

УДК 519.6

МОНОТОННЫЙ МЕТОД ДРОБНЫХ ЧАСТИЦ ДЛЯ ДВУМЕРНЫХ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ

В. А. Шмелёв, И. Е. Чередниченко, Ю. В. Янилкин
(ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области)

Описываются основные алгоритмы двумерного монотонного метода дробных частиц для моделирования упругопластических течений в рамках лагранжево-эйлеровой методики ЭГАК. Данный метод призван решить проблему точности аппроксимации уравнений на этапе конвективного переноса для смешанных ячеек, устранив при этом недостаток классического метода частиц, а именно немонотонность решения, вызванную дискретным переносом из ячейки в ячейку массы и связанных с ней величин. На основе монотонного метода дробных частиц реализованы модель мгновенного разрушения и компактирования и модель Канеля. Первая модель протестирована на задаче об адиабатическом сжатии и растяжении плоского слоя, вторая — на задаче о соударении медных пластин, а также обе модели — на задаче о соударении стальной сферы с композитной преградой. Результаты подтверждают, что реализованный метод позволяет улучшить точность описания процессов упругопластического деформирования и разрушения материалов в рамках механики сплошной среды на неподвижных сетках.

Ключевые слова: упругопластическое течение, модель мгновенного разрушения, хрупкий откол, модель Канеля, мера поврежденности, монотонный метод дробных частиц, численное моделирование.

Введение

Корректный расчет многомерного движения многокомпонентной среды является наиболее серьезной проблемой для лагранжево-эйлеровых и эйлеровых методик, особенно в смешанных ячейках в окрестности контактных границ (КГ). Имеются два основных подхода к решению уравнения адвекции для многокомпонентной среды.

Первый подход основан на выделении КГ и определении их положения на каждом счетном шаге. При этом КГ может либо выделяться явным образом, либо восстанавливаться на каждом счетном шаге по полю концентраций. Последний алгоритм положен в основу методов типа VOF [1] (метода концентраций [2]), получивших широкое распространение.

Второй подход связан с применением методов частиц (PIC-метод), или маркеров [3]. В этом случае потоки веществ из смешанных ячеек определяются частицами, с которыми связываются определенные массы веществ.

Оба подхода имеют свои достоинства и недостатки. Достоинства метода частиц определяются лагранжевым представлением частиц и возможностью "привязки" информации о среде к ним. Это позволяет минимизировать погрешности эйлеровых методов, связанные с решением уравнения адвекции. В настоящее время разработан ряд модификаций метода частиц, повышающих его точность и расширяющих области его применения [4–9]. Обзор этих методов представлен в книге [10].

Основным недостатком метода частиц является сильная немонотонность решения, вызванная дискретным переносом массы и величин, связанных с массой, из ячейки в ячейку. Для минимизации соответствующей погрешности приходится использовать большое количество частиц в ячейках, что ограничивает возможности метода, особенно в трехмерном случае. Для борьбы с этим недостатком предложено несколько подходов. Один из подходов предложен в работах [11, 12], в которых

использованы частицы переменной массы. Другой подход основан на использовании частиц лишь в окрестности КГ [13], при этом в остальной части области используется сеточный метод, что позволяет значительно увеличить количество частиц в ячейке. Однако такое выборочное использование частиц не уменьшает погрешность, связанную с решением уравнения адвекции в других частях области, особенно если необходимо рассчитывать течения, в которых требуется учитывать историю того или иного процесса. Подобные процессы легко решаются лишь в лагранжевых переменных для ячеек, в которых не допускается перетекание вещества. К таким процессам относится и кинетика разрушения материалов.

В методике ЭГАК для двумерного случая был разработан монотонный метод дробных частиц* (МДЧ) [14, 15]. Данный метод свободен от основного недостатка метода частиц, а именно немонотонности решения. Монотонизация метода частиц производится путем дробления частицы на две частицы так, чтобы вытекающий из ячейки объем вещества соответствовал объему, получающемуся при вычислении по сеточным схемам методики ЭГАК [16]. При этом параметры материнской частицы переносятся в дочерние частицы. Чтобы не породить бесконечную цепочку дробления, в дальнейшем раздробленные частицы вновь объединяются при условии попадания в одну счетную ячейку. В силу этого для МДЧ не требуется большого количества частиц в ячейке, что позволяет его использовать в большом количестве ячеек области.

В настоящей работе МДЧ обобщен для упругопластических течений. Исследована его точность в приложении к процессам разрушения материалов при хрупком отколе [17] и их компактировании, а также разрушения по модели Канеля и др. [18]. Тестирование метода проведено на нескольких задачах.

Процесс упругопластики

Систему дифференциальных уравнений, описывающую двумерные течения многокомпонентной сплошной среды с учетом прочностных свойств материалов, можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial K_x}{\partial t} + \operatorname{div} K_x \mathbf{u} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial S_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial S_{xy}}{\partial y} + (\alpha - 1) \frac{S_{xy}}{y}; \quad (1)$$

$$\frac{\partial K_y}{\partial t} + \operatorname{div} K_y \mathbf{u} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial S_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial S_{xy}}{\partial x} + (\alpha - 1) \frac{S_{yy} - S_\varphi}{y}; \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho_\xi}{\partial t} + (\operatorname{div} \rho \mathbf{u})_\xi = 0; \quad (3)$$

$$\frac{\partial \rho_\xi e_\xi}{\partial t} + (\operatorname{div} \rho e \mathbf{u})_\xi = -P_\xi (\operatorname{div} \mathbf{u})_\xi + S_{xx\xi} d_{xx} + S_{yy\xi} d_{yy} + S_{\varphi\xi} d_\varphi + 2S_{xy\xi} d_{xy}, \quad (4)$$

где $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$ — скорость (OX — ось симметрии); ρ — плотность; P — давление; e — удельная внутренняя энергия; $K_x = \int_V \rho u_x dV$, $K_y = \int_V \rho u_y dV$ — составляющие импульса единицы объема; $S_{xx}, S_{yy}, S_{xy}, S_\varphi$ — компоненты девиатора тензора напряжений S ; $d_{xx}, d_{yy}, d_{xy}, d_\varphi$ — компоненты тензора скоростей деформации D ; угол φ задает третье направление в осесимметричном случае; $\alpha = 1$ в случае плоской симметрии, $\alpha = 2$ в случае осевой симметрии; индекс ξ показывает, что величина отнесена к ξ -му компоненту среды.

Система уравнений (1)–(4) замыкается уравнениями состояния (УРСами) компонентов среды

$$P_\xi = P(\rho_\xi, e_\xi) \quad (5)$$

и уравнениями, выражающими зависимость девиаторов тензора напряжений от тензора скоростей деформаций (они определяются принятой моделью среды),

$$f(S_\xi, D_\xi) = 0. \quad (6)$$

* Первоначальное название метода — монотонный метод частиц.

