

ISSN 2414-0171

ВОПРОСЫ
АТОМНОЙ
НАУКИ И
ТЕХНИКИ

Российский
федеральный
ядерный
центр –
ВНИИЭФ

СЕРИЯ

**Математическое моделирование
физических процессов**

2023

ВЫПУСК 2

Главный редактор
Шагалиев Р. М.

Заместители главного редактора:
Алексеев А. В., Тишкин В. Ф.

Ответственный секретарь:
Соколовская Е. В.

Члены редколлегии:

Бартенев Ю. Г., Бетелин В. Б., Бочков А. И., Вронский М. А.,
Дрёмов В. В., Залялов Н. Н., Кибзун А. И., Козелков А. С.,
Козманов М. Ю., Куркин А. А., Мартынов А. П., Петров И. Б.,
Прилуцкий М. Х., Смирнов Н. Н., Соколов С. С., Старостин Н. В.,
Степаненко С. А., Храмченков М. Г., Четверушкин Б. Н.,
Шестаков А. А., Янилкин Ю. В.

Адрес редакции и издателя: 607188,
г. Саров Нижегородской обл., пр. Мира, 37
тел.: (83130)28406, *e-mail*: sokol@vniief.ru.
Адрес сайта журнала: <http://vant.vniief.ru/>

ВОПРОСЫ АТОМНОЙ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СЕРИЯ

Математическое моделирование физических процессов

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ СБОРНИК

ВЫПУСК 2

Саров — 2023

Издается с 1978 г.

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Шмелёв В. А., Чердниченко И. Е., Янилкин Ю. В.</i> Монотонный метод дробных частиц для двумерных упругопластических течений	3
<i>Абузяров М. Х., Глазова Е. Г., Кочетков А. В., Крылов С. В., Лисицын А. А., Модин И. А.</i> Численное решение трехмерных задач ударного взаимодействия упругопластических тел в эйлеровых переменных на базе модифицированной схемы Годунова	16
<i>Мжачих С. В., Колобянина Н. В., Лапшина Ю. Н.</i> Аппроксимация данных гистограммы методом условной минимизации длины кубического сплайна класса C^1 , обладающего свойствами неотрицательности и локальной монотонности. Часть 1.	30
<i>Ерофеев А. М., Сизов Е. А., Турутина И. Ю., Чистякова И. Н.</i> Адаптация методики ЭГАК к счету на гибридных ЭВМ с графическими ускорителями	45
<i>Ямщиков В. М.</i> Создание однородного потока лазерного излучения пикосекундной длительности на внутренней поверхности мишени с обращенной короной с помощью отражателя расчетной формы	59
<i>Евстифеева Е. О.</i> Исправление пересечений в поверхностных треугольных сетках в препроцессоре пакета программ "Логос" при подготовке задач аэро- и гидродинамики	65
<i>Шубин В. В.</i> Магистральные защищенные волоконно-оптические системы передачи	77
Сведения об авторах	87

C O N T E N T S

<i>Shmelyev V. A., Cherednichenko I. E., Yanilkin Yu. V.</i> The monotone method of fractional particles for two-dimensional elastoplastic flows	3
<i>Abuzyarov M. Kh., Glazova E. G., Kochetkov A. V., Krylov S. V., Lisitsyn A. A., Modin I. A.</i> Numerical solution of three-dimensional problems of impact interaction of elastoplastic bodies in Eulerian variables on the basis of modified Godunov scheme	16
<i>Mzhachikh S. V., Kolobyanina N. V., Lapshina Yu. N.</i> The histogram data approximation with the conditional minimization method for the length of the cubic C^1 -class spline with the non-negativeness and local monotonicity properties. Part 1.	30
<i>Erofeev A. M., Sizov E. A., Turutina I. Yu., Chistyakova I. N.</i> The EGAK code adaptation to computations on hybrid computers with graphic accelerators	45
<i>Yamshchikov V. M.</i> Creation of a uniform laser radiation flow of picosecond duration on the inner surface of the target with inverse corona using the design-form reflector	59
<i>Evsitfeeva E. O.</i> Correction of overlaps in surface triangular meshes in the "Logos" software package preprocessor during preparation of aero- and hydrodynamics problems	65
<i>Shubin V. V.</i> Trunk secured fiber-optic transmission systems	77
Information about authors	88

