

УДК 532.517.4

ВЛИЯНИЕ ДИССИПАТИВНЫХ ПОГРЕШНОСТЕЙ МЕТОДИКИ "МИМОЗА" НА СКОРОСТЬ ИЗМЕНЕНИЯ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ ПРИ РАСПАДЕ ВИХРЯ ТЕЙЛОРА—ГРИНА

А. Н. Разин, В. В. Змушко, А. А. Синельникова
(ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области)

На примере распада вихря Тейлора—Грина изучается влияние диссипативных погрешностей разностной методики МИМОЗА на результат численного моделирования задачи. Уравнения Эйлера интегрируются по схеме второго порядка точности с реконструкцией потоков через грани ячеек. Серия расчетов с трехмерными начальными данными выполнена на последовательности измельчающихся сеток, содержащих $(N + 1)^3$, $(2N + 1)^3$, $(4N + 1)^3$, $(8N + 1)^3$, $(16N + 1)^3$ ячеек, $N = 32$. Для оценки влияния начальных условий на результат проведено моделирование задачи с двумерными начальными данными. Результаты выполненных по методике МИМОЗА расчетов сравниваются между собой и с данными других авторов, полученными как по уравнениям Эйлера, так и уравнениям Навье—Стокса.

Ключевые слова: задача Тейлора—Грина, двумерные и трехмерные начальные условия, ламинарно-турбулентный переход, математическое моделирование, влияние диссипации.

Введение

Существует ряд подходов (стратегий, методологий) и более десятка физических моделей для расчета турбулентных течений (см. [1] и ссылки в ней). В РФЯЦ-ВНИИЭФ в настоящее время используются в основном две стратегии численного моделирования перемешивания контактирующих веществ [2].

Первая стратегия — RANS (Reynolds-Averaged Navier—Stokes) — моделирование задачи с использованием уравнений газовой динамики (расчет осредненного течения) и полуэмпирических моделей турбулентности для расчета пульсационных характеристик течения (используются модель В. В. Никифорова, модифицированная В. И. Козловым модель Никифорова, (k, ε) -модель). RANS-стратегия моделирования задач с присущими ей проблемами довольно подробно описана в [1]. Отметим такие математические проблемы: обеспечение сходимости и монотонности разностного решения на вытянутых и скошенных ячейках сетки, обеспечение сходимости решения на фронте ударной волны (УВ), задание начальной шероховатости контактной границы (КГ), формирование математической модели для описания развития неустойчивости на КГ в случае падения УВ под углом к КГ. Для RANS-стратегии моделирования задач значительную трудность также представляют вопросы определения критерия перехода от этапа развития неустойчивости к турбулентному перемешиванию (ТП) и задание начальных данных (характеристик турбулентности) для решения уравнений ТП.

Вторая стратегия — ILES (Implicit Large Eddy Simulation) — приобретает все большую популярность в университетах и научных центрах ряда стран [3]. По сравнению с прямым численным моделированием (DNS-стратегия) течений и моделированием LES (Large Eddy Simulation)

ILES-методология имеет ряд преимуществ. DNS-методология дает удовлетворительные результаты лишь при средних числах Рейнольдса, но не способна (на сегодняшний день) с необходимой точностью описать мелкомасштабную турбулентность (вязкую диссипацию энергии). Кроме того, DNS-стратегия моделирования задач, вследствие больших диссипативных погрешностей, может в некоторых ситуациях подавлять развивающуюся турбулентность потока (ламинизировать течение). В ILES-методологии нет явного "фильтрации" уравнений, что позволяет избежать ряда трудностей, присущих LES-методам. Дополнительным достоинством ILES-методологии является простота ее реализации в программных комплексах. Наконец, отметим ситуацию, в которой ILES-методология будет чрезвычайно полезной. При движении УВ под углом к КГ расчет начальных данных для решения уравнений ТП в методологии RANS может вызвать затруднения. В то же время для ILES-стратегии задание шероховатости КГ не составит труда.

В данной работе на примере численного моделирования безударного течения изучаются влияние диссипативных погрешностей методики МИМОЗА [4] на моделирование перехода от ламинарного течения к турбулентному, зависимость скорости диссипации кинетической энергии от размера ячейки разностной сетки в задаче Тейлора—Грина [5]. Задача Тейлора—Грина ранее довольно подробно исследовалась рядом авторов путем интегрирования уравнений Эйлера и Навье—Стокса при числах Рейнольдса $Re = 100, 200, \dots, 5000$ [6–13] с помощью спектрального метода, разрывного метода Галеркина и LES-моделирования. Согласно этим исследованиям при числах $Re = 3000$ и 5000 полученные решения практически не различаются, что указывает на стабилизацию влияния молекулярной вязкости на эволюцию течения. В предлагаемой работе этот факт используется с целью оценки влияния диссипативной погрешности методики МИМОЗА в численных расчетах на последовательности измельчающихся сеток.

Эволюция вихревого течения, заданного в начальный момент вихрем Тейлора—Грина, представляет собой пример распада крупного стационарного вихря на более мелкие вихревые образования, которые со временем затухают из-за наличия диссипативных процессов. Чтобы оценить влияние диссипативных погрешностей численной методики в отсутствие УВ, задача Тейлора—Грина решается в невязкой постановке.

Постановка расчета

Область кубической формы $-1 \leq x, y, z \leq 1$ заполняется газом, состояние которого описывается плотностью ρ , компонентами скорости u, v, w и давлением P . Термодинамические параметры подчиняются уравнению состояния идеального газа.

В трехмерной (3D) расчетной области вихрь Тейлора—Грина задается 3D начальными условиями [10–12]

$$\begin{aligned} u &= u_0 \sin(kx) \cos(ky) \cos(kz); \\ v &= -u_0 \cos(kx) \sin(ky) \cos(kz); \\ w &= 0; \quad P = P_0 + \frac{\rho_0 u_0^2}{16} (\cos(2kx) + \cos(2ky)) (\cos(2kz) + 2); \\ k &= \pi, \end{aligned} \tag{1}$$

где $u_0 = \text{const}$; $P_0 = \text{const}$. Чтобы оценить влияние размерности начальных условий на результат моделирования задачи, проведен 3D расчет с двумерными (2D) начальными данными [13]

$$\begin{aligned} u &= u_0 \sin(kx) \cos(ky); \\ v &= -u_0 \cos(kx) \sin(ky); \\ w &= 0; \quad P = P_0 + \frac{\rho_0 u_0^2}{4} (\cos(2kx) + \cos(2ky)). \end{aligned} \tag{2}$$

Во всех расчетах течение предполагается несжимаемым, плотность газа $\rho = \rho_0 = 0,0012 \text{ г/см}^3$. Чтобы обеспечить несжимаемость течения, число Маха потока задается существенно дозвуковым: $M = u_0/c \approx 0,1$.

Зададим давление $P_0 \approx 0,00009392 \text{ г} \cdot \text{см}^{-1} \cdot (10 \text{ мкс})^{-2}$. Скорость звука определяется по соотношению $c = \sqrt{\gamma RT_0} = 0,33102 \text{ см} \cdot (10 \text{ мкс})^{-1}$, где $\gamma = 1,4$ — показатель адиабаты газа, $R = 0,0002867 \text{ см}^2 \times (10 \text{ мкс}^2 \cdot \text{К})^{-1}$ — газовая постоянная, $T_0 = 273 \text{ К}$ — температура.

