

О НЕПРИМЕНИМОСТИ МЕТОДА МОМЕНТОВ В КИНЕТИКЕ РЕАКТОРОВ СО СЛАБЫМ ИСТОЧНИКОМ

В. Ф. Колесов, А. Н. Ганичев

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл., пр. Мира, д. 37

Статья поступила в редакцию 04.07.2022, после доработки – 15.07.2022, принята к публикации – 20.09.2022

В статье предпринята попытка решения стохастических задач из области кинетики реакторов с помощью метода моментов. Моменты распределений вероятности для представительных величин реакторной кинетики легко выводятся из первичных дифференциальных уравнений, и это обстоятельство явилось серьезным стимулом проведения намеченной работы. Казалось, что полуаналитический новый алгоритм не потребует разработки сложной вычислительной программы и проведения каких-либо калибровок результата.

Указанные оптимистичные ожидания, однако, не оправдались. Как показано, метод моментов в применении к рассматриваемой задаче или не гарантирует единственности решения, или вообще не позволяет получить физически приемлемого результата. Неприменимость метода моментов к рассматриваемой в статье задаче подтверждена строгим доказательством, выполненным на основе теоремы Карлемана.

Ключевые слова: реактор со слабым источником, распределение вероятностей, импульсный реактор Godiva-II, метод моментов, теорема Карлемана, существование и единственность решения задачи.

On Non-applicability of the moments method to kinetics of weak-source reactors. V. F. Kolesov, A. N. Ganichev (*FSUE «RFNC-VNIIEF», 607188, Sarov, Nizhny Novgorod Region, Mira ave., 37*). In the article there is made an attempt to solve stochastic problems from the sphere of reactor kinetics with the aid of moments method. The moments of probability distribution for representative values of reactor kinetics can be easily deduced from primary differential equations and this circumstance turned out to be an important stimulus of the contemplated works performance. It seemed that a semi-analytical new algorithm would not require development of a complex computer program and fulfillment of results calibration.

However, the above specified optimistic expectations failed. It is shown, that as applied to the considered problem the moments method either does not ensure uniqueness of the solution or does not even make it possible to get a physically acceptable result. Non-applicability of the moments method to the considered in the article problem is validated by a rigorous proof obtained basing on Karleman theorem.

Key words: weak-source reactor, probability distribution, pulsed reactor Godiva-II, moments method, Karleman theorem, existence and uniqueness of problem solution.

DOI 10.53403/02054671_2022_3_35

Введение

В реакторе со слабым источником нейтронов существенно роль стохастических флуктуаций. В надкритическом реак-

торе они могут приводить к значительным отклонениям роста мощности от зависимости, следующей из решений обычных, т. е. детерминированных, уравнений кинетики.

С особой четкостью влияние флуктуаций плотности нейтронов проявляется в быстрых реакторах с активной зоной (АЗ) из высокообогащенного металлического урана. В отсутствие иного источника, кроме спонтанных делений урана и предшественников запаздывающих нейтронов (ЗН), импульс в этих реакторах развивается через секунды, а не через миллисекунды, как это следует из уравнений детерминированной кинетики.

Сказанное убедительно подтверждают результаты хорошо известных опытов по измерению задержки развития импульса в реакторе Godiva-II. [1]. Была проведена серия из 94 измерений, в которых определялось время, прошедшее от ступенчатого ввода начальной реактивности по мгновенным нейтронам $\Delta\tilde{k} \approx 3,5 \cdot 10^{-4}$ до момента достижения высокой интенсивности делений в реакторе (т. е. до момента фиксации импульса делений). Измерения проводились в условиях наличия лишь слабого, связанного со спонтанными делениями ядер урана (~ 90 нейтр./с) и с распадом предшественников запаздывающих нейтронов (~ 200 нейтр./с) источника.

Результат эксперимента представлен на рис. 1 в виде гистограммы. Как видно из

рисунка, при слабом источнике нейтронов импульс в Godiva-II развивался с запаздыванием от десятых долей секунды до одиннадцати секунд. Это запаздывание очень значительно, если сопоставлять его с равным $\sim 0,7$ мс временем развития импульса в рамках детерминированной кинетики.

Указанный эксперимент относится к импульсам на мгновенных нейтронах. На реакторе Godiva-II получены также опытные данные по флуктуациям времени развития импульса на запаздывающих нейтронах (ЗН) [2, 3].

О важной роли флуктуаций в реакторах свидетельствуют и результаты более поздних аналогичных измерений, выполненных на быстрых импульсных реакторах APRFR [4], БИР-2М [5], CALIBAN [6], SPR-II [7].

В случае реактора APRFR реактивность по мгновенным нейтронам, соответствующая номинальному импульсу делений и равная $7,5 \cdot 10^{-4}$, вводилась не ступенчато, а за 0,325 секунды. Инициированию импульса предшествовал 20 минутный интервал выдержки реактора в глубоко подкритическом состоянии.

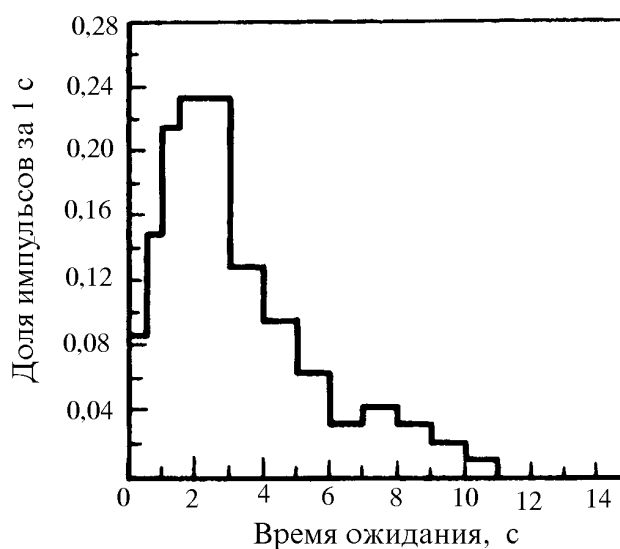


Рис. 1. Распределение вероятности для времени ожидания импульса в реакторе Godiva-II [1]

Было получено, что и в реакторе APRFR имеет место значительная, хотя и не столь большая, как в Godiva-II, флуктуационная задержка в развитии импульса. Уменьшение, в сравнении с Godiva-II, задержки связано, во-первых, с более высокой в APRFR реактивностью и, во-вторых, по-видимому, с более высокой интенсивностью источника нейтронов. В этом эксперименте два импульса из общего числа 65 были инициированы преждевременно, т. е. до окончания ввода реактивности.

Эксперименты на реакторе БИР-2М [5] проводились в 1990-х гг. при отработке макета быстродействующей аварийной защиты (БАЗ). Макет БАЗ предназначался для изучения возможности быстрого заглушения реактора при скорости нарастания мощности делений в АЗ выше установленного предела или по достижении заданного уровня мощности. Принцип действия БАЗ заключается в быстром (~200 мкс) удалении из центрального канала АЗ полиэтиленовой пули, что уменьшает реактивность реактора и переводит его в подкритическое состояние по мгновенным нейтронам. Наличие БАЗ позволило многократно и сравнительно часто производить пуск реактора без разогрева

АЗ (и, следовательно, без нагружения ее деталей).

Измерения возмущений реактивности реактора элементами БАЗ проводились в специальных опытах. Установлено, что опускание устройства отстрела с полиэтиленовой пулей в АЗ увеличивает реактивность на $(0,959 \pm 0,006) \beta_{эф}$, а удаление пули из устройства отстрела уменьшает реактивность на $(0,315 \pm 0,002) \beta_{эф}$.

Фон нейтронов от заглушенного реактора составлял $1,4 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$. При поднятом блоке безопасности в конце 30-минутного высвечивания фон составлял $1,8 \cdot 10^4 \text{ с}^{-1}$, а после подъема быстрого стержня в верхнее положение нейтронный фон равнялся $6 \cdot 10^4 \text{ с}^{-1}$, что примерно в сорок раз превышает значение фона заглушенного реактора.

Опыты проводились при трех значениях избыточной реактивности по мгновенным нейтронам: $\rho_p = 0,03 \beta_{эф}$; $0,05 \beta_{эф}$; $0,07 \beta_{эф}$. Всего проведено около 200 пусков реактора. Среднее время ожидания импульса при указанных значениях избыточной реактивности составило 0,9 с, 1 с и 1 с, соответственно. Интегральное распределение вероятности для времени ожидания импульса на реакторе БИР-2М показано на рис. 2.

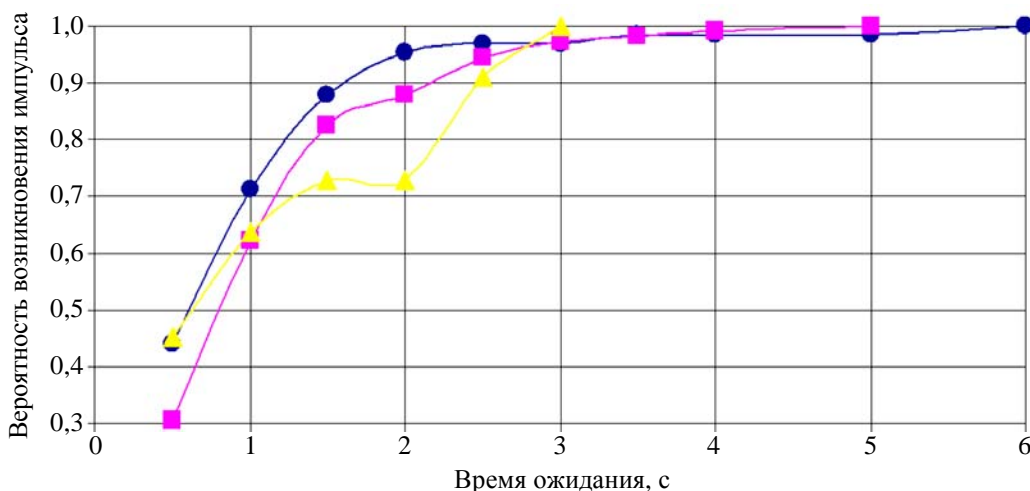


Рис. 2. Интегральное распределение вероятности для времени ожидания импульса на реакторе БИР-2М [5]. Реактивность реактора: ● – $0,03 \beta_{эф}$; ■ – $0,05 \beta_{эф}$; ▲ – $0,07 \beta_{эф}$

Эксперименты на реакторе CALIBAN [6] проводили при избыточной реактивности по мгновенным нейтронам $0,083 \beta_{эф}$ и нейтронном фоне 200 с^{-1} (нейтронный фон измеряли в подкритическом состоянии реактора при $K_{эф} = 0,9$). Всего на реакторе CALIBAN проведено 114 импульсных пусков. Среднее время задержки импульса получено равным $0,742 \text{ с}$.

