

УДК 519.6

УЛУЧШЕНИЕ КАЧЕСТВА ГРАНЕЙ ОБЪЕМНЫХ ЯЧЕЕК ПРИ ГЕНЕРАЦИИ НЕСТРУКТУРИРОВАННЫХ СЕТОК В ПАКЕТЕ ПРОГРАММ "ЛОГОС"

О. Н. Борисенко, М. В. Кузьменко, М. В. Черенкова, А. Г. Гиниятуллина,
Н. В. Чухманов, Д. Н. Смолкина, Т. Е. Тимаева, К. А. Блажнова
(ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области)

Приводится описание способов улучшения качества граней объемных ячеек при автоматической генерации неструктурированных сеток в пакете программ "Логос", используемом при численном моделировании задач аэро- и гидродинамики. Это модификация ячеек с частично совпадающими гранями, объединение граней с учетом их формы, разрезание искривленных граней, разрезание невыпуклых граней с добавлением нового узла с возможностью удаления малого ребра, разрезание искривленных граней на множество плоских в зонах перехода негладких областей в гладкую область, удаление лишних узлов. Применение совокупности указанных способов позволяет улучшить форму граней ячеек, полученных методом отсечения, и, как следствие, построенного на их основе слоя ячеек, для которых характерен сильный градиент скорости потока. В итоге повышается качество расчетной сетки в целом.

Ключевые слова: пакет программ "Логос", неструктурированные сетки, улучшение качества сетки, поверхностные грани, пограничный слой.

Введение

Построение качественной расчетной сетки для проведения расчетов трехмерных задач является одним из наиболее трудоемких и затратных по времени этапов подготовки численной модели, поскольку от этого напрямую зависит успешность дальнейшего расчета.

Для моделирования задач аэро- и гидродинамики требуются сетки специального вида с неоднородной структурой, состоящие из ячеек двух типов:

- образующих пограничный слой — слой ячеек в форме многогранных призм на поверхности обтекаемого тела вблизи моделируемого объекта, где проявляется эффект вязкости, характеризуемый сильным градиентом скорости потока;
- заполняющих остальную область моделирования и имеющих форму куба, тетраэдра или, в общем случае, произвольного многогранника.

Такая структура сетки позволяет упростить моделирование течения жидкости/газа путем

разделения потока на две области — тонкого вязкого пограничного слоя и невязкого течения.

В пакете программ "Логос" [1] для подготовки расчетных сеток при решении задач аэро- и гидродинамики применяются автоматические генераторы поверхностных треугольных [2] и объемных сеток [3–6].

При генерации объемных сеток чаще всего применяется автоматический генератор неструктурированных сеток, использующий метод отсечения [3], поскольку он позволяет получать расчетные сетки с требуемыми характеристиками при задании минимального количества параметров для геометрических моделей произвольной конфигурации. Исходными данными для генератора является поверхностная сетка, состоящая из треугольных ячеек. Она аппроксимирует поверхность геометрической модели с учетом кривизны поверхностей и характерных кривых. Характерные кривые — это ломаные, проходящие по особенностям геометрической модели (негладкие места стыковки поверхностей, острые ребра геометрии).

При генерации сеток методом отсечения вся область моделирования заполняется шаблонной сеткой, ячейки которой имеют форму куба. Вблизи моделируемого объекта формируется пограничный слой ячеек в форме многоугольных призм. Ячейки на границе шаблонной сетки и пограничного слоя являются многогранниками произвольной формы. Они формируются в результате отсечения ячеек шаблонной сетки треугольниками поверхностной сетки, поэтому будем называть их отсеченными.

Ячейки объемной сетки содержат два типа граней — внутренние и поверхностные. Грани, разделяющие две ячейки, назовем внутренними, а грани, аппроксимирующие поверхностную сетку из треугольников на стыке отсеченных ячеек и пограничного слоя, — поверхностными. Качество отсеченных ячеек напрямую влияет на качество ячеек пограничного слоя, которые строятся на основе поверхностных граней отсеченных ячеек.

Построение многогранной ячейки методом отсечения имеет свои особенности. Наиболее существенная из них — в том, что узлы отсеченной грани получаются из точек пересечения ребер шаблонной ячейки и набора треугольников, а также характерных кривых. Поэтому в некоторых случаях, например при обрыве характерной кривой внутри ячейки, отсеченная грань получается сильно неплоской и невыпуклой, что существенно затрудняет дальнейшую работу с такими ячейками.

Для разбиения невыпуклых областей обычно применяются алгоритмы, основанные на триангуляции [7–10]. Но такие подходы не могут быть использованы при генерации расчетных сеток методом отсечения, так как при численном моделировании в пограничном слое предпочтительно использование шестигранников, которые, в свою очередь, формируются на основе четырехугольных граней, полученных при отсечении.

Вопросы разбиения невыпуклых многоугольников и разрезание невыпуклых ячеек также рассматриваются в статьях [11–14], методы по улучшению качества ячеек сетки представлены в работах [15, 16]. Но в данных работах в рамках операций разрезания и улучшения качества ячеек не рассматриваются вопросы минимизации разницы площадей граней, соседних по ребру и узлу, и объемов ячеек, соседних по грани, ребру и узлу. Учет и корректировка разницы площадей граней и объемов ячеек в сетке являются важными критериями успешности проведе-

ния численного моделирования.

Анализ проблем, возникающих при моделировании задач аэро- и гидродинамики на построенных сеточных моделях, позволил выработать критерии качества ячеек сетки для успешного проведения расчета. Основные критерии качества ячеек сетки:

- ненулевой объем ячеек;
- допустимое соотношение объемов ячеек и площадей поверхностных граней;
- ненулевая площадь граней ячейки;
- выпуклость ячеек и поверхностных граней ячеек.

Для получения требуемого качества ячеек сетки в генераторе был реализован соответствующий программный модуль [3].

Улучшение качества поверхностных граней отсеченных ячеек

Для улучшения качества граней объемных ячеек при генерации сетки методом отсечения первоначально были реализованы операции объединения граней и разрезания невыпуклых граней. В настоящее время в связи с постоянным усложнением геометрических моделей, повышением их детализации, а также ростом требований методик к качеству расчетных сеток дополнительно реализованы следующие способы для улучшения качества поверхностных граней отсеченных ячеек:

- удаление лишних узлов;
- модификация ячеек с частично совпадающими гранями;
- объединение граней с учетом их формы;
- разрезание искривленных граней;
- разрезание невыпуклых граней с добавлением нового узла и возможностью удаления нового ребра;
- разрезание неплоских граней на множество плоских при изменении кривизны поверхности.