Решение системы уравнений (1)–(6) выполняется с привлечением метода расщепления в два этапа: лагранжева и эйлерова.

На первом (лагранжевом) этапе решаются уравнения (1)–(6) без конвективных членов, т. е. в лагранжевых переменных. Этот этап, в свою очередь, делится на три подэтапа: 1) определение ускорений за счет компонент девиатора тензора напряжений; 2) решение уравнений газодинамики без конвективных членов с учетом ускорений, полученных на первом подэтапе; 3) определение значений компонент девиатора на новый момент времени на лагранжевом этапе и приращений внутренней энергии за счет них. На третьем подэтапе рассчитывается и кинетика разрушений веществ.

На втором (эйлеровом) этапе осуществляется учет конвективного переноса веществ из ячейки в ячейку. При этом в качестве начальных данных используются значения величин, полученные на лагранжевом этапе вычислений. Данный этап разбивается на два подэтапа, аппроксимация уравнений производится с использованием расщепления по направлениям.

Компоненты скорости \mathbf{u} определены в узлах счетной сетки, скалярные величины ($\rho_\xi, e_\xi, P_\xi, S_{xx\xi}, S_{yy\xi}, S_{xy\xi}$) — в центрах ячеек. Кроме того, некоторые вещества могут описываться с помощью частиц, которые характеризуются объемом V_p , номером компонента ξ_p , а также всеми параметрами среды, кроме скорости. Величины, заданные для частицы, отнесены к центру частицы, определяемому его координатами.

Частицы целесообразно задавать в компонентах среды, для которых погрешности, связанные с решением уравнения адвекции, наиболее ощутимы, или в веществах, которые требуют хранения истории поведения лагранжевой частицы. Такая возможность предусмотрена в методике ЭГАК при реализации МДЧ [14, 15]. Ниже дано краткое описание этого метода в приложении к упругопластическим течениям.

Лагранжев этап.

Определение ускорений. Так как у частиц нет индивидуальных скоростей (новые координаты частиц вычисляются билинейной интерполяцией по узлам сетки на этапе лагранжевой газодинамики), этот этап для МДЧ сводится к пересчету напряжений с частиц на ячейки:

$$S_{xx\xi} = \frac{\sum_p S_{xx\xi_p} V_{\xi_p}}{V_\xi}; \quad S_{xy\xi} = \frac{\sum_p S_{xy\xi_p} V_{\xi_p}}{V_\xi}; \quad S_{yy\xi} = \frac{\sum_p S_{yy\xi_p} V_{\xi_p}}{V_\xi},$$

где V_ξ — объем компонента ξ в ячейке.

Далее расчет приращений скорости за счет тензора напряжений осуществляется по стандартной схеме методики ЭГАК (см. [16]).

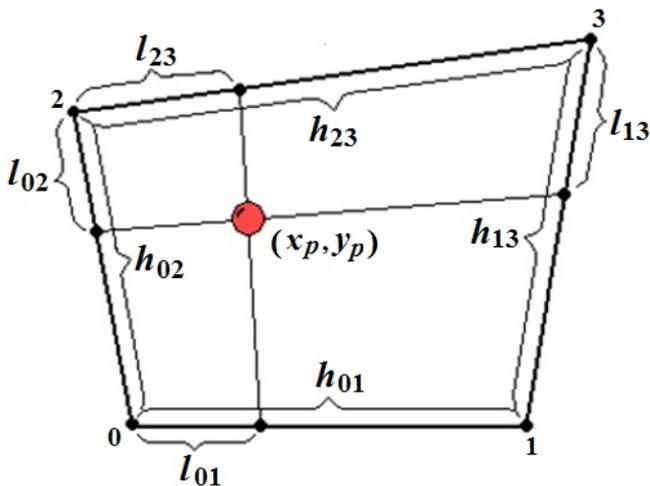


Рис. 1. Определение координат частицы по координатам узлов ячейки

Решение уравнений лагранжевой газодинамики. При наличии упругопластики на данном подэтапе ничего нового по сравнению с описанным в [14, 15] не добавляется. Тем не менее для полноты изложения дадим краткое описание этого подэтапа.

Полагается, что на лагранжевом этапе частицы движутся вместе с ячейкой и внутри ячейки, не выходя за ее границу. Новые координаты частицы определяются билинейной интерполяцией по координатам узлов ячейки в предположении о сохранении положения частицы относительно узлов при деформации ячейки на данном этапе вычислений. Таким образом, требуется, чтобы $\lambda_x^{n+1} = \lambda_x^n, \lambda_y^{n+1} = \lambda_y^n$, где $\lambda_x = \frac{l_{01}}{h_{01}} = \frac{l_{23}}{h_{23}}, \lambda_y = \frac{l_{02}}{h_{02}} = \frac{l_{13}}{h_{13}}$ (рис. 1).

При определении термодинамических величин для частиц полагаем, что относительные приращения плотности и энергии для них равны соответствующим относительным приращениям этих величин, вычисленным для соответствующего компонента в среднем для ячейки. Отсюда следуют формулы

$$\rho_{\xi_p}^{n+1/2} = \rho_{\xi_p}^n + \frac{\rho_{\xi}^{n+1/2} - \rho_{\xi}^n}{\rho_{\xi}^n} \rho_{\xi_p}^n; \quad e_{\xi_p}^{n+1/2} = e_{\xi_p}^n + \left(e_{\xi}^{n+1/2} - e_{\xi}^n \right); \quad V_{\xi_p}^{n+1/2} = V_{\xi_p}^n \frac{V_{\xi_p}^{n+1/2}}{V_{\xi}^n}, \quad (7)$$

где индекс $n + 1/2$ означает, что величина получена на лагранжевом этапе вычислений.

При использовании формул (7) суммарные массы частиц не изменяются, а суммарные внутренние энергии частиц равны энергии, рассчитанной для данного компонента в целом.

Определение новых значений компонент девиатора напряжений. На третьем подэтапе сначала по стандартной методике [16] определяются приращения компонент S_{ij} (i и j принимают значения x и y) девиатора напряжений для каждого вещества ξ в рассматриваемой ячейке и удельных внутренних энергий:

$$\delta S_{ij\xi} = S_{ij\xi}^{n+1} - S_{ij\xi}^n; \quad \delta e_{\xi} = e_{\xi}^{n+1} - e_{\xi}^n.$$

Затем производится пересчет полученных при этом величин с ячеек на частицы по следующим формулам:

$$S_{xx\xi_p}^{n+1/2} = S_{xx\xi_p}^n + \delta S_{xx\xi}; \quad S_{xy\xi_p}^{n+1/2} = S_{xy\xi_p}^n + \delta S_{xy\xi}; \quad S_{yy\xi_p}^{n+1/2} = S_{yy\xi_p}^n + \delta S_{yy\xi}; \quad e_{\xi_p}^{n+1/2} = e_{\xi_p}^n + \delta e_{\xi}.$$

На этом этапе рассчитывается также кинетика разрушений веществ в частицах (см. далее). Определяются изменения указанных и дополнительных величин, вводимых для корректного учета разрушения.