Аналогичные эксперименты проводили также на ранней стадии эксплуатации импульсного реактора SPR-II [7], а также на растворных критических сборках CRAC [8]. В реакторе SPR-II, как и в реакторе APRFR, была получена меньшая, чем ожидалось, задержка в развитии импульса. Позднее это было объяснено влиянием более высокой в SPR-II, в сравнении с реактором Godiva-II, остаточной γ -активности.

Приведенные выше данные по стохастической задержке развития импульса в разных реакторах плохо согласуются друг с другом. Особенно четко это продемонстрировано на рис. 3 и в табл. 1 из ста-

ти [5], содержащих сводку экспериментальных данных по времени ожидания импульса в быстрых импульсных реакторах Godiva-II, APRFR [4], БИР-2М [5], CALIBAN [6], а также данных по характеристикам указанных реакторов и реактора SPR-II.

При рассмотрении приведенных на рис. 3 и в табл. 1 данных бросается в глаза чрезмерная близость распределений вероятности для времени ожидания импульса и среднего времени ожидания импульса у реакторов APRFR, БИР-2М, CALIBAN и большое отличие их от данных для реактора Godiva-II. Отличие данных для реактора Godiva-II от данных для других реакторов можно объяснить разницей в избыточной реактивности по мгновенным нейтронам $\Delta \tilde{k}$ и в интенсивности нейтронного фона. Но близость данных для реакторов APRFR, БИР-2М, CALIBAN, у которых $\Delta \tilde{k}$ и фон тоже неодинаковые, объяснить трудно.

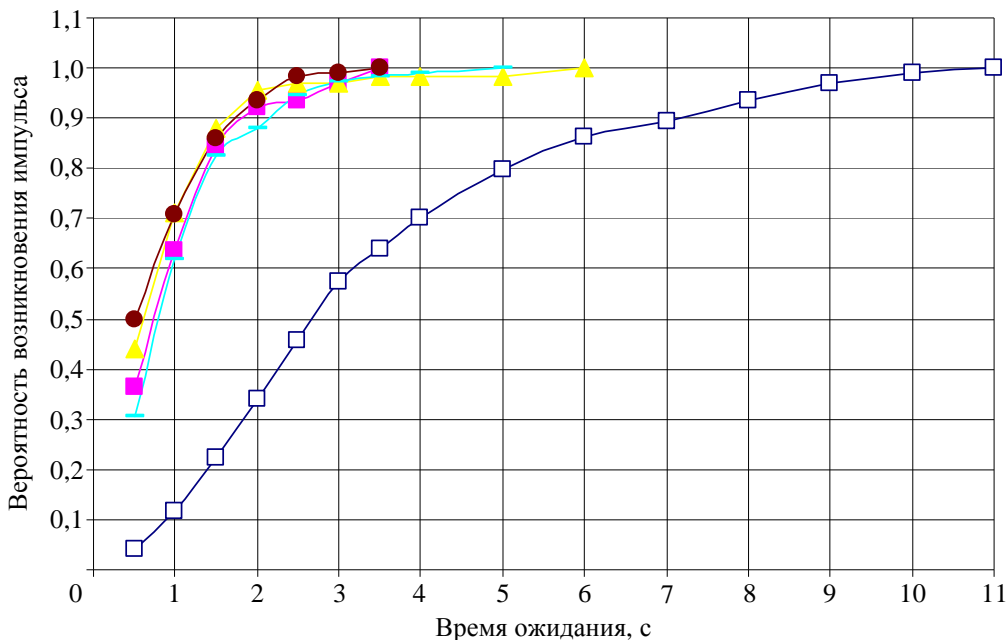


Рис. 3. Интегральное распределение вероятности для времени ожидания импульса деления в реакторах GODIVA-II (□); APRFR (■); БИР-2М (▲ — $\rho_p = 0,03 \beta_{эф}$; — $\rho_p = 0,05 \beta_{эф}$), CALIBAN (●) [5]

Характеристики реакторов в экспериментах по исследованию распределений вероятности для времени ожидания импульса деления [5]

Характеристика реактора	GODIVA-II	CALIBAN	APRFR	БИР-2М	SPR-II
Материал АЗ	^{235}U (93,5%)	$^{235}\text{U}(93\%)+$ $+\text{Mo}(10\%)$	$^{235}\text{U}(93,2\%)+$ $+\text{Mo}(10\%)$	$^{235}\text{U}(85\%)+$ $+\text{Mo}(6\%)$	$^{235}\text{U}(93,2\%)+$ $+\text{Mo}(10\%)$
Масса АЗ, кг	57,7	110	106	121	105
Максимальное число делений в импульсе	$3 \cdot 10^{16}$	$5,8 \cdot 10^{16}$	$1,5 \cdot 10^{17}$	$1 \cdot 10^{17}$	$1,2 \cdot 10^{17}$
Интенсивность нейтронного фона, с^{-1}	300 ($\sim 10^3$ *)	200	–	1400 (60000*)	–
Реактивность по мгновенным нейтронам в эксперименте, $\beta_{\text{эф}}$	0,05	0,083	0,11	0,03; 0,05; 0,07	–
Среднее время ожидания импульса, с	3,6	0,8	1,1	0,9; 1,0; 1,0	–

*Для реактора в стартовой позиции

Разрешение несогласованности имеющихся экспериментальных данных по стохастической задержке развития импульса автор статьи [5] видит в постановке новых уточняющих экспериментов с определением зависимости времени задержки импульса от интенсивности нейтронного фона и избыточной реактивности по мгновенным нейтронам.

Авторы настоящей статьи, в свою очередь, полагают, что решению указанного вопроса может помочь разработка новых, независимых, пусть и приближенных, расчетных методов. Задачей настоящей статьи, по замыслу ее авторов, как раз и являлась разработка независимого алгоритма расчета, а именно – алгоритма, основанного на математическом методе моментов. Моменты распределений вероятности для представительных величин реакторной кинетики определяются аналитически из первичных дифференциальных уравнений задачи, и это обстоятельство только укрепляло авторов в их намерении. Казалось, что полуаналитический новый алгоритм не потребует разработки сложной вычисли-

тельной программы и проведения каких-либо калибровок результата.

К сожалению, как будет видно из дальнейшего текста, указанные оптимистичные ожидания не оправдались. Как оказалось, метод моментов в применении к рассматриваемой задаче или не гарантирует единственности решения, или вообще не позволяет получить физически приемлемого решения.

В дальнейшем изложении основным разделам статьи предпослано краткое описание существующих методов расчета стохастических явлений в реакторах со слабым источником.

1. Существующие методы расчета стохастических явлений в реакторах со слабым источником

Отмеченные особенности поведения мощности реактора при слабом источнике нейтронов требуют, вообще говоря, знания распределения вероятностей для плотности нейтронов и предшественников ЗН в зави-

симости от времени, реактивности и других характеристик реактора.

Задаче описания стохастических явлений в реакторах, расчета распределений вероятности для нейтронов и предшественников ЗН посвящены теоретические работы [2, 3, 9–13] и другие. Весьма последовательно и полно указанная задача решена в статье [9] в рамках модели, не зависящей от пространственных координат и энергии нейтронов. Предполагалось, что реактивность и источник нейтронов могут зависеть от времени, значение времени жизни мгновенных нейтронов может быть любым. Решение полученных уравнений в общем случае находится численно. Для некоторых более простых вариантов задачи получены также аналитические решения.

Конкретно рассмотрение стохастических процессов в статье [9] проведено на основе дифференциального уравнения для функции $P(n, m_1, \dots, m_I, t)$, получаемого из условий баланса вероятностей. Функция $P(n, m_1, \dots, m_I, t)$ является распределением вероятности, означаящим, что в момент t в реакторе имеется точно n нейтронов и m_i источников запаздывающих нейтронов группы i ($i = 1, 2, \dots, I$).

Указанное стохастическое уравнение решается с помощью подобного $(I + 1)$ -кратному преобразованию Лапласа перехода к так называемой производящей (или генерирующей) функции G . В общем случае дифференциальное уравнение в частных производных для функции G решается численно с помощью метода характеристик. Искомое распределение вероятностей $P(n, \bar{m}, t)$ определяется по найденной функции G с помощью обратного $(I + 1)$ -кратного преобразования Лапласа. В общем случае это преобразование выполняется также численно.

В применении к задаче описания флуктуаций плотности нейтронов в статье [3] введены в рассмотрение два альтернативных понятия: ограниченные и бесконечные (устойчивые) цепи делений. Использо-

вание этих понятий особенно эффективно при исследовании флуктуаций в реакторах на быстрых нейтронах, в которых устойчивая цепь, если она возникла, растет чрезвычайно быстро.

Любой нейтрон, появившийся в реакторе, независимо от состояния последнего может вызвать цепочку делений. Эта цепочка может быть короткой. Она может быть разветвленной, содержащей большое число делений, но тем не менее также обрывающейся. Во всех подобных случаях имеют дело с ограниченными цепями делений. Однако цепь делений может никогда не оборваться, т. е. быть неограниченной (устойчивой). При постоянной реактивности в подкритическом реакторе все цепочки, порождаемые отдельными нейтронами, могут быть только ограниченными. Это заключение справедливо также в отношении точно критического реактора (предполагается, что запаздывающие нейтроны отсутствуют). И в надкритическом реакторе лишь редкие нейтроны порождают устойчивые цепи делений (как показано в статье [3], вероятность нейтрону источника инициировать устойчивую цепь делений равна примерно $\Delta \tilde{k}$, где \tilde{k} – коэффициент размножения мгновенных нейтронов).

В реакторах на быстрых нейтронах флуктуационные задержки в росте мощности на начальном участке почти полностью обусловлены временем установления первой устойчивой цепи. Эта особенность быстрых реакторов позволила автору статьи [3] получить эффективным способом компактные и удобные для оперативных применений аналитические формулы для вероятности возникновения первой устойчивой цепи. Рассмотрение проведено на основе модели реактора, не зависящей от пространственных координат и энергии и не имеющей ЗН. Все нейтроны в этой модели ведут себя одинаковым образом, имеют вероятность p_f произвести деление, и в делении с вероятностью $P_{\bar{v}}$ эмитиру-

ются $\tilde{\nu}$ мгновенных нейтронов. Вводятся величины: w_0 – вероятности нейтрону источника вызвать устойчивую цепь делений, и w_f – вероятности делению вызвать устойчивую цепь ($w_0 = p_f w_f$). Эти основополагающие для работы [3] величины определяются из уравнения

$$1 - w_f = \sum_{\tilde{\nu}=0}^{\infty} P_{\tilde{\nu}} (1 - p_f w_f)^{\tilde{\nu}}, \quad (1)$$

являющегося констатацией факта, что вероятность $(1 - w_f)$ делению не вызвать устойчивую цепь делений равна вероятности, что ни один из возникших при делении нейтронов не вызовет такой цепи.

