

УДК 519.6

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ TVDR ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОДНОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ

А. А. Шестаков

(ФГУП "РФЯЦ-ВНИИТФ им. академ. Е. И. Забабахина",
г. Снежинск Челябинской области)

Уравнение переноса является одним из фундаментальных уравнений математической физики, широко используемых для описания процессов радиационной газовой динамики. Проблеме построения численных методов решения уравнения переноса излучения посвящено огромное число работ. Отдельным классом среди них выделяются нелинейные схемы TVDR повышенного порядка (выше первого) аппроксимации, построенные по классической методологии TVD. В работе проведены исследования устойчивости разностных схем TVDR с использованием спектрального признака Неймана для одномерного уравнения переноса. Для сравнения приведены условия устойчивости схем St и TVD. Сделаны выводы об условиях устойчивости схем TVD и TVDR.

Ключевые слова: уравнение переноса, разностные схемы, устойчивость.

Введение

Уравнение переноса является одним из фундаментальных уравнений математической физики, широко используемых для описания процессов радиационной газовой динамики. Поэтому представляет интерес конструирование численных методов решения этого уравнения и изучение их свойств. Разностные схемы аппроксимируют уравнение переноса с разной точностью. В зависимости от порядка точности в расчетах по этим схемам по прошествии некоторого промежутка времени возрастает отличие от точного решения. Монотонные разностные схемы первого порядка аппроксимации, как правило, дают "расплывающийся" со временем пространственный профиль. Схемы повышенного порядка аппроксимации могут приводить к существенной немонотонности.

Одним из путей построения схем повышенного порядка аппроксимации с улучшенными монотонными свойствами для решения уравнения переноса является переход к нелинейным схемам TVD, начало которым положил В. П. Колган [1]. В настоящее время опубликовано большое количество работ по схемам TVD (см., например, [2]). В этих работах рассмотрены как явные, так и неявные схемы TVD для решения гиперболических систем уравнений. Если рассматривать неявные схемы TVD при аппроксимации уравнения переноса, то это будут трехточечные или четырехточечные схемы из-за использования односторонних производных в каждом направлении пространственной переменной. Это значит, что теряется важное достоинство одного из самых эффективных методов решения уравнения переноса — метода DS_n [3], где аппроксимация строится в рамках счетной ячейки, а для решения разностных уравнений используется экономичный метод бегущего счета.

В работе [4] был найден способ, как обойти эти трудности в методологии TVD. Полученные в результате схемы в дальнейшем были названы TVDR [5]. В работе [3] построена неявная схема MTVDR, в которой используется поправочный множитель, получаемый с помощью реконструкции TVD. В работе [6] построена неявная схема ATVDR, у которой вся добавка от реконструкции TVD взята с предыдущего шага.

Из теории разностных схем известно, что классические аппроксимации метода DS_n — неявные схемы St и DD — безусловно устойчивы. Возникает вопрос, будут ли безусловно устойчивыми неявные схемы TVD и TVDR.

В данной работе проведены исследования устойчивости разностных схем TVDR с использованием спектрального признака Неймана [7, 8] для одномерного уравнения переноса. Для сравнения приведены условия устойчивости схем St и TVD.

Разностная аппроксимация уравнения переноса

Рассмотрим решение линейного уравнение переноса в одномерной плоской геометрии

$$\frac{1}{c} \frac{\partial J}{\partial t} + \mu \frac{\partial J}{\partial x} + \alpha J = 0, \quad (1)$$

где $J(\mu, x, t)$ — неотрицательная функция; μ — направляющий косинус в пространстве полета частиц; x — пространственная координата; t — время; c — скорость света; α — некоторая неотрицательная константа. Уравнение (1) дополняется начальными и граничными условиями

$$J(\mu, x, t^0) = J^0(\mu, x); \quad J(\mu, x_L, t)|_{\mu > 0} = J_L(\mu, t); \quad J(\mu, x_R, t)|_{\mu < 0} = J_R(\mu, t).$$

Неявная схема в рамках одноячеечного шаблона для уравнения (1) имеет вид

$$\frac{J_{i+1/2}^{n+1} - J_{i+1/2}^n}{c\tau} + \mu \frac{J_{i+1}^{n+1} - J_i^{n+1}}{h} + \alpha J_{i+1/2}^{n+1} = 0, \quad (2)$$

где $\tau = t^{n+1} - t^n$, $n = 0, \dots$; $h = x_{i+1} - x_i$, $i = 0, \dots, I - 1$.

Для упрощения изложения в дальнейшем предполагается $\tau = \text{const}$, $h = \text{const}$. Аппроксимация по μ не проводится, так как при исследовании устойчивости в плоской геометрии переменная μ рассматривается как параметр.

Обозначения величин с целыми индексами $J_i^{n+1} = J(\mu, x_i, t^{n+1})$ соответствуют значениям искомой функции в узлах разностной сетки. Обозначения с полуцелыми индексами $J_{i+1/2}^{n+1} = \frac{1}{h} \int_{x_i}^{x_{i+1}} J(\mu, x, t^{n+1}) dx$ используются для интегральных средних значений в ячейке и отличаются от значений в центре ячейки $J(\mu, x_{i+1/2}, t^{n+1})$ на $O(h^m)$ в зависимости от используемой квадратуры, где m — порядок квадратурной формулы.

Уравнение (2) можно записать в более компактном виде

$$qJ_{i+1/2}^{n+1} + C\Delta J_i^{n+1} = J_{i+1/2}^n, \quad (3)$$

где $q = 1 + c\tau\alpha \geq 1$; $C = \frac{c\tau\mu}{h}$ — число Куранта; $\Delta J_i^{n+1} = J_{i+1}^{n+1} - J_i^{n+1}$.

Схема с дополнительными соотношениями связи

$$J_{i+1/2}^{n+1} = J_{i+1}^{n+1} \text{ при } \mu > 0; \quad J_{i+1/2}^{n+1} = J_i^{n+1} \text{ при } \mu \leq 0 \quad (4)$$

является монотонной положительной схемой первого порядка аппроксимации. В теории переноса эта схема называется противопотоковой, а в методе DS_n — схемой St.

Подставляя соотношения связи (4) в уравнение (3), получаем

$$\begin{aligned} J_{i+1/2}^{n+1} &= \frac{1}{q+C} J_{i+1/2}^n + \frac{C}{q+C} J_{i-1/2}^{n+1} \text{ при } \mu > 0; \\ J_{i+1/2}^{n+1} &= \frac{1}{q-C} J_{i+1/2}^n - \frac{C}{q-C} J_{i+3/2}^{n+1} \text{ при } \mu \leq 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Рассмотренные в данной работе схемы TVD и TVDR построены на основе схемы St. Для повышения порядка аппроксимации схемы St проведем реконструкцию решения на сеточных интервалах. Представим интенсивность излучения на интервале $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ в кусочно-линейной форме:

$$J(x, \mu, t) = J_{i+1/2} + \frac{\partial J_{i+1/2}}{\partial x} (x - x_{i+1/2}), \quad x_{i+1/2} = 0,5(x_i + x_{i+1}).$$

Отсюда следуют реконструированные соотношения связи

$$\begin{aligned} J_{i+1}^{n+1} &= J_{i+1/2}^{n+1} + \frac{\partial J_{i+1/2}^{n+1}}{\partial x} \frac{h}{2}, & \mu > 0; \\ J_i^{n+1} &= J_{i+1/2}^{n+1} - \frac{\partial J_{i+1/2}^{n+1}}{\partial x} \frac{h}{2}, & \mu \leq 0. \end{aligned}$$

В соответствии с методологией TVD в качестве $\frac{\partial J_{i+1/2}}{\partial x}$ берутся некоторые ограничители, которые обычно используют односторонние производные. Если ввести традиционные для схем TVD функции-ограничители, то можно записать соотношения связи в виде

$$\begin{aligned} J_{i+1}^{n+1} &= J_{i+1/2}^{n+1} + 0,5\phi_{i+1/2}^{n+1}\Delta J_{i-1/2}^{n+1}, & \mu > 0; \\ J_i^{n+1} &= J_{i+1/2}^{n+1} - 0,5\phi_{i+1/2}^{n+1}\Delta J_{i-1/2}^{n+1}, & \mu \leq 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь $\Delta J_{i-1/2} = J_{i+1/2} - J_{i-1/2}$; $\phi_{i+1/2} = \frac{L(\Delta J_{i-1/2}, \Delta J_{i+1/2})}{\Delta J_{i-1/2}} = L(1, \hat{\theta}_{i+1/2})$, где $\hat{\theta}_{i+1/2} = \frac{\Delta J_{i+1/2}}{\Delta J_{i-1/2}}$, L — некоторый ограничитель. При $\Delta J_{i-1/2} = 0$ полагаем $\phi_{i+1/2} = 1$, $\hat{\theta}_{i+1/2} = 1$. При $\text{sgn} \Delta J_{i-1/2} \neq \text{sgn} \Delta J_{i+1/2}$ полагаем $\hat{\theta}_{i+1/2} = 0$, поэтому выполняется $\hat{\theta}_{i+1/2} \geq 0$.