Эйлеров этап. Основные трудности при реализации метода частиц связаны с эйлеровым этапом, а именно с расчетом потоков массы из ячейки в ячейку и связанных с ними величин, определенных на единицу массы, в частности внутренней энергии и компонент девиатора напряжений. В классическом методе частиц Харлоу при переходе частицы в соседнюю ячейку все ее параметры "переходят" вместе с ней. В связи с дискретным (и соответственно немонотонным) характером переноса всех величин этому методу свойственна большая немонотонность профилей величин.

В МДЧ используется алгоритм монотонизации классического метода частиц [2]. Рассмотрим идею этого алгоритма в одномерном случае.

На рис. 2 показаны две счетные ячейки, в которых расставлены частицы, обозначенные точками. Штриховыми отрезками обозначены воображаемые границы объемов, занимаемых частицами. При вычислениях необходимы лишь численные значения объемов, а их конфигурации не хранятся. Поток вещества направлен слева направо в соответствии с указанной скоростью движения $\mathbf{u} = U_x$. Тогда вытекающий из ячейки слева поток вещества объемом ΔV (далее будем использовать термин *поток объема*, на рис. 2 выделен голубым цветом) равен произведению длины поперечного ребра ячейки L на $u_x \tau$, т. е. $\Delta V = Lu_x \tau$.

Причиной немонотонности классического метода частиц является несовпадение реального значения потока объема ΔV с объемом частицы, переходящей через граничное ребро ячейки. В одном случае (см. рис. 2 сверху) из ячейки слева перемещается объем, меньший объема частицы, в другом (см. рис. 2 снизу) — больший объема частицы. Введем обозначение $\delta V = \Delta V - V_p$, где V_p — объем частицы с номером p , переходящей из одной ячейки в другую, и рассмотрим оба этих случая.

Поток объема меньше объема переходящей частицы ($\delta V < 0$). В этом случае частица, перешедшая из донорной ячейки в акцепторную, делится на две части — материнскую и дочернюю. Материнская частица переходит в акцепторную ячейку, приобретая ее координаты (в соответствии с ее скоростью) и объем, равный вытекающему из донорной ячейки объему ΔV . Дочерняя частица получает объем, равный разности объема первоначальной частицы и потока объема ΔV , и

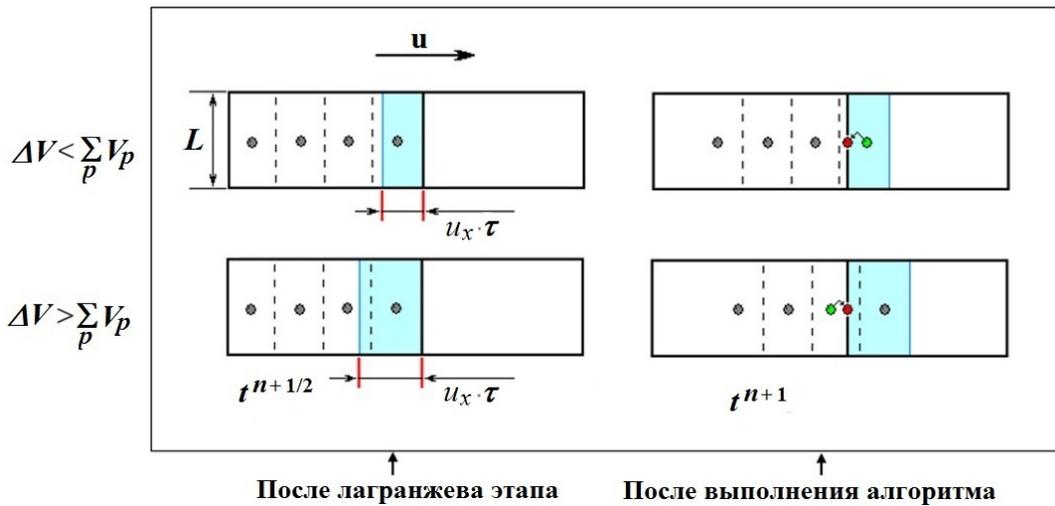


Рис. 2. Иллюстрация к расчету потока в одномерном случае (материнские частицы — зеленые, дочерние — красные)

помещается в донорную ячейку, приобретая координаты на общем ребре донорной и акцепторной ячеек.

Поток объема больше объема переходящей частицы ($\delta V > 0$). В этом случае необходимо восполнить недостаток объема переходящей частицы за счет принудительного перемещения некоторых частиц или фрагментов частиц из донорной ячейки в акцепторную. Таким образом, дробится ближайшая к общему ребру этих ячеек частица из непереходящих в акцепторную ячейку. Она порождает дочернюю частицу с объемом, равным разности объемов δV , которая помещается в акцепторную ячейку с координатами на общем ребре донорной и акцепторной ячеек.

При перемещении из ячейки в ячейку сразу нескольких частиц суммирование объема ведется по всем перешедшим частицам. В этом случае частицы будут делиться по очереди в порядке увеличения расстояния от частицы до смежного ребра.

Особенности реализации метода в многомерном случае приводятся в работах [14, 15].

При дроблении частиц выполняются следующие правила:

- термодинамическое состояние делящейся частицы дублируется в обеих частицах (тем самым обеспечивается выполнение законов сохранения массы, энергии и др.); в случае упругопластичности к этим величинам добавляются компоненты девиатора напряжений;
- для дочерней частицы запоминается номер материнской частицы, который одновременно служит признаком наличия у данной частицы материнской;
- у материнской частицы ни признака наличия дочерних частиц, ни их номеров не содержится;
- у одной материнской частицы может быть несколько дочерних частиц;
- у дочерней частицы может быть только одна материнская частица.

Разработана также процедура объединения частиц. Данная процедура необходима для предотвращения бесконтрольного роста количества частиц при их дроблении. Две частицы одного и того же вещества, находящиеся в пределах одной ячейки, подлежат объединению, если выполняется один из следующих критериев:

- одна из частиц является дочерней по отношению к другой;
- две дочерние частицы имеют одну и ту же материнскую частицу;
- одна из частиц имеет относительно малый объем.