Под разрезанием грани будем понимать разделение одной грани на две путем добавления ребра, сформированного по двум несмежным точкам грани, под объединением — формирование одной грани из нескольких путем удаления смежных ребер.

Все приведенные выше способы улучшения качества граней объемных ячеек направлены

на улучшение формы, уменьшение соотношения площадей соседних граней и сокращение количества невыпуклых и искривленных граней. Численные пороговые значения критериев, используемые в методах улучшения качества граней объемных ячеек, получены в результате оценки качества построенных расчетных сеток для базы моделей с различными значениями соответствующих параметров.

Удаление лишних узлов. Для улучшения структуры сетки, формы боковых граней ячеек пограничного слоя и уменьшения соотношения площадей соседних граней реализован способ улучшения качества граней с помощью удаления узлов с валентностью 2 на ребрах, разделяющих две грани объемной сетки.

Термин *валентность 2* для узла сетки означает, что узел принадлежит только двум граням либо одной, либо соседних ячеек. Как правило, такие узлы возникают в результате модификации отсеченных ячеек и могут быть удалены из сетки без потери качества ячеек и точности аппроксимации поверхности.

Данный способ позволяет улучшить форму граней отсеченных ячеек, как показано на рис. 1,

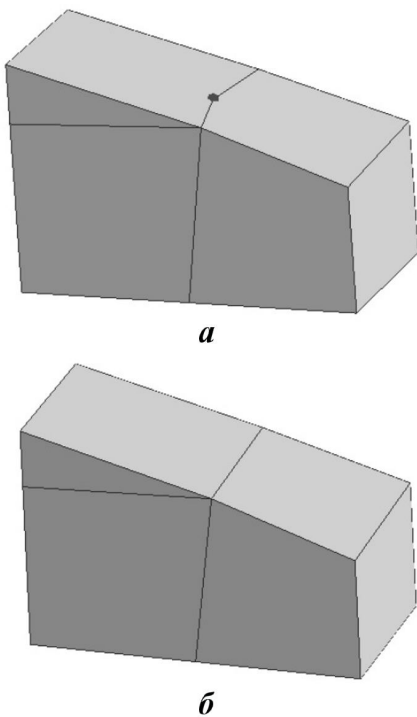


Рис. 1. Пример удаления лишнего узла: *a* — исходные ячейки до удаления узла; *б* — ячейки после удаления узла

сократить количество ребер сетки, в некоторых случаях избавиться от невыпуклых граней, что в дальнейшем позволяет повысить качество ячеек пограничного слоя.

Модификация ячеек с частично совпадающими гранями. В результате применения некоторых способов улучшения качества сетки, в частности удаления малых ребер, могут появиться ячейки с частично совпадающими гранями. Частично совпадающие грани — это грани одной ячейки, имеющие более двух общих узлов, соединенных между собой и не лежащих на одной прямой. В большинстве случаев грань частично совпадает с другой неплоской гранью ячейки. На рис. 2 приведен пример ячейки с частично совпадающими гранями $ABCD$ и $AECB$: узлы A, B, C принадлежат общим для этих граней ребрам AB и BC .

Определение ячеек с частично совпадающими гранями состоит из двух этапов:

- поиск в ячейках граней, имеющих больше двух общих узлов, соединенных между собой ребрами;
- проверка взаимного расположения граней, найденных на первом этапе, для исключения случаев ложного наложения, когда общие узлы лежат на одной прямой.

Если в ячейке установлено наличие частично совпадающих граней, то проводится проверка возможности корректного объединения рассматриваемой ячейки с соседней через частично совпадающую грань с образованием выпуклой ячейки. Если такое объединение возможно, то одна частично совпадающая грань удаляется, а грани объединенной ячейки, смежные между собой по ребру и разделяющие одни и те же ячейки, объединяются при условии, что новая грань будет выпуклой. На рис. 3 показан пример объединения ячейки, имеющей частично совпадающие грани, с соседней ячейкой.

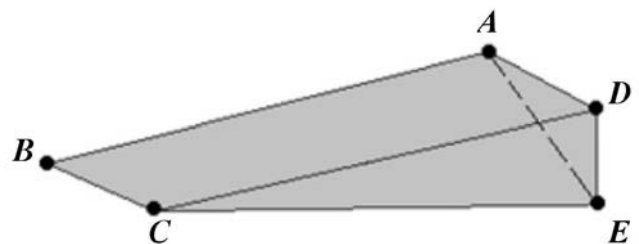


Рис. 2. Ячейка с частично совпадающими гранями

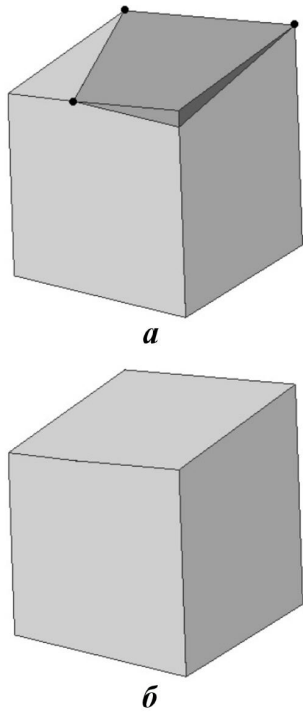


Рис. 3. Пример объединения ячейки с частично совпадающими гранями с соседней: *а* — ячейки до объединения; *б* — результат объединения

В случае, когда корректное объединение ячеек невозможно, от частично совпадающих граней отделяются фрагменты, сформированные по набору общих ребер, один из которых удаляется, а другой становится новой гранью.

На рис. 4 показан пример, в котором ячейку нельзя объединить с соседней через частично совпадающую грань с образованием выпуклой ячейки, поэтому ситуация разрешается благодаря разрезанию частично совпадающих граней.

Объединение граней с учетом их формы.

Грани объемных ячеек после отсечения ячеек шаблонной сетки треугольниками смещенной поверхности, как правило, имеют форму треугольников или четырехугольников. Возникают ситуации, когда грань не является малой, но ее форма может быть улучшена путем объединения с соседними гранями ячейки.