Система уравнений с соотношениями связи (6) представляет собой неявную схему TVD с четырехточечным шаблоном на $(n + 1)$ -м слое:

$$\begin{aligned} \frac{J_{i+1/2}^{n+1} - J_{i+1/2}^n}{\sigma\tau} + \mu \frac{\left(J_{i+1/2}^{n+1} + 0,5\phi_{i+1/2}^{n+1}\Delta J_{i-1/2}^{n+1} \right) - \left(J_{i-1/2}^{n+1} + 0,5\phi_{i-1/2}^{n+1}\Delta J_{i-3/2}^{n+1} \right)}{h} + \alpha J_{i+1/2}^{n+1} &= 0 \\ &\text{при } \mu > 0; \\ \frac{J_{i+1/2}^{n+1} - J_{i+1/2}^n}{\sigma\tau} + \mu \frac{\left(J_{i+3/2}^{n+1} - 0,5\phi_{i+3/2}^{n+1}\Delta J_{i+1/2}^{n+1} \right) - \left(J_{i+1/2}^{n+1} - 0,5\phi_{i+1/2}^{n+1}\Delta J_{i-1/2}^{n+1} \right)}{h} + \alpha J_{i+1/2}^{n+1} &= 0 \\ &\text{при } \mu \leq 0. \end{aligned}$$

Для $\mu > 0$ уравнение переноса расписывается в четырех ячейках $i - 3/2, i - 1/2, i + 1/2, i + 3/2$ (рис. 1):

$$qJ_{i+1/2}^{n+1} + C \left[J_{i+1/2}^{n+1} - J_{i-1/2}^{n+1} + 0,5L \left(\Delta J_{i-1/2}^{n+1}, \Delta J_{i+1/2}^{n+1} \right) - 0,5L \left(\Delta J_{i-3/2}^{n+1}, \Delta J_{i-1/2}^{n+1} \right) \right] = J_{i+1/2}^n,$$

для $\mu \leq 0$ — в ячейках $i - 1/2, i + 1/2, i + 3/2, i + 5/2$:

$$qJ_{i+1/2}^{n+1} + C \left[J_{i+3/2}^{n+1} - J_{i+1/2}^{n+1} - 0,5L \left(\Delta J_{i+1/2}^{n+1}, \Delta J_{i+3/2}^{n+1} \right) + 0,5L \left(\Delta J_{i-1/2}^{n+1}, \Delta J_{i+1/2}^{n+1} \right) \right] = J_{i+1/2}^n.$$

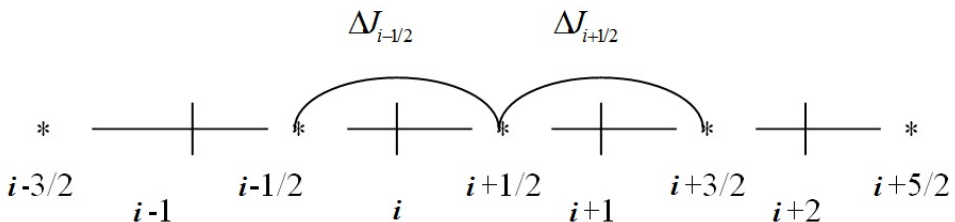


Рис. 1. Шаблон разностной схемы

Разностные уравнения можно записать в более компактном виде

$$\begin{aligned} qJ_{i+1/2}^{n+1} + CA_{i-1/2}^{n+1}\Delta J_{i-1/2}^{n+1} &= J_{i+1/2}^n, & A_{i-1/2}^{n+1} &= 1 + 0,5\phi_{i+1/2}^{n+1} - 0,5\phi_{i-1/2}^{n+1}\theta_{i-1/2}^{n+1} && \text{при } \mu > 0; \\ qJ_{i+1/2}^{n+1} + CH_{i+1/2}^{n+1}\Delta J_{i+1/2}^{n+1} &= J_{i+1/2}^n, & H_{i+1/2}^{n+1} &= 1 - 0,5\phi_{i+3/2}^{n+1} + 0,5\phi_{i+1/2}^{n+1}\theta_{i+1/2}^{n+1} && \text{при } \mu \leq 0, \end{aligned}$$

где $\phi_{i-1/2}^{n+1} = \frac{L(\Delta J_{i-3/2}^{n+1}, \Delta J_{i-1/2}^{n+1})}{\Delta J_{i-3/2}^{n+1}}$; $\theta_{i-1/2}^{n+1} = \frac{\Delta J_{i-3/2}^{n+1}}{\Delta J_{i-1/2}^{n+1}}$; $\phi_{i-1/2}^{n+1}\theta_{i-1/2}^{n+1} = \frac{L(\Delta J_{i-3/2}^{n+1}, \Delta J_{i-1/2}^{n+1})}{\Delta J_{i-1/2}^{n+1}}$.

При $\Delta J_{i-1/2} = 0$ полагаем $\phi_{i+1/2} = 1$ и $\theta_{i-1/2} = 1$.

Кратко приведем схемы, рассматриваемые в данной работе.

Схема St. Для $\mu > 0$ аппроксимация строится в двух точках $i - 1/2$ и $i + 1/2$ на $(n + 1)$ -м шаге и в одной точке $i + 1/2$ на n -м шаге (рис. 2):

$$qJ_{i+1/2}^{n+1} + C\Delta J_{i-1/2}^{n+1} = J_{i+1/2}^n, \quad \Delta J_{i-1/2} = J_{i+1/2} - J_{i-1/2}, \quad C > 0.$$

Для $\mu \leq 0$ аппроксимация строится в двух точках $i + 1/2$ и $i + 3/2$ на $(n + 1)$ -м шаге и в одной точке $i + 1/2$ на n -м шаге (рис. 3):

$$qJ_{i+1/2}^{n+1} + C\Delta J_{i+1/2}^{n+1} = J_{i+1/2}^n, \quad \Delta J_{i+1/2} = J_{i+3/2} - J_{i+1/2}, \quad C < 0.$$

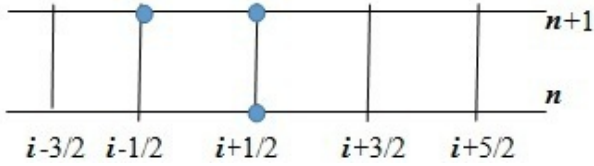


Рис. 2. Шаблон схемы St для $\mu > 0$

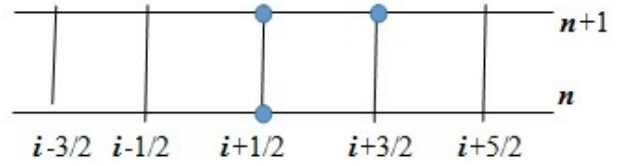


Рис. 3. Шаблон схемы St для $\mu \leq 0$

Явная TVD-схема (ЯТVD). Для $\mu > 0$ аппроксимация строится в четырех точках $i - 3/2, i - 1/2, i + 1/2, i + 3/2$ на n -м шаге и в одной точке $i + 1/2$ на $(n + 1)$ -м шаге (рис. 4):

$$qJ_{i+1/2}^{n+1} + C \left\{ \left[J_{i+1/2}^n + 0,5\phi_{i+1/2}^n \left(J_{i+1/2}^n - J_{i-1/2}^n \right) \right] - \left[J_{i-1/2}^n + 0,5\phi_{i-1/2}^n \left(J_{i-1/2}^n - J_{i-3/2}^n \right) \right] \right\} = J_{i+1/2}^n.$$

Для $\mu \leq 0$ аппроксимация строится в четырех точках $i - 1/2, i + 1/2, i + 3/2, i + 5/2$ на n -м шаге и в одной точке $i + 1/2$ на $(n + 1)$ -м шаге (рис. 5):

$$qJ_{i+1/2}^{n+1} + C \left\{ \left[J_{i+3/2}^n - 0,5\phi_{i+3/2}^n \left(J_{i+3/2}^n - J_{i+1/2}^n \right) \right] - \left[J_{i+1/2}^n - 0,5\phi_{i+1/2}^n \left(J_{i+1/2}^n - J_{i-1/2}^n \right) \right] \right\} = J_{i+1/2}^n.$$

