения ЛТ обладает следующими достоинствами: простота построения монотонных разностных схем второго порядка точности, организация классического ньютоновского итерационного процесса по нелинейности, наличие большого количества рабочих методик, в которых можно применить рассматриваемый подход без существенных изменений в соответствующих программах. Кроме того, построение итерационного процесса, которое при решении нелинейного кинетического уравнения является чрезвычайно сложной задачей, для уравнения типа теплопроводности существенно упрощается. В этой работе метод реализован в двумерном осесимметричном случае в цилиндрической системе координат.

Постановка задачи

Для описания распространения теплового излучения в среде рассмотрим кинетическое уравнение переноса излучения без учета рассеяния в многогрупповом приближении для осесимметричной геометрии в цилиндрической системе координат [2]:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_\varepsilon}{\partial t} + \xi \frac{\partial I_\varepsilon}{\partial r} + \mu \frac{\partial I_\varepsilon}{\partial z} - \frac{\eta}{r} \frac{\partial I_\varepsilon}{\partial \psi} + \alpha_\varepsilon I_\varepsilon = \alpha_\varepsilon I_{er}. \quad (1)$$

Здесь t — время; z, r — цилиндрические координаты (OZ — ось симметрии); $I_\varepsilon = \int_{\varepsilon_{g-1/2}}^{\varepsilon_{g+1/2}} I(\varepsilon, t, r, z, \mu, \psi) d\varepsilon$;

$I = I(\varepsilon, t, r, z, \mu, \psi)$ — интенсивность излучения фотонов с энергией ε , летящих в направлении $\vec{\Omega}(\mu, \xi, \eta)$, где $\mu = \cos \theta$ ($\mu \in [-1; 1]$); θ — угол между направлением $\vec{\Omega}$ и осью OZ , $\theta \in [0; \pi]$; $\xi = \sqrt{1 - \mu^2} \cos \psi$, $\eta = \sqrt{1 - \mu^2} \sin \psi$, где ψ — угол между проекцией $\vec{\Omega}$ на плоскость OXY и вектором \vec{r} , $\psi \in [0; 2\pi]$; $\alpha_\varepsilon(T)$ — коэффициент поглощения фотонов энергии ε при температуре среды T ; внешний источник излучения определяется равновесным излучением с интенсивностью

$$I_{er} = \frac{c}{4\pi} B_\varepsilon(T), \quad B_\varepsilon(T) = \frac{8\pi}{c^2 h^3} \frac{\varepsilon^3 \exp(-\varepsilon/T)}{1 - \exp(-\varepsilon/T)},$$

где h — постоянная Планка, c — скорость света.

Уравнение (1) решается совместно с уравнением баланса энергии для определения пространственно-временного распределения температуры среды $T(t, r, z)$:

$$\frac{\partial E(T)}{\partial t} = c \int \alpha_\varepsilon(T) (U_\varepsilon - B_\varepsilon(T)) d\varepsilon, \quad (2)$$

где $E(T)$ — внутренняя энергия вещества; $U_\varepsilon = \frac{1}{c} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} I_\varepsilon d\psi d\mu$ — спектральная плотность энергии излучения.

Уравнение (1) дополняется граничными условиями:

- на границе $r = 0$ — условие *зеркального отражения*: $I(t, r = 0, z, \mu, \psi) = I(t, r = 0, z, \mu, \psi + \pi)$;
- на остальных границах — условие *свободной границы*: интенсивность с направлением внутрь системы равна нулю.

Условие периодичности по углу ψ определяется из уравнения (1) при подстановке в него $\psi = \pi$.

Для решения системы (1), (2) используем следующий алгоритм. На каждом временном шаге при известной температуре решается кинетическое уравнение (1) по схеме первого порядка. Используя полученное решение для интенсивности, вычисляем коэффициенты связи между исходным уравнением переноса и уравнением, усредненным по угловым переменным. Решаем усредненное уравнение по схеме второго порядка точности, затем по полученному решению находим коэффициенты, усредненные по энергии. После этого решаем систему нелинейных уравнений в приближении лучистой теплопроводности.

Усреднение по угловой переменной

Если проинтегрировать уравнение (1) трижды, сначала с весом 1, а затем с весами μ, ξ , то получим систему уравнений квазидиффузии (КД) [2]:

$$\begin{aligned} \frac{dU_\varepsilon}{dt} + \frac{\partial}{\partial r} S_{r\varepsilon} + \frac{\partial}{\partial z} S_{z\varepsilon} + \alpha_\varepsilon c U_\varepsilon &= c \alpha_\varepsilon B_\varepsilon; \\ \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} S_{r\varepsilon} + \frac{\partial}{\partial r} (D_{1\varepsilon} U_\varepsilon) + \frac{\partial}{\partial z} (D_{3\varepsilon} U_\varepsilon) + P_{r\varepsilon} U_\varepsilon + \frac{\alpha_\varepsilon}{c} S_{r\varepsilon} &= 0; \\ \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} S_{z\varepsilon} + \frac{\partial}{\partial r} (D_{2\varepsilon} U_\varepsilon) + \frac{\partial}{\partial z} (D_{3\varepsilon} U_\varepsilon) + P_{z\varepsilon} U_\varepsilon + \frac{\alpha_\varepsilon}{c} S_{z\varepsilon} &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь приняты обозначения: $S_{r\varepsilon} = \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} I_\varepsilon \xi d\psi d\mu$, $S_{z\varepsilon} = \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} I_\varepsilon \mu d\psi d\mu$ — компоненты спектрального потока энергии излучения; $D_{1\varepsilon} = (cU_\varepsilon)^{-1} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} I_\varepsilon \xi^2 d\psi d\mu$, $D_{2\varepsilon} = (cU_\varepsilon)^{-1} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} I_\varepsilon \mu^2 d\psi d\mu$, $D_{3\varepsilon} =$

$$= (cU_\varepsilon)^{-1} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} I_\varepsilon \xi \mu d\psi d\mu, \quad P_{z\varepsilon} = \frac{1}{r} D_{3\varepsilon}, \quad P_{r\varepsilon} = \frac{1}{r} (2D_{1\varepsilon} + D_{2\varepsilon} - 1) — коэффициенты КД.$$

Из уравнений для потоков (второе и третье уравнения системы (3)) получим

$$\frac{1}{3} \frac{\partial U_\varepsilon}{\partial r} = -\frac{\alpha_{r\varepsilon}^{kin} + \widetilde{\alpha}_{r\varepsilon}}{c} S_{r\varepsilon}; \quad \frac{1}{3} \frac{\partial U_\varepsilon}{\partial z} = -\frac{\alpha_{z\varepsilon}^{kin} + \widetilde{\alpha}_{z\varepsilon}}{c} S_{z\varepsilon}. \quad (4)$$

