УДК 536.71; 524.3-17; 510.67
DOI 10.53403/02340763_2022_2_38

РЕЛЯТИВИСТСКОЕ УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ

Б. А. Надыкто, О. Б. Надыкто, А. Б. Надыкто

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

Выведено новое релятивистское уравнение состояния при нулевой температуре, исходя из предположения, что все упругое (холодное) давление в твердом теле возникает в результате изменения энергии электронов атома при условии квантования их релятивистского момента импульса. Получена формула для релятивистской энергии электронов и оценена величина плотности, при которой эта энергия превышает значение $\left(m_n - m_p\right)c^2$. При этом происходит превращение протонов в нейтроны (нейтронизация протонов). Определено давление, которое в промежуточной асимптотике, $\gamma = 5/3$, в 2,1 раза ниже, чем давление вырожденного электронного газа.

Ключевые слова: уравнение состояния, релятивистский газ электронов, вырожденный электронный газ, нейтронизация протонов, эволюция звезд.

Введение

В космологии при рассмотрении динамики звезд на стадии выгорания термоядерного топлива в центральной части звезды рассматриваются очень высокие плотности вещества, доходящие до плотности внутри атомных ядер (10^{14} г·см$^{-3}$) [1]. При рассмотрении таких плотностей обычно используется модель вырожденного электронного газа [2]. Кратко остановимся на уравнении состояния вырожденного электронного газа и на альтернативном ему уравнении состояния. Последнее основано на предположении, что упругое (холодное) давление связано с изменением энергии электронов в атомах твердого тела при условии квантования их момента импульса по Н. Бору

$$\frac{mvr}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = n\hbar.$$

В квантовой теории металлов производят искусственное разделение электронов атомов твердого тела на внутренние и внешние (валентные) электроны. Энергию и пространственное расположение внутренних электронов (так же, как в свободном атоме) можно найти, определяя минимум энергии при условии, что момент импульса электронов принимает целочисленные (в единицах $\hbar$) значения.

Внешние электроны считаются вырожденными (коллективизированными или принадлежащими всем атомам металла), т. е. их состояние кардинально отличается от состояний свободного атома. Заполнение состояний этих вырожденных электронов производится в соответствии с принципом Паули: в каждой ячейке фазового пространства объемом $\left(2\pi\hbar\right)^3$ может содержаться не более двух электронов с разными направлениями спина. При таком заполнении фазового пространства электроны принимают значение кинетической энергии от нулевого значения до максимального E_F, называемого энергией Ферми.

Число состояний электрона в объеме V со значениями импульса в интервале p и $p + dp$ (с учетом двух направлений спина электрона) равно

$$2V\frac{4\pi p^2 dp}{\left(2\pi\hbar\right)^3}.$$

Вырожденным считается электронный газ при нулевой температуре, когда заполняются состояния, начиная с нулевого импульса (и энергии) и кончая максимальным импульсом, называемым импульсом Ферми. Граничный импульс Ферми получается из уравнения

$$\int_0^{p_F} 2\frac{V4\pi p^2dp}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{Vp_F{}^3}{3\pi^2\hbar^3} = N,$$

где V – объем, N – число электронов в объеме V, p_F – граничный импульс Ферми. Отсюда получаем

$$p_F = \hbar\left(3\pi^2\frac{N}{V}\right)^{1/3}. \qquad (1)$$

Соответственно, для граничной энергии Ферми имеем

$$E_F = \frac{p_F^2}{2m} = \left(3\pi^2\right)^{2/3}\left(\frac{N}{V}\right)^{2/3}\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\left(4\pi a_0^3/3\right)^{2/3}}{\left(4\pi a_0^3/3\right)^{2/3}} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{3\pi^2}{4\pi/3}\right)^{2/3}\left(\frac{V_0}{V}\right)^{2/3}\frac{e^2a_0}{a_0^2} =$$

$$= \frac{1,8416e^2}{a_0}\left(\frac{V_0}{V}\right)^{2/3} = \frac{1,8416e^2}{a_0}\frac{1}{r_s{}^2}. \qquad (2)$$

