СТОХАСТИЧЕСКИЙ ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ГРАДИЕНТНЫЙ АЛГОРИТМ В ЗАДАЧЕ КОРРЕКЦИИ ФАЗОВЫХ АБЕРРАЦИЙ ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ АДАПТИВНЫМ ЗЕРКАЛОМ

<u>Саламатин Дмитрий Александрович</u>^{2,3} (oefimova@otd13vniief.ru), Стариков Федор Алексеевич^{1,3}, Шнягин Роман Анатольевич¹

¹ ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», г. Саров Нижегородской обл. ² Филиал МГУ в городе Сарове, п. Сатис Нижегородской обл. ³ СарФТИ НИЯУ МИФИ, г. Саров Нижегородской обл.

Проведено численное исследование работы 18 элементного адаптивного зеркала апертурой $46 \times 56 \text{ мм}^2$ под управлением стохастического параллельного градиентного алгоритма в рамках задачи коррекции волнового фронта лазерного пучка с аберрациями. В численной модели в качестве базиса функций отклика актюаторов адаптивного зеркала был взят набор из 18 функций Гаусса. По методу наименьших квадратов численно установлено предельно достижимое качество пучка после коррекции. В качестве целевых функций стохастического параллельного градиентного зараллельного градиентного алгоритма рассматривались осевая яркость пучка и его мощность в пределах приосевой диафрагмы. Исследована эффективность работы алгоритма при различных размерах и формах приосевой диафрагмы, проведена расчетная оптимизация параметров сходимости алгоритма. Установлено, что при выборе круглой диафрагмы с размером, равным среднему дифракционному размеру пучка, возможно получить увеличение числа Штреля с St = 0,05 до St = 0,60 за N = 2000 итераций алгоритма, расходимость пучка по уровню 81,5 % энергии снижается с 3,7 до 2,5 дифракционных углов.

Ключевые слова: стохастический параллельный градиентный алгоритм, адаптивная оптическая система, адаптивное зеркало.

STOCHASTIC PARALLEL GRADIENT ALGORITHM IN THE PROBLEM OF LASER BEAM PHASE ABERRATIONS CORRECTION BY AN ADAPTIVE MIRROR

<u>Salamatin Dmitry Aleksandrovich</u>^{2,3} (oefimova@otd13vniief.ru), Starikov Feodor Alekseevich^{1,3}, Shnyagin Roman Anatolyevich¹

¹ FSUE «RFNC-VNIIEF», Sarov Nizhny Novgorod region ² MSU Sarov, Satis v. Nizhny Novgorod region ³ SarFTI NRNU MEPhI, Sarov Nizhny Novgorod region

The numerical simulation of operation of an 18-element adaptive mirror with an aperture of $46 \times 56 \text{ mm}^2$ under the control of a stochastic parallel gradient algorithm has been carried out in a problem of correction of laser beam distorted wave front. In the numerical model a set of 18 Gaussian functions was used as the basis of the adaptive mirror stacked actuators' response functions. The highest possible quality of the corrected beam has been determined numerically by the least square procedure. The axial brightness of the beam and its power within the axial diaphragm were considered as the criterion functional (metric) of the stochastic parallel gradient algorithm. The efficiency of the algorithm operation for different sizes and shapes of the axial diaphragm has been investigated. Also the numeri-

cal optimization of the convergence parameters of the algorithm has been carried out. It is shown that at choosing a circular diaphragm with a size equal to the average diffraction size of the beam it is possible to obtain the Strehl ratio increase from St = 0.05 to St = 0.60 for N = 2000 algorithm iterations, the divergence of the beam at the energy level of 81,5 % decreases from 3,7 to 2,5 diffraction angles.

Key words: stochastic parallel gradient algorithm, adaptive optical system, adaptive mirror.

Введение

Работу, как непрерывных лазерных комплексов специального назначения, так и мощных импульсных лазерных установок, трудно представить без входящей в их состав адаптивной оптики [1], обеспечивающей на выходе системы лазерное излучение с требуемыми оптическими параметрами. При этом в ряде задач лазерной техники [2], требуется использование пучков с малой угловой расходимостью и однородной пространственной структурой. Поэтому качественная задача компенсаций аберраций лазерного излучения средствами линейной адаптивной оптики является актуальной.