Здесь аналогично работе [3] введен кинетический коэффициент с компонентами

$$\alpha_{r\varepsilon}^{kin} = \frac{c}{S_{r\varepsilon}} \left\{ \frac{1}{c^2} \frac{dS_{r\varepsilon}}{dt} + \frac{\partial}{\partial r} \left[\left(D_{1\varepsilon} - \frac{1}{3} \right) U_\varepsilon \right] + \frac{\partial(D_{3\varepsilon}U_\varepsilon)}{\partial z} + P_{r\varepsilon}U_\varepsilon \right\}, \quad S_{r\varepsilon} \ll cU \rightarrow \alpha_{r\varepsilon}^{kin} = 0;$$

$$\alpha_{z\varepsilon}^{kin} = \frac{c}{S_{z\varepsilon}} \left\{ \frac{1}{c^2} \frac{dS_{z\varepsilon}}{dt} + \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(D_{2\varepsilon} - \frac{1}{3} \right) U_\varepsilon \right] + \frac{\partial(D_{3\varepsilon}U_\varepsilon)}{\partial r} + P_{z\varepsilon}U_\varepsilon \right\}, \quad S_{z\varepsilon} \ll cU \rightarrow \alpha_{z\varepsilon}^{kin} = 0;$$

$\widetilde{\alpha}_\varepsilon = (\widetilde{\alpha}_{r\varepsilon}, \widetilde{\alpha}_{z\varepsilon})$ — коэффициент поглощения на грани ячейки.

Объединив первое уравнение системы (3) и уравнения (4), получим систему уравнений квазипереноса (КП) [3]:

$$\begin{aligned} \frac{dU_\varepsilon}{dt} + \frac{\partial}{\partial r} S_{r\varepsilon} + \frac{\partial}{\partial z} S_{z\varepsilon} + \alpha_\varepsilon c U_\varepsilon &= c \alpha_\varepsilon B_\varepsilon; \\ S_{r\varepsilon} &= -\frac{ck_{r\varepsilon}}{3} \frac{\partial U_\varepsilon}{\partial r}; \\ S_{z\varepsilon} &= -\frac{ck_{z\varepsilon}}{3} \frac{\partial U_\varepsilon}{\partial z}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $k_{r\varepsilon} = (\widetilde{\alpha}_{r\varepsilon} + \alpha_{r\varepsilon}^{kin})^{-1}$, $k_{z\varepsilon} = (\widetilde{\alpha}_{z\varepsilon} + \alpha_{z\varepsilon}^{kin})^{-1}$ имеют единицы измерения пробега, поэтому будем называть данные коэффициенты *пробегом*. Введем ограничение на кинетический коэффициент: $\alpha_{r\varepsilon}^{kin} < 0 \rightarrow k_{r\varepsilon}^{-1} = 0,1\widetilde{\alpha}_{r\varepsilon}$; $\alpha_{z\varepsilon}^{kin} < 0 \rightarrow k_{z\varepsilon}^{-1} = 0,1\widetilde{\alpha}_{z\varepsilon}$. Тогда пробег является неотрицательным, а система уравнений (5) — системой параболического типа, для которой имеются монотонные схемы второго порядка точности.

Алгоритм построения усредненного по энергии уравнения

С помощью уравнений (4) исключим поток из первого уравнения системы (3). Получим

$$\frac{\partial U_\varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{c}{3(\alpha_{r\varepsilon}^{kin} + \widetilde{\alpha}_{r\varepsilon})} \frac{\partial U_\varepsilon}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{c}{3(\alpha_{z\varepsilon}^{kin} + \widetilde{\alpha}_{z\varepsilon})} \frac{\partial U_\varepsilon}{\partial z} \right] = c \alpha_\varepsilon B_\varepsilon - \alpha_\varepsilon c U_\varepsilon. \quad (6)$$

На сетке по пространству определим температуру вещества и плотность энергии излучения в центрах ячеек, а потоки — на гранях. Тогда уравнение (6) в разностном виде запишется как

$$\begin{aligned} \frac{U_{\varepsilon_{i,j}}^{n+1} - U_{\varepsilon_{i,j}}^n}{\tau} - \frac{c}{3(r_i - r_{i-1})} \left[\left(\frac{U_{\varepsilon_{i+1,j}}^{n+1} - U_{\varepsilon_{i,j}}^{n+1}}{0,5(r_{i+1} - r_{i-1})} \right) k_{r\varepsilon_{i,j}}^{n+1} - \left(\frac{U_{\varepsilon_{i,j}}^{n+1} - U_{\varepsilon_{i-1,j}}^{n+1}}{0,5(r_i - r_{i-2})} \right) k_{r\varepsilon_{i-1,j}}^{n+1} \right] - \\ - \frac{c}{3(z_j - z_{j-1})} \left[\left(\frac{U_{\varepsilon_{i,j+1}}^{n+1} - U_{\varepsilon_{i,j}}^{n+1}}{0,5(z_{j+1} - z_{j-1})} \right) k_{z\varepsilon_{i,j}}^{n+1} - \left(\frac{U_{\varepsilon_{i,j}}^{n+1} - U_{\varepsilon_{i,j-1}}^{n+1}}{0,5(z_j - z_{j-2})} \right) k_{z\varepsilon_{i,j-1}}^{n+1} \right] = \\ = -c \alpha_{\varepsilon_{i,j}} U_{\varepsilon_{i,j}}^{n+1} + c \alpha_{\varepsilon_{i,j}} B_{\varepsilon_{i,j}}^{n+1}. \end{aligned}$$

Значения величин $U_{\varepsilon_{i+1,j}}^{n+1}$, $U_{\varepsilon_{i,j-1}}^{n+1}$, $U_{\varepsilon_{i,j+1}}^{n+1}$, $U_{\varepsilon_{i-1,j}}^{n+1}$ будем брать из решения системы КП (5). Тогда можно выразить значение $U_{\varepsilon_{i,j}}^{n+1}$ через $B_{\varepsilon_{i,j}}^{n+1}$:

$$U_{\varepsilon_{i,j}}^{n+1} = f_{\varepsilon_{i,j}}^p B_{\varepsilon_{i,j}}^{n+1} + g_{\varepsilon_{i,j}}^p. \quad (7)$$