При большом количестве частиц в ячейке предусмотрены механизмы объединения частиц, относящихся к одному и тому же веществу, независимо от их типа.

Эйлеров этап завершается пересчетом величин с частиц на содержащие их ячейки, что необходимо для реализации возможности аппроксимации уравнений без применения частиц. Соответствующие формулы имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \rho_{\xi}^{n+1} &= \frac{\sum_p \rho_{\xi p} V_{\xi p}}{\sum_p V_{\xi p}}; & e_{\xi}^{n+1} &= \frac{\sum_p e_{\xi p} \rho_{\xi p} V_{\xi p}}{\sum_p \rho_{\xi p} V_{\xi p}}; \\ S_{xx\xi}^{n+1} &= \frac{\sum_p S_{xx\xi p} V_{\xi p}}{\sum_p V_{\xi p}}; & S_{xy\xi}^{n+1} &= \frac{\sum_p S_{xy\xi p} V_{\xi p}}{\sum_p V_{\xi p}}; & S_{yy\xi}^{n+1} &= \frac{\sum_p S_{yy\xi p} V_{\xi p}}{\sum_p V_{\xi p}}, \end{aligned}$$

где суммирование ведется по всем частицам компонента ξ в рассматриваемой ячейке.

Две континуальные модели разрушения

Континуальный кинетический подход описывает разрушение как процесс накопления повреждений в элементе вещества. Так как частица представляет собой лагранжев элемент среды, то в ней удобно хранить информацию об истории процессов, в данном случае о поврежденности вещества. В рамках этого подхода ниже рассматриваются две модели разрушения, реализованные в методике ЭГАК.

В рассматриваемом случае мера поврежденности вещества ω определяется по формуле

$$\omega = 1 - \frac{\rho}{\rho_c},$$

где ρ — плотность рассматриваемого вещества; ρ_c — плотность сплошного вещества.

В МДЧ при дроблении частиц мера поврежденности, как и другие параметры материнской частицы, переносится в дочерние частицы. При объединении частиц, естественно, вычисляются новые значения поврежденности вещества, определяемые как средневзвешенные по массе частиц.

Модель мгновенного разрушения и компактирования. В рассматриваемой модели по мере поврежденности ω будем выделять следующие состояния материалов [4]:

- $\omega = 0$ — сплошной материал (сопротивляется сжатию и растяжению);
- $0 < \omega < \omega_{кр}$ — поврежденный материал (способность сопротивляться сжатию и растяжению снижается);
- $\omega_{кр} < \omega < \omega_0$ — разрушенный материал (не сопротивляется растяжению);
- $\omega_0 < \omega$ — диспергированный материал (не сопротивляется ни сжатию, ни растяжению).

Здесь $\omega_{кр}$ — критическое значение меры поврежденности; ω_0 — предельное значение меры поврежденности, ниже которого в разрушенном материале появляется прочность.

В простейшей модели мгновенного откола разрушение происходит, если давление сплошного материала $P_c(\omega)$ меньше отрицательного критического значения $P_{отк}$

$$P_c(\omega) < -|P_{отк}|.$$

В разрушенном состоянии давление зануляется, вещество рассчитывается в гидродинамическом приближении, а мера поврежденности ω при заданных плотности ρ и внутренней энергии e определяется из уравнения (см. [16])

$$P_c\left(\frac{\rho}{1-\omega}, e\right) = 0,$$

где $P_c(\rho_c, e)$ — УРС сплошного вещества.

Если поврежденная среда начинает сжиматься, то происходит компактирование. Мера поврежденности определяется из уравнения (см. [16])

$$\omega = \omega_0 \left(1 - \frac{P}{P_k}\right)^2,$$

где P_k — давление компактирования.

Модель Канеля. Модель Канеля и др. [18] является кинетической. В ней для учета развития микроповреждений вводится уравнение, описывающее изменение удельного объема микротрещин $V_T = \omega/\rho$:

$$\frac{\partial V_T}{\partial t} = \begin{cases} 0 & \text{при } P \geq P_k \frac{V_1}{V_1 + V_T} \text{ или } \left(P < -P_k \frac{V_1}{V_1 + V_T} \text{ и } V_T = 0 \right); \\ K_4 \operatorname{sign}(P) \left(|P| - P_k \frac{V_1}{V_1 + V_T} \right) (V_2 + V_T) & \text{при } P < P_k \frac{V_1}{V_1 + V_T} \text{ или } \left(P > -P_k \frac{V_1}{V_1 + V_T} \text{ и } V_T = 0 \right), \end{cases}$$

где P — максимальное нормальное напряжение; V_1, V_2, K_4, P_k — константы материала.

Среднее давление в среде определяется как

$$P = P_c \frac{\rho}{\rho_c} = P_c(1 - \omega),$$

где ρ_c — плотность твердого компонента среды.

Модуль сдвига G и динамический предел текучести Y полагаются зависящими от достигнутого уровня повреждений:

$$G = G_0 \frac{V_3}{V_3 + V_T}; \quad Y = \begin{cases} Y_0 \left(1 - \frac{V_T}{V_4}\right), & \text{если } V_T < V_4; \\ 0, & \text{если } V_T \geq V_4, \end{cases}$$

где V_3, V_4 — константы материала. Разрушенные вещества считаются в гидродинамическом приближении.

Уравнения состояния. В данной работе для непористых (неразрушенных) веществ использовался УРС в форме Ми–Грюнайзена:

$$P = \frac{\rho_0 c_0^2}{n} \left[\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^n - 1 \right] + (\gamma - 1)\rho e, \quad (8)$$

где $\rho_0, c_0, n, \gamma - 1$ — параметры УРСа.

Тестирование метода

Растяжение плоского слоя. Одномерная задача об адиабатическом сжатии и растяжении плоского слоя. В начальный момент времени в одномерной области $0 \leq x \leq L_0$ ($L_0 = 2$ см) задан слой вещества с линейным профилем скорости $U = U_0 x/L_0$, где $U_0 = -1$ км/с. В момент t_1 скорость меняет знак.

Расчеты проведены для трех начальных состояний вещества: 1 — поврежденного, 2 — разрушенного, 3 — диспергированного (табл. 1) с использованием УРСа (8). Параметры модели компактирования приведены в табл. 2.

Вязкость полагалась равной нулю. Расчеты проводились на сетке с шагом $h = 0,05$ см. Задача рассчитывалась в двух постановках: лагранжевой и эйлеровой. Заметим, что в лагранжевых переменных эйлеров этап вычислений отсутствует и соответственно отсутствует погрешность, связанная с этим этапом.