Были рассмотрены два наиболее интересных для практики случая.

1. Ситуация, когда $\Delta\tilde{k}$ не зависит от времени (ступенчатый ввод избыточной реактивности). Для этого случая получено:

– вероятность возбуждения нейтроном устойчивой цепи делений равна

$$w_0 = \begin{cases} 2\Delta\tilde{k}/(\tilde{\nu}\Gamma_2) & \text{при } 0 < \Delta\tilde{k} \ll 1, \\ 0 & \text{при } \Delta\tilde{k} \leq 0. \end{cases} \quad (2)$$

В частности, для урановых систем

$$w_0 \approx \Delta\tilde{k}$$

(здесь введено обозначение $\Gamma_2 = \tilde{\nu}(\tilde{\nu}-1)/(\tilde{\nu})^2$; у различных делящихся нуклидов константа Γ_2 близка к 0,8);

– распределение плотности вероятности для времени возникновения первой устойчивой цепи делений в условиях присутствия в реакторе источника нейтронов с постоянной интенсивностью S_0 н·с⁻¹ записывается как

$$W(t) = w_0 S_0 \exp(-w_0 S_0 t); \quad (3)$$

– среднее время возникновения первой устойчивой цепи делений равно

$$\bar{t} = 1/(S_0 w_0). \quad (4)$$

2. Случай ввода реактивности по закону $\Delta\tilde{k} = at$. В этой ситуации

$$w_0(t) = \frac{\sqrt{8a\tau/(\tilde{\nu}^2\pi\Gamma_2^2)} \exp(-at^2/(2\tau))}{1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{a}{2\tau}}t\right)} \approx \frac{2}{\tilde{\nu}\Gamma_2} at.$$

Для быстрых реакторов из высокообогащенного урана

$$w_0(t) \approx at. \quad (5)$$

Распределение вероятности для времени возникновения первой устойчивой цепи делений

$$W(t) = \sqrt{\frac{2a\tau S_0^2}{\pi\tilde{\nu}^2\Gamma_2^2}} \left[\frac{1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{a}{2\tau}}t\right)}{2} \right]^{\frac{2S_0\tau}{\tilde{\nu}\Gamma_2} - 1} \exp\left(-\frac{at^2}{2\tau}\right)$$

или

$$W(t) \approx \begin{cases} \frac{2aS_0t}{\tilde{\nu}\Gamma_2} \exp\left(-\frac{aS_0t^2}{\tilde{\nu}\Gamma_2}\right) & \text{при } t \geq 0, \\ 0 & \text{при } t < 0; \end{cases}$$

и среднее время возникновения первой устойчивой цепи делений

$$\bar{t} \approx \sqrt{\frac{\pi\tilde{\nu}\Gamma_2}{4aS_0}}$$

(здесь τ – время жизни мгновенных нейтронов в реакторе, $\Phi(x)$ – интеграл вероятности).

Для быстрых реакторов из высокообогащенного урана

$$W(t) \approx \begin{cases} aS_0t \exp\left(-\frac{aS_0t^2}{2}\right) & \text{при } t \geq 0, \\ 0 & \text{при } t < 0; \end{cases} \quad (6)$$

$$\bar{t} \approx \sqrt{\frac{\pi}{2aS_0}}. \quad (7)$$

В оценках уровня возможных в реакторах аварийных энерговыделений важную роль играет реактивность $(\Delta\tilde{k})_{\text{макс}}$, которая может быть введена до начала действия механизмов (внутренних или внешних), гасящих цепную реакцию. Значение $(\Delta\tilde{k})_{\text{макс}}$ непосредственно связано со средним временем запаздывания импульса. Эта связь выражается соотношением

$$(\Delta\tilde{k})_{\text{макс}} \approx a\bar{t} = \sqrt{\frac{\pi\bar{\nu}a\Gamma_2}{4S_0}}.$$

Для быстрых реакторов из высокообогащенного урана

$$(\Delta\tilde{k})_{\text{макс}} \approx 1,28\sqrt{\frac{a}{S_0}}. \quad (8)$$

В статье [3] получены также важные для дальнейшего изложения распределение вероятностей $w_f(N)$ для числа делений N (за исключением деления, вызванного нейтроном источника) в ограниченных цепях и моменты $\overline{N^n}$ этого распределения. В случае близких к единице значений \tilde{k} и пуассоновского распределения вероятности эмиссии в одном акте деления $\tilde{\nu}$ мгновенных нейтронов они имеют вид

$$w_f(N) = e^{-\tilde{k}} (\tilde{k}e^{-\tilde{k}})^N (N+1)^N / (N+1)!; \quad (9)$$

$$\overline{N^n} \approx \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \frac{(2n-2)!}{(n-1)!} \left|\frac{1}{\Delta\tilde{k}}\right|^{2n-1}.$$

Как можно видеть из начального текста настоящего раздела статьи, сравнительно точное теоретическое описание стохастических явлений в реакторе представляет собой сложную и трудоемкую задачу. В то же время, как отмечалось выше, существует потребность в формулировании более простых, пусть и приближенных, алгоритмов решения указанной задачи. Попыткой ответа на эту потребность явилась статья [13], посвященная поиску простого в исполне-

нии и полностью аналитического алгоритма решения стохастической задачи в реакторах со слабым источником. В основу сформулированного в статье [13] алгоритма положена обсужденная выше идея ограниченных и бесконечных (устойчивых) цепей делений. Естественно было стремление распространить эту результативную идею на более реалистичные реакторные модели с учетом ЗН. Это также было сделано в статье [13]. В указанном представлении нейтронные процессы в реакторе заключаются в размножении предшественников ЗН в сильно флуктуирующих по числу делений ограниченных цепях, вкладе нейтронов от распада предшественников в эффективный источник, действующий в реакторе, и в генерировании нейтронами источника новых цепей делений. При малой надкритичности стохастический разброс возможных значений m может быть очень большим.

Рассмотрение стохастических явлений в статье [13] проводится в условиях не зависящего от времени внешнего источника нейтронов S_0 , в рамках часто используемого приближения нулевого времени жизни мгновенных нейтронов и одной группы запаздывающих нейтронов. Кроме того, в целях замены операций суммирования интегрированием и тем самым упрощения расчетов, принято, что количество предшественников запаздывающих нейтронов m и число делений в ограниченных цепях N могут иметь любые, не обязательно целые значения.

Искомymi величинами при этом являются функция $P(m, t)$ – распределение вероятности присутствия в момент t в реакторе m предшественников запаздывающих нейтронов, функция $W(t)$ – распределение вероятности для времени возникновения первой устойчивой цепи делений – и среднее время возникновения первой устойчивой цепи делений \bar{t} .

Поставленная задача решается в два этапа. На первом этапе рассмотрен вариант

задачи с не зависящим от времени \tilde{k} , хорошо применимый к быстрым импульсным реакторам. На этом этапе, в частности, получены решения $W(t)$ и \bar{t} , аналогичные решениям (3), (4) для реакторных моделей без учета ЗН. Рассмотрение более сложного варианта с линейно зависящим от времени \tilde{k} , наилучшим образом применимого к оценкам масштаба возможных аварий, как в импульсных, так и в стационарных реакторах, выполнено на втором этапе.

При использовании перечисленных подходов и допущений в статье [13]:

- сформулированы интегро-дифференциальные уравнения для $P(m, t)$ – распределения вероятности присутствия в момент времени t в реакторе m предшественников ЗН – и уравнения для генерирующей функции;

- с помощью приближенного представления

$$P(m, t) = q(t)e^{-q(t)m}$$

уравнения для генерирующей функции преобразованы в обыкновенные дифференциальные уравнения. В результате получены условные решения (в пространстве образов Лапласа) $P(p, m, t)$, а также $W(p, t)$, $\bar{t}(p)$ – распределения вероятности и среднего времени инициирования первой устойчивой цепи делений соответственно;

- на основе сопоставления расчетного и экспериментальных значений \bar{t} для реактора Godiva-II выполнен переход от условных решений к реальным решениям $P(m, t)$, $W(t)$ и \bar{t} .

Результаты выполненных расчетов свидетельствуют о важной роли ЗН в процессе установления устойчивой цепи делений. В случае постоянной надкритичности $\Delta\tilde{k}$ учет ЗН может приводить к двух–семикратному укорочению длительности \bar{t} .

Расчеты по выведенным в статье формулам не составляют труда. Полученные аналитические решения предоставляют возможность быстрого определения веро-

ятностных характеристик разгона реактора при наличии лишь слабого источника нейтронов.

2. Задача настоящей статьи. Метод моментов

Задачей настоящей статьи по замыслу ее авторов являлась разработка и практическое применение предполагаемого нового алгоритма расчета стохастических явлений в реакторах, основанного на математическом методе моментов. Предполагалось, что этот полуаналитический алгоритм, в отличие от метода статьи [13], был бы полностью свободен от потребности проведения калибровок и не потребует написания сложной вычислительной программы. Моменты распределения вероятности для представительных величин исследуемого процесса определяются аналитически из общих стохастических уравнений, и именно это обстоятельство питало оптимистичные ожидания авторов. В отличие от работы [13], в настоящей статье рассматривается лишь случай постоянного, то есть не зависящего от времени, коэффициента размножения нейтронов \tilde{k} . В остальном используются те же, что и в статье [13] подходы и приближения: идея ограниченных и бесконечных (устойчивых) цепей делений, не зависящий от времени внешний источник нейтронов S_0 и т. д.

Главной задачей настоящей статьи, как и других работ, связанных с расчетом исследуемых здесь стохастических процессов, является нахождение распределения вероятности $P(m, t)$, осуществляемое, как правило, через решения уравнения для генерирующей функции G . В сравнительно точных решениях (например, в статьях [9, 11]) функция G определяется численно с помощью метода характеристик, в статье [13] – аналитически, с помощью редукции задачи, сведенной к обыкновенному дифференциальному уравнению.

Восстановление искомого распределения $P(m, t)$ в алгоритме осуществляется по известным моментам этого распределения. Далее на основе восстановленного $P(m, t)$ находятся распределение $W(t)$ и среднее время инициирования первой устойчивой цепи делений \bar{t} .