Ответственный за выпуск Е. В. Соколовская

Редактор	Е. Н. Старченко	Корректоры	Т. А. Меркушева Е. А. Окатьева А. В. Федоренко
----------	-----------------	------------	--

Дата выхода в свет	25.06.2023	Формат	60×84/8
Усл. печ. л.	~ 11,7	Уч.-изд. л.	~ 9,4
Тираж	1000 экз.	Зак. тип.	1135-2023
			7 статей

Учредитель: ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ"
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-29789 от 04 октября 2007 г.
выдано Роскомнадзором

Оригинал-макет подготовлен
в Математическом отделении ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ"
Отпечатано в ИПЦ ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ"
607188, г. Саров Нижегородской обл., ул. Силкина, 23

УДК 519.6

МОНОТОННЫЙ МЕТОД ДРОБНЫХ ЧАСТИЦ ДЛЯ ДВУМЕРНЫХ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ

В. А. Шмелёв, И. Е. Чередниченко, Ю. В. Янилкин
(ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области)

Описываются основные алгоритмы двумерного монотонного метода дробных частиц для моделирования упругопластических течений в рамках лагранжево-эйлеровой методики ЭГАК. Данный метод призван решить проблему точности аппроксимации уравнений на этапе конвективного переноса для смешанных ячеек, устранив при этом недостаток классического метода частиц, а именно немонотонность решения, вызванную дискретным переносом из ячейки в ячейку массы и связанных с ней величин. На основе монотонного метода дробных частиц реализованы модель мгновенного разрушения и компактирования и модель Канеля. Первая модель протестирована на задаче об адиабатическом сжатии и растяжении плоского слоя, вторая — на задаче о соударении медных пластин, а также обе модели — на задаче о соударении стальной сферы с композитной преградой. Результаты подтверждают, что реализованный метод позволяет улучшить точность описания процессов упругопластического деформирования и разрушения материалов в рамках механики сплошной среды на неподвижных сетках.

Ключевые слова: упругопластическое течение, модель мгновенного разрушения, хрупкий откол, модель Канеля, мера поврежденности, монотонный метод дробных частиц, численное моделирование.

Введение

Корректный расчет многомерного движения многокомпонентной среды является наиболее серьезной проблемой для лагранжево-эйлеровых и эйлеровых методик, особенно в смешанных ячейках в окрестности контактных границ (КГ). Имеются два основных подхода к решению уравнения адвекции для многокомпонентной среды.

Первый подход основан на выделении КГ и определении их положения на каждом счетном шаге. При этом КГ может либо выделяться явным образом, либо восстанавливаться на каждом счетном шаге по полю концентраций. Последний алгоритм положен в основу методов типа VOF [1] (метода концентраций [2]), получивших широкое распространение.

Второй подход связан с применением методов частиц (PIC-метод), или маркеров [3]. В этом случае потоки веществ из смешанных ячеек определяются частицами, с которыми связываются определенные массы веществ.

Оба подхода имеют свои достоинства и недостатки. Достоинства метода частиц определяются лагранжевым представлением частиц и возможностью "привязки" информации о среде к ним. Это позволяет минимизировать погрешности эйлеровых методов, связанные с решением уравнения адвекции. В настоящее время разработан ряд модификаций метода частиц, повышающих его точность и расширяющих области его применения [4–9]. Обзор этих методов представлен в книге [10].

Основным недостатком метода частиц является сильная немонотонность решения, вызванная дискретным переносом массы и величин, связанных с массой, из ячейки в ячейку. Для минимизации соответствующей погрешности приходится использовать большое количество частиц в ячейках, что ограничивает возможности метода, особенно в трехмерном случае. Для борьбы с этим недостатком предложено несколько подходов. Один из подходов предложен в работах [11, 12], в которых

использованы частицы переменной массы. Другой подход основан на использовании частиц лишь в окрестности КГ [13], при этом в остальной части области используется сеточный метод, что позволяет значительно увеличить количество частиц в ячейке. Однако такое выборочное использование частиц не уменьшает погрешность, связанную с решением уравнения адвекции в других частях области, особенно если необходимо рассчитывать течения, в которых требуется учитывать историю того или иного процесса. Подобные процессы легко решаются лишь в лагранжевых переменных для ячеек, в которых не допускается перетекание вещества. К таким процессам относится и кинетика разрушения материалов.