Здесь $f_{\varepsilon i,j}^p = \frac{c\tau\alpha_{\varepsilon i,j}^n}{L}$; $g_{\varepsilon i,j}^p = \frac{M}{L}$, где

$$L = 1 + \frac{c\tau}{3(r_i - r_{i-1})} \left[\frac{k_{r\varepsilon i,j}^n}{0,5(r_{i+1} - r_{i-1})} + \frac{k_{r\varepsilon i-1,j}^n}{0,5(r_i - r_{i-2})} \right] + \frac{c\tau}{3(z_j - z_{j-1})} \left[\frac{k_{z\varepsilon i,j}^n}{0,5(z_{j+1} - z_{j-1})} + \frac{k_{z\varepsilon i,j-1}^n}{0,5(z_j - z_{j-2})} \right] + c\tau\alpha_{\varepsilon i,j}^n;$$

$$M = U_{\varepsilon i,j}^n + U_{\varepsilon i+1,j}^p \frac{c\tau}{3(r_i - r_{i-1})} \frac{k_{r\varepsilon i,j}^n}{0,5(r_{i+1} - r_{i-1})} + U_{\varepsilon i-1,j}^p \frac{c\tau}{3(r_i - r_{i-1})} \frac{k_{r\varepsilon i-1,j}^n}{0,5(r_i - r_{i-2})} + U_{\varepsilon i,j+1}^p \times$$

$$\times \frac{c\tau}{3(z_j - z_{j-1})} \frac{k_{z\varepsilon i,j}^n}{0,5(z_{j+1} - z_{j-1})} + U_{\varepsilon i,j-1}^p \frac{c\tau}{3(z_j - z_{j-1})} \frac{k_{z\varepsilon i,j-1}^n}{0,5(z_j - z_{j-2})};$$

индекс p является признаком того, что значение рассчитано из решения КП. Очевидно, что если $k_{r\varepsilon} > 0$, $k_{z\varepsilon} > 0$, то

$$0 \leq f_{\varepsilon i,j}^p < 1; \quad g_{\varepsilon i,j}^p > 0. \quad (8)$$

Запишем уравнение баланса (2) в разностном виде, заменив плотность энергии излучения на выражение (7):

$$\frac{E_{i,j}^{n+1} - E_{i,j}^n}{\tau} = c \int_{\varepsilon} \alpha_{\varepsilon i,j}^{n+1} \left[\left(f_{\varepsilon i,j}^p - 1 \right) B_{\varepsilon i,j}^{n+1} + g_{\varepsilon i,j}^p \right] d\varepsilon.$$

После преобразования получим

$$E_{i,j}^{n+1} - E_{i,j}^n = -c\tau \int_{\varepsilon} \alpha_{\varepsilon i,j}^{n+1} \left[\left(1 - f_{\varepsilon i,j}^p \right) B_{\varepsilon i,j}^{n+1} \right] d\varepsilon + c\tau \frac{\int_{\varepsilon} \alpha_{\varepsilon i,j}^{n+1} g_{\varepsilon i,j}^p d\varepsilon}{\int_{\varepsilon} g_{\varepsilon i,j}^p d\varepsilon} \int_{\varepsilon} g_{\varepsilon i,j}^{n+1} d\varepsilon$$

и введем новые обозначения:

$$E_{i,j}^{n+1} - E_{i,j}^n = -c\tau \langle w_{i,j}^{n+1} \rangle + c\tau \langle w_{g i,j}^{n+1} \rangle G_{i,j}^{n+1}; \quad (9)$$

$$\langle w_{i,j}^{n+1} \rangle = \int_{\varepsilon} \alpha_{\varepsilon i,j}^{n+1} \left(1 - f_{\varepsilon i,j}^p \right) B_{\varepsilon i,j}^{n+1} d\varepsilon; \quad (10)$$

$$\langle w_{g i,j}^{n+1} \rangle = \frac{\int_{\varepsilon} \alpha_{\varepsilon i,j}^{n+1} g_{\varepsilon i,j}^p d\varepsilon}{\int_{\varepsilon} g_{\varepsilon i,j}^p d\varepsilon}. \quad (11)$$

Выразим из уравнения (9) функцию G — некую эффективную плотность энергии излучения:

$$G_{i,j}^{n+1} = \frac{E_{i,j}^{n+1} - E_{i,j}^n + c\tau \langle w_{i,j}^{n+1} \rangle}{c\tau \langle w_{g i,j}^{n+1} \rangle}. \quad (12)$$

Отметим, что усредненные пробеги $\langle w_{i,j}^{n+1} \rangle > 0$, $\langle w_{g i,j}^{n+1} \rangle > 0$ (в силу условий (8)).

Рассмотрим предельные случаи для $\langle w_{i,j}^{n+1} \rangle = \int_{\varepsilon} w_{i,j}^{n+1} d\varepsilon$; $\langle w_{g i,j}^{n+1} \rangle = \frac{\int_{\varepsilon} w_{g i,j}^{n+1} d\varepsilon}{\int_{\varepsilon} g_{\varepsilon i,j}^p d\varepsilon}$.

1. В случае оптически плотной среды ($\alpha_{\varepsilon} \rightarrow \infty$) имеем $g_{\varepsilon} \xrightarrow[\alpha_{\varepsilon} \rightarrow \infty]{k_{\varepsilon} \rightarrow 0} \frac{U_{\varepsilon i,j}^n}{1 + c\tau\alpha_{\varepsilon i,j}^n} \rightarrow 0$ и $f_{\varepsilon} \xrightarrow[\alpha_{\varepsilon} \rightarrow \infty]{} \frac{c\tau\alpha_{\varepsilon}}{1 + c\tau\alpha_{\varepsilon}} \rightarrow 1$, следовательно

$$w_{i,j}^{n+1} \xrightarrow[\alpha_{\varepsilon} \rightarrow \infty]{f_{\varepsilon} \rightarrow 1} \alpha_{\varepsilon} \left(1 - \frac{c\tau\alpha_{\varepsilon}}{1 + c\tau\alpha_{\varepsilon}} \right) B_{\varepsilon i,j}^n = \frac{B_{\varepsilon i,j}^n}{1/\alpha_{\varepsilon} + c\tau} = \frac{B_{\varepsilon i,j}^n}{c\tau};$$

$$w_{g i,j}^{n+1} \xrightarrow[\alpha_{\varepsilon} \rightarrow \infty]{g_{\varepsilon} \rightarrow 0} \alpha_{\varepsilon}^{n+1} g_{\varepsilon i,j}^p = \frac{\alpha_{\varepsilon i,j}^{n+1} U_{\varepsilon i,j}^n}{1 + c\tau\alpha_{\varepsilon i,j}^n} = \frac{U_{\varepsilon i,j}^n}{c\tau}.$$

2. Если $\alpha_\varepsilon \rightarrow 0$, то $w_{g_{i,j}}^{n+1} \xrightarrow{\alpha_\varepsilon \rightarrow 0} 0$, $w_{i,j}^{n+1} \xrightarrow{\alpha_\varepsilon \rightarrow 0} 0$. Во избежание деления на ноль ($\langle w_{g_{i,j}}^{n+1} \rangle = 0$) в (11) положим $c\tau \langle w_{g_{i,j}}^{n+1} \rangle = 10^{-5}$.