В более развернутой формулировке указанная задача заключается в восстановлении $P(m, t)$ по моментам этого распределения, определяемым из уравнения для генерирующей функции $G(p, t)$, являющейся образом Лапласа $P(m, t)$, и в определении по восстановленному распределению $P^*(m, t)$ распределения $W(t)$ и \bar{t} .

Используемый в настоящей статье метод моментов представляет собой один из общих подходов выполнения по результатам наблюдений статистических оценок для неизвестных параметров распределений вероятности. Впервые в этих целях метод был использован К. Пирсоном (1894 г.) при решении задачи аппроксимации эмпирических распределений [14].

Условия существования и единственности решения указанной задачи рассматриваются, главным образом, в работах так называемой классической проблемы моментов [14].

Классическая проблема моментов связана со многими разделами математического анализа и теории функций, в частности с задачами численного обращения преобразования Лапласа (этот раздел общей проблемы моментов известен как классическая проблема моментов Хаусдорфа [15]).

В области проблемы моментов работал ряд выдающихся математиков. Термин *проблема моментов* впервые встречается у Т. Стилтеса. Важные задачи, относящиеся к этой теме, решались или ставились П. Л. Чебышевым и А. А. Марковым [16].

Главное, что необходимо для нас в указанной области, – это теорема Карлемана об определенности проблемы моментов. Теорема звучит так: если последователь-

ность чисел S_n , $n = 0, 1, 2, \dots$ удовлетворяет условию

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n \sqrt{S_{2n}}} = +\infty, \quad (10)$$

то проблема моментов

$$S_k = \int_{-\infty}^{+\infty} t^k d\sigma(t), \quad k = 0, 1, 2, \dots, * \quad (11)$$

является определенной. Это означает, что существует неубывающая функция $\sigma(t)$, $-\infty < t < +\infty$, для которой выполняются равенства (10), единственная с точностью до прибавления любой функции, постоянной в окрестности каждой точки ее непрерывности [17].

Интеграл Стилтеса функции $f(x)$ относительно функции $U(x)$ обычно обозначается символом I ,

$$I = \int_a^b f(x) dU(x). \quad (12)$$

Если $U(x)$ имеет ограниченную и интегрируемую в смысле Римана производную $U'(x)$, то интеграл Стилтеса сводится к интегралу Римана по формуле

$$\int_a^b f(x) dU(x) = \int_a^b f(x) U'(x) dx. \quad (13)$$

3. Уравнения для распределений вероятности $P(m, t) \dots W(t)$ и для генерирующей функции $G(p, t)$

Исходное интегро-дифференциальное уравнение для распределения вероятности $P(m, t)$ в случае не зависящего от времени коэффициента размножения мгновенных нейтронов \tilde{k} и выводимое из него уравнение для генерирующей функции $G(p, t)$

*В выражении (11) присутствует интеграл Стилтеса $\int_{-\infty}^{+\infty} t^k d\sigma(t)$.

записаны здесь в том же виде, что и в статье [13]:

$$\frac{dP(m,t)}{dt} = \lambda_{\text{эф}} \int_0^{\infty} P(m-\gamma N+1, t)(m-\gamma N+1)w_n^*(N)dN + S_0 \int_0^{\infty} P(m-\gamma N, t)w_n^*(N)dN - P(m,t)(S_0 + \lambda_{\text{эф}}m), \quad (14)$$

$$P(m,t) = 0 \text{ при } m < 0;$$

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \varphi_1(p) \frac{\partial G}{\partial p} + \varphi_2(p)G(p,t). \quad (15)$$

Уравнение (14) сформулировано на основе баланса вероятностей, полученного в результате перечисления вероятностей всех событий, которые могут происходить в течение временного интервала dt .

При этом учтено, что в ограниченной цепи из N делений образуется $\tilde{\nu}N$ мгновенных нейтронов и предшественников запаздывающих нейтронов. В них введены обозначения: $\tilde{\nu}$ – число мгновенных нейтронов на акт деления, β – физическая доля запаздывающих нейтронов, $\gamma = \beta_{\text{эф}}\tilde{\nu}/(1-\beta)$; S_0 – интенсивность внешнего источника нейтронов. Интенсивность полного источника нейтронов S , действующего в реакторе, равна $S_0 + \lambda_{\text{эф}}m$; $w_n^*(N)$ – перенормированное $w_n(N)$ -распределение плотности вероятности N делений в ограниченной цепи, вызванной одним нейтроном источника,

$$w_n^*(N) = \left(1 - \frac{\tilde{k}}{\tilde{\nu}}\right) \delta(N) + \frac{\tilde{k}}{\tilde{\nu}} \frac{e^{-\alpha(N+1)}}{2\tilde{k}(N+1)^2}. \quad (16)$$

Распределение (16) приближенно удовлетворяет требованию

$$\int_0^{\infty} w_n^*(N) = 1.$$

Уравнение (14) решалось с помощью интегрального преобразования Лапласа.

После ряда преобразований уравнения (14) был получен его аналог в пространстве образов Лапласа – уравнение (15), в котором введены следующие обозначения:

$$G(p,t) = \int_0^{\infty} P(m,t)e^{-mp} dm - \text{генерирующая функция}, \quad (17)$$

$$\varphi_1(p) = \lambda_{\text{эф}}(1 - e^p I_0); \quad \varphi_2(p) = S_0(I_0 - 1);$$

$$I_0(\xi) = 1 - \frac{\tilde{k}}{\tilde{\nu}} \left\{ 1 - e^{\gamma p} \left[e^{-\xi} - \sqrt{\pi\xi} (1 - \Phi(\sqrt{\xi})) \right] \right\};$$

$$\xi = \left(\frac{(\Delta\tilde{k})^2}{2} + \gamma p \right) [13].$$

Как уже отмечалось, уравнения типа (15) обычно решают численно с помощью метода характеристик. В статье [13] уравнение (15) решалось аналитически в результате приближенного представления $P(m,t)$ в виде функции

$$P(m,t) = q(t)e^{-q(t)m}.$$

В настоящей статье оно решается с помощью представления $P(m,t)$ в виде полинома степени n , неизвестные коэффициенты которого определяются по известным моментам $P(m,t)$.

Конечной целью решаемой в настоящей статье задачи является определение не только $P(m,t)$, но и не менее важной функции $W(t)$ – распределения вероятности возникновения первой устойчивой цепи делений. Если обозначить параметром ρ вероятность одной из возможных реализаций хода зависимости m от времени, то, очевидно, можно записать:

$$S(\rho,t) = S_0 + \lambda_{\text{эф}}m(\rho,t),$$

$$W(\rho,t) = w_0 S(\rho,t) \exp \left[-w_0 \int_0^t S(\rho,t) dt \right], \quad (18)$$

где S_0, S – интенсивность внешнего и полного источника нейтронов соответственно,

w_0 – вероятность нейтрону источника инициировать устойчивую цепь делений, $W(\rho, t)$ – плотность вероятности возникновения первой устойчивой цепи делений в момент t в случае, когда $m(t)$ имеет вид $m(\rho, t)$. Средняя плотность вероятности $W(t)$ будет определяться интегралом

$$W(t) = \int_0^1 W(\rho, t) d\rho. \quad (19)$$

Как видим, для определения $W(\rho, t)$, а затем и $W(t)$ необходимо знать без пропусков и наложений все возможные реализации $m(\rho, t)$ и вероятности реализаций. Эти сведения можно получить с помощью найденного распределения вероятности $P(m, t)$.

Согласно статье [13] $m(\rho, t)$ удовлетворяет соотношению

$$\int_0^{m(\rho, t)} P(m, t) dm = \rho, \quad 0 \leq \rho \leq 1, \quad (20)$$

являющемуся уравнением относительно $m(\rho, t)$ – верхнего предела интегрирования.

Распределение $W(t)$ легко сравнивать с результатами имеющихся экспериментов и расчетов, выполненных с использованием иных алгоритмов. Но более удобно проводить такое сравнение с помощью скалярной величины \bar{t} – среднего времени инициирования первой устойчивой цепи делений. Эта величина равна

$$\bar{t} = \frac{\int_0^{\infty} tW(t) dt}{\int_0^{\infty} W(t) dt} = \int_0^{\infty} tW(t) dt. \quad (21)$$

4. Уравнения для моментов распределения вероятности $P(m, t)$

Уравнение (15) для генерирующей функции $G(p, t)$, казалось бы, можно решить не только прямым, но и обходным способом, если действовать через моменты

распределения $P(m, t)$. Моменты распределения $P(m, t)$ можно получить из самого уравнения (15). Так, продифференцировав уравнение (15) по параметру « p » пять раз, будем иметь:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial G}{\partial p} &= \varphi_1 \frac{\partial^2 G}{\partial p^2} + \left(\varphi_2 + \frac{d\varphi_1}{dp} \right) \frac{\partial G}{\partial p} + \frac{d\varphi_2}{dp} G; \\ \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2 G}{\partial p^2} &= \varphi_1 \frac{\partial^3 G}{\partial p^3} + \left(\varphi_2 + 2 \frac{d\varphi_1}{dp} \right) \frac{\partial^2 G}{\partial p^2} + \\ &+ \left(\frac{d^2 \varphi_1}{dp^2} + 2 \frac{d\varphi_2}{dp} \right) \frac{\partial G}{\partial p} + \frac{d^2 \varphi_2}{dp^2} G; \\ \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^3 G}{\partial p^3} &= \varphi_1 \frac{\partial^4 G}{\partial p^4} + \left(\varphi_2 + 3 \frac{d\varphi_1}{dp} \right) \frac{\partial^3 G}{\partial p^3} + \\ &+ 3 \left(\frac{d^2 \varphi_1}{dp^2} + \frac{d\varphi_2}{dp} \right) \frac{\partial^2 G}{\partial p^2} + \\ &+ \left(\frac{d^3 \varphi_1}{dp^3} + 3 \frac{d^2 \varphi_2}{dp^2} \right) \frac{\partial G}{\partial p} + \frac{d^3 \varphi_2}{dp^3} G; \\ \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^4 G}{\partial p^4} &= \varphi_1 \frac{\partial^5 G}{\partial p^5} + \left(\varphi_2 + 4 \frac{d\varphi_1}{dp} \right) \frac{\partial^4 G}{\partial p^4} + \\ &+ \left(6 \frac{d^2 \varphi_1}{dp^2} + 4 \frac{d\varphi_2}{dp} \right) \frac{\partial^3 G}{\partial p^3} + \left(4 \frac{d^3 \varphi_1}{dp^3} + 6 \frac{d^2 \varphi_2}{dp^2} \right) \frac{\partial^2 G}{\partial p^2} + \\ &+ \left(\frac{d^4 \varphi_1}{dp^4} + 4 \frac{d^3 \varphi_2}{dp^3} \right) \frac{\partial G}{\partial p} + \frac{d^4 \varphi_2}{dp^4} G; \quad (22) \\ \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^5 G}{\partial p^5} &= \varphi_1 \frac{\partial^6 G}{\partial p^6} + \left(\varphi_2 + 5 \frac{d\varphi_1}{dp} \right) \frac{\partial^5 G}{\partial p^5} + \\ &+ 5 \left(2 \frac{d^2 \varphi_1}{dp^2} + \frac{d\varphi_2}{dp} \right) \frac{\partial^4 G}{\partial p^4} + 10 \left(\frac{d^3 \varphi_1}{dp^3} + \frac{d^2 \varphi_2}{dp^2} \right) \frac{\partial^3 G}{\partial p^3} + \\ &+ 5 \left(\frac{d^4 \varphi_1}{dp^4} + 2 \frac{d^3 \varphi_2}{dp^3} \right) \frac{\partial^2 G}{\partial p^2} + \\ &+ \left(\frac{d^5 \varphi_1}{dp^5} + 5 \frac{d^4 \varphi_2}{dp^4} \right) \frac{\partial G}{\partial p} + \frac{d^5 \varphi_2}{dp^5} G. \end{aligned}$$