Таблица 1

Растяжение плоского слоя. Параметры расчетов для трех начальных состояний вещества

Номер состояния	ρ , г/см ³	E , кДж/г	ω	t_1 , 10 ⁻⁵ с
1	17,101	0,003	0,1	0,1
2	15,2	0,003788	0,2	0,25
3	11,98	0,0042	0,3702	0,35

Таблица 2

Растяжение плоского слоя. Параметры УРСа и уравнения компактирования

ρ_0 , г/см ³	c_0 , км/с	n	Γ	$\omega_{кр}$	ω_0	P_k , ГПа
19,05	2,62	4,1	2,2	0,15	0,333	1,5

Для случая лагранжева расчета рассматривался один физический компонент, для эйлерова расчета на правой границе было добавлено несколько ячеек вакуума.

Результаты расчетов в виде зависимостей $\omega(t)$ показаны на рис. 3.

В табл. 3 представлены максимальные относительные отклонения ω от точного решения $|\omega_p - \omega_T|_{max}/\omega$, где ω_p — расчетное значение, ω_T — точное значение.

Для состояния 3 в эйлеровых переменных были проведены расчеты на сходимость (табл. 4).

Как видно из табл. 3 и рис. 3, расчеты в лагранжевых и эйлеровых переменных с использованием МДЧ дают близкие результаты, имеющие малое отклонение от точного решения при сохранении монотонности решения. Имеется сходимость численного решения к точному при уменьшении шага сетки (см. табл. 4).

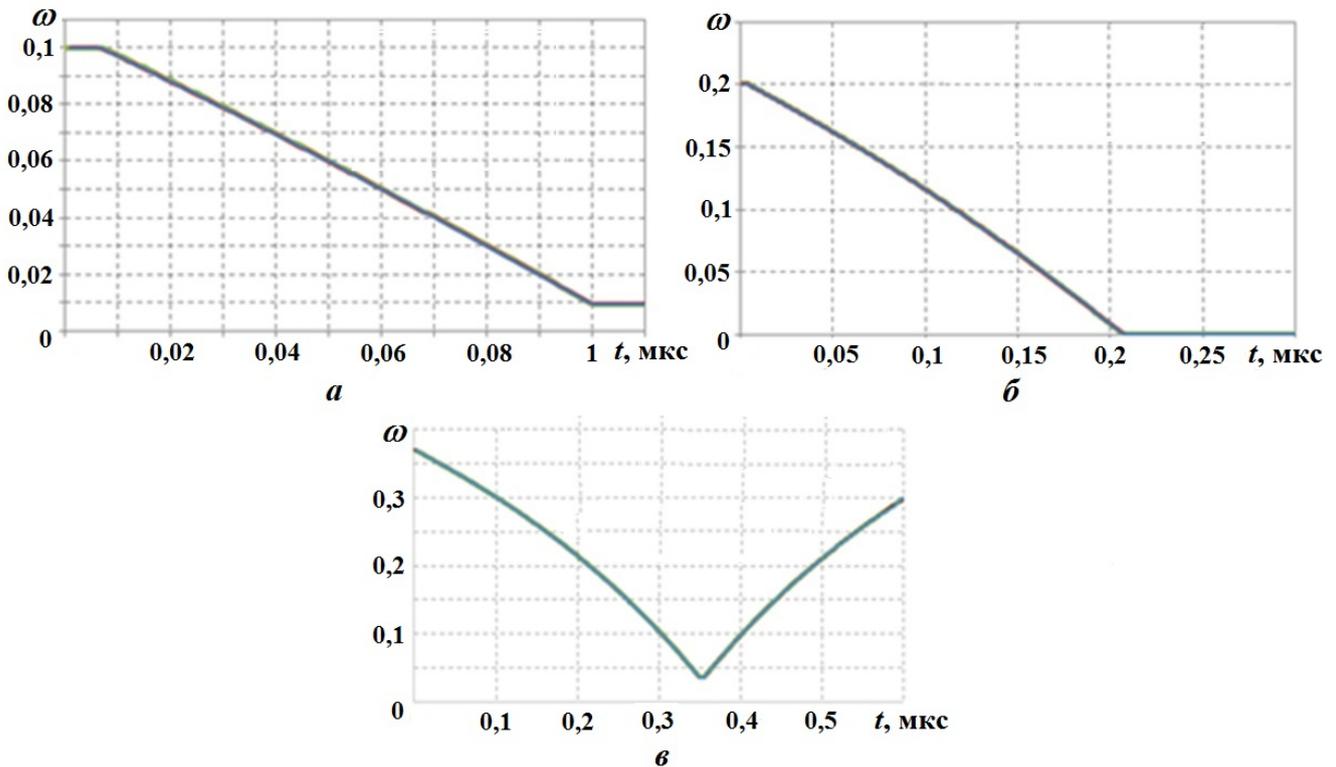


Рис. 3. Растяжение плоского слоя. Расчетные зависимости поврежденности от времени: *a* — для состояния 1; *б* — для состояния 2; *в* — для состояния 3; — точное решение; — лагранжев расчет; — эйлеров расчет

Таблица 3

Растяжение плоского слоя. Максимальные относительные отклонения ω от точного решения

Номер состояния	Лагранжев расчет	Эйлеров расчет
1	$1,43 \cdot 10^{-2}$	$1,43 \cdot 10^{-2}$
2	$1,32 \cdot 10^{-2}$	$1,07 \cdot 10^{-2}$
3	$1,76 \cdot 10^{-3}$	$5,63 \cdot 10^{-3}$

Таблица 4

Растяжение плоского слоя. Максимальные относительные отклонения ω от точного решения в зависимости от шага сетки

h , см	0,05	0,025	0,125
Отклонение ω	$5,63 \cdot 10^{-3}$	$2,28 \cdot 10^{-3}$	$1,87 \cdot 10^{-3}$

Соударение медных пластин. Задача плоская одномерная [19]. В области $0 \leq x \leq 9$ мм размещается медная пластина с нулевой скоростью (мишень). Вторая пластина (ударник), изначально расположенная в области $-2 \text{ мм} \leq x \leq 0$, налетает на мишень со скоростью U , которая в расчетах варьируется. За внешними границами пластин $x < -2$ мм и $x > 9$ мм — вакуум.

Расчеты проводились с использованием модели Канеля и др. Для сравнения также был проведен расчет данной задачи без МДЧ по стандартным схемам методики ЭГАК с использованием той же модели [20].

В табл. 5 приводятся константы модели Канеля, УРС (8) использовался с константами $c_0 = 4,6$ км/с; $n = 4$; $\gamma - 1 = 1,66$; $\rho_0 = 8,92$ г/см³ [6].