На рис. 5, *а* приведены примеры отсеченных ячеек, содержащих две грани, форма которых может быть улучшена объединением с соседними гранями, что позволит получить грани более высокого качества.

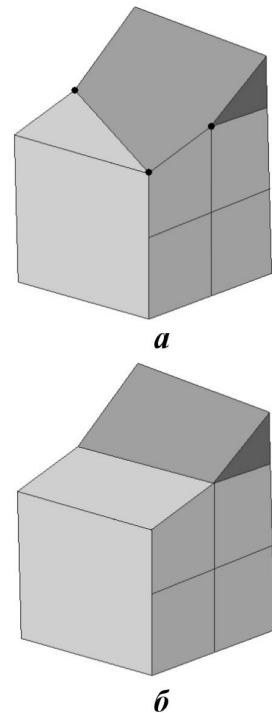


Рис. 4. Пример удаления общей части частично совпадающих граней: ячейки до (*а*) и после (*б*) выполнения операции

Для корректировки формы граней вычисляется величина качества формы грани по формуле [7]

$$Q_{face} = \frac{S_{face}}{P_{face}^2},$$

где S_{face} — площадь грани; P_{face} — периметр грани.

Использование вычисляемого по формуле критерия позволяет при корректировке грани приблизить ее форму к правильному многоугольнику, в частности форму четырехугольной грани — к квадрату.

Минимальное пороговое значение качества формы грани составляет 0,0481, что несколько больше значения качества формы равностороннего треугольника. Таким образом, при указанном пороговом значении все треугольные грани считаются плохими по форме и по возможности должны быть объединены с другими гранями ячейки, что приведет к уменьшению количества треугольных призм в пограничном слое.

Каждая найденная с помощью данного критерия грань объединяется с соседними гранями данной ячейки при выполнении следующих условий:

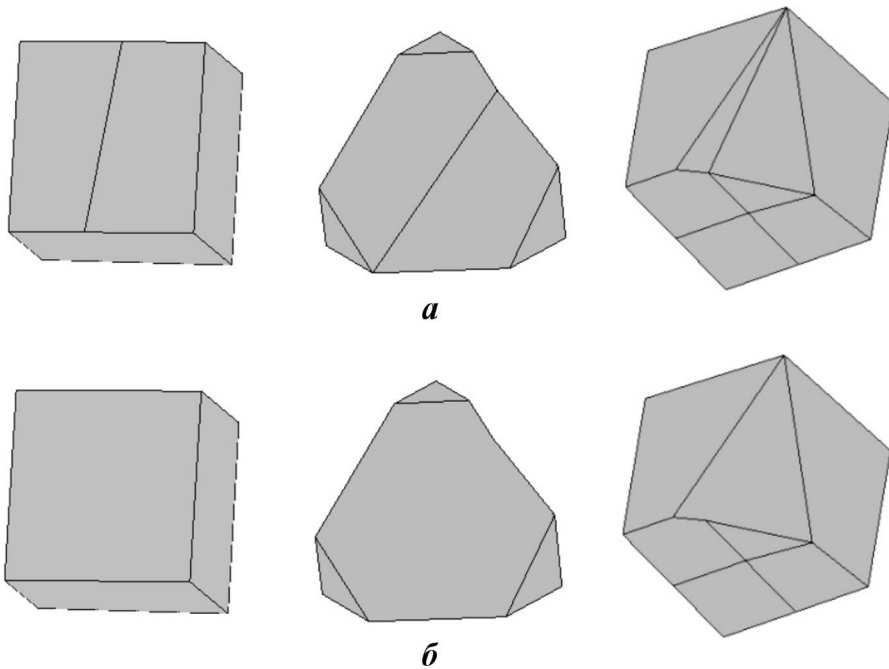


Рис. 5. Примеры ячеек до (а) и после (б) объединения граней по критерию формы

- объединяемые грани не являются смежными по ребру, принадлежащему характерной кривой;
- полученная в результате объединения грань не является невыпуклой или искривленной;
- качество формы объединенной грани выше, чем у исходной грани, предложенной для объединения по критерию формы.

На рис. 5, б показан результат объединения граней по критерию формы в ячейках, изображенных на рис. 5, а.

Критерии диагностики невыпуклых и искривленных граней. Грани отсеченной многогранной ячейки могут иметь простую или сложную форму в зависимости от особенностей геометрии модели. Если поверхностная сетка не содержит характерных кривых, грани ячеек имеют простую форму, поскольку формируются только из точек пересечения ребер ячейки шаблонной сетки с треугольниками поверхностной сетки. В областях, содержащих характерные кривые, грани могут быть невыпуклыми и искривленными, с большим количеством узлов, а их форма — достаточно сложной, поскольку при построении граней также учитываются характерные особенности модели в ячейке. Причинами формирования искривленных и невыпуклых граней в отсеченных ячейках также

могут стать грубая треугольная сетка, крупные ячейки шаблонной сетки в областях с высокой кривизной поверхности или обрыв характерной кривой внутри ячейки. Наличие таких граней в сетке может привести к построению некорректных ячеек пограничного слоя и, как следствие, уменьшению точности получаемого решения или некорректным результатам расчетов.

При генерации сеток методом отсечения для определения невыпуклой грани ищется *узел невыпуклости* грани по формуле [13] (рис. 6)

$$\beta = \begin{cases} \frac{1}{\cos(-\alpha)}, & \text{если } E \cdot N \times N_A < 0; \\ 2\pi - \frac{1}{\cos(-\alpha)}, & \text{если } E \cdot N \times N_A \geq 0, \end{cases}$$

где E — нормаль к грани $ABCDGF$, рассчитанная по методу Ньюэлла [13]; N, N_A — нормали к вспомогательным граням $AGG'A'$ и $GFF'G'$; α — угол между этими нормальными; узлы G', A', F' получены путем переноса узлов A, G, F грани $ABCDGF$ в направлении нормали к этой грани.

Если $\beta \geq \pi$, то грань $ABCDGF$ выпуклая. Если $\beta < \pi$, то $ABCDGF$ невыпуклая и узел G является узлом невыпуклости.