Здесь $\frac{e^2}{a_0} = 27,21165$ эВ – атомная единица энергии, $V_0 = \frac{4\pi a_0^3}{3}$, $r_s = \frac{r_{WS}}{a_0}$, r_{WS} – радиус ячейки Вигнера–Зейтца. Средняя кинетическая энергия свободных электронов при этом равна

$$E = \frac{2V\int_0^{p_F}\frac{p^2 4\pi p^2dp}{2m(2\pi\hbar)^3}}{2V\int_0^{p_F}\frac{4\pi p^2dp}{(2\pi\hbar)^3}} = \frac{\int_0^{p_F}p^4dp}{2m\int_0^{p_F}p^2dp} = \frac{1}{2m}\frac{3p_F^2}{5} =$$

$$= \frac{3E_F}{5} = \frac{1,105e^2}{a_0}\left(\frac{V_0}{V}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{1,105e^2}{a_0}\frac{1}{r_s{}^2}. \qquad (3)$$

В ультрарелятивистском электронном газе энергия частицы равна $\varepsilon = cp$. Средняя энергия свободных электронов в этом случае равна

$$E = \frac{2V\int_0^{p_F}\frac{cp4\pi p^2dp}{(2\pi\hbar)^3}}{2V\int_0^{p_F}\frac{4\pi p^2dp}{(2\pi\hbar)^3}} = \frac{\int_0^{p_F}cp^3dp}{\int_0^{p_F}p^2dp} = \frac{3cp_F}{4} =$$

$$= \frac{3c(3\pi^2)^{1/3}\hbar}{4}\left(\frac{4\pi a_0{}^3N3}{3V4\pi a_0{}^3}\right)^{1/3} =$$

$$= \frac{3(9\pi/4)^{1/3}e^2\hbar c}{4a_0e^2}\left(\frac{V_0}{V}\right)^{1/3} = \frac{3(9\pi/4)^{1/3}e^2}{4\alpha a_0}\frac{a_0}{r}.$$

В атомных единицах энергия равна

$$E = \frac{1,4394}{\alpha}\frac{a_0}{r} = 197,245\frac{a_0}{r}. \qquad (4)$$

В свободных атомах внешние электроны образуют связь с ионом, и их полная энергия принимает отрицательное значение. В твердом теле связь внешних электронов увеличивается за счет скрытой теплоты конденсации, что приводит к росту модуля полной энергии. В квантово-механических расчетах используются энергия кулоновского взаимодействия между заряженными частицами, а также обменное взаимодействие, связанное с антисимметрией волновых функций.

Отсутствие кулоновского взаимодействия электронов в металлах может означать жесткую связь каждого из них с ионом с образованием нейтрального атома. В этом случае точно так же нет кулоновского взаимодействия ионов разных атомных ячеек. Большая часть энергии взаимодействия электронов в твердом теле такая же, как в свободном атоме. Энергия связи атомов в металле может быть объяснена некулоновским взаимодействием электронов, аналогичным взаимодействию электронов различных электронных оболочек в свободных многоэлектронных атомах. Именно введение такого дополнительного взаимодействия позволило с высокой точностью описать многочисленные состояния свободных He-, Li-, Be-, B-, C-, N-. O-подобных ионов [3].

Рассмотрим теперь уравнение состояния, альтернативное уравнению состояния вырожденного электронного газа. Рассмотрение проведем на основе атома водорода, как преобладающего по распространенности во Вселенной. Как известно, электроны в атомах подчиняются квантовым законам и образуют дискретные электронные оболочки, отвечающие различным значениям их момента импульса. Электронные переходы между квантовыми состояниями наблюдаются в горячей разреженной плазме и экспериментально надежно фиксируются методами атомной спектроскопии (энергия перехода с относительной точностью 10^{-4} и лучше). Рентгеновские спектры (в том числе для твердого тела) также показывают наличие электронных оболочек атомов.