Если уравнение (6) проинтегрировать по энергии и сложить с уравнением баланса (2), то получим следующее уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial t} (E(T) + U) + \frac{\partial S_r}{\partial r} + \frac{\partial S_z}{\partial z} = 0, \quad (13)$$

где $U = \int_{-\infty}^{\infty} U_\varepsilon d\varepsilon$; $S_r = \int_{-\infty}^{\infty} S_{r\varepsilon} d\varepsilon$; $S_z = \int_{-\infty}^{\infty} S_{z\varepsilon} d\varepsilon$. Разностный аналог уравнения (13) имеет следующий вид:

$$E_{i,j}^{n+1} - E_{i,j}^n + \int_{\varepsilon} U_{\varepsilon_{i,j}}^{n+1} d\varepsilon - \int_{\varepsilon} U_{\varepsilon_{i,j}}^n d\varepsilon + \tau \frac{\int_{\varepsilon} S_{1\varepsilon_{i,j}}^{n+1} d\varepsilon - \int_{\varepsilon} S_{1\varepsilon_{i-1,j}}^{n+1} d\varepsilon}{r_i - r_{i-1}} + \tau \frac{\int_{\varepsilon} S_{2\varepsilon_{i,j}}^{n+1} d\varepsilon - \int_{\varepsilon} S_{2\varepsilon_{i,j-1}}^{n+1} d\varepsilon}{z_j - z_{j-1}} = 0.$$

Заменим плотность энергии излучения $U_{\varepsilon_{i,j}}^{n+1}$ формулой (7) и воспользуемся формулой (12):

$$E_{i,j}^{n+1} - E_{i,j}^n + \int_{\varepsilon} f_{\varepsilon_{i,j}}^p B_{\varepsilon_{i,j}}^{n+1} d\varepsilon + \frac{E_{i,j}^{n+1} - E_{i,j}^n + c\tau \langle w_{i,j}^{n+1} \rangle}{c\tau \langle w_{g_{i,j}}^{n+1} \rangle} - U_{i,j}^n + \tau \frac{S_{1i,j}^{n+1} - S_{1i-1,j}^{n+1}}{r_i - r_{i-1}} + \tau \frac{S_{2i,j}^{n+1} - S_{2i,j-1}^{n+1}}{z_j - z_{j-1}} = 0,$$

где $U_{i,j}^n = \int_{\varepsilon} U_{\varepsilon_{i,j}}^n d\varepsilon$.

Проинтегрируем уравнения (4) по спектру с заменой плотности энергии излучения по формуле (7):

$$\begin{aligned} S_{r\varepsilon_{i,j}}^{n+1} &= -\frac{c}{3} \frac{f_{\varepsilon_{i+1,j}}^p B_{\varepsilon_{i+1,j}}^{n+1} + g_{\varepsilon_{i+1,j}}^p - f_{\varepsilon_{i,j}}^p B_{\varepsilon_{i,j}}^{n+1} - g_{\varepsilon_{i,j}}^p}{0,5(r_{i+1} - r_{i-1})} k_{r\varepsilon_{i,j}}^{n+1}, \\ S_{z\varepsilon_{i,j}}^{n+1} &= -\frac{c}{3} \frac{f_{\varepsilon_{i,j+1}}^p B_{\varepsilon_{i,j+1}}^{n+1} + g_{\varepsilon_{i,j+1}}^p - f_{\varepsilon_{i,j}}^p B_{\varepsilon_{i,j}}^{n+1} - g_{\varepsilon_{i,j}}^p}{0,5(z_{j+1} - z_{j-1})} k_{z\varepsilon_{i,j}}^{n+1}. \end{aligned} \quad (14)$$

Уравнения (14) можно переписать в следующем виде:

$$S_{r_{i,j}}^{n+1} = -\frac{c}{3 \cdot 0,5(r_{i+1} - r_{i-1})} (X_{r_{i+1,j}}^{n+1} - X_{r_{i,j}}^{n+1}); \quad S_{z_{i,j}}^{n+1} = -\frac{c}{3 \cdot 0,5(z_{j+1} - z_{j-1})} (X_{z_{i+1,j}}^{n+1} - X_{z_{i,j}}^{n+1}). \quad (15)$$

Здесь введены обозначения:

$$\begin{aligned} X_{r_{i+1,j}}^{n+1} &= N_{Tr_{i+1,j}}^{n+1} + N_{Gr_{i+1,j}}^{n+1} G_{i+1,j}^{n+1}; & X_{z_{i,j+1}}^{n+1} &= N_{Tz_{i,j+1}}^{n+1} + N_{Gz_{i,j+1}}^{n+1} G_{i,j+1}^{n+1}; \\ X_{r_{i,j}}^{n+1} &= N_{Tr_{i,j}}^{n+1} + N_{Gr_{i,j}}^{n+1} G_{i,j}^{n+1}; & X_{z_{i,j}}^{n+1} &= N_{Tz_{i,j}}^{n+1} + N_{Gz_{i,j}}^{n+1} G_{i,j}^{n+1}; \\ N_{Tr_{i+1,j}}^{n+1} &= \int k_{r\varepsilon_{i+1,j}}^{n+1} f_{\varepsilon_{i+1,j}}^p B_{\varepsilon_{i+1,j}}^{n+1} d\varepsilon; & N_{Tz_{i,j+1}}^{n+1} &= \int k_{z\varepsilon_{i,j+1}}^{n+1} f_{\varepsilon_{i,j+1}}^p B_{\varepsilon_{i,j+1}}^{n+1} d\varepsilon; \\ N_{Tr_{i,j}}^{n+1} &= \int k_{r\varepsilon_{i,j}}^{n+1} f_{\varepsilon_{i,j}}^p B_{\varepsilon_{i,j}}^{n+1} d\varepsilon; & N_{Tz_{i,j}}^{n+1} &= \int k_{z\varepsilon_{i,j}}^{n+1} f_{\varepsilon_{i,j}}^p B_{\varepsilon_{i,j}}^{n+1} d\varepsilon; \\ N_{Gr_{i+1,j}}^{n+1} &= \frac{\int k_{r\varepsilon_{i+1,j}}^{n+1} g_{\varepsilon_{i+1,j}}^p d\varepsilon}{\int g_{\varepsilon_{i+1,j}}^p d\varepsilon}; & N_{Gz_{i,j+1}}^{n+1} &= \frac{\int k_{z\varepsilon_{i,j+1}}^{n+1} g_{\varepsilon_{i,j+1}}^p d\varepsilon}{\int g_{\varepsilon_{i,j+1}}^p d\varepsilon}; \\ N_{Gr_{i,j}}^{n+1} &= \frac{\int k_{r\varepsilon_{i,j}}^{n+1} g_{\varepsilon_{i,j}}^p d\varepsilon}{\int g_{\varepsilon_{i,j}}^p d\varepsilon}; & N_{Gz_{i,j}}^{n+1} &= \frac{\int k_{z\varepsilon_{i,j}}^{n+1} g_{\varepsilon_{i,j}}^p d\varepsilon}{\int g_{\varepsilon_{i,j}}^p d\varepsilon}. \end{aligned} \quad (16)$$