В методике ЭГАК для двумерного случая был разработан монотонный метод дробных частиц* (МДЧ) [14, 15]. Данный метод свободен от основного недостатка метода частиц, а именно немонотонности решения. Монотонизация метода частиц производится путем дробления частицы на две частицы так, чтобы вытекающий из ячейки объем вещества соответствовал объему, получающемуся при вычислении по сеточным схемам методики ЭГАК [16]. При этом параметры материнской частицы переносятся в дочерние частицы. Чтобы не породить бесконечную цепочку дробления, в дальнейшем раздробленные частицы вновь объединяются при условии попадания в одну счетную ячейку. В силу этого для МДЧ не требуется большого количества частиц в ячейке, что позволяет его использовать в большом количестве ячеек области.

В настоящей работе МДЧ обобщен для упругопластических течений. Исследована его точность в приложении к процессам разрушения материалов при хрупком отколе [17] и их компактировании, а также разрушения по модели Канеля и др. [18]. Тестирование метода проведено на нескольких задачах.

Процесс упругопластики

Систему дифференциальных уравнений, описывающую двумерные течения многокомпонентной сплошной среды с учетом прочностных свойств материалов, можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial K_x}{\partial t} + \operatorname{div} K_x \mathbf{u} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial S_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial S_{xy}}{\partial y} + (\alpha - 1) \frac{S_{xy}}{y}; \quad (1)$$

$$\frac{\partial K_y}{\partial t} + \operatorname{div} K_y \mathbf{u} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial S_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial S_{xy}}{\partial x} + (\alpha - 1) \frac{S_{yy} - S_\varphi}{y}; \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho_\xi}{\partial t} + (\operatorname{div} \rho \mathbf{u})_\xi = 0; \quad (3)$$

$$\frac{\partial \rho_\xi e_\xi}{\partial t} + (\operatorname{div} \rho e \mathbf{u})_\xi = -P_\xi (\operatorname{div} \mathbf{u})_\xi + S_{xx\xi} d_{xx} + S_{yy\xi} d_{yy} + S_{\varphi\xi} d_\varphi + 2S_{xy\xi} d_{xy}, \quad (4)$$

где $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$ — скорость (OX — ось симметрии); ρ — плотность; P — давление; e — удельная внутренняя энергия; $K_x = \int_V \rho u_x dV$, $K_y = \int_V \rho u_y dV$ — составляющие импульса единицы объема; $S_{xx}, S_{yy}, S_{xy}, S_\varphi$ — компоненты девиатора тензора напряжений S ; $d_{xx}, d_{yy}, d_{xy}, d_\varphi$ — компоненты тензора скоростей деформации D ; угол φ задает третье направление в осесимметричном случае; $\alpha = 1$ в случае плоской симметрии, $\alpha = 2$ в случае осевой симметрии; индекс ξ показывает, что величина отнесена к ξ -му компоненту среды.

Система уравнений (1)–(4) замыкается уравнениями состояния (УРСами) компонентов среды

$$P_\xi = P(\rho_\xi, e_\xi) \quad (5)$$

и уравнениями, выражающими зависимость девиаторов тензора напряжений от тензора скоростей деформаций (они определяются принятой моделью среды),

$$f(S_\xi, D_\xi) = 0. \quad (6)$$

* Первоначальное название метода — монотонный метод частиц.

Решение системы уравнений (1)–(6) выполняется с привлечением метода расщепления в два этапа: лагранжева и эйлерова.

На первом (лагранжевом) этапе решаются уравнения (1)–(6) без конвективных членов, т. е. в лагранжевых переменных. Этот этап, в свою очередь, делится на три подэтапа: 1) определение ускорений за счет компонент дивергента тензора напряжений; 2) решение уравнений газодинамики без конвективных членов с учетом ускорений, полученных на первом подэтапе; 3) определение значений компонент дивергента на новый момент времени на лагранжевом этапе и приращений внутренней энергии за счет них. На третьем подэтапе рассчитывается и кинетика разрушений веществ.

На втором (эйлеровом) этапе осуществляется учет конвективного переноса веществ из ячейки в ячейку. При этом в качестве начальных данных используются значения величин, полученные на лагранжевом этапе вычислений. Данный этап разбивается на два подэтапа, аппроксимация уравнений производится с использованием расщепления по направлениям.