При заданных условиях имеем $u_0 = 0,033102 \text{ см} \cdot (10 \text{ мкс})^{-1}$, $E_0 = 0,195668 \text{ см}^2 \cdot (10 \text{ мкс})^{-2}$ — удельная внутренняя энергия. Расчеты выполнены на сетках, содержащих $33 \times 33 \times 33$ (33^3), 65^3 , 129^3 , 257^3 , 513^3 ячеек (точек). В процессе моделирования задачи используются периодические граничные условия; единицы измерения — см, г, 10 мкс.

На рис. 1 для наглядности представлены поле скорости в плоскости $z = 0$ и поверхности уровня z -компоненты завихренности (ω_z) на начальный момент времени. Здесь и далее на рисунках розовый цвет соответствует значению $\omega_z = 0,1$, синий $\omega_z = -0,1$. Рисунки построены для сетки, содержащей 33^3 точки.

Расчеты выполнены в размерных величинах. При сравнении результатов расчетов с данными других авторов размерные величины приводятся к безразмерному виду: время $t^* = ku_0 t$, где k [см^{-1}] — волновое число; $x^* = kx$ — линейный размер. Кинетическая энергия в области с объемом V_0 рассчитывается по формуле

$$K = \frac{1}{2} \int_{V_0} (u^2 + v^2 + w^2) dV. \quad (3)$$

В момент времени $t = 0$ точное значение кинетической энергии определяется с учетом (1) и (3) по соотношению $K = u_0^2$. Для визуализации результатов расчетов вычисляется зависимость z -компоненты завихренности от времени

$$\omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (4)$$

При заданных начальных данных точное значение z -компоненты завихренности при $t = 0$ изменяется в диапазоне $-0,208 \leq \omega_z \leq 0,208$.

Математическая модель

Математическое моделирование выполнялось в 3D постановке по методике МИМОЗА с использованием уравнений Эйлера без привлечения каких-либо моделей учета ТП (ILES-моделирование).

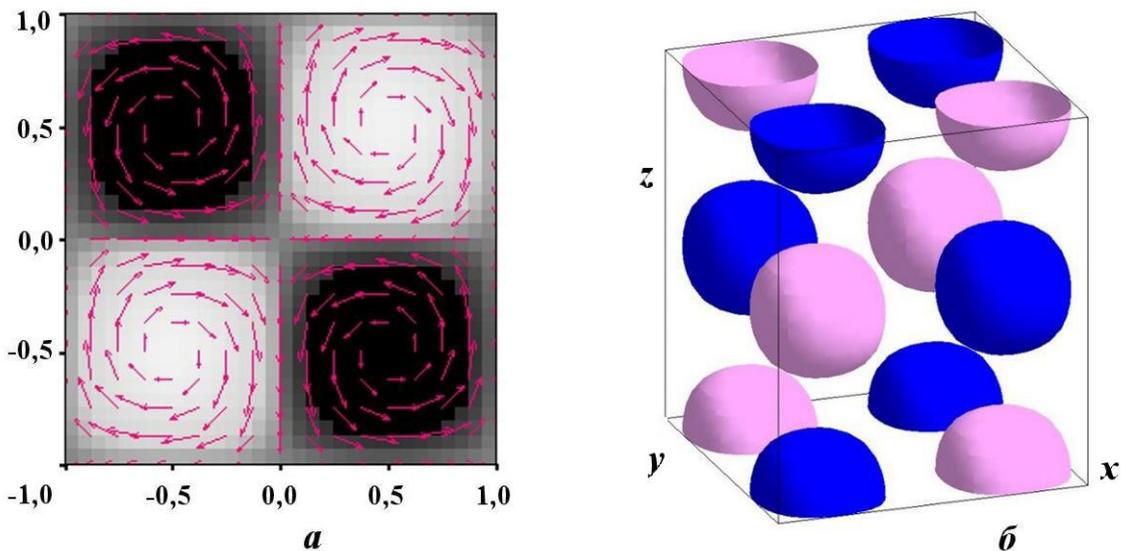


Рис. 1. Поле течения в плоскости $z = 0$ (а) и поверхности уровня z -компоненты завихренности (б) на начальный момент времени

Расчетная методика основана на лагранжево-эйлеровой стратегии моделирования и выделении веществ концентрациями (см. [4, 14, 15]). Такой подход является эффективным при моделировании задач механики сплошной среды с большими деформациями.

Расчет счетного шага состоит из двух этапов: на первом этапе выполняется интегрирование уравнений Эйлера, записанных в лагранжевых координатах, на втором — пересчет полученных сеточных значений на первоначальную квадратную сетку. Пересчет величин осуществляется при помощи алгоритма, основанного на расщеплении по координатным направлениям и использовании одномерного алгоритма повышенного порядка точности [14].

На лагранжевом этапе расчета границы ячеек сетки перемещаются со скоростью вещества, массы ячеек не изменяются. Интегрирование системы уравнений выполняется на разнесенной разностной сетке.

Термодинамические параметры задачи относятся к центру счетной ячейки, координаты и компоненты скорости — к узлам. Используется полностью консервативная разностная схема *предиктор—корректор*, аналогичная предложенной в [15]. Для подавления паразитических осцилляций численного решения в окрестности больших градиентов газодинамических величин используется искусственная вязкость, являющаяся суммой квадратичной и линейной вязкостей.

Серия расчетов проведена на последовательности измельчающихся разностных сеток, состоящих из кубических ячеек.

Результаты моделирования

Вихрь Тейлора—Грина — достаточно хорошо исследованное течение, которое используется математиками как прототип для изучения развития неустойчивости, растяжения вихрей, образования каскада все более мелких вихрей, которые с течением времени затухают под действием диссипативных процессов. Задача развития вихря Тейлора—Грина пригодна для демонстрации влияния численной диффузии используемой методики на переход к турбулентности.

Результаты моделирования распада вихря Тейлора—Грина получены на последовательности измельчающихся сеток и показаны на рис. 2—7 в виде:

- распределения z -компоненты завихренности (4) в плоскости $z = 0$;
- поверхностей уровня z -компоненты завихренности в области.