Распространенным методом повышения оптического качества лазерного излучения является компенсация фазовых искажений адаптивным зеркалом [3]. Идея данного метода заключается в придании адаптивному зеркалу поверхности, максимально сопряженной поверхности волнового фронта корректируемого излучения. В случае идеальной коррекции поверхность зеркала представляет точное фазовое сопряжение поверхности волнового фронта корректируемого пучка и после отражения пучок приобретает плоский волновой фронт. При этом существует два принципиальных способа воспроизводства поверхности адаптивного зеркала. В первом способе [4] производится непосредственное измерение локальных градиентов волнового фронта корректируемого излучения с последующим восстановлением поверхности волнового фронта адаптивным зеркалом и ее фазовым сопряжением. В состав адаптивных систем, работающих по такому принципу, входит датчик волнового фронта (ДВФ) Шака-Гартмана, регистрирующий фазовые градиенты корректируемого излучения. Второй способ [5] основан на максимизации определенного параметра, характеризующего оптическое качество корректируемого излучения – целевой функции. Коррекция осуществляется посредством пробных изменений формы поверхности адаптивного зеркала и измерения отклика целевой функции, вызванного данными изменениями. При таком подходе не используется ДВФ, а для регистрации целевой функции применяются простейшие одноэлементные фотоприемники. Для управления адаптивным зеркалом, работающим по данному принципу пробных фазовых возмущений, могут использоваться различные алгоритмы [5], направленные на оптимизацию целевой функции. На вопрос, какой способ работы адаптивных зеркал лучше, однозначного ответа нет. В зависимости от условий, в которых работает адаптивная система, коррекция фазовых аберраций адаптивным зеркалом может производиться как с использованием ДВФ для измерения и последующего устранения фазовых градиентов, так и по методу пробных фазовых возмущений.

В настоящей работе проводится расчетнотеоретическое исследование эффективности работы 18 элементного адаптивного зеркала, размером 46×56 мм² под управлением стохастического параллельного градиентного [6] (СПГ) алгоритма в рамках задачи коррекции фазовых аберраций лазерного пучка апертурой 15×22 мм² методом пробных фазовых возмущений.

Постановка задачи и начальные данные

Численное моделирование работы адаптивного зеркала проводилось при следующих начальных данных. В ближней зоне задавался прямоугольный пучок размером $D = 15 \times 22$ мм² единичной амплитуды A(x, y) и характерным волновым фронтом $\varphi(x, y)$, полученным в эксперименте. Амплитуда и волновой фронт исходного пучка представлены на рис. 1. Длина волны излучения $\lambda \sim 1$ мкм. Для характеристики аберраций волнового фронта использовались параметры *PV* (реак to valley, т. е. разность между максимальным и минимальным значением фазы φ) и *RMS* (root mean square – среднеквадратичное отклонение от плоского волнового фронта). Параметры волнового фронта, рис. 1: *PV* = 1,2786 мкм, *RMS* = 0,2846 мкм.



Рис. 1. Пучок в ближней зоне: а – амплитуда A(x, y), б – волновой фронт $\phi(x, y)$

Далее пучок отражался от адаптивного зеркала и фокусировался линзой, в фокальной плоскости которой регистрировалось распределение интенсивности скорректированного излучения.

Отражающую поверхность зеркала S(x, y) в численной модели можно представить в виде линейной комбинации функций отклика адаптивного зеркала $g_n(x, y)$:

$$S(x, y) = \sum_{n=1}^{N} a_n g_n(x, y),$$
 (1)

где $\{a_n\}$ – коэффициенты управления актюаторами адаптивного зеркала.

При отражении от зеркала фазовый фронт получает дополнительные искажения, равные 2kS(x, y). Здесь $k = 2\pi / \lambda$ – волновое число. Пусть на зеркало падает излучение:

$$E_0(x, y) = A(x, y)\exp(i\varphi(x, y)), \qquad (2)$$

где A(x, y) – амплитуда, $\varphi(x, y)$ – фаза волны. Тогда отраженное излучение можно записать в виде $E_0(x, y) \cdot \exp[i2kS(x, y)]$. Предполагалось, что расстояние от зеркала до линзы мало, и дополнительный набег фазы, связанный с этим, пренебрежимо мал. Тогда распределение интенсивности излучения в фокальной плоскости линзы согласно [7]:

$$I(u,v) \sim \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A(x,y) \exp[i\varphi(x,y)] \times \exp\left\{ i \sum_{n=1}^{N} 2ka_n g_n(x,y) \right\} \times$$
(3)
$$\times \exp\left[-i \frac{k}{F} (xu + yv) \right] dx dy \right|^2,$$

здесь (u, v) – декартовы координаты в фокальной плоскости линзы, F – фокусное расстояние линзы.