Компоненты скорости \mathbf{u} определены в узлах счетной сетки, скалярные величины ($\rho_\xi, e_\xi, P_\xi, S_{xx\xi}, S_{yy\xi}, S_{xy\xi}$) — в центрах ячеек. Кроме того, некоторые вещества могут описываться с помощью частиц, которые характеризуются объемом V_p , номером компонента ξ_p , а также всеми параметрами среды, кроме скорости. Величины, заданные для частицы, отнесены к центру частицы, определяемому его координатами.

Частицы целесообразно задавать в компонентах среды, для которых погрешности, связанные с решением уравнения адвекции, наиболее ощутимы, или в веществах, которые требуют хранения истории поведения лагранжевой частицы. Такая возможность предусмотрена в методике ЭГАК при реализации МДЧ [14, 15]. Ниже дано краткое описание этого метода в приложении к упругопластическим течениям.

Лагранжев этап.

Определение ускорений. Так как у частиц нет индивидуальных скоростей (новые координаты частиц вычисляются билинейной интерполяцией по узлам сетки на этапе лагранжевой газодинамики), этот этап для МДЧ сводится к пересчету напряжений с частиц на ячейки:

$$S_{xx\xi} = \frac{\sum_p S_{xx\xi_p} V_{\xi_p}}{V_\xi}; \quad S_{xy\xi} = \frac{\sum_p S_{xy\xi_p} V_{\xi_p}}{V_\xi}; \quad S_{yy\xi} = \frac{\sum_p S_{yy\xi_p} V_{\xi_p}}{V_\xi},$$

где V_ξ — объем компонента ξ в ячейке.

Далее расчет приращений скорости за счет тензора напряжений осуществляется по стандартной схеме методики ЭГАК (см. [16]).

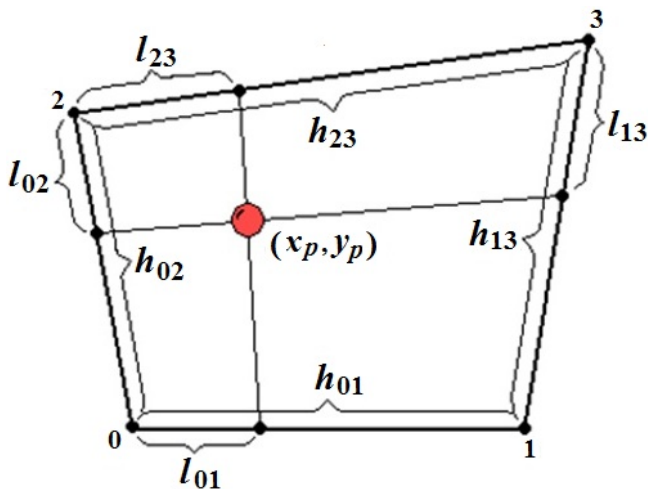


Рис. 1. Определение координат частицы по координатам узлов ячейки

Решение уравнений лагранжевой газодинамики. При наличии упругопластики на данном подэтапе ничего нового по сравнению с описанным в [14, 15] не добавляется. Тем не менее для полноты изложения дадим краткое описание этого подэтапа.

Полагается, что на лагранжевом этапе частицы движутся вместе с ячейкой и внутри ячейки, не выходя за ее границу. Новые координаты частицы определяются билинейной интерполяцией по координатам узлов ячейки в предположении о сохранении положения частицы относительно узлов при деформации ячейки на данном этапе вычислений. Таким образом, требуется, чтобы $\lambda_x^{n+1} = \lambda_x^n, \lambda_y^{n+1} = \lambda_y^n$, где $\lambda_x = \frac{l_{01}}{h_{01}} = \frac{l_{23}}{h_{23}}, \lambda_y = \frac{l_{02}}{h_{02}} = \frac{l_{13}}{h_{13}}$ (рис. 1).