Для вычисления степени искривленности грани при генерации сеток методом отсечения используется формула

$$W = 2 \arctg \frac{d^2}{S},$$

где d — произведение максимального расстояния между соседними узлами грани и единичного вектора нормали грани; S — площадь грани.

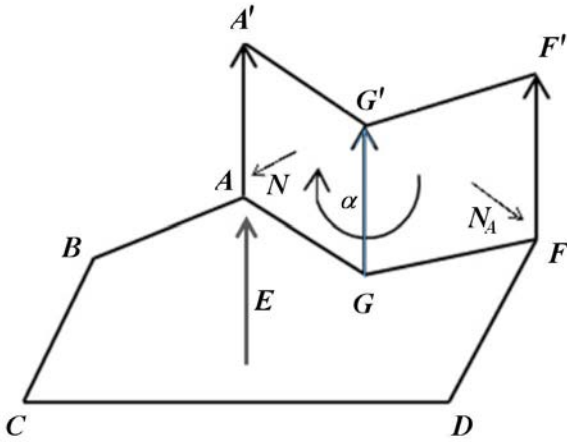


Рис. 6. Схема вычисления угла невыпуклости

Грань считается сильно искривленной, если $W > 50^\circ$. Примеры ячеек с искривленными гранями приведены на рис. 7.

Разрезание искривленных граней. Для корректировки формы искривленных и невыпуклых граней и улучшения их качества реализован способ разрезания, основанный на триангуляции граней.

Алгоритм состоит из двух этапов. На первом этапе строится набор треугольников, максимально близких к поверхностной сетке. Для оценки близости используется косинус угла между нормалью рассматриваемого треугольника и средней нормалью к треугольникам поверхностной сетки, которым принадлежит вершины рассматриваемого треугольника. Предельный случай — это точное совпадение треугольника с участком поверхностной сетки, тогда значение косинуса равно 1. Таким образом, чем ближе значение косинуса угла к 1, тем точнее треугольник будет аппроксимировать участок поверхностной сетки.

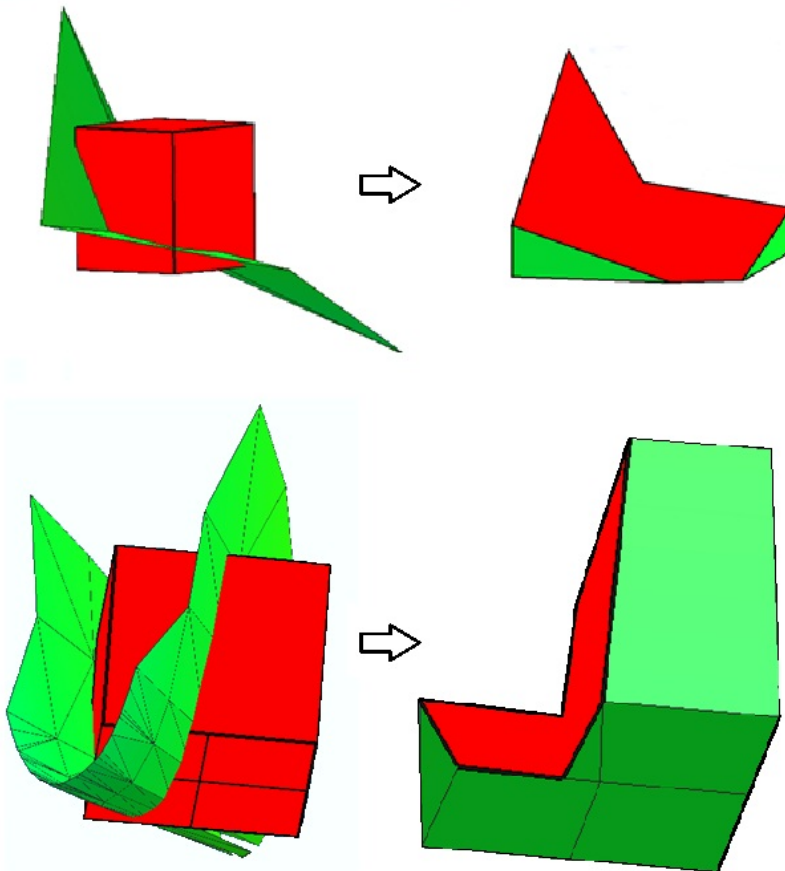


Рис. 7. Примеры ячеек с искривленными гранями, полученных отсечением шаблонных ячеек треугольниками поверхностной сетки

Для построения триангуляции используется модифицированный для неплоского многоугольника метод *отрезания ушей* [17], который основан на том, что граф триангуляции без дополнительных вершин для простого многоугольника всегда является деревом. Отсюда следует, что любой простой n -угольник с $n > 3$ имеет по меньшей мере два "уха", т. е. два треугольника, у каждого из которых две стороны являются сторонами многоугольника, а третья полностью находится внутри него (рис. 8).

Так как целью является построение совокупности треугольников, максимально приближенных к треугольникам поверхностной сетки, то организован итерационный процесс, на каждой итерации которого выбирается оптимальный на данном участке грани треугольник.

Для выбора такого треугольника строится набор "кандидатов", которыми становятся все возможные "уши" многоугольника. Из полученного набора выбирается оптимальный треугольник, т. е. имеющий максимальный косинус угла между нормальными и удовлетворяющий условиям корректности грани (выделение треугольника в отдельную грань не приведет к возникновению пересечений между соседними гранями или ячейками призматического слоя). На рис. 9 показан пример формирования некорректного треугольника (выделен пунктиром), поскольку одно из его ребер пересекает контур грани.

Выбор оптимального треугольника-уха отрезается от многоугольника. После этого итерация по выбору треугольника выполняется с оставшимся многоугольником до тех пор, пока не останется один треугольник.