Расчитанная на сетках, содержащих 33^3 , 129^3 , 513^3 ячеек, z -компонента завихренности в плоскости $z = 0$ приведена на рисунках на два момента времени: $t = 0$ и 15. Поверхности уровня

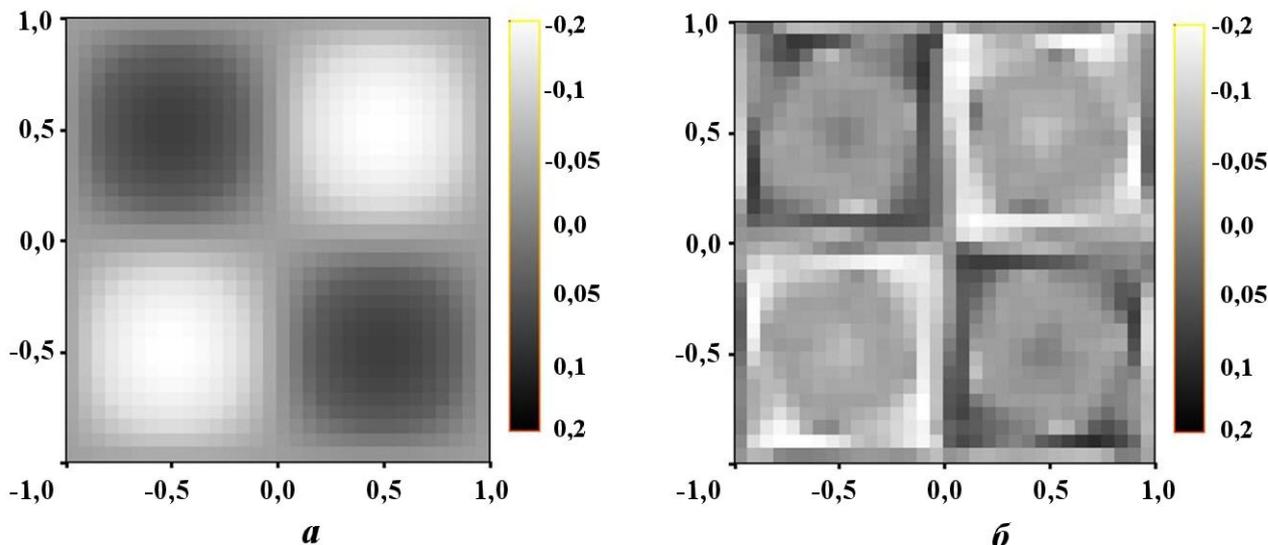


Рис. 2. Сетка $33 \times 33 \times 33$. z -компонента завихренности в плоскости $z = 0$: $a - t = 0$; $b - t = 15$

z -компоненты завихренности показаны на несколько моментов времени. Полученные по методике МИМОЗА результаты наглядно демонстрируют распад крупных вихрей на мелкие.

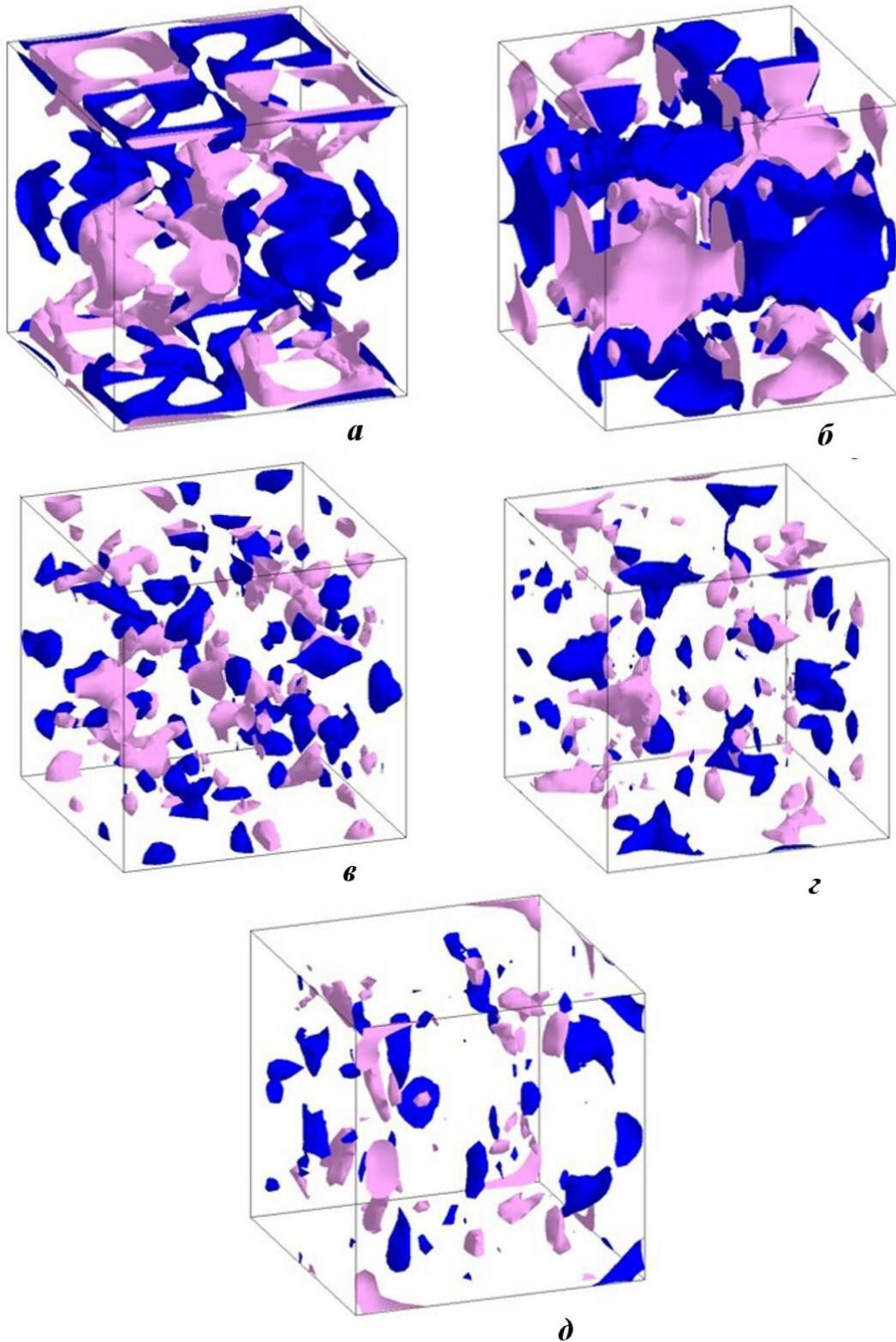


Рис. 3. Сетка $33 \times 33 \times 33$. Поверхности уровня z -компоненты завихренности: $a - t = 4$; $б - t = 9$; $в - t = 15$; $г - t = 20$; $д - t = 30$