Разностные уравнения можно записать в компактном виде:

$$\begin{aligned} qJ_{i+1/2}^{n+1} + C(A\Delta J)_{i-1/2}^n &= J_{i+1/2}^n, & A_{i-1/2}^n &= 1 + 0,5\phi_{i+1/2}^n - 0,5\phi_{i-1/2}^n\theta_{i-1/2}^n && \text{при } \mu > 0; \\ qJ_{i+1/2}^{n+1} + C(H\Delta J)_{i+1/2}^n &= J_{i+1/2}^n, & H_{i+1/2}^n &= 1 - 0,5\phi_{i+3/2}^n + 0,5\phi_{i+1/2}^n\theta_{i+1/2}^n && \text{при } \mu \leq 0, \end{aligned}$$

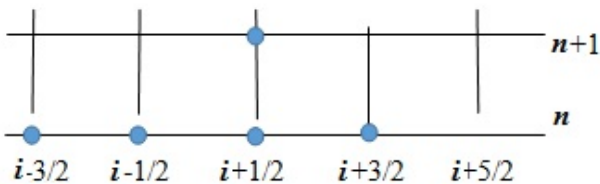


Рис. 4. Шаблон явной TVD-схемы для $\mu > 0$

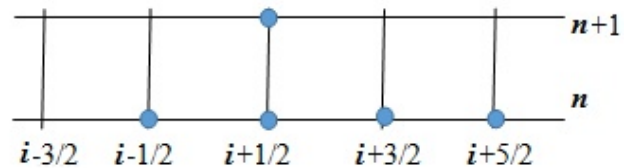


Рис. 5. Шаблон явной TVD-схемы для $\mu \leq 0$

где $\phi_{i+1/2}^n = \frac{L(\Delta J_{i-1/2}^n, \Delta J_{i+1/2}^n)}{\Delta J_{i-1/2}^n}$; $\theta_{i+1/2}^n = \frac{\Delta J_{i-1/2}^n}{\Delta J_{i+1/2}^n}$; $\phi_{i+1/2}^n \theta_{i+1/2}^n = \frac{L(\Delta J_{i-1/2}^n, \Delta J_{i+1/2}^n)}{\Delta J_{i-1/2}^n} \frac{\Delta J_{i-1/2}^n}{\Delta J_{i+1/2}^n}$.

Неявная TVD-схема (HTVD). Для $\mu > 0$ аппроксимация строится в четырех точках $i-3/2, i-1/2, i+1/2, i+3/2$ на $(n+1)$ -м шаге и в одной точке $i+1/2$ на n -м шаге (рис. 6):

$$qJ_{i+1/2}^{n+1} + C \left\{ \left[J_{i+1/2}^{n+1} + 0,5\phi_{i+1/2}^{n+1} \left(J_{i+1/2}^{n+1} - J_{i-1/2}^{n+1} \right) \right] - \left[J_{i-1/2}^{n+1} + 0,5\phi_{i-1/2}^{n+1} \left(J_{i-1/2}^{n+1} - J_{i-3/2}^{n+1} \right) \right] \right\} = J_{i+1/2}^n.$$

Для $\mu \leq 0$ аппроксимация строится в четырех точках $i-1/2, i+1/2, i+3/2, i+5/2$ на $(n+1)$ -м шаге и в одной точке $i+1/2$ на n -м шаге (рис. 7):

$$qJ_{i+1/2}^{n+1} + C \left\{ \left[J_{i+3/2}^{n+1} - 0,5\phi_{i+3/2}^{n+1} \left(J_{i+3/2}^{n+1} - J_{i+1/2}^{n+1} \right) \right] - \left[J_{i+1/2}^{n+1} - 0,5\phi_{i+1/2}^{n+1} \left(J_{i+1/2}^{n+1} - J_{i-1/2}^{n+1} \right) \right] \right\} = J_{i+1/2}^n.$$

Разностные уравнения запишем в компактном виде:

$$\begin{aligned} qJ_{i+1/2}^{n+1} + C(A\Delta J)_{i-1/2}^{n+1} &= J_{i+1/2}^n, & A_{i-1/2}^{n+1} &= 1 + 0,5\phi_{i+1/2}^{n+1} - 0,5\phi_{i-1/2}^{n+1}\theta_{i-1/2}^{n+1} && \text{при } \mu > 0; \\ qJ_{i+1/2}^{n+1} + C(H\Delta J)_{i+1/2}^{n+1} &= J_{i+1/2}^n, & H_{i+1/2}^{n+1} &= 1 - 0,5\phi_{i+3/2}^{n+1} + 0,5\phi_{i+1/2}^{n+1}\theta_{i+1/2}^{n+1} && \text{при } \mu \leq 0. \end{aligned}$$

Аппроксимация в четырех точках на $(n+1)$ -м шаге не позволяет использовать алгоритм бегущего счета.

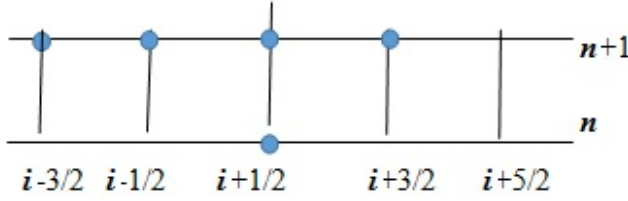


Рис. 6. Шаблон неявной TVD-схемы для $\mu > 0$

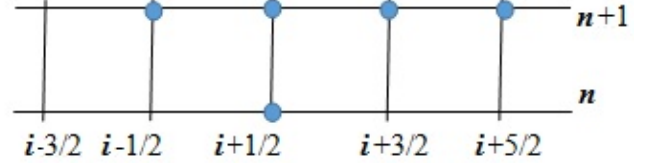


Рис. 7. Шаблон неявной TVD-схемы для $\mu \leq 0$

Полунеявная TVD-схема (PTVD). Для $\mu > 0$ аппроксимация строится в четырех точках $i-3/2, i-1/2, i+1/2, i+3/2$ на n -м шаге и в двух точках $i-1/2, i+1/2$ на $(n+1)$ -м шаге (рис. 8):

$$qJ_{i+1/2}^{n+1} + C \left\{ \left[J_{i+1/2}^{n+1} + 0,5\phi_{i+1/2}^n \left(J_{i+1/2}^{n+1} - J_{i-1/2}^{n+1} \right) \right] - \left[J_{i-1/2}^{n+1} + 0,5\phi_{i-1/2}^n \theta_{i-1/2}^n \left(J_{i+1/2}^{n+1} - J_{i-1/2}^{n+1} \right) \right] \right\} = J_{i+1/2}^n,$$

где $\phi_{i-1/2}^n \theta_{i-1/2}^n \Delta J_{i-1/2}^{n+1} = \frac{L(\Delta J_{i-3/2}^n, \Delta J_{i-1/2}^n)}{\Delta J_{i-3/2}^n} \frac{\Delta J_{i-3/2}^n}{\Delta J_{i-1/2}^n} \Delta J_{i-1/2}^{n+1} = \frac{L(\Delta J_{i-3/2}^n, \Delta J_{i-1/2}^n)}{\Delta J_{i-1/2}^n} \Delta J_{i-1/2}^{n+1}$.

Для $\mu \leq 0$ аппроксимация строится в четырех точках $i-1/2, i+1/2, i+3/2, i+5/2$ на n -м шаге и в двух точках $i+1/2, i+3/2$ на $n+1$ -м шаге (рис. 9):

$$qJ_{i+1/2}^{n+1} + C \left\{ \left[J_{i+3/2}^{n+1} - 0,5\phi_{i+3/2}^n \left(J_{i+3/2}^{n+1} - J_{i+1/2}^{n+1} \right) \right] - \left[J_{i+1/2}^{n+1} - 0,5\phi_{i+1/2}^n \theta_{i+1/2}^n \left(J_{i+3/2}^{n+1} - J_{i+1/2}^{n+1} \right) \right] \right\} = J_{i+1/2}^n,$$

$$\phi_{i+1/2}^n \theta_{i+1/2}^n \Delta J_{i+1/2}^{n+1} = \frac{L(\Delta J_{i-1/2}^n, \Delta J_{i+1/2}^n)}{\Delta J_{i-1/2}^n} \frac{\Delta J_{i-1/2}^n}{\Delta J_{i+1/2}^n} \Delta J_{i+1/2}^{n+1} = \frac{L(\Delta J_{i-1/2}^n, \Delta J_{i+1/2}^n)}{\Delta J_{i+1/2}^n} \Delta J_{i+1/2}^{n+1}.$$