Если далее в уравнениях (22) положить p равным нулю, то получим следующие дифференциальные уравнения для пяти первых моментов распределения $P(m, t)$ и решения этих уравнений:

$$\frac{d\bar{m}}{dt} = \mu_1 \bar{m} - \delta_1, \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\overline{m^2}}{dt} &= 2\mu_1\overline{m^2} - (\mu_2 + 2\delta_1)\overline{m} + \delta_2, \\ \frac{d\overline{m^3}}{dt} &= 3\mu_1\overline{m^3} - 3(\mu_2 + \delta_1)\overline{m^2} + (\mu_3 + 3\delta_2)\overline{m} - \delta_3, \\ \frac{d\overline{m^4}}{dt} &= 4\mu_1\overline{m^4} - (6\mu_2 + 4\delta_1)\overline{m^3} + \\ &+ (4\mu_3 + 6\delta_2)\overline{m^2} - (\mu_4 + 4\delta_3)\overline{m} + \delta_4, \\ \frac{d\overline{m^5}}{dt} &= 5\mu_1\overline{m^5} - 5(2\mu_2 + \delta_1)\overline{m^4} + 10(\mu_3 + \delta_2)\overline{m^3} - \\ &- 5(\mu_4 + 2\delta_3)\overline{m^2} + (\mu_5 + 5\delta_4)\overline{m} - \delta_5; \\ \overline{m}(t) &= a(f - 1) = A(t), \\ \overline{m^2}(t) &= b_0 + b_1f + b_2f^2 = B(t), \\ \overline{m^3}(t) &= c_0 + c_1f + c_2f^2 + c_3f^3 = C(t), \\ \overline{m^4}(t) &= l_0 + l_1f + l_2f^2 + l_3f^3 + l_4f^4 = L(t), \\ \overline{m^5}(t) &= r_0 + r_1f + r_2f^2 + r_3f^3 + \\ &+ r_4f^4 + r_5f^5 = R(t). \end{aligned} \quad (23)$$

При записи уравнений (23), (24) использованы следующие обозначения и соотношения:

$$\begin{aligned} G(p, t)|_{p=0} &= \int_0^\infty P(m, t)e^{-mp} dm|_{p=0} = 1, \\ \frac{\partial^n G}{\partial p^n}|_{p=0} &= (-1)^n \overline{m^n}, \\ I_0(\gamma p)|_{p=0} &= \int_0^\infty w_n^*(N)e^{-\gamma N p} dN|_{p=0} = 1, \\ \frac{d^n I_0}{dp^n}|_{p=0} &= (-1)^n \gamma^n \overline{N^n}, \\ \varphi_1(p)|_{p=0} &= \lambda_{\text{эф}}(1 - e^p I_0)|_{p=0} = 0, \\ \frac{d^n \varphi_1}{dp^n}|_{p=0} &= (-1)^{n-1} \lambda_{\text{эф}} \gamma^n \overline{N^n} = \mu_n, \\ \varphi_2(p)|_{p=0} &= S_0(I_0 - 1)|_{p=0} = 0, \\ \frac{d^n \varphi_2}{dp^n}|_{p=0} &= (-1)^n S_0 \gamma^n \overline{N^n} = \delta_n. \end{aligned} \quad (25)$$

Здесь $\overline{N^n}$ – n -й момент распределения вероятности для числа делений в ограничен-

ной цепи, $n = 1, 2, \dots$ (см. формулу (9)). При этом

$$\overline{N^1} = \int_0^\infty N w_n^*(N) dN \approx \frac{\tilde{k}}{\tilde{v}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(\Delta \tilde{k})}, \quad (26)$$

а начиная с $n = 2$

$$\overline{N^n} = (2n - 3)!! \frac{\tilde{k}}{\tilde{v}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(\Delta \tilde{k})^{2n-1}}, \quad (27)$$

факториал $(2n - 3)!! = 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n - 3)$ [18], $f(t) = e^{\mu_1 t}$ – функция, полиномы по которой представляют зависимость решения от времени, $a, b_0, b_1, \dots, r_4, r_5$ – постоянные коэффициенты. Ниже приводятся выражения конкретной связи коэффициентов $a, b_0, b_1, \dots, l_3, l_4$ с первичными параметрами реактора (эти формулы потребуются в дальнейших операциях):

$$\begin{aligned} a &= -\frac{\delta_1}{\mu_1}, \quad b_0 = \frac{\delta_1(\mu_2 + 2\delta_1) - \mu_1\delta_2}{2\mu_1^2}, \\ b_1 &= -\frac{\delta_1(\mu_2 + 2\delta_1)}{\mu_1^2}, \quad b_2 = \frac{\delta_1(\mu_2 + 2\delta_1) + \mu_1\delta_2}{2\mu_1^2}, \\ c_0 &= \frac{D_0}{3\mu_1}, \quad c_1 = \frac{D_1}{2\mu_1}, \quad c_2 = \frac{D_2}{\mu_1}, \\ c_3 &= -\left(\frac{D_0}{3\mu_1} + \frac{D_1}{2\mu_1} + \frac{D_2}{\mu_1} \right), \\ D_0 &= \frac{3(\mu_2 + \delta_1)[\delta_1(\mu_2 + 2\delta_1) - \mu_1\delta_2]}{2\mu_1^2} - \\ &- \frac{\delta_1(\mu_3 + 3\delta_2)}{\mu_1} + \delta_3, \\ D_1 &= \frac{\delta_1(\mu_3 + 3\delta_2)}{\mu_1} - \frac{3(\mu_2 + \delta_1)\delta_1(\mu_2 + 2\delta_1)}{\mu_1^2}, \\ D_2 &= \frac{3(\mu_2 + \delta_1)[\delta_1(\mu_2 + 2\delta_1) + \mu_1\delta_2]}{2\mu_1^2}, \\ l_0 &= \frac{1}{4\mu_1} [c_0(6\mu_2 + 4\delta_1) - \\ &- (4\mu_3 + 6\delta_2)b_0 - (\mu_4 + 4\delta_3)a - \delta_4], \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned}
 l_1 &= \frac{1}{3\mu_1} [c_1(6\mu_2 + 4\delta_1) - \\
 &\quad - (4\mu_3 + 6\delta_2)b_1 + (\mu_4 + 4\delta_3)a], \\
 l_2 &= \frac{1}{2\mu_1} [c_2(6\mu_2 + 4\delta_1) - (4\mu_3 + 6\delta_2)b_2], \\
 l_3 &= \frac{c_3(6\mu_2 + 4\delta_1)}{\mu_1}, \\
 l_4 &= \frac{1}{\mu_1} \left[- (6\mu_2 + 4\delta_1) \left(\frac{c_0}{4} + \frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{2} + c_3 \right) + \right. \\
 &\quad \left. + (4\mu_3 + 6\delta_2) \left(\frac{b_0}{4} + \frac{b_1}{3} + \frac{b_2}{2} \right) - (\mu_4 + 4\delta_3) \frac{a}{12} + \frac{\delta_4}{4} \right].
 \end{aligned} \tag{28}$$

Уравнения (22) и их решения (24) относятся только к пяти первым моментам распределения $P(m, t)$. При необходимости можно записать уравнения и их решения для более высоких моментов и даже записать их обобщенно для произвольного n -го момента.

5. Планировавшийся алгоритм расчета распределения вероятности $P(m, t)$ по его моментам

Согласно требованиям «Проблемы моментов» процедуре расчета распределения вероятности $P(m, t)$ по его моментам должен предшествовать изложенный в разделе 2 строгий анализ задачи на предмет существования и единственности ее решения.

Мы, однако, помня о редком применении теорем о существовании и единственности решения физических задач и к тому же зная, что применительно к рассматриваемой в статье задаче речь шла бы о довольно громоздком доказательстве теоремы Карлемана, тоже воздержались от указанного доказательства.

Искомое распределение вероятности, будем обозначать его как $P^*(m, t)$, записывается в настоящей статье в виде квазиполинома с пятью членами, способного

представить пять моментов распределения (нулевой момент тоже включен в рассмотрение):

$$\begin{aligned}
 P^*(m, t) &= x_0(t)e^{-\frac{m}{y}} + \\
 &\quad + x_1(t)me^{-\frac{m}{y}} + \dots + x_4(t)m^4e^{-\frac{m}{y}}, \tag{29}
 \end{aligned}$$

где $x_0(t), x_1(t), \dots$ – пока неизвестные коэффициенты ряда, зависящие от времени, $e^{-\frac{m}{y}}$ – множитель, обеспечивающий сходимость интеграла $\int_0^\infty P^*(m, t)dt$, y – параметр полинома, введенный в целях смягчения резкой зависимости множителя $e^{-\frac{m}{y}}$ от m и создания возможности записи новых вариантов квазиполинома, представляющих распределение $P^*(m, t)$.