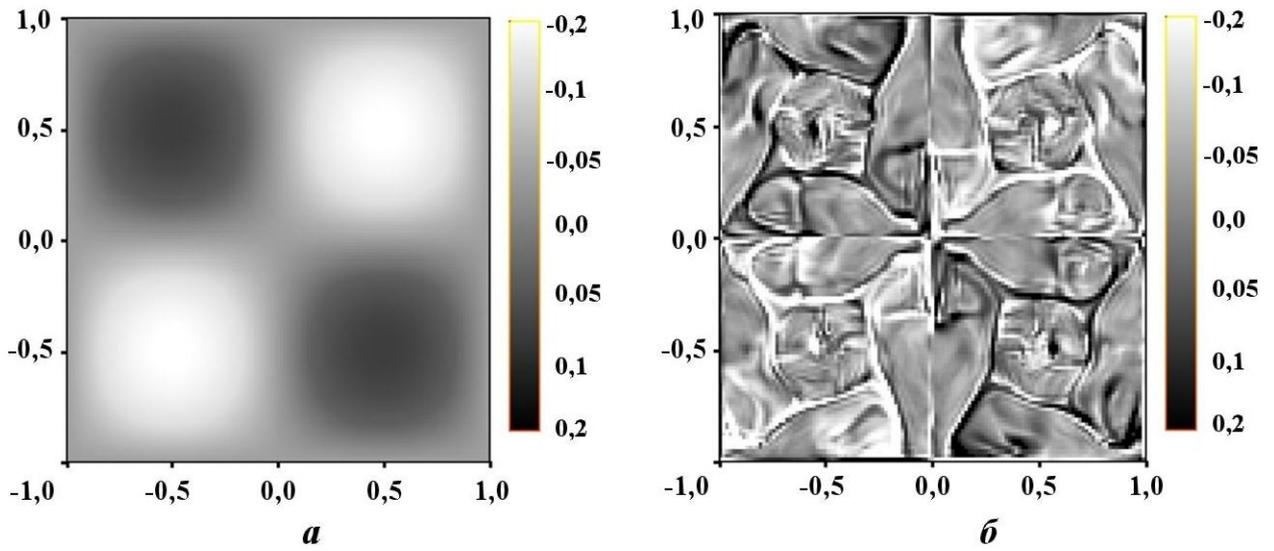


Рис. 4. Сетка $129 \times 129 \times 129$. z -компонента завихренности в плоскости $z = 0$: $a - t = 0$; $b - t = 15$

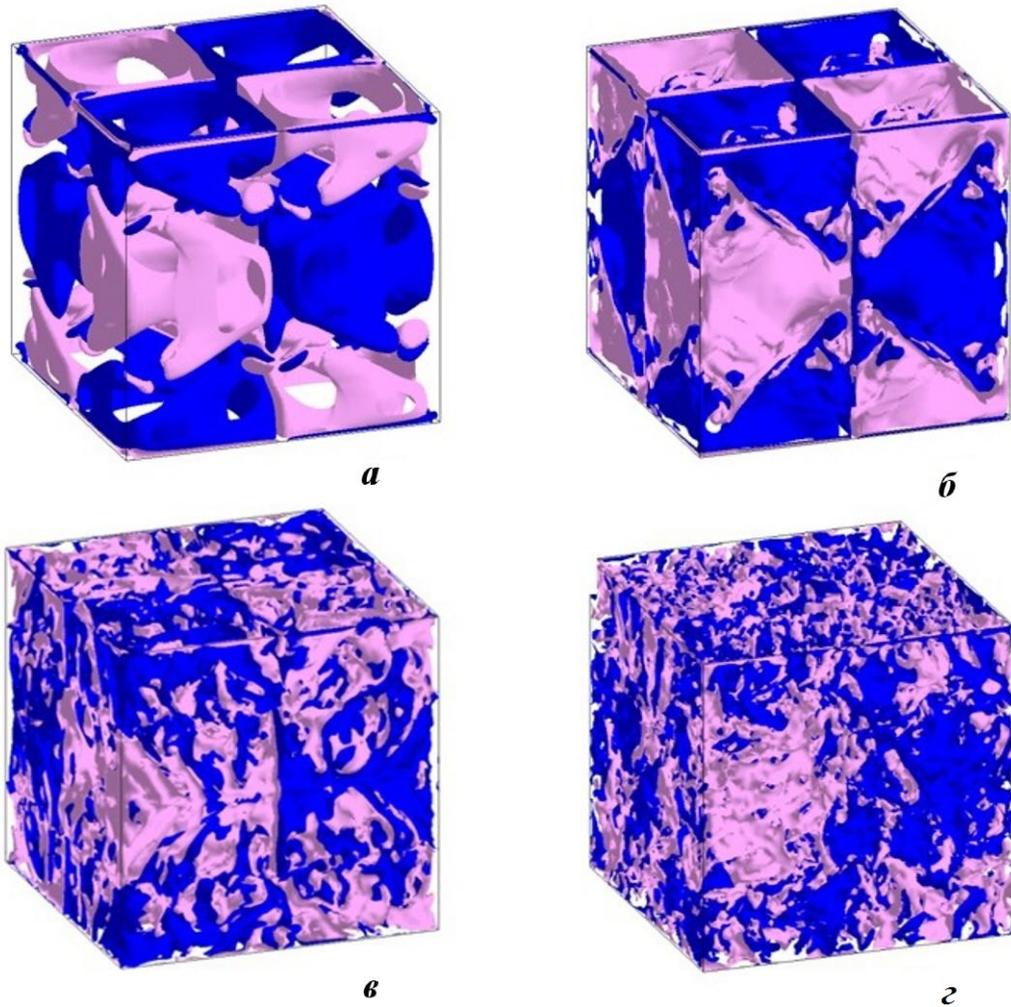


Рис. 5. Сетка $129 \times 129 \times 129$. Поверхности уровня z -компоненты завихренности: $a - t = 4$; $б - t = 9$; $в - t = 15$; $г - t = 30$

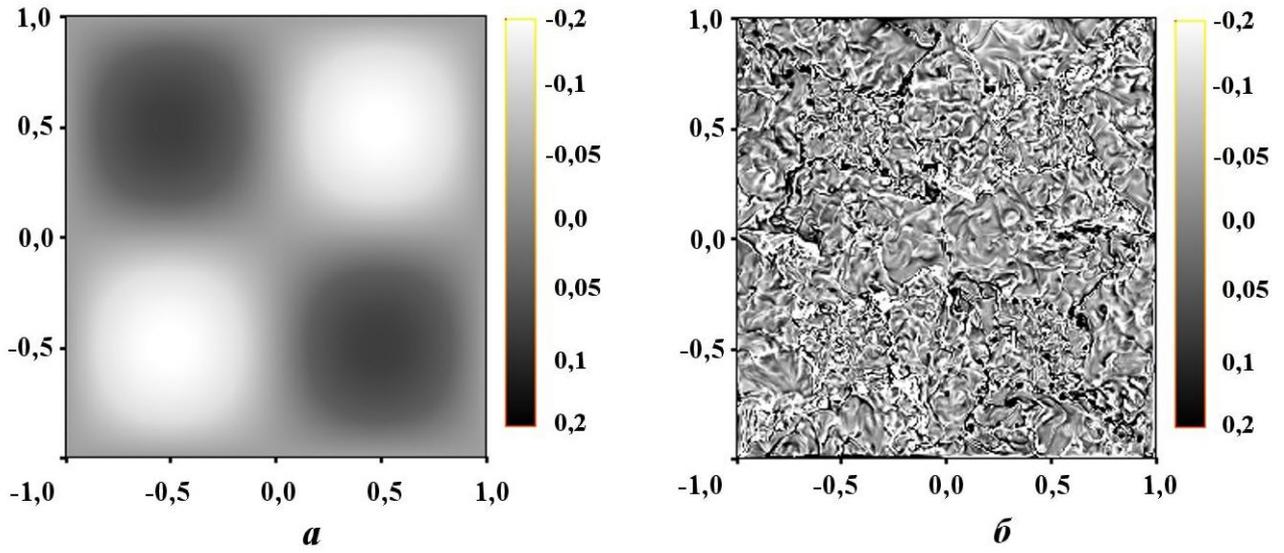


Рис. 6. Сетка $513 \times 513 \times 513$. z -компонента завихренности в плоскости $z = 0$: $a - t = 0$; $b - t = 15$