Таким образом, задача коррекции волнового фронта в рамках данной модели заключается в нахождении такого набора коэффициентов $\{a_n\}$, при котором фаза отраженного пучка $2ka_ng_n(x, y) + \varphi(x, y)$ в максимальной степени приближается к плоской поверхности. Тогда осевая интенсивность скорректированного пучка будет максимальной.

Анализ экспериментально измеренных функций отклика 18-элементного адаптивного зеркала показал, что они с высокой степенью точности описываются функцией Гаусса $g(r) \sim e^{-r^2/r_0^2}$ с параметром $r_0 = 1,73$ см. Поэтому при моделировании работы адаптивного зеркала в качестве его функций отклика использовался набор из 18 функций Гаусса.

Оценка эффективности коррекции по методу наименьших квадратов

Для определения предельных возможностей адаптивного зеркала по устранению конкретных фазовых аберраций, коэффициенты управления $\{a_n\}$ необходимо подбирать таким образом, чтобы волновой фронт скорректированного излучения был максимально приближен к плоскому. Для соответствующей подгонки коэффициентов можно использовать метод наименьших квадратов (МНК) [8, 9], суть которого заключается в минимизации квадратов отклонений подгоняемой поверхности адаптивного зеркала от исходного волнового фронта. Оценка эффективности коррекции аберраций представленного волнового фронта 18 элементным адаптивным зеркалом, проведенная по МНК [9], показала, что возможно получить скорректированный пучок с числом Штреля St = 0.81, и расходимостью по уровню 81,5 % энергии равной 2,0 дифракционным углам. Доля энергии в дифракционном размере пучка при этом составляет $\delta P_{difr.} = 0,64$. Картины пространственного распределения интенсивности в дальней зоне для исходного, скорректированного по МНК и идеального пучков представлены на рис. 2. Распределение интенсивности скорректированного по МНК пучка характеризуется наличием ярко выраженного центрального пика, визуально слабо отличающегося от дифракционного пятна.



Рис. 2. Картины распределения интенсивности в дальней зоне: а – для исходного пучка (St = 0.05, $\delta P_{difr.} = 0.10$); б – для скорректированного по МНК пучка (St = 0.81, $\delta P_{difr.} = 0.64$); в – для идеального пучка (St = 1.00, $\delta P_{difr.} = 0.81$)

Согласно критерию Марешаля [10], качество фазовой коррекции пучка находится на высоком уровне при St > 0,80. Таким образом, исследуемое 18 элементное адаптивное зеркало позволяет получить скорректированный пучок с высоким оптическим качеством. Расходимость излучения по уровню 81,5 % энергии уменьшается с 3,7 до 2,0 дифракционных углов.

СПГ алгоритм для управления адаптивным зеркалом

В данной работе для управления адаптивным зеркалом был выбран СПГ алгоритм, особенность которого заключается в одновременной оптимизации целевой функции по всем степеням свободы системы. СПГ алгоритм является модернизированным алгоритмом стохастического параллельного градиентного спуска [6].

Принципиальная схема управления адаптивным зеркалом посредством СПГ алгоритма представлена на рис. 3. На адаптивное зеркало 1 падает лазерный пучок с неоднородным волновым фронтом, и, отражаясь, поступает на делитель 2. Небольшая часть пучка фокусируется линзой 3 на датчик сигнала 4, где регистрируется целевая функция алгоритма J. Значение целевой функции фиксируется компьютером 5, который затем, с помощью блока управления 6 производит коррекционный шаг (итерацию) - небольшое изменение формы отражающей поверхности зеркала. После коррекционного шага регистрируется новое значение J и т. д., пока целевая функция не достигнет определенного значения согласно заданному критерию или не будет совершено определенное количество итераций алгоритма.



Рис. 3. Схема управления адаптивным зеркалом: 1 – адаптивное зеркало, 2 – делитель пучка, 3 – линза, 4 – датчик сигнала, 5 – компьютер, 6 – блок управления

К достоинствам СПГ алгоритма в рамках данной задачи можно отнести использование в качестве датчика сигнала простейшего одноэлементного фотоприемника, измерение интегральных характеристик излучения, и как следствие, меньшую чувствительность к шумам по сравнению с системами, где используется ДВФ, возможность работы со слабым сигналом и с сильно модулированным распределением интенсивности, а также нечувствительность алгоритма к нестабильности функций отклика адаптивного зеркала в ходе коррекции.