При сжатии состояния атома водорода энергия электрона изменяется в соответствии с выражением:

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{e^2}{r}.$$

Из условия квантования $mvr = n\hbar$ значение скорости равно $v = n\hbar / mr.$ Отсюда

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{e^2}{r} = \frac{n^2\hbar^2 e^2}{2me^2 r^2} - \frac{e^2}{r} = \frac{n^2 a_o e^2 a_o}{2r^2 a_o} - \frac{e^2 a_o}{r a_o} =$$
$$= \frac{n^2 e^2}{2x^2 a_o} - \frac{e^2}{x a_o} = \frac{e^2}{a_o}\left(\frac{n^2}{2x^2} - \frac{1}{x}\right),$$

или в атомных единицах $\dfrac{e^2}{a_0}$

$$E = \frac{n^2}{2x^2} - \frac{1}{x}, \qquad (5)$$

где $x = \dfrac{r}{a_0}$, r – радиус ячейки Вигнера–Зейтца, a_0 – радиус первой боровской орбиты.

Из условия минимума энергии

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{n^2}{x^3} + \frac{1}{x^2} = 0$$

получаем равновесное значение $x_e = n^2.$

В этой модели кинетическая энергия, приходящаяся на один электрон,

$$E_k = \frac{e^2}{a_0}\frac{1}{2x^2} = \frac{0{,}5e^2}{a_0}\left(\frac{V_0}{V}\right)^{2/3} \qquad (6)$$

в 2,1 раза меньше, чем в вырожденном электронном газе при сохранении аналитической зависимости от плотности (удельного объема).

Энергия (5) рассчитана на один атом. Для получения энергии в грамме водорода эту величину нужно умножить на число атомов в грамме, равное

$$N = \frac{1}{A}N_A,$$

где A – атомная масса, N_A – число Авогадро.

При нулевой температуре все атомы находятся в основном состоянии с главным квантовым числом $n = 1$. Поэтому энергия одного грамма сжатого атомарного водорода равна

$$E = \frac{e^2 N_A}{a_0 A}\left(\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x}\right) = \frac{e^2 N_A}{a_0 A}\left(\frac{\sigma^{2/3}}{2} - \sigma^{1/3}\right), \quad (7)$$

где $\sigma = \left(a_0 / r_{WS}\right)^3$ – степень сжатия атомной ячейки водорода.

Исходя из выражения (7) вычисляется упругое (холодное) давление

$$P = -\frac{\partial E}{\partial V} = -\frac{\rho_0 \partial E}{\partial(\rho_0/\rho)} = \frac{e^2\rho_0\sigma^2 N_A}{a_0 A}\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{\sigma^{2/3}}{2} - \sigma^{1/3}\right) =$$
$$= \frac{e^2\rho_0\sigma^2 N_A}{a_0 A}\left(\frac{\sigma^{-1/3}}{3} - \frac{\sigma^{-2/3}}{3}\right) = \frac{e^2\rho_0 N_A}{a_0 3A}\left(\sigma^{5/3} - \sigma^{5/3}\right).$$

Модуль объемного сжатия равен:

$$B = -V\frac{\partial P}{\partial V} = \sigma\frac{\partial P}{\partial\sigma} = \frac{e^2\rho_0 N_A}{a_0 3A}\sigma\left(\frac{5}{3}\sigma^{2/3} - \frac{4}{3}\sigma^{1/3}\right) =$$
$$= \frac{e^2\rho_0 N_A}{a_0 9A}\left(5\sigma^{5/3} - 4\sigma^{4/3}\right) = B_0\left(5\sigma^{5/3} - 4\sigma^{4/3}\right).$$

Отсюда следует

$$B_0 = \frac{e^2\rho_0 N_A}{a_0 9A} \quad \text{и}$$

$$P = 3B_0\left(\sigma^{5/3} - \sigma^{5/3}\right), \qquad (8)$$

где $B_0 = B(\sigma = 1)$.