Счетная сетка — квадратная с шагом $h = 0,01$ см. В расчетах МДЧ на момент времени $t = 0$ бралось по одной частице в ячейке, содержащей разрушаемое вещество.

Проведены расчеты со скоростями соударения 300, 500, 1000 м/с. Зависимости меры поврежденности частиц мишени от их координат на момент времени $t = 5$ мкс представлены на рис. 4. Для скорости $U = 500$ м/с на рис. 4, б также показаны профили меры поврежденности в зависимости от начального количества частиц в ячейке. Видно, что толщина откольного слоя не зависит от числа частиц в ячейке. Таким образом, по толщине откольного слоя расчеты дают одинаковые результаты.

Для скорости $U = 500$ м/с проведены расчеты с одной частицей в ячейке с вариацией счетной сетки: $h = 0,01, 0,005$ и $0,0025$ см. На рис. 5 приводятся зависимости поврежденности мишени от координат частиц на момент времени $t = 5$ мкс.

Видно, что для МДЧ наблюдается сходимость расчетной поврежденности к некоторому решению при уменьшении шага сетки. При этом при измельчении сетки улучшается монотонность решения.

Таблица 5

Константы модели Канеля для меди

ρ_0 , г/см ³	Y_0 , ГПа	G_0 , ГПа	K_4 м·с/кг	P_k , ГПа	V_1 , 10^{-3} см ³ /г	V_2 , 10^{-3} см ³ /г	V_3 , 10^{-3} см ³ /г	V_4 , 10^{-3} см ³ /г
8,92	0,7	63,0	0,07	2,0	5,47	3,65	7,3	1,2

Соударение сферы с преградой. Постановка этой двумерной цилиндрической задачи взята из работы [21], в которой она исследовалась как экспериментально, так и численно. В работе [20] задача была исследована численно по методике ЭГАК.

Стальная сфера (ударник) радиусом $R = 3,175$ мм с начальной скоростью $U_x = 4,57$ км/с пробивает пластиковую преграду толщиной $L = 3,38$ мм (рис. 6).

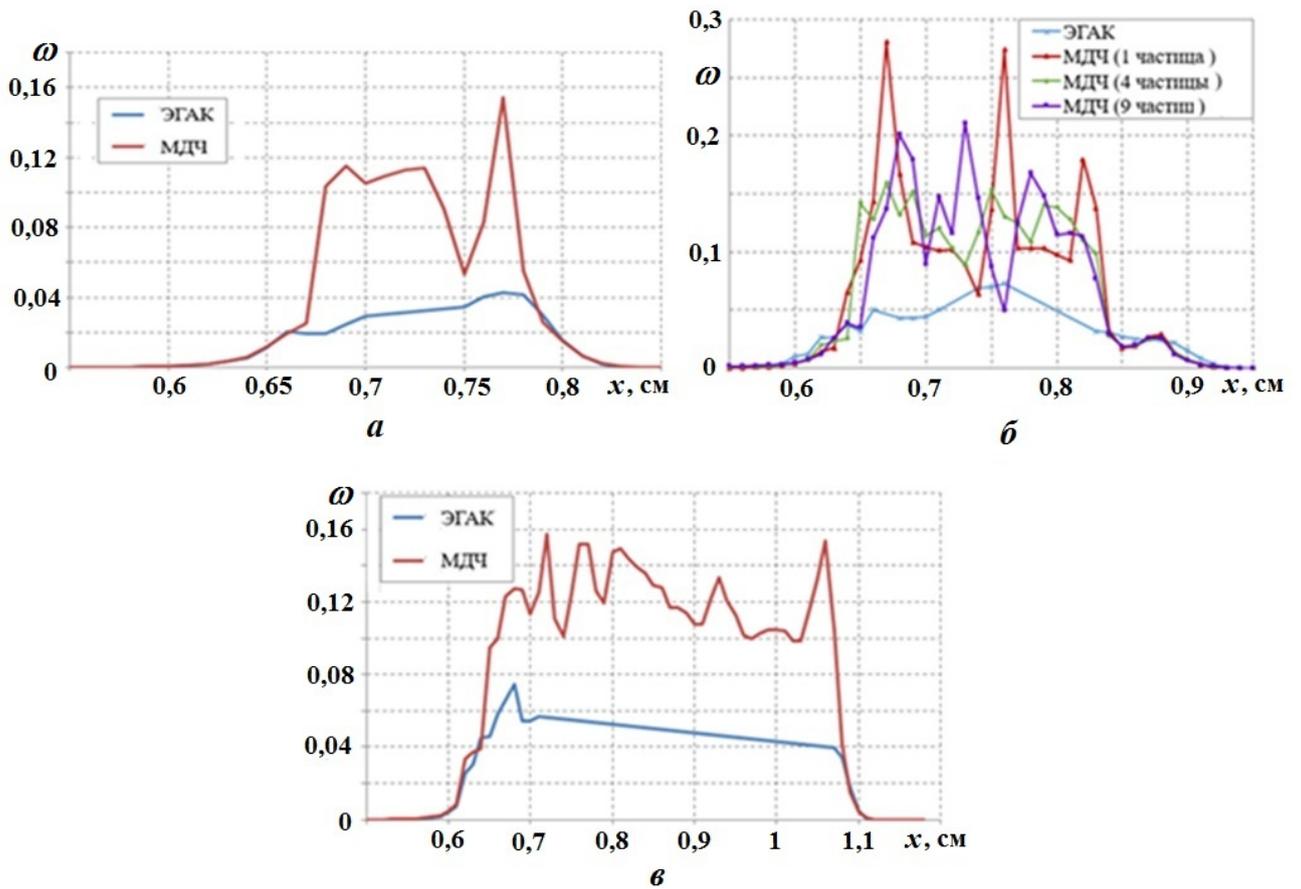


Рис. 4. Соударение медных пластин. Зависимости поврежденности мишени от координат частиц: *а* — $U = 300$ м/с (одна частица в ячейке); *б* — $U = 500$ м/с (разное количество частиц в ячейке); *в* — $U = 1000$ м/с (одна частица в ячейке)