Разностные уравнения запишем в компактном виде:

$$\begin{aligned} qJ_{i+1/2}^{n+1} + CA_{i-1/2}^n \Delta J_{i-1/2}^{n+1} &= J_{i+1/2}^n, & A_{i-1/2}^n &= 1 + 0,5\phi_{i+1/2}^n - 0,5\phi_{i-1/2}^n \theta_{i-1/2}^n && \text{при } \mu > 0; \\ qJ_{i+1/2}^{n+1} + CH_{i+1/2}^n \Delta J_{i+1/2}^{n+1} &= J_{i+1/2}^n, & H_{i+1/2}^n &= 1 - 0,5\phi_{i+3/2}^n + 0,5\phi_{i+1/2}^n \theta_{i+1/2}^n && \text{при } \mu \leq 0. \end{aligned}$$

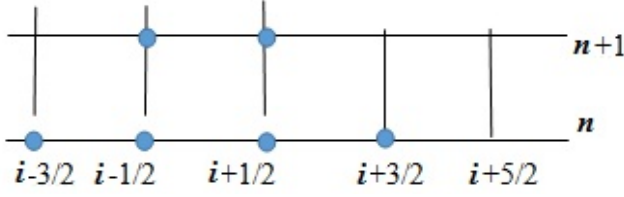


Рис. 8. Шаблон полуявной TVD-схемы для $\mu > 0$

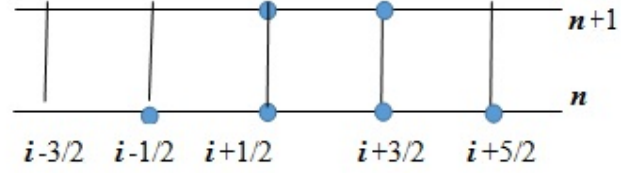


Рис. 9. Шаблон полуявной TVD-схемы для $\mu \leq 0$

Аппроксимация в двух точках на $(n + 1)$ -м шаге позволяет использовать алгоритм бегущего счета, но полуявная TVD-схема неконсервативна.

Полуявная TVDR-схема (PTVDR). Для $\mu > 0$ аппроксимация строится в четырех точках $i - 3/2, i - 1/2, i + 1/2, i + 3/2$ на n -м шаге и в трех точках $i - 3/2, i - 1/2, i + 1/2$ на $n + 1$ -м шаге (рис. 10):

$$qJ_{i+1/2}^{n+1} + C \left\{ \left[J_{i+1/2}^{n+1} + 0,5\phi_{i+1/2}^n \left(J_{i+1/2}^{n+1} - J_{i-1/2}^{n+1} \right) \right] - \left[J_{i-1/2}^{n+1} + 0,5\phi_{i-1/2}^n \left(J_{i-1/2}^{n+1} - J_{i-3/2}^{n+1} \right) \right] \right\} = J_{i+1/2}^n.$$

Для $\mu \leq 0$ аппроксимация строится в четырех точках $i - 1/2, i + 1/2, i + 3/2, i + 5/2$ на n -м шаге и в трех точках $i - 1/2, i + 1/2, i + 3/2$ на $(n + 1)$ -м шаге (рис. 11):

$$qJ_{i+1/2}^{n+1} + C \left\{ \left[J_{i+3/2}^{n+1} - 0,5\phi_{i+3/2}^n \left(J_{i+3/2}^{n+1} - J_{i+1/2}^{n+1} \right) \right] - \left[J_{i+1/2}^{n+1} - 0,5\phi_{i+1/2}^n \left(J_{i+1/2}^{n+1} - J_{i-1/2}^{n+1} \right) \right] \right\} = J_{i+1/2}^n.$$

Разностные уравнения запишем в компактном виде:

$$\begin{aligned} qJ_{i+1/2}^{n+1} + C (A\Delta J)_{i-1/2}^{n+1} &= J_{i+1/2}^n, & A_{i-1/2}^{n+1} &= 1 + 0,5\phi_{i+1/2}^n - 0,5\phi_{i-1/2}^n \theta_{i-1/2}^{n+1} && \text{при } \mu > 0; \\ qJ_{i+1/2}^{n+1} + C (H\Delta J)_{i+1/2}^{n+1} &= J_{i+1/2}^n, & H_{i+1/2}^{n+1} &= 1 - 0,5\phi_{i+3/2}^n + 0,5\phi_{i+1/2}^n \theta_{i+1/2}^{n+1} && \text{при } \mu \leq 0, \end{aligned}$$

где $\phi_{i-1/2}^n \theta_{i-1/2}^{n+1} = \frac{L \left(\Delta J_{i-3/2}^n, \Delta J_{i-1/2}^n \right) \Delta J_{i-3/2}^{n+1}}{\Delta J_{i-1/2}^n \Delta J_{i-1/2}^{n+1}}$.

Аппроксимация в трех точках на $(n + 1)$ -м шаге позволяет использовать алгоритм бегущего счета, схема консервативна, но в трехточечной реализации сложнее ставить граничные условия (приходится вводить фиктивные ячейки у границы).

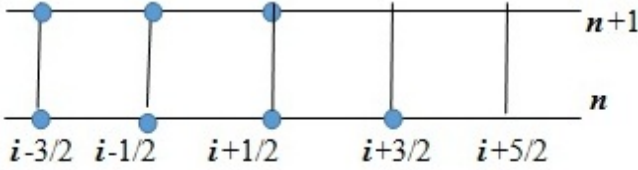


Рис. 10. Шаблон полуявной TVDR-схемы для $\mu > 0$

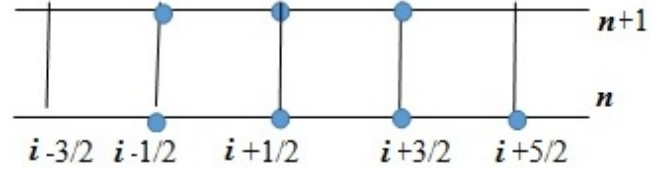


Рис. 11. Шаблон полуявной TVDR-схемы для $\mu \leq 0$

Аддитивная TVDR-схема (ATVDR). Для $\mu > 0$ аппроксимация строится в четырех точках $i - 3/2, i - 1/2, i + 1/2, i + 3/2$ на n -м шаге и в двух точках $i - 1/2, i + 1/2$ на $(n + 1)$ -м шаге (рис. 12):

$$qJ_{i+1/2}^{n+1} + C \left\{ \left[J_{i+1/2}^{n+1} + 0,5\phi_{i+1/2}^n \left(J_{i+1/2}^n - J_{i-1/2}^n \right) \right] - \left[J_{i-1/2}^{n+1} + 0,5\phi_{i-1/2}^n \left(J_{i-1/2}^n - J_{i-3/2}^n \right) \right] \right\} = J_{i+1/2}^n.$$

Для $\mu \leq 0$ аппроксимация строится в четырех точках $i - 1/2, i + 1/2, i + 3/2, i + 5/2$ на n -м шаге и в двух точках $i + 1/2, i + 3/2$ на $(n + 1)$ -м шаге (рис. 13):

$$qJ_{i+1/2}^{n+1} + C \left\{ \left[J_{i+3/2}^{n+1} - 0,5\phi_{i+3/2}^n \left(J_{i+3/2}^n - J_{i+1/2}^n \right) \right] - \left[J_{i+1/2}^{n+1} - 0,5\phi_{i+1/2}^n \left(J_{i+1/2}^n - J_{i-1/2}^n \right) \right] \right\} = J_{i+1/2}^n.$$

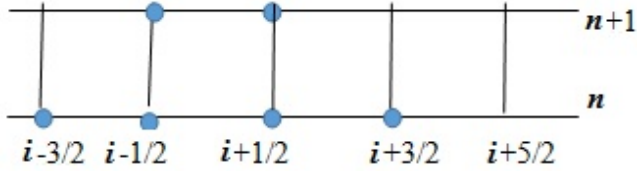


Рис. 12. Шаблон ATVDR-схемы для $\mu > 0$

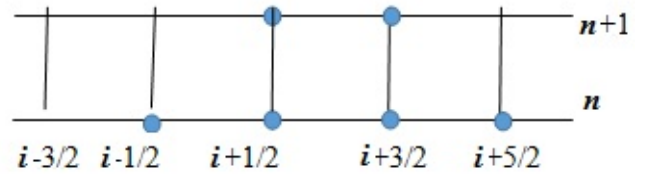


Рис. 13. Шаблон ATVDR-схемы для $\mu \leq 0$

Разностные уравнения запишем в компактном виде:

$$qJ_{i+1/2}^{n+1} + C\Delta J_{i-1/2}^{n+1} + C[(A-1)\Delta J]_{i-1/2}^n = J_{i+1/2}^n, \quad A_{i-1/2}^n = 1 + 0,5\phi_{i+1/2}^n - 0,5\phi_{i-1/2}^n\theta_{i-1/2}^n$$

при $\mu > 0$;

$$qJ_{i+1/2}^{n+1} + C\Delta J_{i+1/2}^{n+1} + C[(H-1)\Delta J]_{i+1/2}^n = J_{i+1/2}^n, \quad H_{i+1/2}^n = 1 - 0,5\phi_{i+3/2}^n + 0,5\phi_{i+1/2}^n\theta_{i+1/2}^n$$

при $\mu \leq 0$.