Одна итерация СПГ алгоритма состоит из двух этапов: «предиктор» и «корректор». Пусть в результате выполнения *n*-й итерации к толкателям зеркала приложен набор управляющих электрических напряжений $\{U_n\}$, и на датчике 4, рис. 3, фиксируется значение целевой функции J_n . Этап «предиктор» (n+1)-й итерации начинается с одновременной подачи набора малых напряжений $\{\Delta U_n\}$ на актюаторы зеркала. Результирующие напряжения на толкателях приобретают вид:

$$\{U'_{n+1}\} = \{U_n\} + \{\Delta U_n\},\tag{4}$$

Целевая функция так же изменяется и становится равной J'_{n+1} . Набор малых напряжений $\{\Delta U_n\}$ разыгрывался среди значений $\pm \Delta U_n$ с одинаковыми вероятностями Конечным шагом этапа «предиктор» является вычисление вызванного добавкой $\{\Delta U_n\}$ изменения целевой функции:

$$\Delta J_n = J'_{n+1} - J_n \tag{5}$$

На этапе «корректор» (n+1)-й итерации к начальному набору $\{U_n\}$ прибавляется добавочный набор напряжений, пропорциональный $\Delta J_n/J_n^{\sigma}$:

$$\{U_{n+1}\} = \{U_n\} + \left(2\gamma\Delta J_n / J_n^{\sigma}\right)\{\Delta U_n\},\tag{6}$$

где σ и γ – положительные константы

Таким образом, корректирующая добавка к набору напряжений $\{U_n\}$ пропорциональная величине $|\Delta J_n|$, а направление «движения» задается знаком ΔJ_n . Если $\Delta J_n > 0$, то добавка напряжений $\{\Delta U_n\}$ оказалась успешной и процесс поиска максимума целевой функции движется в нужном направлении. Параметр ү при этом контролирует темп сходимости. Если $\Delta J_n < 0$, то выбранная добавка, вообще говоря, оказалась неудачной, но т. к. величина $(2\gamma\Delta J_n/J_n^{\sigma})\{\Delta U_n\}$ в формуле (6) имеет другой знак,

то можно надеяться, что шаг в «противоположном» направлении окажется удачным. Наиболее быстрая сходимость целевой функции наблюдается, когда величина σ близка к единице.

В работе [6] показано, что для достижения наилучшей сходимости Ј необходимо пользоваться малыми значениями добавочных напряжений. Но нижний порог ΔU_0 ограничен как возможностью реализации малых напряжений на актюаторах зеркала в ходе эксперимента, так и способностью регистрирующей аппаратуры на фоне шумов фиксировать изменение целевой функции, вызванное малыми напряжениями $\{\Delta U_n\}$. Максимальное значение $\Delta U_0 = 0,2$ В определено из условия, что набег фазы, приобретаемый пучком после отражения от зеркала, на элемент которого подано такое напряжение, не должен превышать значение $\pi/10$ рад. Считается, что данное условие обеспечивает стабильную работу

адаптивного зеркала под управлением СПГ алгоритма. С учетом данных граничных условий, накладываемых на напряжения ΔU_0 , для исследования СПГ коррекции 18 элементным адаптивным зеркалом были выбраны значения $\Delta U_0 = 0.01$ В и $\Delta U_0 = 0.1$ В.

Параметр γ имеет подлежащий определению оптимум γ_{opt} по требуемому числу итераций или значению целевой функции при фиксированном уровне возмущений ΔU_0 .

Целевая функция СПГ алгоритма в виде осевой яркости пучка

Рассмотрим работу СПГ алгоритма с целевой функцией $J = St = Q/Q_0$, где Q – осевая яркость корректируемого пучка в фокальной плоскости линзы, Q_0 – осевая яркость пучка с плоским волновым фронтом в фокальной плоскости. На рис. 4 изображена динамика изменения числа Штреля St и доли энергии в дифракционном размере пучка δP_{difr} при фазовой СПГ коррекции с малыми напряжениями $\Delta U_0 = 0,01$ В. Усреднение производилось по 100 статистическим реализациям коррекции. Из рис. 4 видно, что число Штреля увеличивается с начального значения St = 0.05 до уровня St = 0.30 за N = 2000 итераций алгоритма. Доля энергии в дифракционном размере пучка при этом с начального значения $\delta P_{difr.} = 0,10$ возрастает до уровня $\delta P_{difr.} = 0,27$. При использовании напряжений $\Delta U_0 = 0,1$ В и в результате совершения такого же количества итераций алгоритма получается пучок с параметрами St = 0,29 и $\delta P_{difr.} = 0,27$.