Если на какой-то итерации невозможно выделить треугольник приемлемого качества, то та-

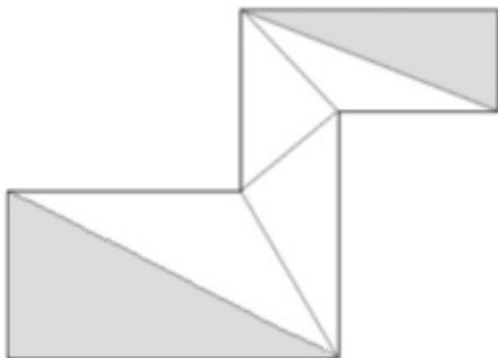


Рис. 8. Многоугольник и его два "уха"

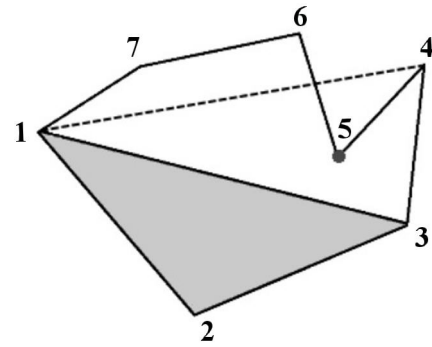


Рис. 9. Некорректный треугольник, сформированный по вершинам 1, 3, 4

кой многоугольник выделяется в самостоятельную грань.

Для решения задачи корректировки формы искривленных граней нельзя ограничиться только разбиением грани на треугольники, это приведет к значительному увеличению числа ячеек пограничного слоя. Чтобы этого избежать, на втором этапе алгоритма выполняется объединение треугольников, для которых угол между нормальными меньше порогового значения в 20° .

На рис. 10 показаны исходная ячейка, ячейка после этапа формирования треугольников и результат операции объединения треугольников.

Разрезание грани путем добавления нового узла с возможностью удаления малого ребра. Для невыпуклых граней с одним узлом невыпуклости реализован метод разрезания грани без добавления новых узлов в сетку [3], но данный способ дает удовлетворительный результат не во всех случаях. На рис. 11, а представлена грань, для которой этот метод не может быть применен, поскольку в результате каждого из разрезов один из фрагментов является невыпуклым. Пунктирными линиями показаны два возможных варианта построения разреза.

Для решения данной проблемы реализован способ разрезания грани с добавлением нового узла. Схематичное представление грани с возможными вариантами формирования узла представлены на рис. 11, б.

Рассмотрим невыпуклую грань $ABCDEF$, у которой узел F является узлом невыпуклости. Узел P образуется после пересечения продолжения ребра AF с одним из несмежных ребер грани $ABCDEF$. При этом образуются две части грани — $ABPF$ и $PCDEF$. Обе полученные части грани должны быть выпуклыми, и площадь каж-

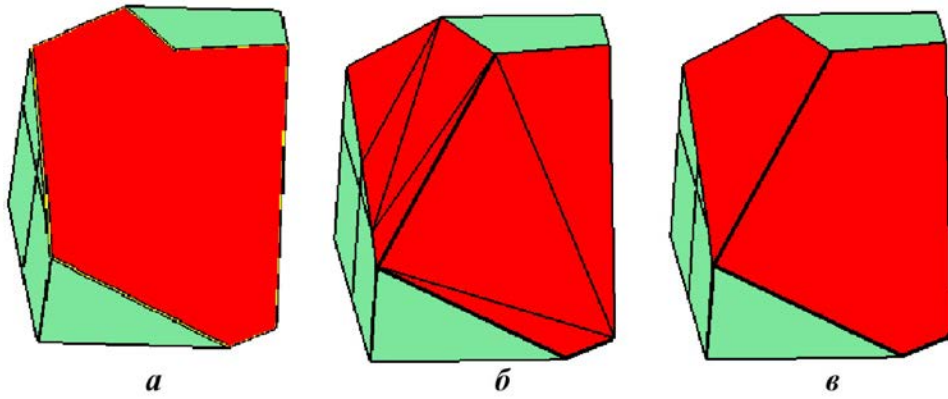


Рис. 10. Разрезание грани: *a* — исходная грань; *b* — разбиение на треугольники; *в* — объединение треугольников

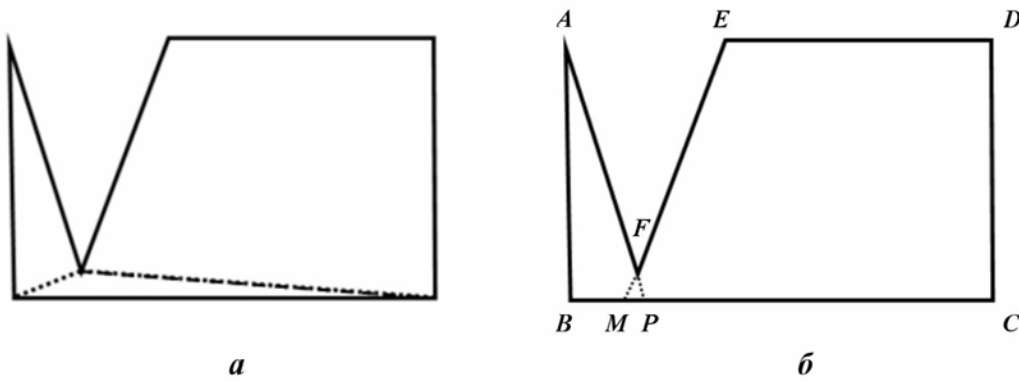


Рис. 11. Пример грани с двумя некорректными разрезами без добавления новых узлов (*a*) и с возможными вариантами разрезания (*б*)

дой части должна быть больше, чем 10% площади исходной грани. Если это условие не выполняется, то находим другой узел M как точку пересечения продолжения ребра EF с одним из других несмежных ребер грани $ABCDEF$.

После того как нужный узел, например P , найден, происходит разрезание исходной грани

на две (в данном случае $ABPF$ и $CDEFP$). Найденный узел P проецируется на поверхностную треугольную сетку и добавляется в описание сетки.

На рис. 12 представлен результат разрезания невыпуклых граней с добавлением нового узла A .

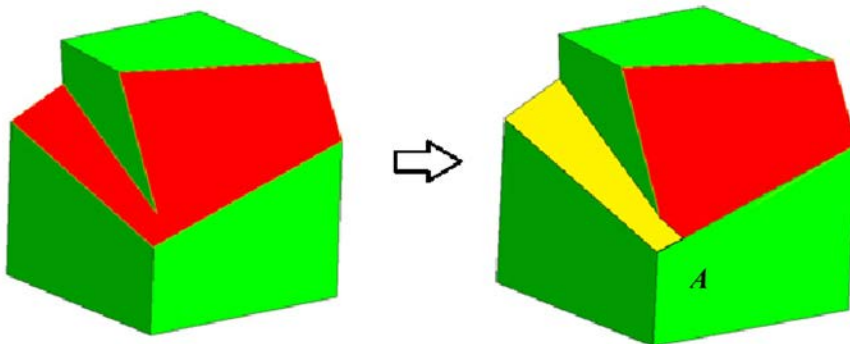


Рис. 12. Пример применения способа разрезания невыпуклых граней с добавлением нового узла сетки

Если после проецирования найденного узла на поверхностную треугольную сетку в новых гранях возникают самопересечения, то дополнительно выполняется поиск ребра (например, BC на рис. 13), у которого расстояние до узла выпуклости (узел E) меньше 10% длины этого ребра.