Моменты распределения $P^*(m, t)$ записываются в виде:

$$\begin{aligned}
 \overline{m^0}(t) &= \int_0^\infty m^0 P^*(m, t)dm = \int_0^\infty P^*(m, t)dm = \\
 &= x_0y + x_1y^2 + 2x_2y^3 + 6x_3y^4 + 24x_4y^5 = 1, \\
 \overline{m}(t) &= \int_0^\infty m P^*(m, t)dm = x_0y^2 + 2x_1y^3 + \\
 &\quad + 6x_2y^4 + 24x_3y^5 + 120x_4y^6 = A, \\
 \overline{m^2}(t) &= \int_0^\infty m^2 P^*(m, t)dm = 2x_0y^3 + 6x_1y^4 + \\
 &\quad + 24x_2y^5 + 120x_3y^6 + 720x_4y^7 = B, \tag{30} \\
 \overline{m^3}(t) &= \int_0^\infty m^3 P^*(m, t)dm = 6x_0y^4 + 24x_1y^5 + \\
 &\quad + 120x_2y^6 + 720x_3y^7 + 5040x_4y^8 = C, \\
 \overline{m^4}(t) &= \int_0^\infty m^4 P^*(m, t)dm = 24x_0y^5 + 120x_1y^6 + \\
 &\quad + 720x_2y^7 + 5040x_3y^8 + 40320x_4y^9 = L.
 \end{aligned}$$

В уравнениях (30) учтено, что по определению момент $\overline{m^0}(t)$ распределения $P^*(m, t)$ должен равняться единице, а моменты $\overline{m}(t), \overline{m^2}(t), \overline{m^3}(t)$ и $\overline{m^4}(t)$ должны равняться величинам A, B, C, L , являю-

щимся моментами распределения $P(m, t)$ соответственно. Уравнивание моментов распределений $P(m, t)$ и $P^*(m, t)$ является основным положением математического метода моментов.

Решение линейной системы уравнений (30) имеет вид:

$$\begin{aligned} x_0(t) &= \frac{1}{y} - x_1(t)y - 2x_2(t)y^2 - \\ &\quad - 6x_3(t)y^3 - 24x_4(t)y^4, \\ x_1(t) &= -\frac{L}{6y^6} + \frac{19C}{6y^5} - \frac{35B}{2y^4} + \frac{30A}{y^3} - \frac{10}{y^2}, \\ x_2(t) &= \frac{L}{8y^7} - \frac{9C}{4y^6} + \frac{23B}{2y^5} - \frac{35A}{2y^4} + \frac{5}{y^3}, \\ x_3(t) &= -\frac{L}{36y^8} + \frac{17C}{36y^7} - \frac{9B}{4y^6} + \frac{19A}{6y^5} - \frac{5}{6y^4}, \\ x_4(t) &= \frac{L}{576y^9} - \frac{C}{36y^8} + \frac{B}{8y^7} - \frac{A}{6y^6} + \frac{1}{24y^5}. \end{aligned} \quad (31)$$

Решение (31) полностью определило искомое распределение вероятности $P^*(m, t)$ (формула (29)). Это решение позволило нам перейти непосредственно к вычислению распределения вероятности $W(t)$ и \bar{t} .

Как сказано выше, число имеющихся в реакторе предшественников ЗН в зависимости от их вероятности ρ и времени t подчиняется уравнению (20). Подстановка в уравнение (20) найденного распределения $P^*(m, t)$ приводит к следующему трансцендентному уравнению для $m(\rho, t)$:

$$\begin{aligned} m(\rho, t) &= y \ln \frac{1+mZ}{1-\rho}, \\ Z &= x_1y + x_2(my + 2y^2) + \\ &\quad + x_3(m^2y + 3my^2 + 6y^3) + \\ &\quad + x_4(m^3y + 4m^2y^2 + 12my^3 + 24y^4). \end{aligned} \quad (32)$$

Решение уравнения (32) относительно $m(\rho, t)$ находилось численно. По найденным значениям $m(\rho, t)$ составлялась квадратная таблица с сотней ячеек по каждой оси. Фрагмент такой таблицы символически показан на рис. 4.

С помощью решения $m(\rho, t)$ и соотношений (18), (19) насчитывались последовательно аналогичные таблицы со значениями $w_0[S_0 + \lambda_{\text{эф}}m(\rho, t)]$, интегралом

$$\int_0^t w_0[S_0 + \lambda_{\text{эф}}m(\rho, t)] dt, \quad \text{экспонентой}$$

Номер строки	$\rho \backslash t$	1	2	3	4	5	6
		5×10^3	0,015	0,025	0,035	0,045	0,055
1	5×10^3	$m(1,1)$	$m(2,1)$	$m(3,1)$	$m(4,1)$	$m(5,1)$	$m(6,1)$
2	0,015	$m(1,2)$	$m(2,2)$	$m(3,2)$	$m(4,2)$	$m(5,2)$	$m(6,2)$
3	0,025	$m(1,3)$	$m(2,3)$	$m(3,3)$	$m(4,3)$	$m(5,3)$	$m(6,3)$
4	0,035	$m(1,4)$	$m(2,4)$	$m(3,4)$	$m(4,4)$	$m(5,4)$	$m(6,4)$
5	0,045	$m(1,5)$	$m(2,5)$	$m(3,5)$	$m(4,5)$	$m(5,5)$	$m(6,5)$
6	0,055	$m(1,6)$	$m(2,6)$	$m(3,6)$	$m(4,6)$	$m(5,6)$	$m(6,6)$
7	0,065	$m(1,7)$	$m(2,7)$	$m(3,7)$	$m(4,7)$	$m(5,7)$	$m(6,7)$
8	0,075	$m(1,8)$	$m(2,8)$	$m(3,8)$	$m(4,8)$	$m(5,8)$	$m(6,8)$
9	0,085	$m(1,9)$	$m(2,9)$	$m(3,9)$	$m(4,9)$	$m(5,9)$	$m(6,9)$
10	0,095	$m(1,10)$	$m(2,10)$	$m(3,10)$	$m(4,10)$	$m(5,10)$	$m(6,10)$
11	0,105	$m(1,11)$	$m(2,11)$	$m(3,11)$	$m(4,11)$	$m(5,11)$	$m(6,11)$
12	0,115	$m(1,12)$	$m(2,12)$	$m(3,12)$	$m(4,12)$	$m(5,12)$	$m(6,12)$

Рис. 4. Фрагмент таблицы для значений $m(\rho, t)$ в зависимости от вероятности ρ и времени t

$$e^{-\int_0^t w_0 [S_0 + \lambda_{эф} m(\rho, t)] dt}, \quad \text{произведением}$$

$$w_0 [S_0 + \lambda_{эф} m(\rho, t)] e^{-\int_0^t w_0 [S_0 + \lambda_{эф} m(\rho, t)] dt} \quad \text{и, на-}$$

конец, одностолбцовая таблица зависимости $W(t)$ от времени, являющаяся результатом сложения столбцов предыдущей таблицы и умножения результата на $\Delta\rho$.

Все конкретные демонстрационные расчеты, выполненные в настоящей статье, относятся к цитированному выше эксперименту на реакторе Godiva-II [1] с параметрами:

$$\tilde{k} = 1,00035, \quad \tilde{\nu} = 2,63, \quad w_0 = 3,5 \cdot 10^{-4}, \\ \lambda_{эф} = 0,313 \text{ с}^{-1}, \quad \beta_{эф} = 5,43 \cdot 10^{-3},$$

$$\gamma = 1,43816 \cdot 10^{-2}, \quad S_0 = 290 \text{ нс}^{-1}, \\ \beta = 7 \cdot 10^{-3}. \quad (33)$$

Приведенные в настоящем разделе уравнения и формулы относятся к варианту алгоритма с пятью включенными в расчет моментами. В статье рассмотрены также не представленные на ее страницах алгоритмы с четырьмя и тремя моментами.

На рис. 5 показаны графики $W(t)$, рассчитанные для реактора Godiva-II с помощью метода моментов с пятью включенными в алгоритм моментами. Значения параметра y приняты равными 10, 20 и 100. Аналогичные данные, полученные в алгоритмах с четырьмя и тремя включенными в расчет моментами, приведены на рис. 6 и 7.

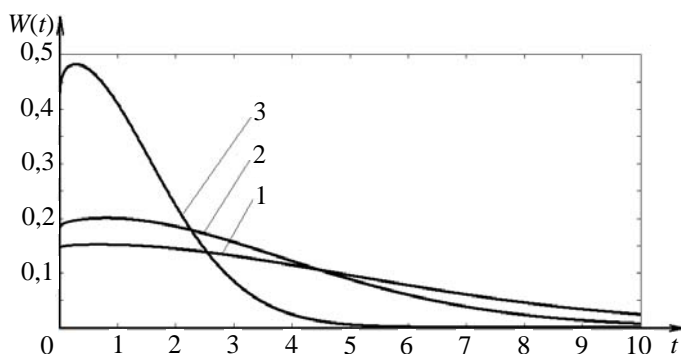


Рис. 5. Графики $W(t)$ для времени ожидания импульса в реакторе Godiva-II [1], рассчитанные с помощью метода моментов с пятью включенными в алгоритм моментами: 1 – $y = 10$, 2 – $y = 20$, 3 – $y = 100$

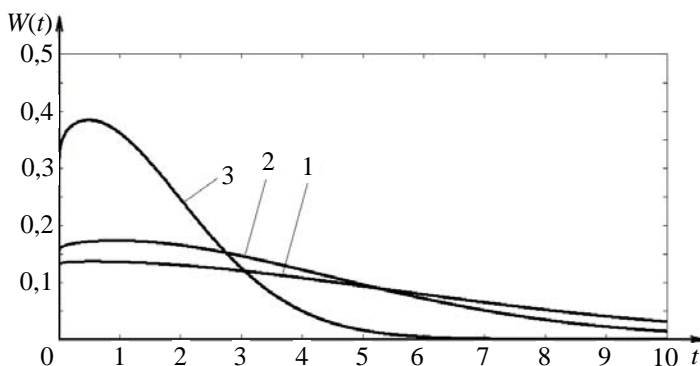


Рис. 6. Графики $W(t)$ для времени ожидания импульса в реакторе Godiva-II [1], рассчитанные с помощью метода моментов с четырьмя включенными в алгоритм моментами: 1 – $y = 10$, 2 – $y = 20$, 3 – $y = 100$

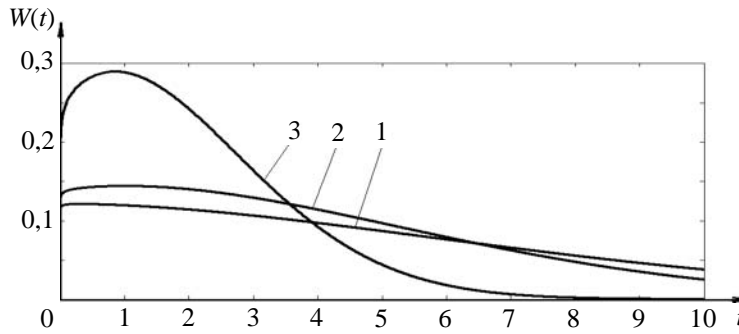


Рис. 7. Графики $W(t)$ для времени ожидания импульса в реакторе Godiva-II [1], рассчитанные с помощью метода моментов с тремя включенными в алгоритм моментами: 1 – $y = 10$, 2 – $y = 20$, 3 – $y = 100$

В табл. 3 приведены экспериментальное значение \bar{t} – среднего времени иницирования первой устойчивой цепи делений в реакторе Godiva-II, а также значения \bar{t} в том же реакторе, рассчитанные с помощью метода моментов с тремя, четырьмя и пятью включенными в алгоритм моментами.