Таким образом, получаем нелинейное уравнение относительно температуры вещества, которое близко к уравнению ЛТ:

$$\tilde{E}_{i,j}^{n+1} - \tilde{E}_{i,j}^n + \tau \frac{S_{r_{i,j}}^{n+1} - S_{r_{i-1,j}}^{n+1}}{r_i - r_{i-1}} + \tau \frac{S_{z_{i,j}}^{n+1} - S_{z_{i,j-1}}^{n+1}}{z_j - z_{j-1}} = 0, \quad (17)$$

где

$$\tilde{E}_{i,j}^{n+1} = E_{i,j}^{n+1} + \int_{\varepsilon} f_{\varepsilon,i,j}^p B_{\varepsilon,i,j}^{n+1} d\varepsilon + \frac{E_{i,j}^{n+1} - E_{i,j}^n + c\tau \langle w_{i,j}^{n+1} \rangle}{c\tau \langle w_{g,i,j}^{n+1} \rangle}; \quad \tilde{E}_{i,j}^n = E_{i,j}^n + U_{i,j}^n;$$

$S_{r_{i,j}}^{n+1}$ и $S_{z_{i,j}}^{n+1}$ определяются по формулам (15), (16).

Для согласования граничных условий в кинетическом и рассматриваемом подходах воспользуемся приемом из работы [3]. Запишем поток на границе в виде двух слагаемых, введя мнимые ячейки за границей области и определив на них интенсивность ($I_{\text{ГР}}$):

$$S_{\text{ГР}}^{n+1} = \int_{\Omega} I^{\text{kin}} \mu d\Omega = \int_{\Omega>0} I_{\text{ВН}}^{\text{kin}} \mu d\Omega + \int_{\Omega<0} I_{\text{ГР}}^{\text{kin}} \mu d\Omega = \int_{\Omega<0} I_{\text{ГР}}^{\text{kin}} \mu d\Omega + \frac{\int_{\Omega>0} I_{\text{ВН}}^{\text{kin}} \mu d\Omega}{\frac{1}{c} \int_{\Omega} I^{\text{kin}} d\Omega} U_{\text{ГР}}^{n+1},$$

где индекс *kin* является признаком того, что I берется из решения кинетического уравнения.

Первое слагаемое полностью определяется заданной граничной интенсивностью излучения, а второе преобразовано в виде дроби. Введя обозначения $a_s = 1$; $a_u = -\frac{\int_{\Omega>0} I_{\text{ВН}}^{\text{kin}} \mu d\Omega}{\frac{1}{c} \int_{\Omega} I^{\text{kin}} d\Omega}$; $a = \frac{\int_{\Omega>0} I_{\text{ГР}}^{\text{kin}} \mu d\Omega}{\frac{1}{c} \int_{\Omega} I^{\text{kin}} d\Omega}$,

получим граничное условие для КД:

$$a_u U_{\varepsilon_{\text{ГР}}}^{n+1} + a_s S_{\varepsilon_{\text{ГР}}}^{n+1} = a,$$

где $U_{\varepsilon_{\text{ГР}}}^{n+1}$ относится к мнимой ячейке.

Чтобы реализовать граничное условие для системы уравнений в приближении ЛТ (17), необходимо исключить мнимую ячейку с помощью выражения $S^{n+1} = -\frac{ck_{\varepsilon} U_{\text{ГР}}^{n+1} - U_{\text{ВН}}^{n+1}}{3h}$:

$$S_{\varepsilon_{\text{ГР}}}^{n+1} + \tilde{a}_T^{n+1} U_{\varepsilon_{\text{ВН}}}^{n+1} = \tilde{a}^{n+1},$$

где $\tilde{a}_T^{n+1} = \mp \frac{ck_{\varepsilon}^{n+1}}{3h \mp cb_s k_{\varepsilon}^{n+1}}$, $b_s = \frac{a_s}{a_u}$; $\tilde{a}^{n+1} = \tilde{a}_T^{n+1} b$, $b = \frac{a}{a_u}$.

Подставив вместо плотности энергии излучения формулу (7) и проинтегрировав по спектру, получим

$$S_{\varepsilon_{\text{ГР}}}^{n+1} + \tilde{a}_T^{n+1} U_{\varepsilon_{\text{ВН}}}^{n+1} = \tilde{a}_T^{n+1} b; \quad S_{\text{ГР}}^{n+1} + \int \tilde{a}_T f^p B_{\text{ВН}}^{n+1} d\varepsilon + \frac{\int \tilde{a}_T g^p d\varepsilon}{\int g^p d\varepsilon} G_{\text{ВН}}^{n+1} = b \int \tilde{a}_T^{n+1} d\varepsilon.$$

На остальных границах условие согласуется аналогичным образом.

Еще раз кратко опишем схему метода для одного шага по времени:

- 1) для каждой группы по энергии:
 - решаем линейное уравнение переноса (1);
 - находим коэффициенты КД;
 - вычисляем кинетический коэффициент из уравнений (4);
 - решаем систему уравнений КП (5);
 - находим коэффициенты связи (7);
- 2) решаем нелинейную систему уравнений (17):
 - вычисляем интегралы по спектру, коэффициенты (10)–(12);
 - линеаризуем систему (17), (15) и решаем систему линейных алгебраических уравнений.

Линеаризация разностных уравнений

Для решения системы (17), (15) использовался метод Ньютона:

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{i,j}^s + \frac{\partial \tilde{E}}{\partial T} \Big|_{T_{i,j}^s} \Delta T_{i,j}^{s+1} - \tilde{E}_{i,j}^n + \frac{\tau}{r_i - r_{i-1}} \left(S_{r_{i,j}}^s + \Delta S_{r_{i,j}}^{s+1} - S_{r_{i-1,j}}^s - \Delta S_{r_{i-1,j}}^{s+1} \right) + \\ + \frac{\tau}{z_j - z_{j-1}} \left(S_{z_{i,j}}^s + \Delta S_{z_{i,j}}^{s+1} - S_{z_{i,j-1}}^{n+1} \right) = 0; \\ S_{r_{i,j}}^s + \Delta S_{r_{i,j}}^{s+1} = -\frac{c}{3 \cdot 0,5(r_{i+1} - r_{i-1})} \left(X_{r_{i+1,j}}^s + \frac{\partial X_{r_{i+1,j}}^s}{\partial T_{i+1,j}^s} \Delta T_{i+1,j}^{s+1} - X_{r_{i,j}}^s - \frac{\partial X_{r_{i,j}}^s}{\partial T_{i,j}^s} \Delta T_{i,j}^{s+1} \right); \quad (18) \\ S_{z_{i,j}}^s + \Delta S_{z_{i,j}}^{s+1} = -\frac{c}{3 \cdot 0,5(z_{i+1} - z_{i-1})} \left(X_{z_{i+1,j}}^s + \frac{\partial X_{z_{i+1,j}}^s}{\partial T_{i,j+1}^s} \Delta T_{i,j+1}^{s+1} - X_{z_{i,j}}^s - \frac{\partial X_{z_{i,j}}^s}{\partial T_{i,j}^s} \Delta T_{i,j}^{s+1} \right), \end{aligned}$$

где s — номер ньютоновской итерации; $S_{r_{i,j}}^{s+1} = S_{r_{i,j}}^s + \Delta S_{r_{i,j}}^{s+1}$; $S_{z_{i,j}}^{s+1} = S_{z_{i,j}}^s + \Delta S_{z_{i,j}}^{s+1}$; $T_{i,j}^{s+1} = T_{i,j}^s + \Delta T_{i,j}^{s+1}$.