Чтобы избежать появления малых ребер, найденное ребро BC заменяется двумя близко лежащими к нему ребрами BE и EC . На всех гранях, содержащих первоначальное ребро (BC), проводится его замена на новую пару ребер BE и EC . Все соседние по ребру грани проверяются на выпуклость. В результате грань $ABCDEF$ разбивается на две грани — $ABEF$ и ECD .

Пример удаления нового ребра при разрезании грани показан на рис. 14.

Разрезание искривленных граней на множество плоских в зонах перехода областей с характерными особенностями в гладкую область. Подходы к выявлению характерных особенностей поверхностной сетки описаны в работах [18–20]. Если характерная

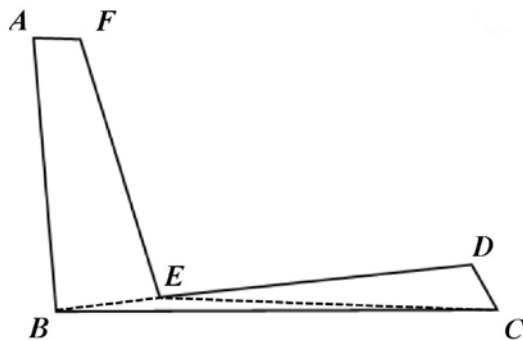


Рис. 13. Пример невыпуклой грани

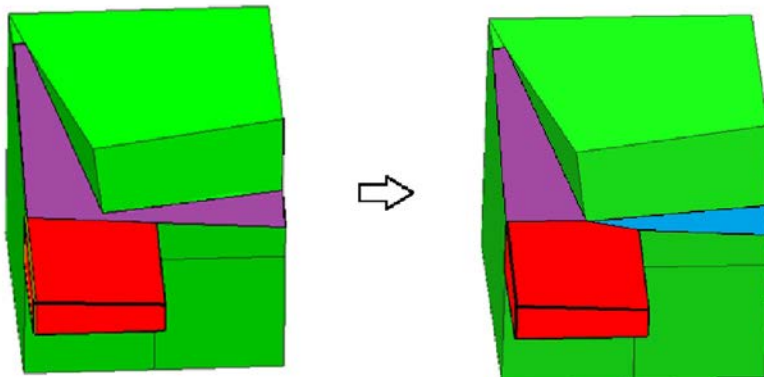


Рис. 14. Пример удаления нового ребра при разрезании грани

кривая переходит в гладкую область, как показано на рис. 15, то могут появляться ячейки, поверхностные грани которых имеют степень искривления больше порогового значения. Ячейки пограничного слоя, восстановленные с таких граней, также будут иметь искривленные основания.

Для коррекции таких граней реализован отдельный метод. Каждую поверхностную грань можно разбить на множество выпуклых фрагментов различными способами [21]. Из всех возможных вариантов разбиения выбирается тот, у которого разница между площадями фрагментов минимальна. На основе этих фрагментов формируется набор плоских граней. На рис. 16, *a* показана ячейка с поверхностной гранью $P_1P_2P_3P_4$ до разрезания, на рис. 16, *б* — после разрезания. В результате разрезания сформированы две грани — $P_1P_2P_3$ и $P_1P_3P_4$.

Для оценки эффективности применения способов улучшения качества граней ячеек выполнено сравнение по основным критериям качества расчетных сеток для модели летательного аппарата, построенных с использованием программного модуля улучшения качества сетки и без него. Общий вид модели представлен на рис. 17. Модель содержит около 5 млн ячеек.

Результаты сравнения приведены в таблице.

Из таблицы видно, что использование модуля улучшения качества граней ячеек позволяет получить более высокое качество сетки. Для каждой построенной сетки эффективность работы модуля улучшения качества по критериям будет различаться, поскольку формы ячеек и граней

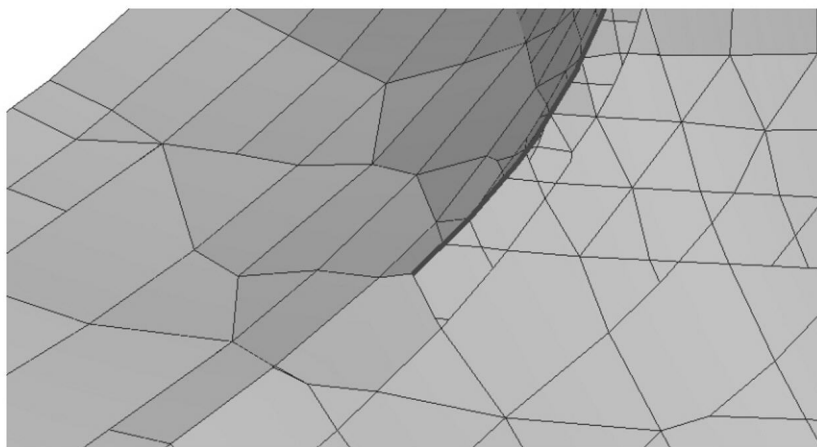


Рис. 15. Фрагмент сетки, в котором характерная кривая переходит в гладкую область