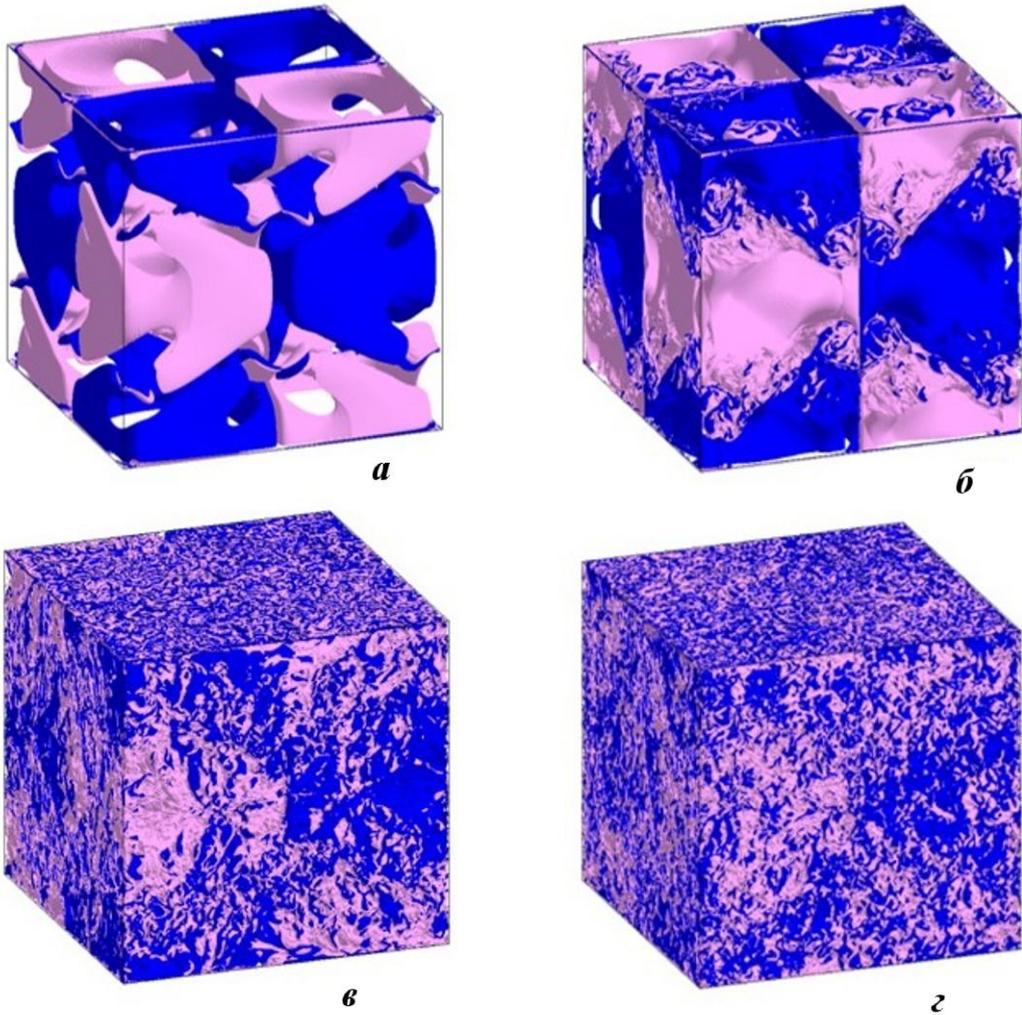


Рис. 7. Сетка $513 \times 513 \times 513$. Поверхности уровня z -компоненты завихренности: $a - t = 4$; $b - t = 9$; $в - t = 15$; $г - t = 30$

Сетка $33 \times 33 \times 33$ (линейный размер кубической ячейки $h = 0,0625$ см). Данная сетка является наиболее крупной из всех сеток, использованных в расчетах. По этой причине диссипативные погрешности методики в расчете на этой сетке наиболее значительны, что приводит к наибольшему сглаживанию искомого решения (ламинаризации течения).

Согласно рис. 3 на моменты времени $t = 4$ и 9 регулярное в начальный момент времени распределение завихренности все еще "сохраняет память" о распределении при $t = 0$ (см. рис. 1, б), но в дальнейшем структура течения становится хаотической, что характерно для турбулентного потока.

Сетка $129 \times 129 \times 129$ (линейный размер ячейки $h = 0,015625$ см). Размер ячейки сетки уменьшен по сравнению с предыдущим расчетом, вследствие чего диссипативные погрешности методики в расчете менее значительны. Это приводит к меньшему выглаживанию искомого решения и разрешению более мелких вихревых образований в поле течения, что заметно, в частности, на рис. 4, б.

Согласно рис. 5 на моменты времени $t = 4$ и 9 распределение завихренности все еще сохраняет память о распределении при $t = 0$, но в дальнейшем структура течения становится хаотической, что характерно для турбулентного потока.

Сетка $513 \times 513 \times 513$ (линейный размер ячейки $h = 0,00390625$ см). Размер ячейки сетки уменьшен по сравнению с предыдущими расчетами, диссипативные погрешности методики в расчете наименее значительны, выглаживание искомого решения минимально, разрешаются наиболее мелкие вихревые образования. Это заметно на рис. 6, б.

Согласно рис. 7 на моменты времени $t = 4$ и 9 в распределении завихренности продолжает сохраняться память о первоначальном распределении ($t = 0$), но в дальнейшем структура течения становится хаотической, что характерно для турбулентного потока.

Сравнивая рис. 3, д, 5, з, 7, з (момент времени $t = 30$), можно заключить, что с течением времени размеры вихрей определяются значением диссипации используемого численного метода. При увеличении числа точек в области (уменьшении численной диссипации) размеры разрешаемых методикой вихрей уменьшаются (число вихрей в объеме увеличивается).

Влияние размера ячейки разностной сетки на вихревую структуру течения можно проследить по рис. 2, б, 4, б, 6, б, где представлена z -компонента завихренности в плоскости $z = 0$ на момент времени $t = 15$. Результаты, показанные на этих рисунках, подтверждают предыдущий вывод о заметном влиянии диссипативных погрешностей численной методики на результаты моделирования течений при наличии турбулентных структур.

Обсуждение результатов

Для анализа полученных результатов выполнена оценка изменения кинетической энергии от размера ячейки разностной сетки.

На рис. 8 показаны зависимости от времени средней по объему V_0 удельной кинетической энергии газа

$$K_0 = \frac{1}{2u_0^2 V_0} \int_{V_0} (u^2 + v^2 + w^2) dV.$$

Значения кинетической энергии получены в расчетах на пяти сетках и представлены в безразмерном виде в зависимости от безразмерного времени. Согласно рис. 8 на самой грубой сетке ($h = 0,0625$ см) кинетическая энергия начинает уменьшаться с начального момента времени, что указывает на наличие значительных диссипативных погрешностей разностной схемы при данном линейном размере ячейки сетки. Из рис. 8 также следует, что с увеличением числа точек диссипативные погрешности уменьшаются. При $t < 4$ удельная кинетическая энергия на сетках с $h = 0,0078125$ см и $h = 0,00390625$ см не меняется (скорость диссипации нулевая).