Преобразовав (18), получим систему линейных уравнений относительно изменения потоков и температуры:

$$\begin{aligned} A \Delta T_{i,j}^{s+1} + B \Delta S_{r_{i,j}}^{s+1} + C \Delta S_{r_{i-1,j}}^{s+1} + D \Delta S_{z_{i,j}}^{s+1} - D \Delta S_{z_{i,j-1}}^{s+1} = F; \\ \Delta S_{r_{i,j}}^{n+1} + K_1 \Delta T_{i,j}^{n+1} + H_1 \Delta T_{i+1,j}^{n+1} = M_1; \\ \Delta S_{z_{i,j}}^{n+1} + K_2 \Delta T_{i,j}^{n+1} + H_2 \Delta T_{i+1,j}^{n+1} = M_2. \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} A = \frac{\partial \tilde{E}}{\partial T} \Big|_{T_{i,j}^s}; \quad B = \frac{\tau}{r_i - r_{i-1}}; \quad C = -\frac{\tau}{r_i - r_{i-1}}; \quad D = \frac{\tau}{z_j - z_{j-1}}; \\ F = -E_{i,j}^s - \int_{\varepsilon} f_{\varepsilon i,j}^p B_{\varepsilon i,j}^s d\varepsilon - \frac{E_{i,j}^s - E_{i,j}^n + c\tau \langle w_{ij}^s \rangle}{c\tau \langle w_{ij}^s \rangle} + E_{i,j}^n + U_{i,j}^n - \frac{\tau}{r_i - r_{i-1}} \left(S_{1i,j}^s - S_{1i-1,j}^s \right) - \\ - \frac{\tau}{z_j - z_{j-1}} \left(S_{2i,j}^s - S_{2i,j-1}^{n+1} \right); \\ K_1 = -\frac{c}{3 \cdot 0,5(r_{i+1} - r_{i-1})} \frac{\partial X_{r_{i,j}}^s}{\partial T_{i,j}^s}; \quad K_2 = -\frac{c}{3 \cdot 0,5(z_{j+1} - z_{j-1})} \frac{\partial X_{z_{i,j}}^s}{\partial T_{i,j}^s}; \\ H_1 = \frac{c}{3 \cdot 0,5(r_{i+1} - r_{i-1})} \frac{\partial X_{r_{i+1,j}}^s}{\partial T_{i+1,j}^s}; \quad H_2 = \frac{c}{3 \cdot 0,5(z_{j+1} - z_{j-1})} \frac{\partial X_{z_{i,j+1}}^s}{\partial T_{i,j+1}^s}; \\ M_1 = -\frac{c}{3 \cdot 0,5(r_{i+1} - r_{i-1})} \left(X_{r_{i+1,j}}^s - X_{r_{i,j}}^s \right) - S_{r_{i,j}}^s; \\ M_2 = -\frac{c}{3 \cdot 0,5(z_{j+1} - z_{j-1})} \left(X_{z_{i,j+1}}^s - X_{z_{i,j}}^s \right) - S_{z_{i,j}}^s. \end{aligned}$$

Пролинеаризуем уравнение для граничных условий:

$$\begin{aligned} \Delta S_{\Gamma P}^{s+1} + B_T \Delta T_{\text{BH}}^{s+1} = B; \\ B_T = \int \frac{\partial \tilde{a}_T^s}{\partial T_{\text{BH}}} f^p B_{\text{BH}}^s d\varepsilon + \int \tilde{a}_T^s f^p \frac{\partial B_{\text{BH}}^s}{\partial T_{\text{BH}}} d\varepsilon + \frac{\int \tilde{a}_{Tz} g^p d\varepsilon}{\int g^p d\varepsilon} \frac{\partial G_{\text{BH}}^s}{\partial T_{\text{BH}}} + \frac{\int \partial \tilde{a}_{Tz} g^p d\varepsilon}{\int g^p d\varepsilon} G_{\text{BH}}^s - b \int \frac{\partial \tilde{a}_{Tz}}{\partial T_{\text{BH}}} d\varepsilon; \\ B = b \int \tilde{a}_{Tz} d\varepsilon - S_{\Gamma P}^s - \int \tilde{a}_T^s f^p B_{\text{BH}}^s d\varepsilon - \frac{\int \tilde{a}_{Tz} g^p d\varepsilon}{\int g^p d\varepsilon} G_{\text{BH}}^s; \\ \frac{\partial \tilde{a}_T^s}{\partial T_{\text{BH}}} = -\frac{3cdz}{(3h - ck_{\varepsilon}^s b_s)^2} \frac{\partial k_{\varepsilon}^s}{\partial T_{\text{BH}}}. \end{aligned}$$

Пример численного расчета

В качестве примера рассмотрим решение второй задачи Флека [4] в следующей постановке. Имеется сферически-симметричная система, состоящая из нескольких физических областей, ограниченных координатами по радиусу (рис. 1).

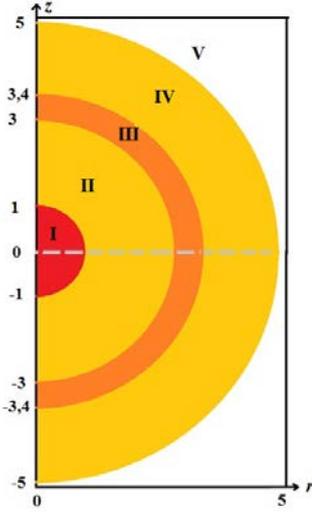


Рис. 1. Геометрия задачи

Коэффициент поглощения вычисляется по формуле $\alpha = \frac{1 - e^{-\varepsilon/T}}{\varepsilon^3}$; уравнение состояния вещества: $E = c_v T$, $c_v = 0,81$. В области I находится изотропный планковский источник с температурой 1 кэВ в виде абсолютно черного тела ($\alpha_0 = 10^4$; $c_v = 10^{10}$). В областях II и IV $\alpha_0 = 27$; в области III $\alpha_0 = 10^4$; область V — вакуум: $\alpha_0 = 0$.

Начальные условия: $T^0 = 10^{-3}$ кэВ; $I_{II,III,IV} = B(T^0)/4\pi$; $I_V = 0$.