Выражение (8) выходит на асимптотику $P \simeq 3B_0\sigma^{5/3}$ очень медленно. Даже при значении $\sigma = 1000$ отличие асимптотики от (9) составляет 10 %. Кроме того, асимптотическое значение (8) в 2,21 раза меньше значения для вырожденного электронного газа, что связано с использованием разных физических моделей. Впрочем, в области очень высоких давлений, о которой экспериментально ничего не известно, различающиеся в два раза результаты можно считать совпадающими.

Вследствие разных физических моделей качественно различные следствия можно ожидать в задачах эволюции звезд, когда происходит нейтронизация атомов (превращение протонов в нейтроны при захвате электронов ядрами). Модель вырожденного газа применяют также к нейтронам, т. е. предполагают движение нейтронов при нуле температуры, аналогичное движению вырожденного электронного газа. В нашей модели мы не видим физических причин движения ядер и нейтронов при нулевой температуре, и после нейтронизации протонов вклад в давление дает только тепловое движение нейтронов с температурой в момент нейтронизации, которое в вырожденном газе может быть значительно меньше упругого давления. Поэтому при нейтронизации должно резко уменьшиться давление, что приведет к гидродинамическим течениям и, возможно, к нестабильности и взрыву звезды.

Релятивистское уравнение состояния

В космологии при очень высоких плотностях (10^6–10^{15} г·см$^{-3}$) широко используется релятивистское уравнение состояния вырожденного газа. В нашей модели также можно получить релятивистское уравнение состояния, несколько отличающееся от уравнения состояния вырожденного электронного газа.

С учетом релятивистских эффектов энергия электрона определяется выражением

$$E^2 = \left(mc^2\right)^2 + p^2c^2,$$

где p – импульс электрона, m – его масса, c – скорость света. В релятивистском приближении импульс равен

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

где v – скорость электрона. Кинетическая энергия электрона равна

$$E_k = mc^2\left(\sqrt{1 + \frac{p^2c^2}{m^2c^4}} - 1\right) = mc^2\left(\sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2\left(1 - v^2/c^2\right)}} - 1\right) = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1\right). \qquad (9)$$

Используем условие квантования момента импульса электрона по Бору

$$\frac{mvr}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = n\hbar,$$

где $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$, h – постоянная Планка, $n = 1, 2, 3\ldots$ – целые числа. Из условия квантования получаем

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{\alpha^2 m^2 a_0^2 r^2 c^2}{\alpha^2 n^2 \hbar^2 a_0^2}\frac{v^2}{c^2} = \frac{x^2}{\alpha^2 n^2}\frac{v^2}{c^2},$$

где $x = \dfrac{r}{a_0}$, $\alpha = \dfrac{1}{137{,}036}$ – постоянная тонкой структуры, $\dfrac{\alpha^2 a_0^2 m^2 c^2}{\hbar^2} = \dfrac{e^4 a_0^2 m^2 c^2}{\hbar^2 c^2 \hbar^2} = 1$. Отсюда получаем

$$\frac{x^2}{\alpha^2 n^2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{v^2}{c^2} = \frac{v^2}{c^2}\left(1 + \frac{x^2}{\alpha^2 n^2}\right) = 1 \text{ или}$$

$$\frac{v^2}{c^2} = 1\Big/\left(1 + \frac{x^2}{\alpha^2 n^2}\right).$$

Производя преобразования, получаем

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{1}{\left(1 + \dfrac{x^2}{\alpha^2 n^2}\right)} = \frac{x^2/\alpha^2 n^2}{1 + \dfrac{x^2}{\alpha^2 n^2}} = \frac{1}{1 + \dfrac{\alpha^2 n^2}{x^2}}.$$