Схема позволяет использовать алгоритм бегущего счета, и, хотя шаблон совпадает с шаблоном схемы PTVD, схема ATVDR не теряет свойства консервативности.

Мультипликативная TVDR-схема (MTVDR). Для $\mu > 0$ аппроксимация строится в четырех точках $i-3/2, i-1/2, i+1/2, i+3/2$ на n -м шаге и в двух точках $i-1/2, i+1/2$ на $(n+1)$ -м шаге (рис. 14):

$$qJ_{i+1/2}^{n+1} + C\left[(D^+)_{i+1/2}^n J_{i+1/2}^{n+1} - (D^+)_{i-1/2}^n J_{i-1/2}^{n+1}\right] = J_{i+1/2}^n, \quad (D^\pm)_{i+1/2}^n = 1 \pm \frac{L(\Delta J_{i-1/2}^n, \Delta J_{i+1/2}^n)}{2J_{i+1/2}^n}.$$

Для $\mu \leq 0$ аппроксимация строится в четырех точках $i-1/2, i+1/2, i+3/2, i+5/2$ на n -м шаге и в двух точках $i+1/2, i+3/2$ на $(n+1)$ -м шаге (рис. 15):

$$qJ_{i+1/2}^{n+1} + C\left[(D^-)_{i+3/2}^n J_{i+3/2}^{n+1} - (D^-)_{i+1/2}^n J_{i+1/2}^{n+1}\right] = J_{i+1/2}^n.$$

Разностные уравнения запишем в компактном виде:

$$qJ_{i+1/2}^{n+1} + C(A\Delta J)_{i-1/2}^{n+1} = J_{i+1/2}^n, \quad A_{i-1/2}^{n+1} = \frac{(D^+)_{i+1/2}^n J_{i+1/2}^{n+1} - (D^+)_{i-1/2}^n J_{i-1/2}^{n+1}}{\Delta J_{i-1/2}^{n+1}} \quad \text{при } \mu > 0,$$

$$qJ_{i+1/2}^{n+1} + C(H\Delta J)_{i+1/2}^{n+1} = J_{i+1/2}^n, \quad H_{i+1/2}^{n+1} = \frac{(D^-)_{i+3/2}^n J_{i+3/2}^{n+1} - (D^-)_{i+1/2}^n J_{i+1/2}^{n+1}}{\Delta J_{i+1/2}^{n+1}} \quad \text{при } \mu \leq 0.$$

Схема консервативна и позволяет использовать алгоритм бегущего счета. Хотя шаблон схемы MTVDR совпадает с шаблоном схем PTVD и ATVDR, аппроксимация уравнения переноса разная.

Для наглядности рассмотренные в работе схемы и аппроксимация при $\mu > 0$ собраны в табл. 1.

Использование ограничителей с предыдущего шага в схемах TVDR может привести к появлению ограничений на шаг по времени. Основной задачей данного исследования является получение ограничений на шаг по времени и сравнение условий устойчивости рассматриваемых схем.

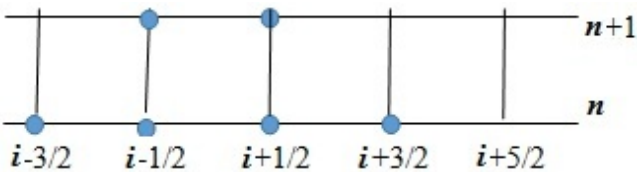


Рис. 14. Шаблон MTVDR-схемы для $\mu > 0$

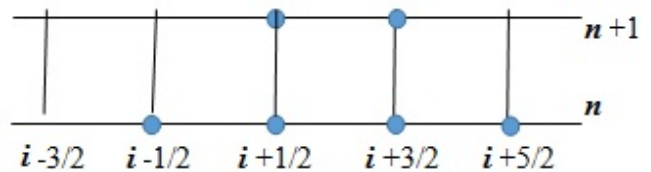


Рис. 15. Шаблон MTVDR-схемы для $\mu \leq 0$

Аппроксимация уравнения переноса при $\mu > 0$

Схема	Аппроксимация	Коэффициент схемы $A_{i-1/2}$
St	$qJ_{i+1/2}^{n+1} + C\Delta J_{i-1/2}^{n+1} = J_{i+1/2}^n$	1
ЯТVD	$qJ_{i+1/2}^{n+1} + C(A\Delta J)_{i-1/2}^n = J_{i+1/2}^n$	$1 + 0,5\phi_{i+1/2}^n - 0,5\phi_{i-1/2}^n\theta_{i-1/2}^n$
HTVD	$qJ_{i+1/2}^{n+1} + C(A\Delta J)_{i-1/2}^{n+1} = J_{i+1/2}^n$	$1 + 0,5\phi_{i+1/2}^{n+1} - 0,5\phi_{i-1/2}^{n+1}\theta_{i-1/2}^{n+1}$
РТVD	$qJ_{i+1/2}^{n+1} + CA_{i-1/2}^n\Delta J_{i-1/2}^{n+1} = J_{i+1/2}^n$	$1 + 0,5\phi_{i+1/2}^n - 0,5\phi_{i-1/2}^n\theta_{i-1/2}^n$
РТVDR	$qJ_{i+1/2}^{n+1} + C(A\Delta J)_{i-1/2}^{n+1} = J_{i+1/2}^n$	$1 + 0,5\phi_{i+1/2}^n - 0,5\phi_{i-1/2}^n\theta_{i-1/2}^{n+1}$
АТVDR	$qJ_{i+1/2}^{n+1} + C\Delta J_{i-1/2}^{n+1} + C[(A-1)\Delta J]_{i-1/2}^n = J_{i+1/2}^n$	$1 + 0,5\phi_{i+1/2}^n - 0,5\phi_{i-1/2}^n\theta_{i-1/2}^n$
МТVDR	$qJ_{i+1/2}^{n+1} + C(A\Delta J)_{i-1/2}^{n+1} = J_{i+1/2}^n$	$\frac{(D^+)_{i+1/2}^n J_{i+1/2}^{n+1} - (D^+)_{i-1/2}^n J_{i-1/2}^{n+1}}{\Delta J_{i-1/2}^{n+1}}$

Исследование устойчивости по Нейману

Из теории разностных схем известно, что неявная схема St безусловно устойчива. Возникает вопрос, сохраняется ли свойство безусловной устойчивости у неявных схем TVD и TVDR. Для этого получим условия устойчивости с помощью спектрального признака Неймана.

Разностная схема устойчива, если ошибка не возрастает при переходе от одного временного шага к другому.

В точке $(x_{i+1/2}, t^{n+1})$ ошибка равна $\varepsilon_{i+1/2}^{n+1} = J(x_{i+1/2}, t^{n+1}) - u(x_{i+1/2}, t^{n+1}) = J_{i+1/2}^{n+1} - u_{i+1/2}^{n+1}$, отсюда $J_{i+1/2}^{n+1} = u_{i+1/2}^{n+1} + \varepsilon_{i+1/2}^{n+1}$. Подставляя $J_{i+1/2}^{n+1} = u_{i+1/2}^{n+1} + \varepsilon_{i+1/2}^{n+1}$ в разностную схему, получаем уравнение для ошибки ε .

В частности, для схемы St уравнения для ошибки имеют вид

$$\begin{aligned} q\varepsilon_{i+1/2}^{n+1} + C\Delta\varepsilon_{i-1/2}^{n+1} &= \varepsilon_{i+1/2}^n \text{ при } \mu > 0; \\ q\varepsilon_{i+1/2}^{n+1} + C\Delta\varepsilon_{i+1/2}^{n+1} &= \varepsilon_{i+1/2}^n \text{ при } \mu \leq 0. \end{aligned}$$

Представим ошибку ε на n -м временном слое в виде гармоники с произвольным волновым числом $k_m = 2\pi m/L$: $\varepsilon^n(x) = e^{ik_mx}$. Тогда ошибка на $(n+1)$ -м временном слое будет иметь вид $\varepsilon^{n+1}(x) = G\varepsilon^n(x) = Ge^{ik_mx}$, где G — множитель перехода. Условием устойчивости разностной схемы является соотношение $|G| \leq 1$.