Граничные условия: $T_I = 1$ кэВ, на границе $r = 0$ задано условие отражения, на остальных границах — условие свободной границы.

Сетка по спектру из 28 групп: $\varepsilon = 10^{-4}$; 0,02; 0,04; 0,06; 0,08; 0,1; 0,15; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,7; 10,0; 1,4; 1,8; 2,2; 2,6; 3,0; 3,5; 4,0; 4,5; 5,0; 5,5; 6,0; 7,0; 8,0; 10,0; 12,0; 15,0.

В качестве эталонного решения взят результат расчета в спектральной квазидиффузионной постановке [5] в одномерном случае в сферических координатах со следующими параметрами: шаг по пространству $h_r = 0,05$; шаг по времени $\tau = 10^{-4}$; число разбиений по углу равно 16.

Сравнение результатов расчета по предлагаемому методу с эталонным решением представлено на рис. 2–4. Отклонение решений можно объяснить различием систем координат (сферическая и цилиндрическая). В целом полученные профили температуры качественно описывают эталонное решение. На рис. 4 можно наблюдать сходимость решения по пространству. Кроме того, поскольку пробеги $k_{r\varepsilon}$, $k_{z\varepsilon}$ могут принимать отрицательные значения, когда поток тепла и градиент температур

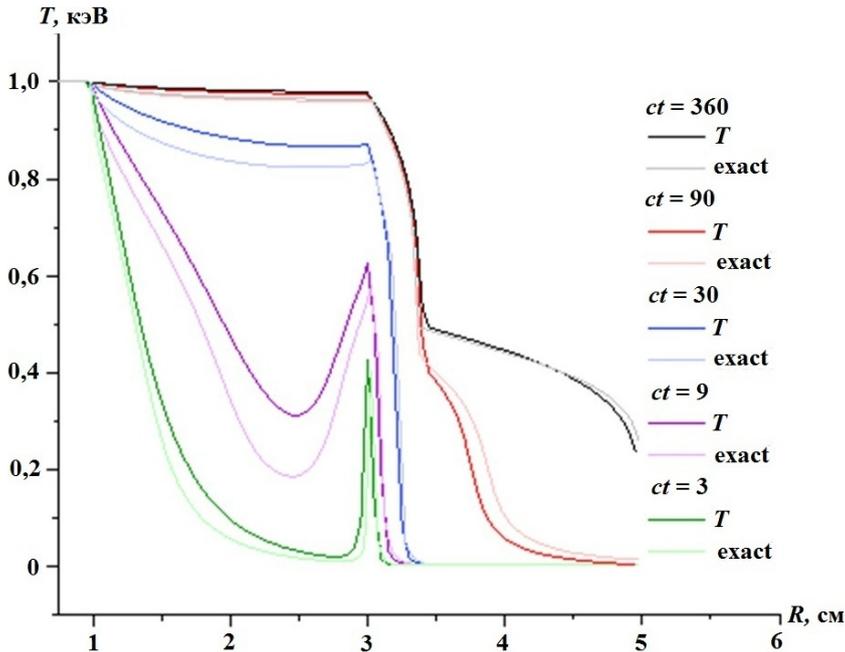


Рис. 2. Распределение температуры вещества вдоль $R = \sqrt{r^2 + z^2}$ в сечении под углом $\varphi = 45^\circ$ между \vec{R} и \vec{r} ; $h = 0,05$ см; 16 разбиений по каждому углу: T — расчет по предлагаемому методу; exact — эталонное решение

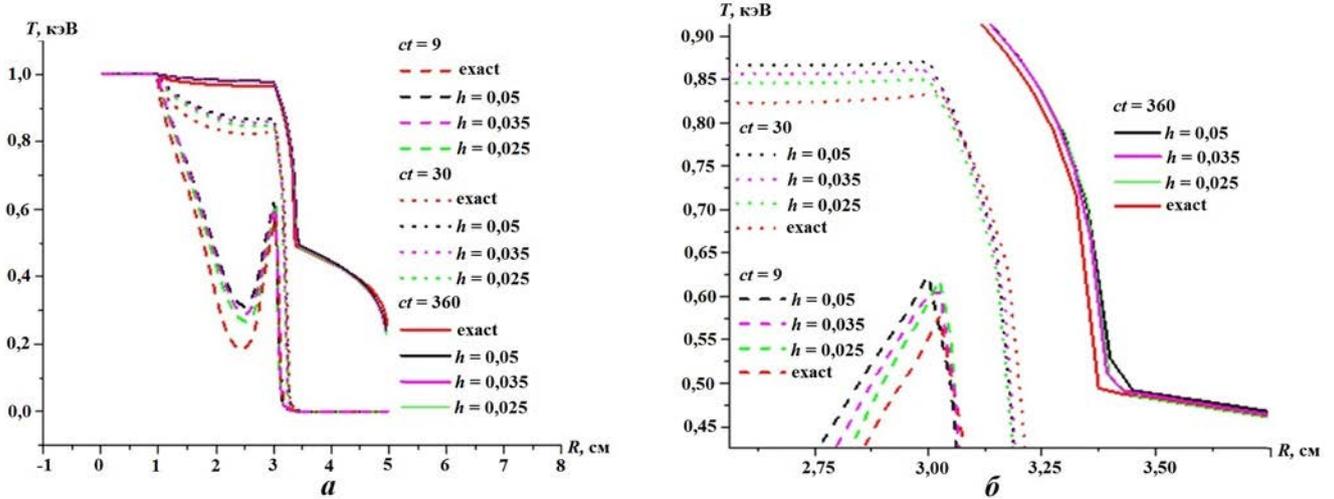


Рис. 3. Распределение температуры вещества вдоль $R = \sqrt{r^2 + z^2}$ в сечении под углом $\varphi = 45^\circ$ между \vec{R} и \vec{r} , 16 разбиений по каждому углу, $h = 0,025; 0,035; 0,05$ см (а), и его увеличенный фрагмент (б); exact — эталонное решение

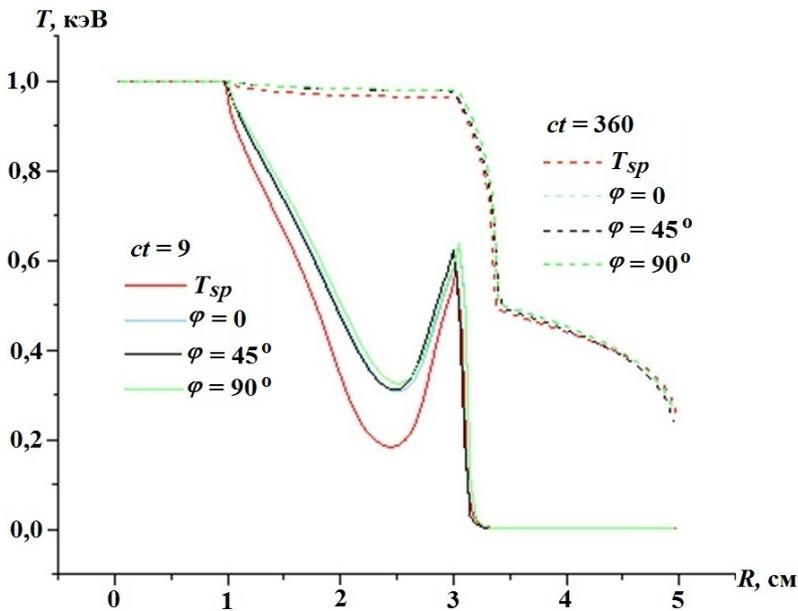


Рис. 4. Распределение температуры вещества вдоль $R = \sqrt{r^2 + z^2}$ в сечении под углом φ между \vec{R} и \vec{r} ; T_{sp} — решение, полученное в спектральном расчете