Таблица 3

Среднее время ожидания первой устойчивой цепи делений \bar{t} (с) в зависимости от числа включенных в алгоритм моментов и значений параметра y

у	Расчет			Эксперимент
	Число моментов			
	3	4	5	
10	3,46	3,50	3,43	3,4
20	3,49	3,23	2,92	
100	2,04	1,56	1,27	

Если подводить итог представленным на рис. 5–7 и в табл. 3 результатам выполненного расчета, то следует прежде всего отметить слабую зависимость распределения $W(t)$ и \bar{t} от числа включенных в алгоритм моментов и слишком сильную их зависимость от значений параметра y . Первая из указанных особенностей решения свидетельствует о допустимости включения в алгоритм расчета лишь малого числа моментов.

Что касается второй из отмеченных особенностей полученных распределений

$W(t)$ и чисел \bar{t} , то, по логике, эти данные должны были бы проявлять больший консерватизм в отношении параметра y . По всей видимости, указанная особенность расчетных данных свидетельствует о неоднозначности полученного решения и, следовательно, о неприменимости метода моментов к рассматриваемой в статье задаче.

К такому же заключению приводит и попытка решения задачи с использованием другой формы искомого распределения $P^*(m, t)$, а именно с заданием $P^*(m, t)$ в виде

$$P^*(m, t) = x_0 \left(x_1 e^{-x_1 m} + x_2 e^{-x_2 m} \right).$$

При положительных коэффициентах x_0, x_1, x_2 эта форма записи $P^*(m, t)$ вполне удовлетворяла бы требованиям «Проблемы моментов» к виду положительной неубывающей функции $\sigma(t)$ в интеграле Стильтеса (11), записанной, например, как

$$\sigma(t) = x_0 \left[x_1^2 \left(1 - e^{-x_1 m} \right) + x_2^2 \left(1 - e^{-x_2 m} \right) \right].$$

В этом случае уравнивание первых трех моментов для распределений $P(m, t)$ и $P^*(m, t)$ приводит к значению $x_0 = \frac{1}{2}$ и к системе уравнений для x_1, x_2 ,

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 2A, \quad \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = B,$$

имеющей применительно к эксперименту на реакторе Godiva-II иррациональные корни:

$$x_1 = \frac{1}{A + \sqrt{\frac{B}{2} - A^2}}, \quad x_2 = \frac{1}{A - \sqrt{\frac{B}{2} - A^2}}.$$

Таким образом, если вариант решения с использованием первой формы записи $P^*(m, t)$ свидетельствует о неединственности результата, то второй вариант четко заявляет об отсутствии физически значимого решения вообще.

В виду указанных неудач становится по-настоящему актуальным испытание возможностей метода моментов с помощью теоремы Карлемана (10), (11), согласно которой условие существования и единственности решения рассматриваемой в статье задачи записывается как

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n \sqrt{m^{2n}}(t)} = +\infty, \quad (34)$$

где $\overline{m^{2n}}(t)$ – момент порядка $2n$ для распределения вероятности $P(m, t)$.

6. Доказательство неприменимости метода моментов к рассматриваемой в статье задаче

Намеченное доказательство будет построено на использовании дифференциальных уравнений (23) для моментов распределения $P(m, t)$. Приступая к доказательству, обратим внимание, что все без исключения слагаемые в правых частях уравнений (23) положительны. Удаление каких-то из этих слагаемых или их понижение будет приводить к уменьшению $\overline{m^n}(t)$ и росту суммы

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n \sqrt{m^{2n}}(t)}$$

в условии Карлемана (34). Сказанное означает, что если измененные $\overline{m^n}(t)$ (обозначим их как $\overline{M^n}(t)$) не удовлетворяют условию (34), то реальные $\overline{m^n}(t)$ не удовлетворяют ему тем более. Все последующие трансформации $\overline{M^n}(t)$ будем проводить лишь с дальнейшим их понижением.

На основе системы уравнений (23) запишем уравнение для n -го момента $P(m, t)$ как

$$\frac{d\overline{M^n}}{dt} = n\mu_1 \overline{M^n} + |\mu_2| \overline{M^{n-1}} + \mu_3 \overline{M^{n-2}} + \dots + |\mu_n| \overline{M} \quad (35)$$

или

$$\frac{d\overline{M^n}}{dt} = n\mu_1 \overline{M^n} \left[1 + \frac{|\mu_2| \overline{M^{n-1}}}{n\mu_1 \overline{M^n}} + \frac{\mu_3 \overline{M^{n-2}}}{n\mu_1 \overline{M^n}} + \dots + \frac{|\mu_n| \overline{M}}{n\mu_1 \overline{M^n}} \right]. \quad (36)$$

Уравнения в виде (35) могут быть записаны и для других моментов, например, для момента $\overline{M^{n-1}}(t)$:

$$\frac{d\overline{M^{n-1}}}{dt} = (n-1)\mu_1 \overline{M^{n-1}} + |\mu_2| \overline{M^{n-2}} + \mu_3 \overline{M^{n-3}} + \dots + |\mu_{n-1}| \overline{M}.$$

В первом приближении моменты $\overline{M^n}(t)$, $\overline{M^{n-1}}(t)$ и т. д. будем определять с помощью уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d\overline{M^n}}{dt} &= n\mu_1 \overline{M^n}, \quad \frac{d\overline{M^{n-1}}}{dt} = \\ &= (n-1)\mu_1 \overline{M^{n-1}}, \quad \frac{d\overline{M^{n-2}}}{dt} = (n-2)\mu_1 \overline{M^{n-2}}, \dots, \\ \frac{d\overline{M}}{dt} &= \mu_1 \overline{M}. \end{aligned}$$

В этом приближении

$$\begin{aligned} \overline{M^n}(t) &= e^{n\mu_1 t}, \quad \overline{M^{n-1}}(t) = e^{(n-1)\mu_1 t}, \dots, \\ \overline{M}(t) &= e^{\mu_1 t}. \end{aligned} \quad (37)$$

На основании решений (37) уравнение (36) можно записать в виде

$$\frac{d\overline{M}^n}{dt} = n\mu_1 \overline{M}^n \left[1 + \frac{|\mu_2| e^{(n-1)\mu_1 t}}{n\mu_1 e^{n\mu_1 t}} + \frac{\mu_3 e^{(n-2)\mu_1 t}}{n\mu_1 e^{n\mu_1 t}} + \dots + \frac{|\mu_n| e^{\mu_1 t}}{n\mu_1 e^{n\mu_1 t}} \right]. \quad (38)$$

Запись уравнения (36) в виде (38), вообще говоря, сопряжена с возможным возрастанием моментов. Мы, однако, пренебрегли этим эффектом, учитывая многократное перекрытие его предшествующими и последующими радикальными понижениями моментов.

Продолжив преобразования, перепишем уравнение (38) в виде

$$\frac{d\overline{M}^n}{dt} = n\mu_1 \overline{M}^n \left[1 + \frac{|\mu_2| e^{-\mu_1 t}}{n\mu_1} + \frac{\mu_3 e^{-2\mu_1 t}}{n\mu_1} + \dots + \frac{|\mu_n| e^{-(n-1)\mu_1 t}}{n\mu_1} \right],$$

или

$$\frac{d\overline{M}^n}{dt} = n\mu_1 \overline{M}^n \left[1 + \frac{\gamma e^{-\mu_1 t}}{n(\Delta k)^2} + \frac{(1 \cdot 3) \gamma^2 e^{-2\mu_1 t}}{n(\Delta k)^4} + \frac{(1 \cdot 3 \cdot 5) \gamma^3 e^{-3\mu_1 t}}{n(\Delta k)^6} + \dots + \frac{(2n-3)!! \gamma^{n-1} e^{-(n-1)\mu_1 t}}{n(\Delta k)^{2(n-1)}} \right],$$

или, после замены факториала $(2n-3)!!$ на факториал $(n-1)!$ и введения обозначения

$$D = \frac{\gamma e^{-\mu_1 t}}{(\Delta k)^2},$$

$$\frac{d\overline{M}^n}{dt} = n\mu_1 \overline{M}^n \left[1 + \frac{1!}{n} D + \frac{2!}{n} D^2 + \frac{3!}{n} D^3 + \dots + \frac{(n-1)!}{n} D^{n-1} \right]. \quad (39)$$

Далее необходимо провести оценку масштаба слагаемых в скобках уравнения (39) в сравнении их с первым слагаемым, равным единице. Легко видеть, что большое число первых (начиная со второго) слагае-

мых в скобках имеет очень малое в сравнении с единицей значение. Постепенно, однако, под воздействием факториала, с ростом порядкового номера слагаемых устанавливается их монотонный рост и при каком-то номере q значение слагаемого сравняется с единицей или превзойдет ее. Номер q этого слагаемого находится из равенства

$$\frac{q!}{n} D^q = 1. \quad (40)$$

Если для факториала $q!$ воспользоваться формулой Стирлинга [19]

$$q! = \sqrt{2\pi q} q^q e^{-q} \rightarrow q^q e^{-q},$$

то уравнение (40) запишется в виде

$$\frac{q!}{n} D^q = e^{[q \ln q + (10,67335 - \mu_1 t)q - \ln n]} = 1$$

или

$$q \ln q + (10,67335 - \mu_1 t)q - \ln n = 0. \quad (41)$$

Примем какое-то физически приемлемое фиксированное значение времени t и фиксированное значение порядкового номера $n = n_0$ момента \overline{M}^n и определим корень q_0 уравнения (41) при этих t и $n = n_0$. Далее, если найденный корень $q_0 < n_0$, все слагаемые в скобках уравнения (39) с $q < q_0$ приравняем нулю, а слагаемые с номерами $q \geq q_0$ приравняем единице. При этом сумма слагаемых в уравнении (39) будет равняться

$$n_0 - q_0 + 1 = n_0 \left(1 - \frac{q_0 - 1}{n_0} \right),$$

а само уравнение (39) запишется как

$$\frac{d\overline{M}^{n_0}}{dt} = \left[n_0^2 \left(1 - \frac{q_0 - 1}{n_0} \right) \right] \mu_1 \overline{M}^{n_0}.$$