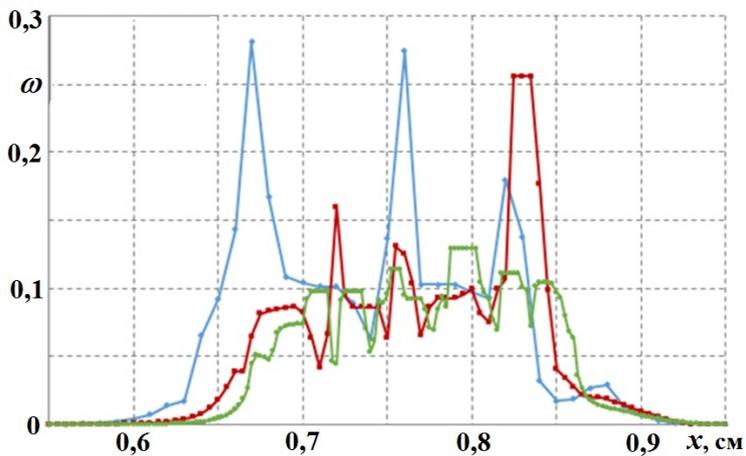


Рис. 5. Соударение медных пластин. Зависимости поврежденности мишени от координат частиц при $U = 500$ м/с для сетки с разными h (одна частица в ячейке): —•— $h = 0,01$; —•— $h = 0,005$; —•— $h = 0,0025$

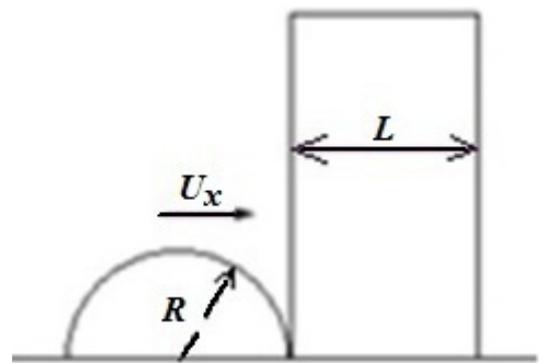


Рис. 6. Начальная геометрия задачи о соударении сферы с преградой

Расчеты проводились на неподвижной квадратной сетке с $h = 0,013$ см. Вещества описывались УРСом (8) с параметрами из табл. 6. Параметры для модели Канеля приведены в табл. 7. В расчете с использованием МДЧ задавалась одна частица в ячейке.

Таблица 6

Параметры УРСа и упругопластические свойства для преграды и ударника

Вещество	$\rho_0, \text{г/см}^3$	$c_0, \text{км/с}$	n	$\gamma - 1$	$Y, \text{ГПа}$	ν
Пластик	1,186	2,598	3	0,97	0,2	0,32
Сталь	7,850	4,6	3	2,17	2,0	0,29

Таблица 7

Параметры модели Канеля для преграды и ударника

Вещество	$\rho_0, \text{г/см}^3$	$K_4, \text{см} \cdot 10 \text{ мкс} / \text{г}$	$P_k, \text{г} / (\text{см} \cdot 10 \text{ мкс})$	$V_1, \text{см}^3 / \text{г}$	$V_2, \text{см}^3 / \text{г}$	$V_3, \text{см}^3 / \text{г}$	$V_4, \text{см}^3 / \text{г}$
Пластик	1,186	500	0,15	0,0049	0,00032	0,000657	0,0085
Сталь	7,850	540	1,5	0,0092	0,00057	0,0016	0,001

В экспериментах исследовался спектральный состав по размерам фрагментов разрушенного ударника. Для получения аналогичной информации в расчетах (рис. 7) была использована модель Грэйди [20]. Масса и число осколков суммировались по размеру фрагментов на отрезке длиной 1 см, равномерно разбитом на 264 интервала длиной 0,0038 см. Размер осколков рассчитывался по формуле

$$s = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{180} K_C}{\rho_0 c_0 \text{div} \mathbf{u}_\xi} \right)^{2/3}. \quad (9)$$

В формуле (9) вязкость разрушения K_C бралась равной 0,3 ГПа·см^{1/2} для модели мгновенного разрушения и 0,35 ГПа·см^{1/2} для модели Канеля.

В табл. 8 приводятся размеры осколков, имеющих максимальную массу $m(s)$, в сравнении с расчетными данными ЭГАК (осколки представляются в форме кубиков).

Из табл. 8 видно, что расчеты с использованием МДЧ несколько лучше согласуются с экспериментом по размеру осколков максимальной массы, чем без него.

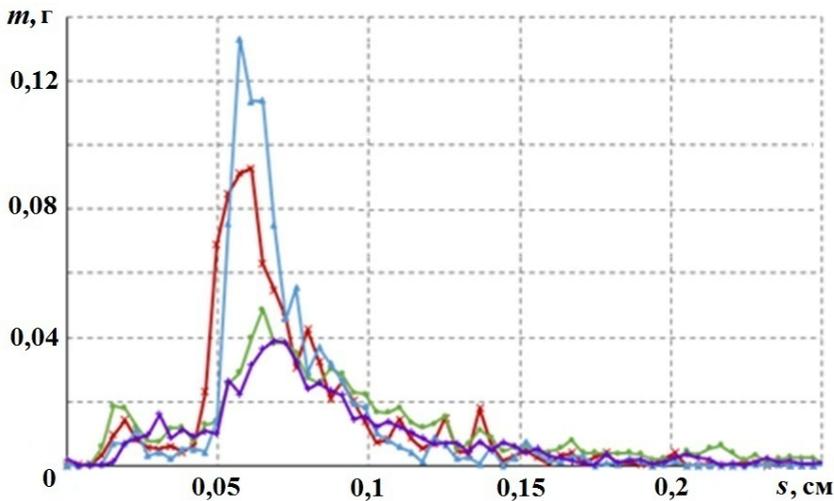


Рис. 7. Соударение сферы с преградой. Распределение массы осколков ударника по размерам: — \times — ЭГАК, мгновенное разрушение; — \bullet — МДЧ, мгновенное разрушение; — \blacktriangle — ЭГАК, модель Канеля; — \blacklozenge — МДЧ, модель Канеля

Соударение сферы с преградой. Размеры осколков (в см) максимальной массы

Эксперимент	Мгновенное разрушение		Модель Канеля	
	ЭГАК	МДЧ	ЭГАК	МДЧ
0,076	0,063	0,070	0,059	0,067

Заключение

В работе описаны основные алгоритмы монотонного МДЧ для моделирования двумерных упругопластических течений, реализованного в рамках лагранжево-эйлеровой методики ЭГАК. Метод сохраняет достоинства классического метода частиц (минимизация погрешности эйлеровых методов при решении уравнения адвекции) при обеспечении монотонности решения. На его основе реализованы две модели разрушения: модель Канеля и модель мгновенного разрушения и компактирования. Применимость метода проверена на двух одномерных и одной двумерной тестовых задачах.

Проведенное в работе исследование показало эффективность МДЧ при моделировании процессов разрушения и компактирования материалов в эйлеровых переменных.

Авторы выражают благодарность Ю. Е. Дудник и А. В. Городничеву за помощь в постановке тестовых задач.