На равномерной сетке при $h = \text{const}$, используя выражения для ошибки

$$\begin{aligned} \varepsilon_{i+1/2}^{n+1} &= Ge^{ik_mx_{i+1/2}}; \quad \varepsilon_{i+1/2}^n = e^{ik_mx_{i+1/2}}; \\ \varepsilon_{i-1/2}^{n+1} &= Ge^{ik_mx_{i-1/2}} = Ge^{ik_m(x_{i+1/2}-h)} = Ge^{ik_mx_{i+1/2}}e^{-ik_mh}; \\ \varepsilon_{i-3/2}^{n+1} &= Ge^{ik_mx_{i-3/2}} = Ge^{ik_m(x_{i+1/2}-2h)} = Ge^{ik_mx_{i+1/2}}e^{-ik_m2h}; \\ \Delta\varepsilon_{i-1/2}^{n+1} &= \varepsilon_{i+1/2}^{n+1} - \varepsilon_{i-1/2}^{n+1} = Ge^{ik_mx_{i+1/2}} - Ge^{ik_mx_{i-1/2}} = Ge^{ik_mx_{i+1/2}}(1 - e^{-ik_mh}); \\ \Delta\varepsilon_{i-3/2}^{n+1} &= \varepsilon_{i-1/2}^{n+1} - \varepsilon_{i-3/2}^{n+1} = Ge^{ik_mx_{i-1/2}} - Ge^{ik_mx_{i-3/2}} = Ge^{ik_mx_{i+1/2}}e^{-ik_mh}(1 - e^{-ik_mh}), \end{aligned}$$

получаем при $\mu > 0$ в схеме St множитель перехода $G = \frac{1}{q + C(1 - e^{-ik_mh})}$.

Используя соотношения $G = \frac{1}{a + bi}$, $a = q + C(1 - \cos k_m h)$, $b = C \sin k_m h$, $|G|^2 = \frac{1}{|a + bi|^2} = \frac{1}{a^2 + b^2}$, $e^{-ik_m h} = \cos k_m h - i \sin k_m h$, из неравенства $a^2 + b^2 = q^2 + 2C(q + C)(1 - \cos k_m h) \geq 1$ получаем условие устойчивости $|G| \leq 1$.

Аналогично получаем множитель перехода для $\mu \leq 0$: $G = \frac{1}{q - C(1 - e^{ik_m h})}$. Из соотношения $a^2 + b^2 = q^2 - 2C(q - C)(1 - \cos k_m h) \geq 1$ следует условие $|G| \leq 1$.

Полученные неравенства подтверждают безусловную устойчивость схемы St для всех μ .

Явная TVD-схема. Из уравнения для ошибки при $\mu > 0$ получаем множитель перехода $G = \frac{1 - CA(1 - e^{-ik_m h})}{q}$. Из условия $a^2 + b^2 = 1 - 2CA(1 - CA)(1 - \cos k_m h) \leq q^2$ для всех $0 \leq \alpha < \infty$ и любых k_m получаем условие устойчивости $A \leq C^{-1}$, или в виде условия на функции-ограничители $\phi_{i+1/2}^n \leq 2(C^{-1} - 1)$. Из условия положительности функций-ограничителей $\phi_{i+1/2}^n \geq 0$ получаем ограничение на число Куранта $C \leq 1$.

Аналогично получаем множитель перехода для $\mu \leq 0$: $G = \frac{1 - CH(e^{ik_m h} - 1)}{q}$. Из неравенства $a^2 + b^2 = 1 + 2CH(1 + CH)(1 - \cos k_m h) \leq q^2$ получаем условие устойчивости $H \leq -C^{-1}$, или $\phi_{i+3/2}^n \leq 2(-C^{-1} - 1)$, $-C \leq 1$.

Из полученных неравенств видно, что устойчивость явной TVD-схемы зависит от ограничения на число Куранта $|C| \leq 1$.

Неявная TVD-схема. Из уравнения для ошибки при $\mu > 0$ получаем множитель перехода $G = \frac{1}{q + CA(1 - e^{-ik_m h})}$. Из неравенства $a^2 + b^2 = q^2 + 2CA(q + CA)(1 - \cos k_m h) \geq 1$ получаем условие устойчивости $A \geq 0$, или $2 + \phi_{i+1/2}^{n+1} \geq \phi_{i-1/2}^{n+1} \theta_{i-1/2}^{n+1}$. Из условия положительности функций $\phi_{i+1/2}^{n+1} \geq 0$ получаем ограничение $0 \leq \phi_{i-1/2}^{n+1} \leq 2\hat{\theta}_{i-1/2}^{n+1}$.

Аналогично получаем множитель перехода для $\mu \leq 0$: $G = \frac{1}{q + CH(e^{ik_m h} - 1)}$. Из неравенств $a^2 + b^2 = q^2 - 2CH(q - CH)(1 - \cos k_m h) \geq 1$ и $C \leq 0$ получаем условие устойчивости $H \geq 0$, или $2 + \phi_{i+1/2}^{n+1} \theta_{i+1/2}^{n+1} \geq \phi_{i+3/2}^{n+1}$. Из условий положительности функций $\phi_{i+1/2}^{n+1} \geq 0$, $\theta_{i+1/2}^{n+1} \geq 0$ получаем ограничение $0 \leq \phi_{i+3/2}^{n+1} \leq 2$.

Из полученных неравенств видно, что устойчивость неявной TVD-схемы при выборе функций-ограничителей из условия $0 \leq \phi_{i-1/2} \leq 2 \min(1, \hat{\theta}_{i-1/2})$ не зависит от ограничения на число Куранта.

Полученное условие на выбор функций-ограничителей справедливо при любых коэффициентах поглощения $0 \leq \alpha < \infty$, но обязательным оно является только в вакууме при $\alpha = 0$. В оптически плотных средах при $\alpha \gg 1$ неравенство $a^2 + b^2 = q^2 - 2CH(q - CH)(1 - \cos k_m h) \geq 1$, из которого выводятся условия на выбор функций-ограничителей, может выполняться даже при нарушении условия $0 \leq \phi_{i-1/2} \leq 2 \min(1, \hat{\theta}_{i-1/2})$.

PTVD-схема. Из уравнения для ошибки при $\mu > 0$ получаем $G = \frac{1}{q + CA(1 - e^{-ik_m h})}$. Из неравенства $a^2 + b^2 = q^2 + 2CA(q + CA)(1 - \cos k_m h) \geq 1$ получаем условие устойчивости $A \geq 0$, или $0 \leq \phi_{i-1/2} \leq 2\hat{\theta}_{i-1/2}$.

Аналогично получаем множитель перехода для $\mu \leq 0$: $G = \frac{1}{q + CH(e^{ik_m h} - 1)}$. Из неравенств $a^2 + b^2 = q^2 - 2CH(q - CH)(1 - \cos k_m h) \geq 1$ и $C \leq 0$ получаем условие устойчивости $H \geq 0$, или $2 + \phi_{i+1/2}^n \theta_{i+1/2}^n \geq \phi_{i+3/2}^n$. Из условий положительности функций $\phi_{i+1/2}^n \geq 0$, $\theta_{i+1/2}^n \geq 0$ получаем ограничение $0 \leq \phi_{i+3/2}^n \leq 2$.

Из полученных неравенств видно, что устойчивость полунейвной TVD-схемы при выборе функций-ограничителей из условия $0 \leq \phi_{i-1/2} \leq 2 \min \left(1, \hat{\theta}_{i-1/2} \right)$ не зависит от ограничения на число Куранта и может выполняться при нарушении этого условия в оптически плотных средах.

PTVDR-схема. Из уравнения для ошибки при $\mu > 0$ получаем множитель перехода $G = \frac{1}{q + CA_1(1 - e^{-ik_m h})}$, $A_1 = 1 + 0,5\phi_{i+1/2}^n - 0,5\phi_{i-1/2}^n e^{-ik_m h}$. Из неравенства $a^2 + b^2 = q^2 + 2CA_3(1 - \cos k_m h) \geq 1$ и выражения $A_3 = \left(A_2 - 0,5\phi_{i-1/2}^n \right) \left[q + C \left(A_2 - 0,5\phi_{i-1/2}^n \right) \right] + CA_2\phi_{i-1/2}^n \times (1 + \cos k_m h)$ получаем условие устойчивости $A_2 = 1 + 0,5\phi_{i+1/2}^n - \phi_{i-1/2}^n \cos k_m h \geq 0,5\phi_{i-1/2}^n$, или $\phi_{i-1/2}^n \leq 2/3$.