имеют разные знаки, удалось получить профиль температуры с нарушением принципа максимума (область III). То, что это не привело к развитию неустойчивости, — удивительный факт. Можно сделать вывод, что на данном этапе методика подтвердила работоспособность в двумерном случае.

Лучевой эффект

В решении уравнения переноса присутствует лучевой эффект — зависимость решения от сетки по углу. Выясним, как проявляется лучевой эффект в решении, полученном описанным методом. Из

рис. 5, где изображены профили температуры в сечениях под углами $0, 45, 90^\circ$ на моменты времени $ct = 9; 360$, видно отличие результатов при разных сечениях.

Для дальнейшего исследования лучевого эффекта была проведена серия расчетов с различным разбиением по углу (4, 8, 16, 32, 64 направления). Результаты представлены на рис. 5. Из рисунка можно сделать вывод, что сетки 16×16 по угловым переменным достаточно, дальнейшее разбиение в данном случае не сильно влияет на решение.

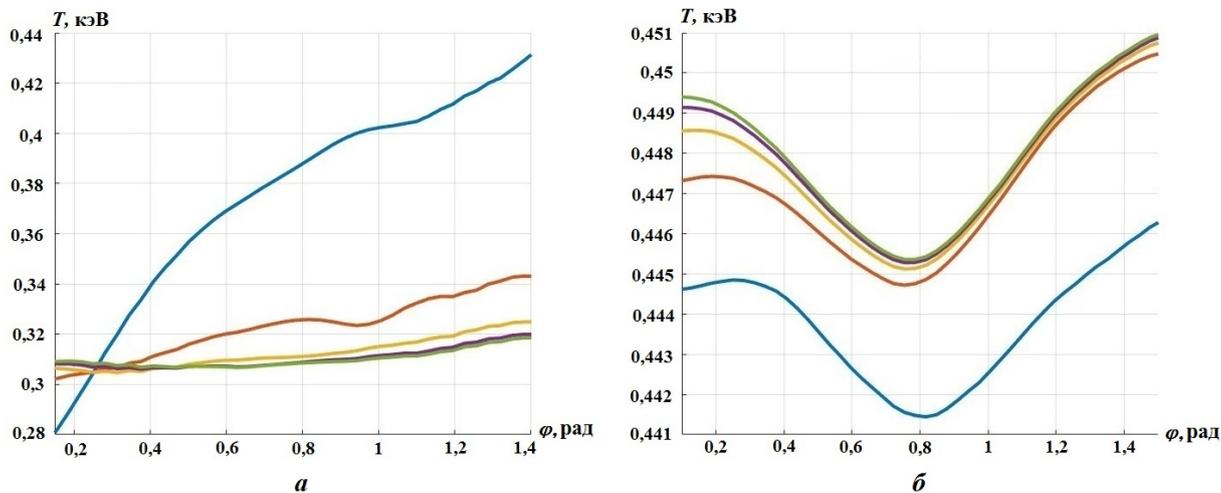


Рис. 5. Температура вещества в зависимости от угла $\varphi \in [0; \pi/2]$ при 4 (—), 8 (—), 16 (—), 32 (—), 64 (—) направлениях по углу: *a* — $ct = 9$; $R = 2,5$ см; *б* — $ct = 360$; $R = 4$ см

Заключение

В данной работе описан квазиспектральный метод для решения спектрального кинетического уравнения переноса излучения совместно с уравнением баланса энергии в двумерном осесимметричном случае на прямоугольной сетке. Достоинство метода заключается в том, что вся сложность итерационного процесса переложена на уравнение лучистой теплопроводности, а решение кинетического уравнения и уравнения спектральной диффузии при известной температуре не представляет большой проблемы. Кроме того, данный подход позволяет организовать распараллеливание по спектральной переменной, а также по пространству для вычисления усредненных по энергии пробегов и эффективной энергии излучения. На основе сравнения со спектральным расчетом в одномерном сферическом случае показана работоспособность метода в двумерном случае.

Список литературы

1. Карлыханов Н. Г. Учет спектральных и кинетических эффектов в приближении лучистой теплопроводности для расчета задач переноса излучения // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2019. Вып. 4. С. 21–32.
Karlykhanov N. G. Uchet spektralnykh i kineticheskikh effektov v priblizhenii luchistoy teploprovodnosti dlya rascheta zadach perenosa izlucheniya // Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov. 2019. Vyp. 4. S. 21–32.
2. Карлыханов Н. Г., Уракова А. В., Шнитко С. А. Применение метода квазидиффузии для решения задачи переноса излучения в спектральной кинетической постановке в двумерном осесимметричном случае на квадратной сетке // Там же. 2011. Вып. 2. С. 33–43.
Karlykhanov N. G., Urakova A. V., Shnitko S. A. Primenenie metoda kvazidiffuzii dlya resheniya zadachi perenosa izlucheniya v spektralnoy kineticheskoy postanovke v dvumernom osesimmetrichnom sluchae na kvadratnoy setke // Tam zhe. 2011. Vyp. 2. S. 33–43.

3. *Карлыханов Н. Г., Козманов М. Ю.* Учет кинетических эффектов в диффузионном приближении для расчета задач переноса излучения // Там же. 2010. Вып. 4. С. 3–8.
Karlykhanov N. G., Kozmanov M. Yu. Uchet kineticheskikh effektov v diffuzionnom priblizhenii dlya rascheta zadach perenosa izlucheniya // Там же. 2010. Вып. 4. С. 3–8.
4. *Fleck J. F., Cummings Jr. and J.D.* An implicit Monte Carlo scheme for calculating time and frequency dependent nonlinear radiation transport // J. Comp. Phys. 1971. Vol. 8. P. 313–342.
5. *Карлыханов Н. Г.* Применение метода квазидиффузии для решения задачи переноса излучения // Там же. Вып. 1. С. 32–38.
Karlykhanov N. G. Primenenie metoda kvazidiffuzii dlya resheniya zadachi perenosa izlucheniya // Там же. Вып. 1. С. 32–38.

Статья поступила в редакцию 06.12.21.