Поэтому с учетом квантования получаем для кинетической энергии электрона выражение

$$E_k = mc^2\left(\sqrt{1 + \frac{\alpha^2 n^2}{x^2}} - 1\right). \qquad (10)$$

Потенциальная энергия взаимодействия электрона с ядром равна

$$E_p = -\frac{Ze^2}{r} = \frac{Ze^2 a_0}{a_0 r} = -\frac{e^2}{a_0}\frac{Z}{x},$$

Z – заряд ядра. Полная энергия $E = E_k + E_p$ (в атомных единицах)

$$E = \frac{1}{\alpha^2}\left(\sqrt{1 + \frac{\alpha^2 n^2}{x^2}} - 1\right) - \frac{Z}{x}. \qquad (11)$$

Эта формула в общем случае дает выражение для энергии сжатого атома. В ультрарелятивистском пределе энергия равна

$$E = \left(\frac{n}{\alpha} - Z\right)\frac{1}{x}.$$

При сжатии основного состояния атома водорода это значение энергии в 1,45 раза меньше, чем для вырожденного электронного газа.

На рис. 1 показана зависимость логарифма полной энергии (кривая 1) и логарифма кинетической энергии (кривая 2) от десятичного логарифма плотности для атомарного водорода в основном состоянии, рассчитанная с использованием формул (10) и (11) с $n=1$ и $Z=1$. Уменьшение наклона при большой плотности объясняется влиянием релятивистских эффектов.

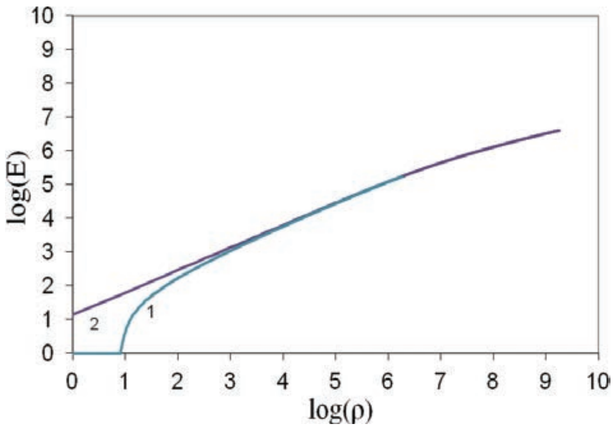

Рис. 1. Зависимость $\log(E)$ от $\log(\rho)$ для водорода: 1 – сумма кинетической и потенциальной энергии, 2 – кинетическая энергия. Энергия в электронвольтах, плотность в единицах г·см$^{-3}$

Энергия электрона в атоме водорода больше чем $(m_n - m_p)c^2$ достигается при плотности около 10^7 г·см$^{-3}$. Происходит нейтронизация протонов, и упругая энергия и давление пропадают. Поэтому при нейтронизации должно резко уменьшиться давление, что может привести к быстрым гидродинамическим течениям, нестабильности и взрыву звезды.

В состоянии равновесия энергия минимальна. Из уравнения (11) получаем

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{1}{\alpha^2}\left[-\frac{\alpha^2 n^2}{x^3}\left(1+\frac{\alpha^2 n^2}{x^2}\right)^{-1/2}\right] + \frac{Z}{x^2} =$$

$$= -\frac{n^2}{x^3}\left(1+\frac{\alpha^2 n^2}{x^2}\right)^{-1/2} + \frac{Z}{x^2} = 0 \qquad (12)$$

Из уравнения (12) получаем:

$$-\frac{n^2}{Zx}\left(1+\frac{\alpha^2 n^2}{x^2}\right)^{-1/2} + 1 = 0.$$

Отсюда

$$\frac{n^2}{Zx} = \left(1+\frac{\alpha^2 n^2}{x^2}\right)^{1/2}$$

или

$$\frac{n^2}{x^2}\left(\frac{n^2}{Z^2} - \alpha^2\right) = 1.$$

Следовательно, для равновесного значения параметра x_e получаем выражение

$$x_e = n\left(\frac{n^2}{Z^2} - \alpha^2\right)^{1/2} = \frac{n^2}{Z}\left(1 - \frac{\alpha^2 Z^2}{n^2}\right)^{1/2}. \qquad (13)$$