Аналогично получаем множитель перехода для $\mu \leq 0$: $G = \frac{1}{q + CH_1(e^{ik_m h} - 1)}$, $H_1 = 1 - 0,5\phi_{i+3/2}^n + 0,5\phi_{i+1/2}^n e^{-ik_m h}$. Из неравенства $a^2 + b^2 = q^2 - 2CH_3(1 - \cos k_m h) \geq 1$, $H_3 = \left(H_2 - 0,5\phi_{i+1/2}^n \right) \times \left[q - C \left(H_2 - 0,5\phi_{i+1/2}^n \right) \right] - CH_2\phi_{i+1/2}^n(1 + \cos k_m h) \geq 1$, получаем условие устойчивости $H_2 = 1 - 0,5\phi_{i+3/2}^n \geq 0,5\phi_{i+1/2}^n$, или $\phi_{i+1/2}^n + \phi_{i+3/2}^n \leq 2$.

Из полученных неравенств видно, что условия устойчивости полунейвной TVDR-схемы являются довольно жесткими, но их можно ослабить, если рассматривать задачи с ненулевым поглощением.

ATVDR-схема. Из уравнения для ошибки при $\mu > 0$ $G = \frac{1 - C(A - 1)(1 - e^{-ik_m h})}{q + C(1 - e^{-ik_m h})} = \frac{a_1 + b_1 i}{a + bi}$, где $a_1 = 1 - C(A - 1)(1 - \cos k_m h)$; $b_1 = -C(A - 1) \sin k_m h$; $a = q + C(1 - \cos k_m h)$; $b = C \sin k_m h$. Из неравенства $a_1^2 + b_1^2 = 1 - 2C(A - 1)[1 - C(A - 1)](1 - \cos k_m h) \leq a^2 + b^2$ и выражения $a^2 + b^2 = q^2 + 2C(q + C)(1 - \cos k_m h)$ получаем условие устойчивости $q^2 + 2CA_5(1 - \cos k_m h) \geq 1$, которое выполняется при $A_5 = q + C + (A - 1)[1 - C(A - 1)] \geq 0$, или $1 + \frac{1 - \sqrt{1 + 4C(q + C)}}{2C} \leq A \leq 1 + \frac{1 + \sqrt{1 + 4C(q + C)}}{2C}$. Учитывая, что $A_{i-1/2}^{n+1} = 1 + 0,5\phi_{i+1/2}^n - 0,5\phi_{i-1/2}^n \theta_{i-1/2}^{n+1}$, получаем условия на

функции-ограничители: $0 \leq \phi_{i-1/2}^n \leq \frac{\sqrt{1 + 4C(q + C)} - 1}{C} \hat{\theta}_{i-1/2}^n$; $0 \leq \phi_{i+1/2}^n \leq \frac{1 + \sqrt{1 + 4C(q + C)}}{C}$.

Аналогично получаем множитель перехода для $\mu \leq 0$: $G = \frac{1 - C(H - 1)(e^{ik_m h} - 1)}{q + C(e^{ik_m h} - 1)} = \frac{a_1 + b_1 i}{a + bi}$, где $a_1 = 1 + C(H - 1)(1 - \cos k_m h)$; $b_1 = -C(H - 1) \sin k_m h$; $a = q - C(1 - \cos k_m h)$; $b = C \sin k_m h$. Из неравенства $a_1^2 + b_1^2 = 1 + 2C(H - 1)[1 + C(H - 1)](1 - \cos k_m h) \leq a^2 + b^2$ и выражения $a^2 + b^2 = q^2 - 2C(q - C)(1 - \cos k_m h)$ получаем условие устойчивости $q^2 - 2C(1 - \cos k_m h) \left\{ q - C + (H - 1) \times [1 + C(H - 1)] \right\} \geq 1$, которое выполняется при $q - C + (H - 1)[1 + C(H - 1)] \geq 0$, или $1 - \frac{1 - \sqrt{1 - 4C(q - C)}}{2C} \leq H \leq 1 - \frac{1 + \sqrt{1 - 4C(q - C)}}{2C}$. Так как $H = 1 - 0,5\phi_{i+3/2}^n + 0,5\phi_{i+1/2}^n \theta_{i+1/2}^n$,

получаем условия на функции-ограничители: $0 \leq \phi_{i+1/2}^n \leq \frac{1 + \sqrt{1 + 4|C|(q + |C|)}}{|C|} \hat{\theta}_{i+1/2}^n$; $0 \leq \phi_{i+3/2}^n \leq \frac{\sqrt{1 + 4|C|(q + |C|)} - 1}{|C|}$.

Из полученных неравенств видно, что устойчивость ATVDR-схемы зависит от числа Куранта.

MTVDR-схема. Из уравнения для ошибки при $\mu > 0$ получаем множитель перехода $G = \left\{ q + C \times \left[(D^+)_{i+1/2}^n - (D^+)_{i-1/2}^n e^{-ik_m h} \right] \right\}^{-1}$. Из неравенства $a^2 + b^2 = q^2 + 2CA_6 \geq 1$, где $A_6 = q \left[(D^+)_{i+1/2}^n - (D^+)_{i-1/2}^n \cos k_m h \right] + 0,5C \left[(D^+)_{i+1/2}^n - 2(D^+)_{i+1/2}^n (D^+)_{i-1/2}^n \cos k_m h + (D^+)_{i-1/2}^n \right]^2$, учитывая, что

$-2(D^+)_{i+1/2}(D^+)_{i-1/2} \cos k_m h \geq -2(D^+)_{i+1/2}(D^+)_{i-1/2}$, $-(D^+)_{i-1/2}^n \cos k_m h \geq -(D^+)_{i-1/2}$, получаем $a^2 + b^2 \geq A_8$, где $A_8 = \left\{ q + C \left[(D^+)_{i+1/2}^n - (D^+)_{i-1/2}^n \right] \right\}^2$.

При выполнении неравенства $A_8 \geq 1$ выполняется условие $a^2 + b^2 \geq 1$. Неравенство $A_8 \geq 1$ выполняется при $\alpha h \geq \mu \left[(D^+)_{i-1/2}^n - (D^+)_{i+1/2}^n \right]$, или $D^+ \leq \alpha h$.

Аналогично получаем множитель перехода для $\mu \leq 0$: $G = \left\{ q + C \left[(D^-)_{i+3/2}^n e^{ik_m h} - (D^-)_{i+1/2}^n \right] \right\}^{-1}$. Условие $a^2 + b^2 = q^2 + 2CA_7 \geq 1$, где $A_7 = q \left[(D^-)_{i+3/2}^n \cos k_m h - (D^-)_{i+1/2}^n \right] + 0,5C \left[(D^-)_{i+3/2}^2 - 2(D^-)_{i+1/2}(D^-)_{i+3/2} \cos k_m h + (D^-)_{i+1/2}^2 \right]$ выполняется при $\alpha h \geq |\mu| \left[(D^-)_{i+1/2}^n - (D^-)_{i+3/2}^n \right]$, или $D^- \leq \alpha h$.

В оптически прозрачных средах при $\alpha h \rightarrow 0$ условие устойчивости для MTVDR-схемы $D^\pm \leq \alpha h$ является довольно жестким.

Множители перехода G и их модули для рассмотренных схем при $\mu > 0$ собраны для наглядности в табл. 2, где коэффициенты схем определяются выражениями

$$\begin{aligned} A_1 &= 1 + 0,5\phi_{i+1/2}^n - 0,5\phi_{i-1/2}^n e^{-ik_m h}; \\ A_2 &= 1 + 0,5\phi_{i+1/2}^n - \phi_{i-1/2}^n \cos k_m h; \\ A_3 &= \left(A_2 - 0,5\phi_{i-1/2}^n \right) \left[q + C \left(A_2 - 0,5\phi_{i-1/2}^n \right) \right] + CA_2\phi_{i-1/2}^n (1 + \cos k_m h); \\ A_6 &= q \left[(D^+)_{i+1/2}^n - (D^+)_{i-1/2}^n \cos k_m h \right] + 0,5C \left[(D^+)_{i+1/2}^2 - 2(D^+)_{i+1/2}(D^+)_{i-1/2} \cos k_m h + (D^+)_{i-1/2}^2 \right]. \end{aligned}$$

В ячейках эти коэффициенты, как и коэффициент A из табл. 2, вычисляются по формулам из табл. 1.

Из табл. 2 видно, что максимум модулей множителей перехода G во всех схемах при неотрицательных коэффициентах схем A, A_1, A_3, A_6 одинаковый и равен q^{-1} .