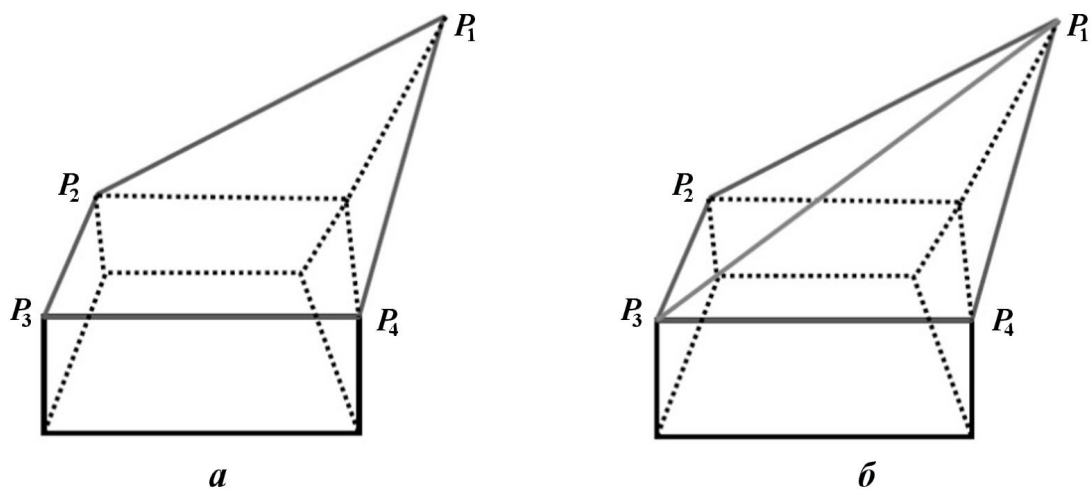


Рис. 16. Пример многогранной ячейки до (а) и после (б) разрезания грани

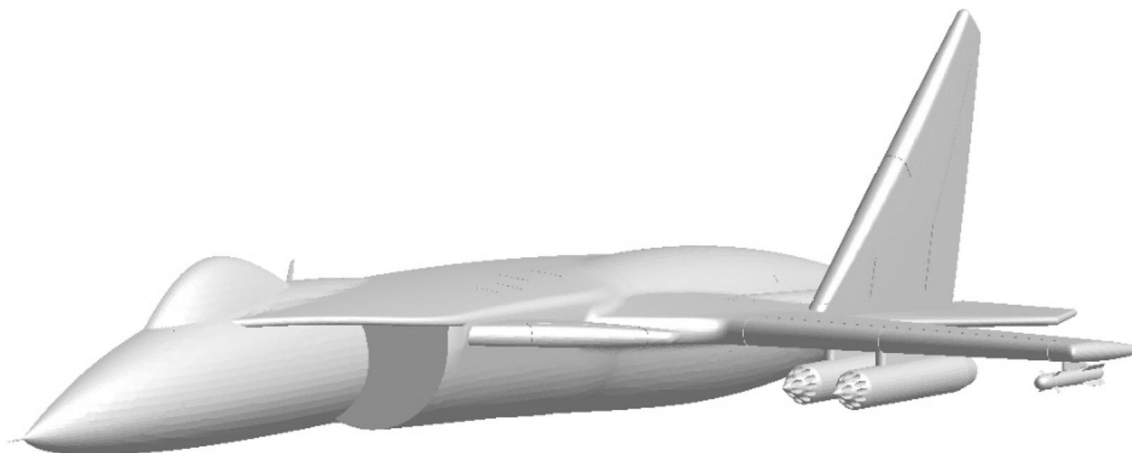


Рис. 17. Общий вид модели летательного аппарата

Сравнение качества сеток, построенных с использованием и без использования модуля улучшения качества граней ячеек

Критерий	Численные характеристики качества сеток		
	без улучшений	с улучшениями	Улучшение, %
Невыпуклые грани	11	4	64
Соотношение площадей граней	142	97	32
Совпадающие грани	620	69	89
Искривление граней	5 850	318	95

значительно зависят от геометрии задачи. Например, для данной задачи наиболее значительное улучшение было получено по критерию *Искривление граней* (95%), наименьшее — по критерию *Соотношение площадей граней* (~ 32%).

Заключение

В связи с постоянно возрастающей сложностью и детализацией геометрических моделей, а также расширением областей применимости пакета программ "Логос" при расчете задач аэро- и гидродинамики повышаются требования к качеству расчетных сеток, построенных с использованием генератора на основе метода отсечения.

Анализ причин некорректного моделирования ряда задач различной сложности позволил выработать критерии численной оценки качества расчетной сетки. На основе этих критериев разработаны и реализованы способы повышения качества многогранных ячеек. Использование их при построении объемной сетки существенно повышает качество ячеек, тем самым увеличивая точность проведения дальнейшего расчета на построенной объемной сетке.

Кроме того, методы повышения качества граней многогранных ячеек используются с целью адаптации расчетной сетки под особенности протекающих физических процессов для корректного численного моделирования задач аэро- и гидродинамики, в частности расчета вязких турбулентных течений в ячейках приграничного слоя. Этап улучшения качества граней ячеек является одним из ключевых в процессе построения расчетной сетки методом отсечения, поскольку результат его работы оказывает значительное влияние на качество ячеек пограничного слоя.

В статье приведены критерии диагностики невыпуклых и искривленных граней, рассмотрены способы улучшения качества граней отсеченных ячеек, реализованные в генераторе сеток на

основе метода отсечения, который используется в пакете программ "Логос"

Описанные в статье методы позволяют существенно расширить применимость генератора, обеспечивая построение качественных расчетных сеток для моделирования задач аэро- и гидродинамики.

Список литературы

1. Козелков А. С., Жучков Р. Н., Уткина А. А., Володченкова К. Б. Моделирование турбулентных течений на сетках гибридной структуры с использованием схем высокого порядка точности // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2014. Вып. 3. С. 18–31.
Kozelkov A. S., Zhuchkov R. N., Utkina A. A., Volodchenkova K. B. Modelirovanie turbulentnykh techeniy na setkakh gibridnoy struktury s ispolzovaniem skhem vysokogo poryadka tochnosti // Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov. 2014. Vyp. 3. S. 18–31.
2. Борисенко О. Н., Лукичев А. Н., Евстифеева Е. О., Панкратов Д. М., Цалко Т. В., Гиниятуллина А. Г. Алгоритмы обработки особенностей геометрических моделей при построении поверхностных треугольных сеток в препроцессоре пакета программ "Логос" // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2020. Вып. 3. С. 40–51.
Borisenko O. N., Lukichev A. N., Evstifeeva E. O., Pankratov D. M., Tsalko T. V., Giniyatullina A. G. Algoritmy obrabotki osobennostey geometricheskikh modeley pri postroenii poverkhnostnykh treugolnykh setok