При определении термодинамических величин для частиц полагаем, что относительные приращения плотности и энергии для них равны соответствующим относительным приращениям этих величин, вычисленным для соответствующего компонента в среднем для ячейки. Отсюда следуют формулы

$$\rho_{\xi_p}^{n+1/2} = \rho_{\xi_p}^n + \frac{\rho_{\xi}^{n+1/2} - \rho_{\xi}^n}{\rho_{\xi}^n} \rho_{\xi_p}^n; \quad e_{\xi_p}^{n+1/2} = e_{\xi_p}^n + \left(e_{\xi}^{n+1/2} - e_{\xi}^n \right); \quad V_{\xi_p}^{n+1/2} = V_{\xi_p}^n \frac{V_{\xi_p}^{n+1/2}}{V_{\xi}^n}, \quad (7)$$

где индекс $n + 1/2$ означает, что величина получена на лагранжевом этапе вычислений.

При использовании формул (7) суммарные массы частиц не изменяются, а суммарные внутренние энергии частиц равны энергии, рассчитанной для данного компонента в целом.

Определение новых значений компонент девиатора напряжений. На третьем подэтапе сначала по стандартной методике [16] определяются приращения компонент S_{ij} (i и j принимают значения x и y) девиатора напряжений для каждого вещества ξ в рассматриваемой ячейке и удельных внутренних энергий:

$$\delta S_{ij\xi} = S_{ij\xi}^{n+1} - S_{ij\xi}^n; \quad \delta e_{\xi} = e_{\xi}^{n+1} - e_{\xi}^n.$$

Затем производится пересчет полученных при этом величин с ячеек на частицы по следующим формулам:

$$S_{xx\xi_p}^{n+1/2} = S_{xx\xi_p}^n + \delta S_{xx\xi}; \quad S_{xy\xi_p}^{n+1/2} = S_{xy\xi_p}^n + \delta S_{xy\xi}; \quad S_{yy\xi_p}^{n+1/2} = S_{yy\xi_p}^n + \delta S_{yy\xi}; \quad e_{\xi_p}^{n+1/2} = e_{\xi_p}^n + \delta e_{\xi}.$$

На этом этапе рассчитывается также кинетика разрушений веществ в частицах (см. далее). Определяются изменения указанных и дополнительных величин, вводимых для корректного учета разрушения.

Эйлеров этап. Основные трудности при реализации метода частиц связаны с эйлеровым этапом, а именно с расчетом потоков массы из ячейки в ячейку и связанных с ними величин, определенных на единицу массы, в частности внутренней энергии и компонент девиатора напряжений. В классическом методе частиц Харлоу при переходе частицы в соседнюю ячейку все ее параметры "переходят" вместе с ней. В связи с дискретным (и соответственно немонотонным) характером переноса всех величин этому методу свойственна большая немонотонность профилей величин.

В МДЧ используется алгоритм монотонизации классического метода частиц [2]. Рассмотрим идею этого алгоритма в одномерном случае.

На рис. 2 показаны две счетные ячейки, в которых расставлены частицы, обозначенные точками. Штриховыми отрезками обозначены воображаемые границы объемов, занимаемых частицами. При вычислениях необходимы лишь численные значения объемов, а их конфигурации не хранятся. Поток вещества направлен слева направо в соответствии с указанной скоростью движения $\mathbf{u} = U_x$. Тогда вытекающий из ячейки слева поток вещества объемом ΔV (далее будем использовать термин *поток объема*, на рис. 2 выделен голубым цветом) равен произведению длины поперечного ребра ячейки L на $u_x \tau$, т. е. $\Delta V = Lu_x \tau$.

Причиной немонотонности классического метода частиц является несовпадение реального значения потока объема ΔV с объемом частицы, переходящей через граничное ребро ячейки. В одном случае (см. рис. 2 сверху) из ячейки слева перемещается объем, меньший объема частицы, в другом (см. рис. 2 снизу) — больший объема частицы. Введем обозначение $\delta V = \Delta V - V_p$, где V_p — объем частицы с номером p , переходящей из одной ячейки в другую, и рассмотрим оба этих случая.