Рис. 4. Динамика изменения параметров St и $\delta P_{difr.}$ в ходе СПГ коррекции при целевой функции в виде осевой яркости пучка и $\Delta U_0 = 0,01$ В, $\gamma_{opt} = 1800: 1 - число Штреля St,$ $2 - доля мощности в дифракционном угле <math>\delta P_{difr}$

На рис. 5 представлен результат СПГ коррекции пучка при целевой функции в виде осевой яркости пучка и $\Delta U_0 = 0,01$ В, $\gamma_{opt} = 1800$. На рис. 5, а – пространственное распределение интенсивности пучка в дальней зоне после СПГ коррекции. Визуально у сорректированного пучка отчетливо наблюдается спекл-структура. На рис. 5, б показано угловое распределение энергии δP в исходном пучке, а также в скорректированных МНК и СПГ пучках. Расходимость СПГ пучка по уровню 81,5 % энергии составляет 3,4 дифракционных углов, что на 70 % хуже расходимости пучка, скорректированного по МНК.



Рис. 5. Результат СПГ коррекции пучка при целевой функции в виде осевой яркости пучка и $\Delta U_0=0,01$ В, $\gamma_{opt}=1800$: а – распределение интенсивности в дальней зоне (*St* = 0,30, $\delta P_{difr.}=0,27$); б – угловое распределение энергии пучка ($\theta = 3,4\cdot\theta_{difr.}$): 1 – исходный пучок, 2 – скорректированный МНК пучок, 3 – скорректированный СПГ пучок

Таким образом, при коррекции 18 элементным адаптивным зеркалом под управлением СПГ алгоритма с целевой функцией в виде осевой яркости пучка получается излучение с довольно низким оптическим качеством. Параметры скорректированного таким образом пучка далеки от предельно достижимых параметров, определенных по МНК.

Целевая функция СПГ алгоритма в виде доли мощности в угле

Теперь рассмотрим в качестве целевой функции алгоритма параметр $J = P/P_0$, где P – мощность корректируемого пучка в пределах приосевой диафрагмы D_p , расположенной в фокальной плоскости линзы; P_0 – мощность пучка с плоским волновым фронтом в данной диафрагме. Результаты исследования эффективности СПГ коррекции в зависимости от конфигурации приосевой диафрагмы представлены в таблице. Применялись диафрагмы прямоугольной и круглой формы. Установлено, что наилучшее качество коррекции достигается при круглой диафрагме с диаметром $d_{cp.}$, равным среднему дифракционному

размеру пучка в дальней зоне: $d_{cp} = \frac{1}{2}(d_x + d_y)$.

Прямоугольная диа- фрагма <i>D</i> _p	St	$\delta P_{difr.}$	θ/θ _{difr} по уровню 81,5 % энергии	Круглая диафраг- ма диаметра <i>D</i> _p	St	$\delta P_{difr.}$	θ/θ _{difr} по уровню 81,5 % энергии
Дифракционный раз- мер <i>D</i> _p = <i>d</i>	0,53	0,49	2,8	$D_p = d_{cp}$	0,60	0,51	2,5
$D_p = 0,5d$	0,32	0,35	3,6	$D_p = d_x$	0,57	0,50	2,7
$D_p = 1,5d$	0,39	0,46	3,1	$D_p = d_y$	0,38	0,42	2,9

Результаты СПГ коррекции при различных конфигурациях приосевой диафрагмы



Рис. 6. Динамика изменения параметров *St* и $\delta P_{difr.}$ в ходе СПГ коррекции при целевой функции в виде доли мощности в угле и $\Delta U_0 = 0,01$ В, $\gamma_{opt} = 9600: 1 -$ число Штреля *St*, 2 – доля мощности в дифракционном угле $\delta P_{difr.}$



Рис. 7. Результат СПГ коррекции пучка при целевой функции в виде доли мощности в угле и $\Delta U_0 = 0,01$ В, $\gamma_{opt} = 9600$: а – распределение интенсивности в дальней зоне (*St* = 0,60, $\delta P_{difr.} = 0,51$), б – угловое распределение энергии пучка ($\theta = 2,5 \cdot \theta_{difr.}$): 1– исходный пучок, 2 – скорректированный МНК пучок, 3 – скорректированный СПГ пучок