- v preprotssessore paketa programm "Logos" // *Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov.* 2020. Vyp. 3. S. 40–51.
3. *Смолкина Д. Н., Борисенко О. Н., Черенкова М. В., Гиниятуллина А. Г., Кузьменко М. В., Чухманов Н. В., Потехина Е. В., Попова Н. В., Турусов М. Р.* Автоматический генератор неструктурированных многогранных сеток в препроцессоре пакета программ ЛОГОС // Там же. 2018. Вып. 2. С. 25–39.
Smolkina D. N., Borisenko O. N., Cherenkova M. V., Giniyatullina A. G., Kuzmenko M. V., Chukhmanov N. V., Potekhina E. V., Popova N. V., Turusov M. R. Avtomaticheskii generator nestrukturirovannykh mnogogrannykh setok v preprotssessore paketa program LOGOS // Там же. 2018. Vyp. 2. S. 25–39.
 4. *Попова Н. В., Борисенко О. Н., Корнеева И. И., Чухманов Н. В., Потехина Е. В., Лазарев В. В., Гиниятуллина А. Г.* Автоматический генератор неструктурированных тетраэдральных сеток с призматическими слоями в препроцессоре пакета программ ЛОГОС // Там же. 2020. Вып. 1. С. 43–57.
Popova N. V., Borisenko O. N., Korneeva I. I., Chukhmanov N. V., Potekhina E. V., Lazarev V. V., Giniyatullina A. G. Avtomaticheskii generator nestrukturirovannykh tetraedralnykh setok s prizmaticheskimi sloyami v preprotssessore paketa program LOGOS // Там же. 2020. Vyp. 1. S. 43–57.
 5. *Попова Н. В.* Автоматический генератор неструктурированных многогранных сеток на основе тетраэдральных сеток с призматическими слоями // Там же. 2021. Вып. 3. С. 70–83.
Popova N. V. Avtomaticheskii generator nestrukturirovannykh mnogogrannykh setok na osnove tetraedralnykh setok s prizmaticheskimi sloyami // Там же. 2021. Vyp. 3. S. 70–83.
 6. *Лазарев В. В.* Распараллеливание и оптимизация построения блочных расчетных сеток в препроцессоре пакета программ ЛОГОС // Там же. 2018. Вып. 1. С. 54–63.
Lazarev V. V. Rasparallelivanie i optimizatsiya postroeniya blochnykh raschetnykh setok v preprotssessore paketa programm LOGOS // Там же. 2018. Vyp. 1. S. 54–63.
 7. *El Gindy H., Everett H., Toussaint G. T.* Slicing an ear using prune-and-search // *Pattern Recognition Letters: journal.* 1993. Vol. 14, No 9. P. 719–722.
 8. *Воропинов А. А., Соколов С. С., Шмелёва А. К.* Построение трехмерной сетки на основе диаграммы вороного в невыпуклых областях // *Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов.* 2018. Вып. 2. С. 40–54.
Voropinov A. A., Sokolov S. S., Shmelyeva A. K. Postroenie trekhmernoy setki na osnove diagrammy Voronogo v nevyuklykh oblastyakh // *Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov.* 2018. Vyp. 2. S. 40–54.
 9. *Garimella R. V., Kim J., Berndt M.* Polyhedral mesh generation and optimization for non-manifold domains // *Proc. 22nd Int. Meshing Roundtable.* Springer International Publishing, 2014. P. 313–330.
 10. *Balafas G.* Polyhedral Mesh Generation for CFD-Analysis of Complex Structures. Master Thesis. Technische Universitat Munichen, 2014.
 11. *Гаранжа В. А., Кудрявцева Л. Н., Цветкова В. О.* Построение гибридных расчетных сеток Вороного. Алгоритмы и нерешенные проблемы // *Журнал вычисл. мат. и мат. физ.* 2019. Т. 59, № 12. С. 2024–2044.
Garanzha V. A., Kudryavtseva L. N., Tsvetkova V. O. Postroenie gibridnykh raschetnykh setok Voronogo. Algoritmy i nereshennyye problemy // *Zhurnal vychisl. mat. i mat. fiz.* 2019. T. 59, № 12. S. 2024–2044.
 12. *Dumetrescu A., Toth C. D.* Minimum Weight Convex Steiner Partitions. Department of Computer Science and Hausdorff Center for Mathematics University of Bonn, 2009.
 13. *Owen S. J.* Non-Simplicial Unstructured Mesh Generation. USA, Pittsburg, 1999.
 14. *Handbook of Grid Generation / Ed. by J. F. Thompson, B. K. Soni, N. P. Weatherill.* Boca Raton, Florida, USA: CRC Press, 1999.
 15. *Jasak H., Tukovi Z.* Automatic mesh motion for the unstructured finite volume method //

- Transactions of FAMENA. 2006. Vol. 30 (2). P. 1–20.
16. *Чернышенко А. Ю.* Технология построения адаптируемых многогранных сеток и численное решение эллиптических уравнений 2-го порядка в трехмерных областях и на поверхностях: Автореф. дис. канд. физ.-мат. наук. М.: ИВМ РАН. 2013.
Chernyshenko A. Yu. Tekhnologiya postroyeniya adaptiruemykh mnogogrannykh setok i chislennoe reshenie ellipticheskikh uravneniy 2-go poryadka v trekhmernykh oblastiakh i na poverkhnostyakh: Avtoref. dis. kand. fiz.-mat. nauk. M.: IVM RAN. 2013.
17. *Klincsek G. T.* Minimal triangulations of polygonal domains // Proc. Annals of Discrete Mathematics. 1980. Vol. 9. P. 121–123.
18. *Jiao X., Heath M. T.* Feature detection for surface meshes // Proc. 8th Int. Conf. on Numerical Grid Generation in Computational Field Simulations. Honolulu, Hawaii, USA, 2002. P. 705–714.
19. *Jiao X., Alexander P.* Parallel feature-preserving mesh smoothing // Proc. Int. Conf. on Comput. Sci. and Appl. Singapore, 2005. P. 1180–1189.
20. *Baker T.* Identification and preservation of surface features // Proc. 13th Int. Meshing Roundtable. Williamsburg, Virginia, USA, 2004. P. 299–310.
21. *Eberly D.* The Minimal Cycle Basis for a Planar Graph. <https://www.geometrictools.com/>.

Статья поступила в редакцию 22.12.21.