Соответственно, подставляя (13) в уравнение (11), получаем равновесное значение энергии

$$E_n = E = \frac{1}{\alpha^2}\left(\sqrt{1+\frac{\alpha^2}{\left(\frac{n^2}{Z^2}-\alpha^2\right)}} - 1\right) - \frac{Z}{n\left(\frac{n^2}{Z^2}-\alpha^2\right)^{1/2}} =$$

$$= \frac{1}{\alpha^2}\left[\frac{n}{\alpha Z\left(\frac{n^2}{Z^2\alpha^2}-1\right)^{\frac{1}{2}}} - 1\right] - \frac{\alpha Z}{\alpha^2 n\left(\frac{n^2}{Z^2\alpha^2}-1\right)^{\frac{1}{2}}},$$

или после преобразований

$$E_n = \frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{1}{\left(1-\frac{Z^2\alpha^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}} - 1 - \frac{\alpha^2 Z^2}{n^2\left(1-\frac{Z^2\alpha^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\alpha^2}\left(\left(1-\frac{Z^2\alpha^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} - 1\right). \qquad (14)$$

При нулевой температуре все атомы водорода находятся в основном состоянии с главным квантовым числом $n=1$ и энергия одного грамма сжатого атомарного водорода равна

$$E = \frac{e^2 N_A}{a_0 A}\left[\frac{1}{\alpha^2}\left(\sqrt{1+\frac{\alpha^2}{x^2}} - 1\right) - \frac{1}{x}\right] =$$
$$= \frac{e^2 N_A}{a_0 A}\left[\frac{1}{\alpha^2}\left(\sqrt{1+\alpha^2\sigma^{2/3}} - 1\right) - \sigma^{1/3}\right], \qquad (15)$$

где $\sigma = (a_0 / r_{WS})^3$ – степень сжатия атомной ячейки водорода.

В сжатом атоме при сохранении квантового состояния давление при $T=0$, упругое (холодное) давление вычисляется исходя из выражения (15):

$$P=-\frac{\partial E}{\partial V}=-\frac{\rho_0 \partial E}{\partial(\rho_0/\rho)}=$$

$$=\frac{e^2\rho_0\sigma^2 N_A}{a_0 A}\frac{\partial}{\partial\sigma}\left[\frac{1}{\alpha^2}\left(\sqrt{1+\alpha^2\sigma^{2/3}}-1\right)-\sigma^{1/3}\right]=$$

$$=\frac{e^2\rho_0\sigma^2 N_A}{a_0 A}\left(\frac{2\alpha^2\sigma^{-1/3}}{2\alpha^2 3\sqrt{1+\alpha^2\sigma^{2/3}}}-\frac{\sigma^{-2/3}}{3}\right)=$$

$$=3B_0\left(\sigma^{5/3}\left(1+\alpha^2\sigma^{2/3}\right)^{-1/2}-\sigma^{4/3}\right) \qquad (16)$$

От нерелятивистского приближения (8) выражение (16) отличается только дополнительным множителем в первом члене.

На рис. 2. показана зависимость $\log(P)$ от $\log(\rho)$ по уравнениям состояния (8) и (16). Данные (8) и (16) совпадают до $\sigma = 10^6$, при большей плотности в релятивистском приближении получается меньшее давление (примерно в 10 раз при 10^9 г·см$^{-3}$). На этом же рисунке показано давление в нерелятивистском вырожденном электронном газе. Асимптотическое значение в 2,21 раза выше, чем по уравнению (16). Выход на асимптотику происходит очень медленно. При плотности водорода примерно 100 г·см$^{-3}$ давление в вырожденном электронном газе в 7 раз выше, чем по уравнению (16). При плотности 10^4 г·см$^{-3}$ давление в вырожденном электронном газе в 2,5 раза выше, чем по уравнению (16).