Зависимость скорости диссипации кинетической энергии от времени $Q = -\frac{dK_0}{dt}$ показана на рис. 9 для расчетов на последовательности измельчающихся сеток. При уменьшении линейного размера ячейки в расчетах по методике МИМОЗА меняется как значение максимума скорости диссипации,

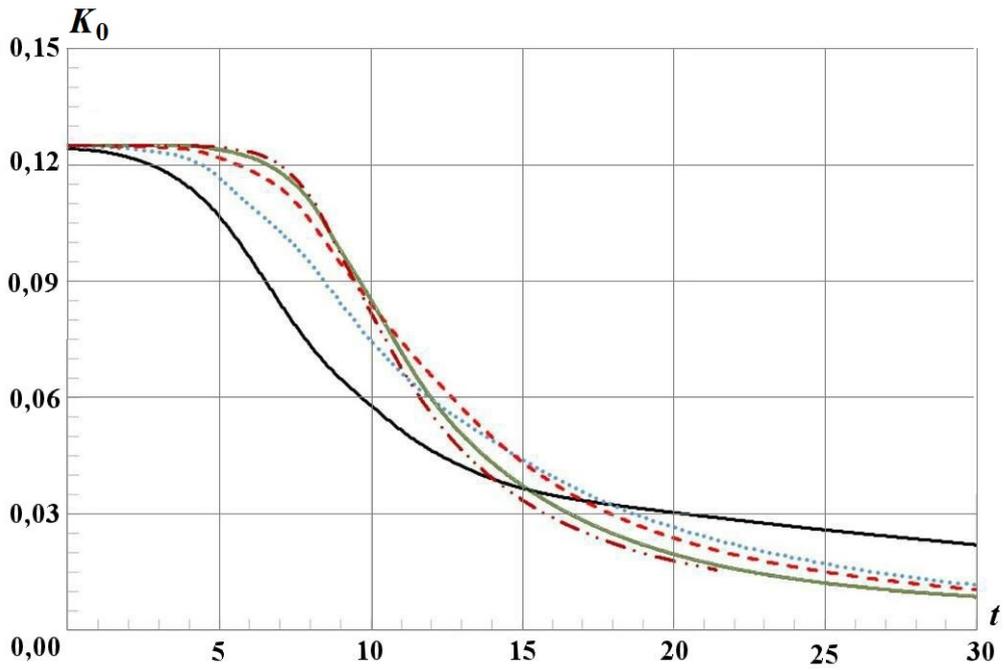


Рис. 8. Удельная кинетическая энергия, полученная в расчетах по методике МИМОЗА на кубической сетке с различным числом точек: — 33^3 ; \cdots — 65^3 ; - - - 129^3 ; — 257^3 ; - · - 513^3

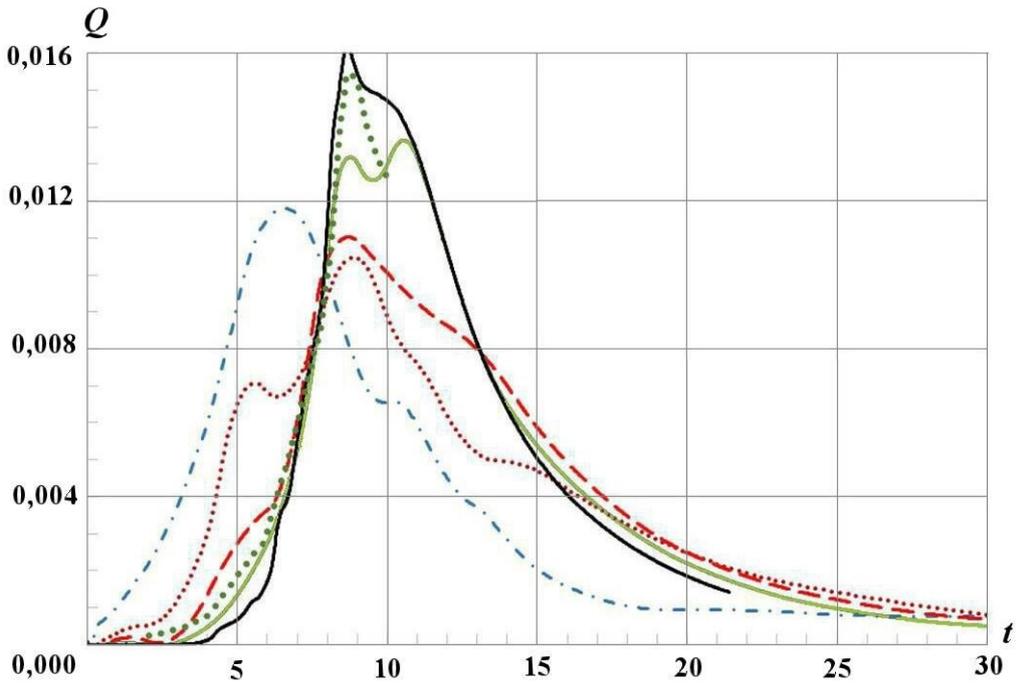


Рис. 9. Зависимости скорости диссипации кинетической энергии от времени, полученные в [12] при $Re = 5000$ (\cdots) и в расчетах по методике МИМОЗА на различных сетках: - · - 33^3 ; \cdots — 65^3 ; - - - 129^3 ; — 257^3 ; — 513^3

так и время, при котором этот экстремум достигается. Для сравнения с результатами методики МИМОЗА на рисунке приведены данные, полученные по уравнениям Навье—Стокса при числе Рейнольдса $Re = 5000$ в работе [12].

В таблице приведены полученные по методике МИМОЗА максимальные значения скорости диссипации кинетической энергии и моменты времени, в которые достигается максимум.

Табличные данные и рис. 9 свидетельствуют, что максимальное значение Q в расчете и время достижения этого максимума лучше всего согласуются с расчетом для $Re = 5000$ [12] на сетке 513^3 . На менее подробных сетках пиковое значение Q и время его достижения заметно отличаются от эталона (т. е. от расчета при $Re = 5000$). Тем самым установлено, что для качественного описания энергетического спектра необходимо либо проводить расчеты на подробных сетках, либо использовать для моделирования численные методики высокого порядка точности.

На рис. 10 показаны результаты моделирования задачи по методике RAGE из [12] (используются уравнения Эйлера) и результаты, полученные с использованием DNS-стратегии моделирования при числах Рейнольдса $Re = 400, 800, \dots, 5000$, приведенные в [6, 7, 12]. Из рис. 10 следует, что при $Re = 5000$ действие молекулярной вязкости стабилизируется. Подобным образом ведет себя математическая вязкость в решении, найденном по методике МИМОЗА (см. рис. 8, сетка 513^3).