На рис. 6 представлена динамика изменения параметров пучка *St* и δP_{difr} в ходе совершения СПГ коррекции с круглой приосевой диафрагмой диаметра $D_p=d_{cp}$ и малыми напряжениями $\Delta U_0=0,01$ В. В результате совершения N = 2000 итераций алгоритма число Штреля достигает значения *St* = 0,60, а доля энергии пучка в дифракционном размере становится равной $\delta P_{difr} = 0,51$. В случае СПГ коррекции при $\Delta U_0 = 0,1$ В и $\gamma_{opt} = 60$ параметры скорректированного пучка: *St* = 0,59 и $\delta P = 0,50$.

Результаты СПГ коррекции с круглой приосевой диафрагмой диаметра *d*_{*c*p} показаны на рис. 7. В дальней зоне скорректированного излучения наблюдается узкий пик высокой интенсивности. Расходимость пучка после коррекции по уровню 81,5 % энергии составляет 2,5 дифракционных углов, что на 25 % хуже предельно-достижимой расходимости, которую можно получить данным адаптивным зеркалом.

Полученные результаты свидетельствуют, что при правильном выборе приосевой диафрагмы можно добиться высокого оптического качества лазерного пучка, корректируемого 18 элементным адаптивным зеркалом под управлением СПГ алгоритма с целевой функцией в виде доли мощности в угле.

Заключение

Проведено численное исследование коррекции фазовых аберраций лазерного пучка с апертурой 15×22 мм² с помощью 18 элементного адаптивного зеркала размером 46×56 мм² под управлением стохастического параллельного градиентного алгоритма. Экспериментально определены функции отклика исследуемого адаптивного зеркала, которые с высокой точностью аппроксимируются функциями Гаусса с параметром $r_0 = 1,73$ см. Методом наименьших квадратов определены предельные возможности адаптивного зеркала по фазовой коррекции используемого пучка. Цель данной работы заключалась в численной оценке параметров пучка, получаемого в результате СПГ коррекции 18 элементным адаптивным зеркалом.

Проведено исследование эффективности СПГ коррекции лазерного пучка с двумя целевыми функциями алгоритма: осевой яркостью и долей мощности пучка в различных диафрагмах. Установлено, что при выборе целевой функции СПГ алгоритма в виде доли мощности в пределах диафрагмы среднего дифракционного размера, можно получить увеличение числа Штреля с St = 0,05 до St = 0,60 за N = 2000 итераций алгоритма. Доля энергии в дифракционном размере пучка при этом увеличивается со значения $\delta P_{difr} = 0,10$ до $\delta P_{difr} = 0,51$. Расходимость пучка по уровню 81,5 % энергии снижается с 3,7 до 2,5 дифракционных углов.

Список литературы

1. Лукин В. П. Формирование оптических пучков и изображений на основе применения систем адаптивной оптики // УФН. 2014. Т. 184, № 6. С. 599–640.

2. Лукин В. П. Применения технологий адаптивной оптики для расширения возможностей оптико-электронных систем // Интерэкспо Гео-Сибирь. 2019. Т. 8, С. 115–138.

3. Воронцов М. А., Шмальгаузен В. И. Принципы адаптивной оптики. М.: Наука, 1985.

4. Hardy J. H. Adaptive Optics for Astronomical Telescopes // N. Y.: Oxford University Press, 1998.

5. Vorontsov M. A., Carhart G. W. Adaptive optics based on analog parallel stochastic optimization: analysis and experimental demonstration // Optical society of America. 2000. Vol. 17, N 8. P. 1440–1453.

6. Vorontsov M. A., Sivokon V. P. Stochastic parallel-gradient-descent technique for high-resolution wavefront phase-distortion correction // Optical society of America. 1998. Vol. 15, N 10. P. 2745–2758.

7. Гудмен Дж. В. Введение в фурье-оптику: М.: Мир 1970. С. 362

8. Гаранин С. Г., Голубев А. И., Повышев В. М., Стариков Ф. А., Шнягин Р. А. Исследование возможности повышения эффективности адаптивной системы лазерной установки «Луч» // Оптика атмосферы и океана. 2013. Т. 26, № 5. С. 427–443.

9. Wolberg J. R. Data Analysis Using the Method of Least Squares. Berlin: Springer, 2006.

10. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука, 1972. С. 720.