Список литературы

1. *Hirt C. W., Nicols B. D.* Volume of Fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries // *J. Comp. Phys.* 1981. Vol. 39. P. 201–225.
2. *Бахрах С. М., Глаголева Ю. П., Самигулин М. С., Фролов В. Д., Яненко Н. Н., Янилкин Ю. В.* Расчет газодинамических течений на основе метода концентраций // Докл. АН СССР. 1981. Т. 257, № 3. С. 566–569.
Bakhrakh S. M., Glagoleva Yu. P., Samigulin M. S., Frolov V. D. Yanenko N. N., Yanilkin Yu. V. Raschet gazodinamicheskikh techeniy na osnove metoda kontsentratsiy // Dokl. AN SSSR. 1981. T. 257, № 3. S. 566–569.
3. *Харлоу Ф. Х.* Численные методы частиц в ячейках для задач газодинамики // Вычислительные методы в газодинамике. М.: Мир, 1967. С. 316–342.
Kharlou F. Kh. Chislennyye metody chastits v yacheykakh dlya zadach gazodinamiki // Vychislitelnye metody v gazodinamike. M.: Mir, 1967. S. 316–342.
4. *Tskhakaya D., Matyash K., Schneider R., Taccogna F.* The Particle-In-Cell method // *Contributions to Plasma Physics.* 2007. Vol. 47(8–9). P. 563–594.
5. *Shalaby M., Broderick A. E., Chang P., Pfrommer C., Lamberts A., Puchwein E.* SHARP: A spatially higher-order, relativistic Particle-in-Cell code // *Astrophysical J.* 2017. Vol. 841(1). P. 52.
6. *Jiang C., Schroeder C., Selle A., Teran J., Stomakhin A.* The affine Particle-In-Cell method // *ACM Trans. Graph.* 2015. Vol. 34. P. 4.
7. *Богомолов С. В., Звенков Д. С.* Явный метод частиц, не сглаживающий газодинамические разрывы. Математическое моделирование. 2007. Т. 19:3. С. 74–86.
Bogomolov S. V., Zvenkov D. S. Yavnyy metod chastits, ne sglazhivayushchiy gazodinamicheskie razryvy. Matematicheskoe modelirovanie. 2007. T. 19:3. S. 74–86.
8. *Jiang C., Schroeder C., Teran J.* An angular momentum conserving affine Particle-In-Cell method // *J. Comp. Phys.* 2017. Vol. 338. P. 137–164.
9. *Fu C., Guo Q., Gast T., et al.* A polynomial Particle-In-Cell method // *ACM Trans. Graph.* 2017. Vol. 36. P. 222:1–222:12.

10. *Grigoryev Yu. N., Vshivkov V. A., Fedoruk M. P.* Numerical Particle-In-Cell methods. Theory and Applications. Utrecht, Boston, 2002.
11. *Lapenta G., Brackbill J. U.* Dynamic and selective control of the number of particles in kinetic plasma simulations // *J. Comp. Phys.* 1994. Vol. 115. P. 213–217.
12. *Welch D. R., Genoni T. C., Clark R. E., Rose D. V.* Adaptive particle management in a Particle-In-Cell code // *Ibid.* 2007. Vol. 227. P. 143–155.
13. *Сапожников Г. А.* Комбинированный метод потоков и частиц в ячейках для расчетов газодинамических течений // *Вопросы разработки и эксплуатации пакетов прикладных программ.* Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1981. С. 89–97.
Sapozhnikov G. A. Kombinirovannyuy metod potokov i chastits v yacheykakh dlya raschyetov gazodinamicheskikh techeniy // *Voprosy razrabotki i ekspluatatsii paketov prikladnykh programm.* Novosibirsk: ITPM SO AN SSSR, 1981. S. 89–97.
14. *Янилкин Ю. В., Шмелёв В. А., Колобянин В. Ю., Беляев С. П.* Монотонный метод частиц для моделирования двумерных газодинамических течений // *Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов.* 2012. Вып. 3. С. 3–14.
Yanilkin Yu. V., Shmelyev V. A., Kolobyenin V. Yu., Belyaev S. P. Monotonnyuy metod chastits dlya modelirovaniya dvumernykh gazodinamicheskikh techeniy // *Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov.* 2012. Vyp. 3. S. 3–14.
15. *Yanilkin Y., Shmelev V., Kolobyenin V.* A monotonic Method of Split Particles // *Recent Advances in Numerical Simulations* / Ed. F. Bulnes, P. Hessling. London: INTECH, 2021. P. 43–60.
16. *Янилкин Ю. В., Шанин А. А., Ковалев Н. П. и др.* Методика ЭГАК для расчетов двумерных течений многокомпонентной среды // *Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов.* 1993. Вып. 4. С. 69–75.
Yanilkin Yu. V., Shanin A. A., Kovalyev N. P. i dr. Metodika EGAK dlya raschyetov dvumernykh techeniy mnogokomponentnoy sredy // *Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov.* 1993. Vyp. 4. S. 69–75.
17. *Огородников В. А., Садовой А. А., Софронов В. Н., Козлова Т. А., Ерунов С. В., Михайлов С. В.* Кинетическая модель пластического разрушения с учетом диссипативных процессов // *Химическая физика.* 2002. Т. 21, № 9. С. 104–109.
Ogorodnikov V. A., Sadovoy A. A., Sofronov V. N., Kozlova T. A., Erunov S. V., Mikhaylov S. V. Kineticheskaya model plasticheskogo razrusheniya s uchetom dissipativnykh protsessov // *Khimicheskaya fizika.* 2002. T. 21, № 9. S. 104–109.
18. *Канель Г. И., Сугак С. Г., Фортвов В. Е.* О моделях откольного разрушения // *Проблемы прочности.* 1983. № 8. С. 40–44.
Kanel G. I., Sugak S. G., Fortov V. E. O modelyakh otkolnogo razrusheniya // *Problemy prochnosti.* 1983. № 8. S. 40–44.
19. *Волков И. А.* Численный анализ откольного разрушения медных пластин при ударном деформировании. Упругость // *Прикладная механика и техническая физика.* 1993. № 2. С. 19–24.
Volkov I. A. Chislennyuy analiz otkolnogo razrusheniya mednykh plastin pri udarnom deformirovanii. Uprugost // *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika.* 1993. № 2. S. 19–24.
20. *Yanilkin Yu. V., Gorodnichev A. V., Simonov G. P., Ilkaev R. I.* EGAK-EP method for calculations of fracture and fragmentation of materials // *Proc. Workshop "New Models and Numerical Codes for Shock Wave Processes in Condensed Media".* Oxford, 1997. P. 610–622.
21. *Kipp M. E., Grady D. E., Swegle J. W.* Experimental and Numerical Studies of High-Velocity Impact Fragmentation. SANDI 93-0773. Report. Sandia National Laboratories, 1993.