Эволюция энтропии

$$\Omega = \int_{V_0} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dV$$

показана на рис. 11. Видно, что энтропия при дроблении сетки увеличивается (в течении появляются все более мелкие вихри). В то же время отмечаем, что пик энтропии несколько смещен относительно пика в скорости диссипации кинетической энергии (см. рис. 10).

Максимальные значения скорости диссипации Q

Величина	Re = 5000 [12]	Сетка				
		33^3	65^3	129^3	257^3	513^3
t	8,85	6,6	8,87	8,7	8,7	8,8
Q_{\max}	0,0155	0,0118	0,0105	0,0109	0,0132	0,0159

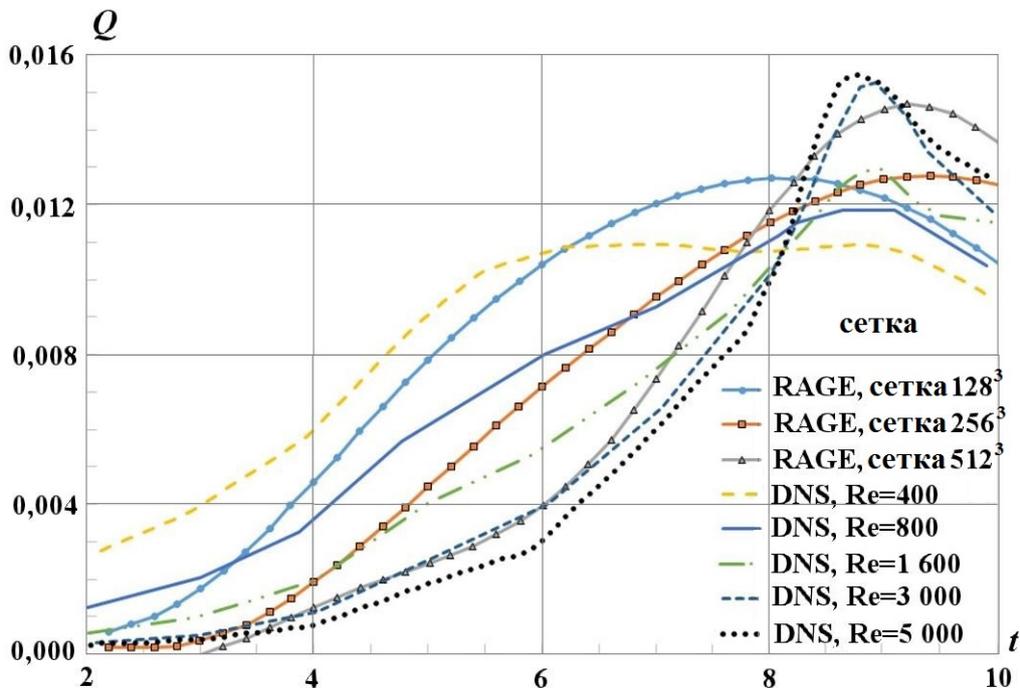


Рис. 10. Зависимость скорости диссипации кинетической энергии от времени

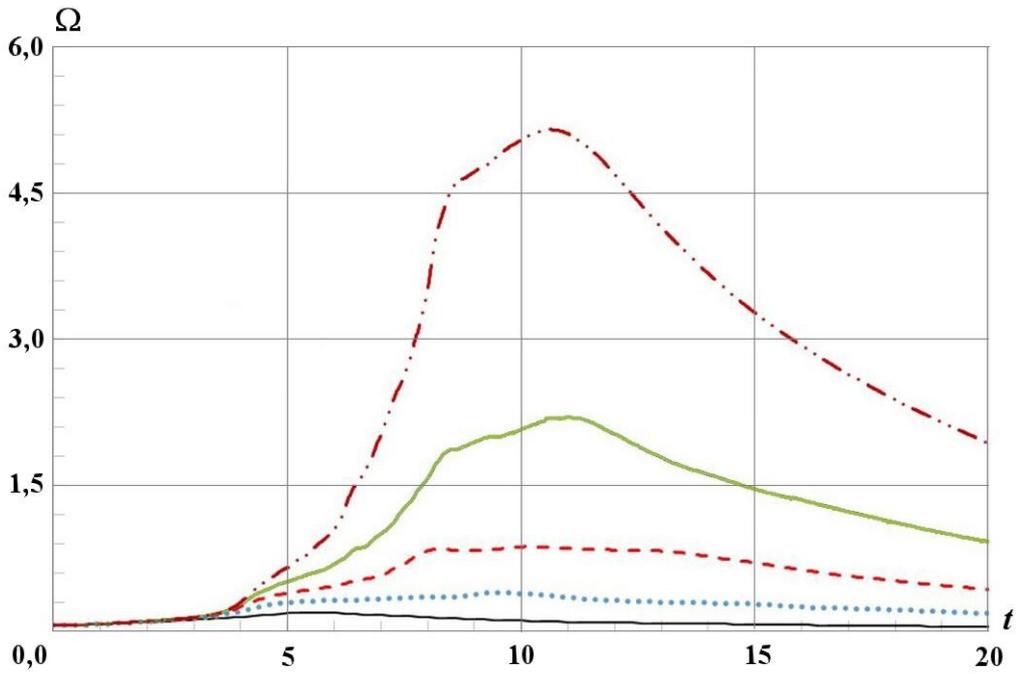


Рис. 11. Зависимость энтропии от времени в расчетах по методике МИМОЗА на различных сетках: — 33^3 ; \cdots — 65^3 ; - - - 129^3 ; — — — 257^3 ; - · - · - 513^3

Расчет с 2D начальными условиями

Для турбулентных течений вопросы постановки начальных и граничных условий (одномодовые или многомодовые возмущения, 2D или 3D начальные условия и т. п.), использования 2D или 3D методики расчета в моделировании конкретной задачи остаются до конца не изученными. Неадекватное решение этих вопросов может в некоторых задачах приводить к неверному результату. Так, в [13] задача Тейлора—Грина моделировалась с 2D и 3D начальными условиями. В результате установлено, что в расчете с 2D начальными условиями энтропия не растет, перехода к турбулентности не наблюдается.

На рис. 12 показаны поверхности уровня z -компоненты завихренности, полученные по методике МИМОЗА в 3D расчете с 2D начальными условиями, заданными по формулам (2). Из рисунка