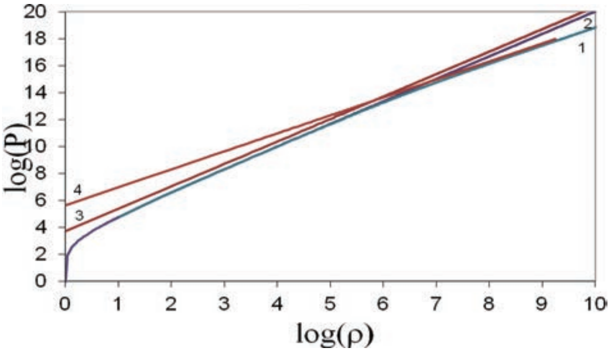

Рис. 2. Зависимость $\log(P)$ от $\log(\rho)$ в водороде: 1 – расчет давления в релятивистском приближении, 2 – нерелятивистский расчет, 3 – давление в нерелятивистском вырожденном электронном газе, 4 – давление в ультрарелятивистском вырожденном электронном газе. Давление в ГПа, плотность в единицах г·см$^{-3}$. Релятивистское приближение отличается от нерелятивистского, начиная с плотности 10^6 г·см$^{-3}$

Показатель адиабаты релятивистского уравнения состояния

Определим показатель адиабаты γ в зависимости от плотности:

$$\frac{\partial \ln P}{\partial \ln\rho}=\frac{\rho}{P}\frac{\partial P}{\partial\rho}=\frac{\sigma}{P}\frac{\partial P}{\partial\sigma}.$$

Производная $\dfrac{\partial P}{\partial\sigma}$ равна:

$$\frac{\partial P}{\partial\sigma}=3B_0\left[\frac{5}{3}\sigma^{\frac{2}{3}}\left(1+\alpha^2\sigma^{\frac{2}{3}}\right)^{-1/2}-\frac{1}{3}\alpha^2\sigma^{\frac{4}{3}}\left(1+\alpha^2\sigma^{\frac{2}{3}}\right)^{-3/2}-\frac{4}{3}\sigma^{\frac{1}{3}}\right]. \qquad (17)$$

С учетом (16) и (17) для γ получаем выражение

$$\gamma=\frac{\partial\ln P}{\partial\ln\rho}=\frac{\sigma}{P}\frac{\partial P}{\partial\sigma}=$$

$$=\frac{\sigma\left[\frac{5}{3}\sigma^{\frac{2}{3}}\left(1+\alpha^2\sigma^{\frac{2}{3}}\right)^{-1/2}-\frac{1}{3}\alpha^2\sigma^{\frac{4}{3}}\left(1+\alpha^2\sigma^{\frac{2}{3}}\right)^{-3/2}-\frac{4}{3}\sigma^{\frac{1}{3}}\right]}{\sigma^{\frac{5}{3}}\left(1+\alpha^2\sigma^{\frac{2}{3}}\right)^{-1/2}-\sigma^{\frac{4}{3}}}.$$

Отсюда для показателя адиабаты γ окончательно получаем:

$$\gamma=\frac{\partial\ln P}{\partial\ln\rho}=$$

$$=\frac{\frac{5}{3}\sigma^{\frac{2}{3}}\left(1+\alpha^2\sigma^{\frac{2}{3}}\right)^{-1/2}-\frac{1}{3}\alpha^2\sigma^{\frac{4}{3}}\left(1+\alpha^2\sigma^{\frac{2}{3}}\right)^{-3/2}-\frac{4}{3}\sigma^{\frac{1}{3}}}{\sigma^{\frac{2}{3}}\left(1+\alpha^2\sigma^{\frac{2}{3}}\right)^{-1/2}-\sigma^{\frac{1}{3}}}. \qquad (18)$$

На рис. 3 показана зависимость $\gamma(\rho)$, рассчитанная по формуле (18). Вблизи нормальной плотности показатель адиабаты очень высокий ($\gamma = 12$ при $\sigma = 1{,}1$). Выход на промежуточную асимптотику $\gamma = 5/3$ происходит на интервале $\sigma = 10^2 \div 10^3$, при большей степени сжатия происходит падение $\gamma(\sigma)$ и выход на асимптотику $\gamma = 4/3$ при $\sigma = 10^9$. При $\sigma > 10^5$ зависимость $\gamma(\sigma)$, полученная для релятивистского вырожденного электронного газа близка к нашей расчетной кривой.