Наиболее простой вид модуль множителя перехода принимает в случае постоянного решения при $J = \text{const}$. В этом случае получаем $A = \theta = \phi = D^\pm = 1$. Модули множителей перехода в частном

Таблица 2

Множители перехода G и их модули для разностных схем при $\mu > 0$

Схема	Множитель перехода G	$ G $
St	$\frac{1}{q + C(1 - e^{-ik_m h})}$	$\frac{1}{\sqrt{q^2 + 2C(q + C)(1 - \cos k_m h)}}$
ЯТVD	$\frac{1 - CA(1 - e^{-ik_m h})}{q}$	$\frac{q}{\sqrt{1 - 2CA(1 - CA)(1 - \cos k_m h)}}$
HTVD	$\frac{1}{q + CA(1 - e^{-ik_m h})}$	$\frac{q}{\sqrt{q^2 + 2CA(q + CA)(1 - \cos k_m h)}}$
PTVD	$\frac{1}{q + CA(1 - e^{-ik_m h})}$	$\frac{1}{\sqrt{q^2 + 2CA(q + CA)(1 - \cos k_m h)}}$
PTVDR	$\frac{1}{q + CA_1(1 - e^{-ik_m h})}$	$\frac{1}{\sqrt{q^2 + 2CA_3(1 - \cos k_m h)}}$
ATVDR	$\frac{1 - C(1 - e^{-ik_m h})(A - 1)}{q + C(1 - e^{-ik_m h})}$	$\sqrt{\frac{1 - 2C(A - 1)(1 - C(A - 1))(1 - \cos k_m h)}{q^2 + 2C(q + C)(1 - \cos k_m h)}}$
MTVDR	$\left\{ q + C \left[(D^+)_{i+1/2}^n - (D^+)_{i-1/2}^n e^{-ik_m h} \right] \right\}^{-1}$	$\frac{1}{\sqrt{q^2 + 2CA_6}}$

случае $J = \text{const}$ и условия на функции-ограничители в общем случае для рассмотренных схем при $\mu > 0$ собраны в табл. 3, где коэффициенты схем определяются выражениями

$$\begin{aligned} A_2 &= 1 + 0,5\phi_{i+1/2}^n - \phi_{i-1/2}^n \cos k_m h; \\ A_3 &= (1 - \cos k_m h) [q + C(1 - \cos k_m h)] + C(1,5 - \cos k_m h)(1 + \cos k_m h); \\ A_5 &= q + C + (A - 1)[1 - C(A - 1)]; \quad A_8 = \left\{ q + C \left[(D^+)_{i+1/2}^n - (D^+)_{i-1/2}^n \right] \right\}^2. \end{aligned}$$

В ячейках эти коэффициенты, как и коэффициент A , вычисляются по формулам из табл. 1.

Таблица 3

Условия устойчивости и модули множителей перехода G для разностных схем при $J = \text{const}$

Схема	Условие устойчивости	Условие на функцию-ограничитель	$ G $
St	Нет	Нет	$\frac{1}{\sqrt{q^2 + 2C(q + C)(1 - \cos k_m h)}}$
ЯТVD	$0 \leq A \leq C^{-1}$	$0 \leq \phi \leq 2(C^{-1} - 1), \quad C \leq 1$	$\frac{q}{\sqrt{1 - 2C(1 - C)(1 - \cos k_m h)}}$
HTVD	$A \geq 0$	$0 \leq \phi \leq 2 \min(1, \hat{\theta})$	$\frac{1}{\sqrt{q^2 + 2C(q + C)(1 - \cos k_m h)}}$
PTVD	$A \geq 0$	$0 \leq \phi \leq 2 \min(1, \hat{\theta})$	$\frac{1}{\sqrt{q^2 + 2C(q + C)(1 - \cos k_m h)}}$
PTVDR	$A_2 \geq 0,5\phi$	$0 \leq \phi \leq \frac{2}{3}$	$\frac{1}{\sqrt{q^2 + 2CA_3(1 - \cos k_m h)}}$
ATVDR	$A_5 \geq 0$	$0 \leq \phi \leq \frac{\sqrt{1 + 4 C (q + C)} - 1}{ C }$	$\frac{1}{\sqrt{q^2 + 2C(q + C)(1 - \cos k_m h)}}$
MTVDR	$A_8 \geq 1$	$0 \leq D^\pm \leq \alpha h$	$\frac{1}{\sqrt{q^2 + 2C(q + C)(1 - \cos k_m h)}}$

Заключение

В данной работе проведены исследования устойчивости разностных схем TVDR с помощью спектрального признака Неймана для одномерного уравнения переноса. Для сравнения приведены условия устойчивости схем St и TVD.

Для схем TVD и TVDR получены следующие результаты:

- 1) устойчивость явной схемы TVD зависит от ограничения на число Куранта $|C| < 1$;
- 2) устойчивость неявной и полунявной схем TVD при выборе функций-ограничителей из условия $0 \leq \phi_{i-1/2} \leq 2 \min(1, \hat{\theta}_{i-1/2})$ не зависит от числа Куранта; в оптически плотных средах условие на функции-ограничители может быть ослаблено;
- 3) условие устойчивости полунявной схемы TVDR является наиболее жестким среди рассмотренных схем, но его можно ослабить в оптически плотных средах;
- 4) устойчивость схемы ATVDR зависит от числа Куранта;
- 5) выбор функций-ограничителей схемы MTVDR с сохранением устойчивости зависит от оптической прозрачности среды.

По результатам проведенных исследований можно сделать следующие выводы:

- 1) условия устойчивости для неявной и полунявной TVD-схем не зависят от числа Куранта, но накладывают требования на выбор ограничителей;

- 2) условия устойчивости для неявных и полунеявной TVDR-схем накладывают требования на выбор ограничителей и зависят от числа Куранта, что плохо для неявных схем, так как это приводит к ограничениям временного шага.

Список литературы

1. *Колган В. П.* Применение принципа минимальных значений производных к построению конечно-разностных схем для расчета разрывных решений газовой динамики // Ученые записки. ЦАГИ. 1972. № 6. С. 68–77.
Kolgan V. P. Primenenie printsipa minimalnykh znacheniy proizvodnykh k postroeniyu konechno-raznostnykh skhem dlya raschyeta razryvnykh resheniy gazovoy dinamiki // Uchenye zapiski. TsAGI. 1972. № 6. S. 68–77.
2. *Harten A.* High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // J. Comp. Phys. 1983. Vol. 49. P. 357–393.
3. *Карлсон Б.* Численное решение задачи кинетической теории нейтронов // Теория ядерных реакторов. М.: Атомиздат, 1963. С. 243–258.
Karlson B. Chislennoe reshenie zadachi kineticheskoy teorii neytronov // Teoriya yadernykh reaktov. M.: Atomizdat, 1963. S. 243–258.
4. *Гаджиев А. Д., Завьялов В. В., Шестаков А. А.* Применение TVD-подхода к DS_n -методу решения уравнения переноса теплового излучения // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2009. Вып. 2. С. 37–48.
Gadzhiev A. D., Zavyalov V. V., Shestakov A. A. Primenenie TVD-podkhoda k DS_n -metodu resheniya uravneniya perenosa teplovogo izlucheniya // Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov. 2009. Vyp. 2. S. 37–48.
5. *Шестаков А. А.* TVDR-схемы для решения системы уравнений переноса теплового излучения // Там же. 2019. Вып. 2. С. 17–36.
Shestakov A. A. TVDR-skhemy dlya resheniya sistemy uravneniy perenosa teplovogo izlucheniya // Tam zhe. 2019. Vyp. 2. S. 17–36.
6. *Гаджиев А. Д., Кошутин Д. А., Шестаков А. А.* Метод дискретных ординат с TVD-реконструкцией и синтетический метод ускорения итераций для численного решения уравнения переноса теплового излучения // Там же. 2013. Вып. 3. С. 3–15.
Gadzhiev A. D., Koshutin D. A., Shestakov A. A. Metod diskretnykh ordinat s TVD-rekonstruktsiyey i sinteticheskij metod uskoreniya iteratsiy dlya chislennoego resheniya uravneniya perenosa teplovogo izlucheniya // Tam zhe. 2013. Vyp. 3. S. 3–15.
7. *Басс Л. П., Волощенко А. М., Гермогенова Т. А.* Методы дискретных ординат в задачах о переносе излучения: Препринт. М.: ИПМ им. М. В. Келдыша, 1986.
Bass L. P., Voloshchenko A. M., Germogenova T. A. Metody diskretnykh ordinat v zadachakh o perenose izlucheniya: Preprint. M.: IPM im. M. V. Keldysha, 1986.
8. *Годунов С. К., Рябенский В. С.* Разностные схемы. М.: Наука, 1973.
Godunov S. K., Ryabenkiy V. S. Raznostnye skhemy. M.: Nauka, 1973.

Статья поступила в редакцию 23.05.22.