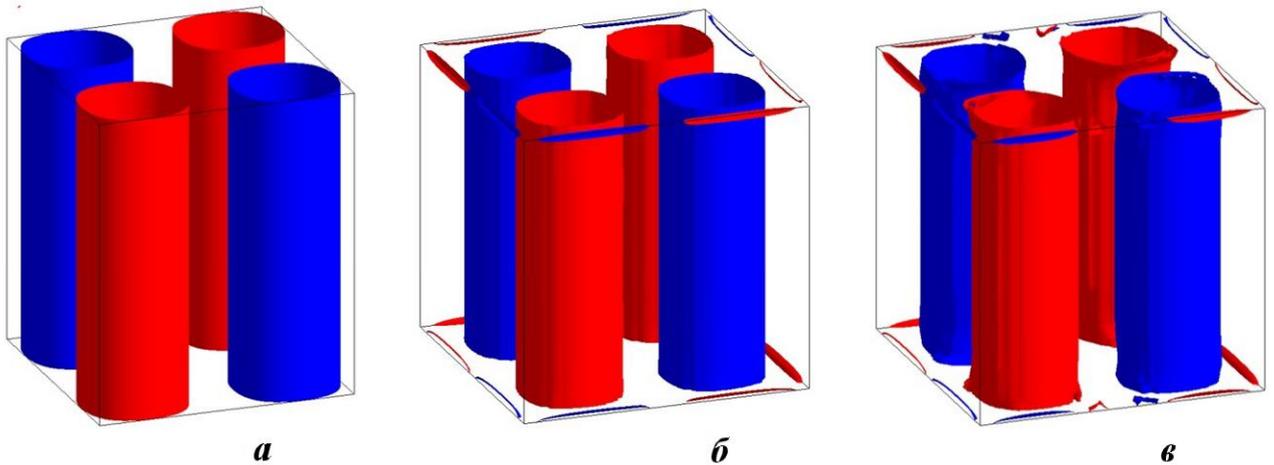


Рис. 12. Поверхности уровня z -компоненты завихренности в 3D расчете с 2D начальными условиями, сетка 65^3 : а — $t = 0$; б — $t = 4$; в — $t = 9$

следует отсутствие развития неустойчивости в вихревых образованиях и возникновения каскада вихревых структур при проведении такого расчета.

Заключение

По методике МИМОЗА выполнены расчеты поля течения, формирующегося в задаче Тейлора—Грина. Результаты моделирования распада крупного вихря в задаче Тейлора—Грина на более мелкие вихревые структуры получены с использованием LES-стратегии путем решения уравнений Эйлера.

Установлено, что из-за наличия диссипативных погрешностей численной методики скорость изменения кинетической энергии, рассчитанная на грубых сетках, значительно отличается от эталонного решения, полученного рядом авторов при решении уравнений Навье—Стокса с числом Рейнольдса $Re = 5000$. При измельчении сетки зависимость решения от диссипативных погрешностей методики ослабляется. При интегрировании уравнений Эйлера на разностной сетке, состоящей из кубических ячеек с линейным размером $h = 0,00390625$ см, решение становится близким к эталонному. Другим эффективным способом получения удовлетворительного решения задачи является использование численных алгоритмов повышенного порядка точности.

Выявлено, что для задачи Тейлора—Грина критическим вопросом является размерность начальных условий при проведении расчета. В 3D расчете задачи с 2D начальными условиями развитие неустойчивости не происходит.

Сходимость решения при измельчении сетки не достигнута по энтрофии, несмотря на отсутствие УВ в расчетной области.

На сегодня существует ряд фундаментальных вопросов в постановке и проведении расчетов задач с учетом ТП. Чтобы ответить на имеющиеся вопросы, требуется усилить работу по рассматриваемому направлению.

Список литературы

1. *Разин А. Н.* Моделирование турбулентного перемешивания в газовых слоях. Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2020.
Razin A. N. Modelirovanie turbulentnogo peremeshivaniya v gazovykh sloykakh. Sarov: RFYaTs-VNIEF, 2020.
2. *Янилкин Ю. В., Стаценко В. П., Козлов В. И.* Математическое моделирование турбулентного перемешивания в сжимаемых средах. Курс лекций в 2 томах. Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2020.
Yanilkin Yu. V., Statsenko V. P., Kozlov V. I. Matematicheskoe modelirovanie turbulentnogo peremeshivaniya v szhimaemykh sredakh. Kurs lektsiy v 2 tomakh. Sarov: RFYaTs-VNIEF, 2020.
3. Implicit Large Eddy Simulation. Computing Turbulent Fluid Dynamics / Ed. by F. Grinstein, Len G. Margolin, W. J. Rider. Cambridge University Press, 2007.
4. *Софронов И. Д., Афанасьева Е. А., Винокуров О. А., Воропинов А. И., Змушко В. В., Плетенёв Ф. А., Рыбаченко П. В., Сараев В. А., Соколова Н. В., Шамраев Б. Н.* Комплекс программ МИМОЗА для решения многомерных задач механики сплошной среды на ЭВМ "Эльбрус-2" // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1990. Вып. 2. С. 3—9.
Sofronov I. D., Afanaseva E. A., Vinokurov O. A., Voropinov A. I., Zmushko V. V., Pletenyev F. A., Rybachenko P. V., Saraev V. A., Sokolova N. V., Shamraev B. N. Kompleks programm MIMOZA dlya resheniya mnogomernykh zadach mekhaniki sploshnoy sredy na EVM "Elbrus-2" // Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov. 1990. Vyp. 2. S. 3—9.
5. *Taylor G. I., Green A. E.* Mechanism of the production of small eddies from large ones // Proc. Roy. Soc. 1937. Vol. 158. P. 499.

6. *Brachet M., Meiron D., Orszag S., Nickel B. G., Morg R. H., Frisch V.* Small-scale structure of the Taylor—Green vortex // *J. Fluid Mech.* 1983. Vol. 130. P. 411—452.
7. *Brachet M.* Direct simulation of three-dimensional turbulence in Taylor—Green vortex // *Fluid Dyn. Res.* 1991. Vol. 8. P. 1—8.
8. *Chapelier J. B., De La Llave Plata, Renac F., Martin E.* Final abstract for ONERA Taylor—Green DG participation // *Int. Workshop on High-Order CFD Methods.* Nashville, Tennessee. January 7—8, 2012.
9. *Fauconnier D.* Development of a dynamic finite difference method for large-eddy simulation/ PhD thesis. Ghent University. Wettelijk depot D/2008/10.500/55/.
10. *Shirokov I., Elizarova T.* Simulation of laminar-turbulent transition in compressible Taylor—Green flow basing on quasi-gas dynamic equations // *J. Turbulence.* 2014. Vol. 15 (10). P. 707—730.
11. *Drikakis D., Fureby C., Grinstein F., Youngs D.* Simulation of transition and turbulence decay in the Taylor—Green vortex // *Ibid.* 2007. Vol. 8 (20). P. 1—12.
12. *Grinstein F., Gowardhan A., Wachtor A.* Simulations of Richtmyer—Meshkov instabilities in planar shock-tube experiments // *Physics of Fluids.* 2011. Vol. 23. Paper 034106.
13. *Grinstein F.* Initial conditions and modelling for simulations of shock driven turbulent material mixing // *Computers and Fluids.* 2017. Vol. 151. P. 58—72.
14. *Zmushko V. V.* Computation of convective flows and their realization in MIMOZA code // *Int. Workshop "New Models of Numerical Codes for Shock Wave Processes in Condensed Media".* Oxford. September 15—19, 1997.
15. *Ладагин В. К., Пастушенко А. М.* Об одной схеме расчета газодинамических течений // *Числ. методы мех. спл. среды.* 1977. Т. 8, № 2. С. 66—72.
Ladagin V. K., Pastushenko A. M. Ob odnoy skheme raschyeta gazodinamicheskikh techeniy // *Chisl. metody mekh. spl. sredy.* 1977. Т. 8, № 2. С. 66—72.

Статья поступила в редакцию 06.07.22.