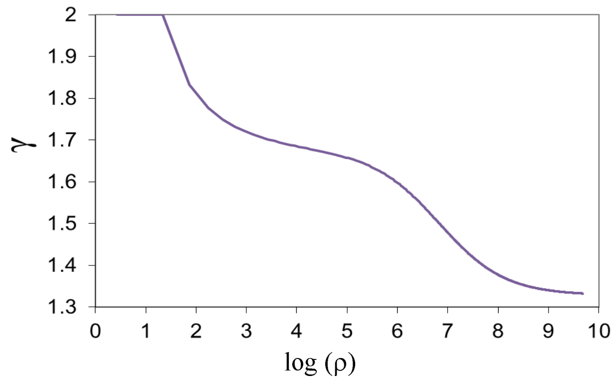

Рис. 3. Зависимость показателя адиабаты водорода $\gamma(\rho)$ от логарифма плотности в единицах г·см$^{-3}$

Электронная статистическая сумма для релятивистского газа

При ограниченном объеме, приходящемся на атом водорода, энергия электрона в квантовом состоянии с главным квантовым числом *n* равна

$$E_n = \frac{1}{\alpha^2}\left(\left(1-\frac{\alpha^2 Z^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} - 1\right) - \frac{1}{x} =$$

$$= \frac{1}{\alpha^2}\left(\left(1+\alpha^2 n^2 \sigma^{2/3}\right)^{1/2} - 1\right) - \sigma^{1/3}, \qquad (19)$$

где $\sigma = \dfrac{4\pi a_0^3}{3V}$ – отношение начального объема атома к объему сжатого атома *V*. Тогда с учетом релятивистских эффектов статистическая сумма, равная

$$Z = \sum_{n=1}^{\infty} 2n^2 e^{-\frac{E_n}{kT}}, \qquad (20)$$

как и в нерелятивистском случае [4], конечна, зависит от температуры и объема и может использоваться для вычисления термодинамических параметров атомарного водорода.

При $x > n^2$ энергия совпадает с энергией свободного атома $E_n = \dfrac{1}{\alpha^2}\left(\left(1-\dfrac{\alpha^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} - 1\right)$ и не зависит от объема. Если $x < n^2$, энергия определяется из выражения для сжатого атома (19), и статистическая сумма (20) позволяет вычислить все термодинамические характеристики водорода. Релятивистские эффекты в горячей водородной плазме начинают проявляться с температуры 100 кэВ.

Заключение

1. Получено новое релятивистское уравнение состояния холодного водорода.
2. Определен показатель адиабаты в зависимости от плотности с выходом на значение 4/3 в ультрарелятивистском пределе.
3. Согласно представленной модели при нейтронизации протонов упругая энергия и давление принимают нулевые значения. Поэтому при нейтронизации должно резко уменьшиться полное давление, что может привести к быстрым гидродинамическим течениям, нестабильности и взрыву звезды.
4. Показана возможность вычислить все термодинамические характеристики релятивистской горячей водородной плазмы, исходя из статистической суммы.

Список литературы

1. Зельдович Я. Б., & Новиков И. Д. (1967). *Релятивистская астрофизика*. Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика. Часть 1. М.: Наука. 1976.
3. Надыкто Б. А. Полуэмпирическая модель расчета энергий состояний многоэлектронных атомов и ионов. 1993. Успехи физических наук. **163** (9), 37–74
4. Надыкто, Б.А. О статической сумме и уравнении состояния водородной плазмы. 1997. Доклады академии наук. 355, 6, 754.

Статья поступила в редакцию 20.12.2022