Можно доказать, что для случаев $n > n_0$ доля приравняемых нулю слагаемых, равная $\frac{q_0 - 1}{n_0}$ при $n = n_0$, уменьшается

с ростом n . Поэтому для всех случаев $n > n_0$ справедливо уравнение

$$\frac{d\overline{M}^n}{dt} = \left[n^2 \left(1 - \frac{q_0 - 1}{n_0} \right) \right] \mu_1 \overline{M}^n(t). \quad (42)$$

Решение этого уравнения записывается как

$$\overline{M}^n(t) = e^{\left[n^2 \left(1 - \frac{q_0 - 1}{n_0} \right) \right] \mu_1 t}. \quad (43)$$

Свойства корня q_0 уравнения (41) продемонстрируем на примерах представительных значений времени t , равных 3 и 10 с, и значений n_0 , равных 10^4 и 10^{23} . (Время t , равное 10 с, практически является максимальным временем, способным представить интерес в случае рассматриваемого здесь эксперимента на реакторе Godiva-II.) Получено, что при значениях t и n_0 , равных 3 с и 10^4 соответственно ($\mu_1 t = 18,393$), корень q_0 уравнения (41), имеющего в этом случае вид

$$q(\ln q - 7,7197) = 9,210,$$

равен примерно 2262.

Аналогично, при t и n_0 , равных 10 с и 10^{23} ($\mu_1 t = 61,31$), уравнение (41) имеет вид

$$q(\ln q - 50,6367) = 52,9595$$

и его корень q_0 равен примерно 10^{22} .

Найденные корни q_0 значительно меньше соответствующих им значений n_0 . Доля приравняемых нулю слагаемых в скобках уравнения (39) составляет при этом 0,2262 и 0,1, и формулы для моментов $\overline{M}^n(t)$ (см. решение (43)) будут иметь в этом случае вид:

$$\overline{M}^n(t) = e^{0,7738n^2 \mu_1 t} \text{ при } n > 2262,$$

$$\overline{M}^n(t) = e^{0,9n^2 \mu_1 t} \text{ при } n > 10^{22}.$$

Легко видеть, что ни то, ни другое решение не удовлетворяет условию Карле-

мана существования и единственности решения. Действительно, в первом решении

$$\begin{aligned} \overline{M}^{2n}(t) &= e^{4 \times 0,7738n^2 \mu_1 t} = e^{3,0952n^2 \mu_1 t} = e^{56,93n^2}, \\ \sum_{n=2262}^{\infty} \frac{1}{2n \sqrt{\overline{M}^{2n}(t)}} &= \sum_{n=2262}^{\infty} e^{-28,465n} = \\ &= e^{-28,465 \times 2262} \left(1 + e^{-28,465} + e^{-2 \times 28,465} + \right. \\ &\left. + e^{-3 \times 28,465} + \dots \right) = \sum_{R=0}^{\infty} e^{-64388} (e^{-28,465})^R = e^{-64400}. \end{aligned}$$

Получена положительная, конечная, но очень малая, отнюдь не равная бесконечности величина.

Аналогично ведет себя и второе решение, соответствующее значениям $t = 10$ с, $n_0 = 10^{23}$, $q_0 = 10^{22}$, $\mu_1 t = 61,31$:

$$\begin{aligned} \overline{M}^{2n}(t) &= e^{220,72n^2}, \\ \sum_{n=10^{22}}^{\infty} \frac{1}{2n \sqrt{\overline{M}^{2n}(t)}} &= e^{-1,1 \times 10^{24}}. \end{aligned}$$

Таким образом, можно считать доказанным, что метод моментов не применим к кинетике реакторов со слабым источником, по крайней мере, к той форме ее уравнений, которая используется в данной статье. Предпринятые попытки решения таких уравнений с помощью метода моментов оказались тщетными.

Заключение

В надкритическом реакторе со слабым источником нейтронов рост мощности на первом этапе ее разгона подвержен сильному влиянию стохастических флуктуаций. Задаче теоретического описания стохастических явлений в реакторах посвящены работы многих зарубежных и отечественных авторов. Как можно видеть из этих работ, сравнительно точное описание стохастических явлений в реакторах представляет собой довольно сложную задачу. В то же время известно, что существует

потребность в формулировании более простых, пусть и приближенных, алгоритмов решения указанной задачи.

Настоящая статья является ответом на эту потребность. В статье предпринята попытка решения указанных задач с помощью так называемого метода моментов. Моменты распределений вероятности для представительных величин реакторной кинетики легко выводятся из первичных дифференциальных уравнений, и это обстоятельство явилось серьезным стимулом проведения намеченной работы. Казалось, что полуаналитический новый алгоритм не потребует разработки сложной вычислительной программы и проведения каких-либо калибровок результата.

В основу формулирования первичных дифференциальных уравнений была положена идея ограниченных и бесконечных (устойчивых) цепей делений, развитая в статье [3] применительно к моделям реактора без ЗН. В настоящей статье указанный подход распространен на более реалистичные модели с учетом ЗН. В этом представлении нейтронные процессы в реакторе заключаются в размножении предшественников ЗН в сильно флуктуирующих по числу делений ограниченных цепях, вкладе нейтронов от распада предшественников в эффективный источник, действующий в реакторе, и в генерировании нейтронами источника новых цепей делений.

Рассмотрение этих явлений проводится в рамках часто используемого приближения нулевого времени жизни нейтронов и одной группы ЗН. Кроме того, в целях замены операций суммирования интегрированием и тем самым упрощения расчетов, принято, что число предшественников ЗН m и число делений в ограниченных цепях N могут иметь любые, не обязательно целые значения.

В настоящей статье предполагалось, что по найденным в указанном приближении моментам $\overline{m^0(t)}$, $\overline{m^1(t)}$, $\overline{m^2(t)}$, ... будет определено (восстановлено) само рас-

пределение вероятности, $P(m, t)$, представляемое в виде квазиполинома

$$P^*(m, t) = x_0(t)e^{-\frac{m}{y}} + x_1(t)m e^{-\frac{m}{y}} + \dots + x_4(t)m^4 e^{-\frac{m}{y}}$$

или
$$P^*(m, t) = x_0 \left(x_1 e^{-x_1 m} + x_2 e^{-x_2 m} \right),$$

а также распределение вероятности и среднее время инициирования первой устойчивой цепи делений $W(t)$ и \bar{t} .

Оптимистичные ожидания, связанные с методом моментов, однако, не оправдались. Как показано, метод моментов в применении к рассматриваемой задаче или не гарантирует единственности решения, или вообще не позволяет получить физически приемлемый результат. Неприменимость метода моментов к рассматриваемой в статье задаче подтверждена строгим доказательством, выполненным на основе теоремы Карлемана.

Список литературы

1. Wimett T. F., White R. H., Stratton W. R., Wood D. P. «Godiva-II» – an unmoderated pulse-irradiation reactor // Nucl. Sci. Engng., 1960, vol. 8, N 6, p. 691–708.
2. Williams M. M. R. Random Processes in Nuclear Reactors. – Pergamon Press. Oxford. New York. Toronto. Sydney. 1974.
3. Hansen G. E. Assembly of fissionable material in the presence of a weak neutron source // Nucl. Sci. Engng., 1960, vol. 8, N 6, p. 709–719.
4. Kazi H. Preinitiation measurements with a fast pulse reactor // Trans. Amer. Nucl. Soc., 1971, vol. 14, N 2, p. 763–764.
5. Кайгородов А. А. Исследование развития устойчивых цепочек деления в реакторах со слабым источником нейтронов // ВАНТ. Сер. Физика ядерных реакторов, 2021, вып. 4, с. 85–93.

6. Humbert P., Mechtoua B. Simulation of Caliban reactor burst wait time and initiation probability using a point reactor model and PANDA code // PHYSOR 2004. Chicago, Illinois, april 25–29, 2004.
7. O'Brien P. D. Design problems. Fast Burst Reactors // Proc. of the National Topical Meeting on fast burst reactors held at the University of New Mexico, Albuquerque, January 28–30, 1969. USAEC CONF-690102, 1969, p. 625–628.
8. Seal R. L. A review of the CRAC experiments // Trans. Amer. Nucl. Soc., 1971, vol. 14, N 1, p. 34–35.
9. Bell G. I. Probability distribution of neutrons and precursors in a multiplying assembly // Annals of Physics, 1963, vol. 21, N 2, p. 243–283.
10. Hurwitz H. Jr., McMillan D. B., Smith J. H., Storm M. R. Kinetics of low source reactor startups. Parts I and II // Ibid., 1963, vol. 15, N 2, p. 166–186.
11. Волков Ю. В. Стохастическая кинетика реактора со слабым источником и ядерная безопасность // Атомная энергия, 1992, т. 72, вып. 1, с. 13–18.
12. Нестеренко Р. Ю. Стохастическая теория переноса нейтронов в реакторе. Линейные стохастические уравнения распределенной модели // ВАНТ. Сер. Физика ядерных реакторов, 2016, вып. 1, с. 104–124.
13. Колесов В. Ф., Ганичев А. Н. Оперативный анализ флуктуаций мощности в реакторах со слабым источником // ВАНТ. Сер. Физика ядерных реакторов, 2020, вып. 4, с. 17–37.
14. Математическая энциклопедия. – М: Советская энциклопедия, 1982, т. 3, с. 1184.
15. Диткин В. А., Прудников А. П. Операционное исчисление. – Москва: Высшая школа, 1975. С. 408.
16. Ахиезер Н. И. Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею. – Москва: Гизфизматлит, 1961. С. 311.
17. Математическая энциклопедия. – М: Советская энциклопедия, 1979, т. 2, с. 1104.
18. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – Москва: Физматгиз, 1963. С. 1100.
19. Математическая энциклопедия. – М: Советская энциклопедия, 1985, т. 5, с. 1248.

Контактная информация –

Колесов Владимир Федорович,
главный научный сотрудник ИЯРФ,
РФЯЦ-ВНИИЭФ,
e-mail: otd4@expd.vniief.ru

Вопросы атомной науки и техники. Сер. Физика ядерных реакторов, 2022, вып. 4, с. 35–56.