Поток объема меньше объема переходящей частицы ($\delta V < 0$). В этом случае частица, перешедшая из донорной ячейки в акцепторную, делится на две части — материнскую и дочернюю. Материнская частица переходит в акцепторную ячейку, приобретая ее координаты (в соответствии с ее скоростью) и объем, равный вытекающему из донорной ячейки объему ΔV . Дочерняя частица получает объем, равный разности объема первоначальной частицы и потока объема ΔV , и

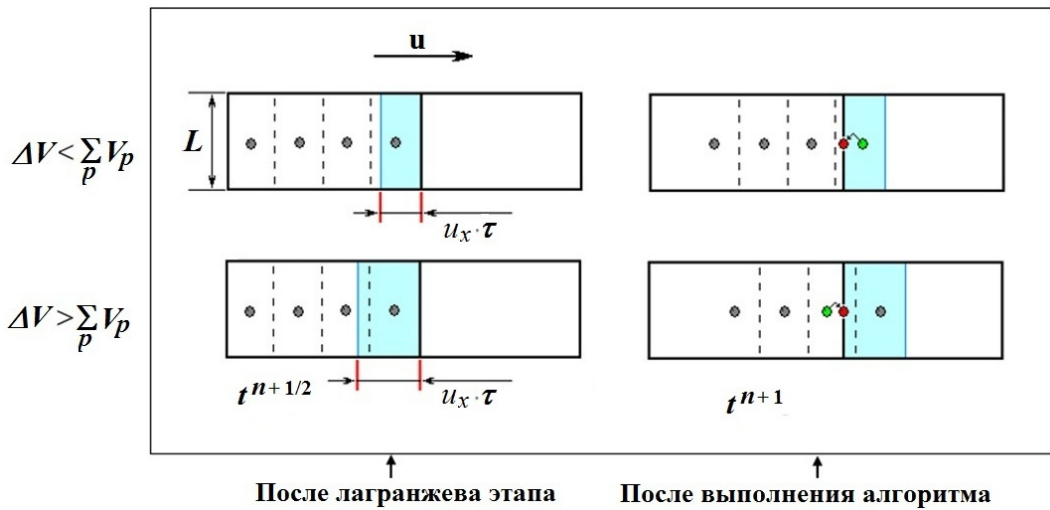


Рис. 2. Иллюстрация к расчету потока в одномерном случае (материнские частицы — зеленые, дочерние — красные)

помещается в донорную ячейку, приобретая координаты на общем ребре донорной и акцепторной ячеек.

Поток объема больше объема переходящей частицы ($\delta V > 0$). В этом случае необходимо восполнить недостаток объема переходящей частицы за счет принудительного перемещения некоторых частиц или фрагментов частиц из донорной ячейки в акцепторную. Таким образом, дробится ближайшая к общему ребру этих ячеек частица из непереходящих в акцепторную ячейку. Она порождает дочернюю частицу с объемом, равным разности объемов δV , которая помещается в акцепторную ячейку с координатами на общем ребре донорной и акцепторной ячеек.

При перемещении из ячейки в ячейку сразу нескольких частиц суммирование объема ведется по всем перешедшим частицам. В этом случае частицы будут делиться по очереди в порядке увеличения расстояния от частицы до смежного ребра.

Особенности реализации метода в многомерном случае приводятся в работах [14, 15].

При дроблении частиц выполняются следующие правила:

- термодинамическое состояние делящейся частицы дублируется в обеих частицах (тем самым обеспечивается выполнение законов сохранения массы, энергии и др.); в случае упругопластичности к этим величинам добавляются компоненты девиатора напряжений;
- для дочерней частицы запоминается номер материнской частицы, который одновременно служит признаком наличия у данной частицы материнской;
- у материнской частицы ни признака наличия дочерних частиц, ни их номеров не содержится;
- у одной материнской частицы может быть несколько дочерних частиц;
- у дочерней частицы может быть только одна материнская частица.

Разработана также процедура объединения частиц. Данная процедура необходима для предотвращения бесконтрольного роста количества частиц при их дроблении. Две частицы одного и того же вещества, находящиеся в пределах одной ячейки, подлежат объединению, если выполняется один из следующих критериев:

- одна из частиц является дочерней по отношению к другой;
- две дочерние частицы имеют одну и ту же материнскую частицу;
- одна из частиц имеет относительно малый объем.

При большом количестве частиц в ячейке предусмотрены механизмы объединения частиц, относящихся к одному и тому же веществу, независимо от их типа.

Эйлеров этап завершается пересчетом величин с частиц на содержащие их ячейки, что необходимо для реализации возможности аппроксимации уравнений без применения частиц. Соответствующие формулы имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \rho_{\xi}^{n+1} &= \frac{\sum_p \rho_{\xi p} V_{\xi p}}{\sum_p V_{\xi p}}; & e_{\xi}^{n+1} &= \frac{\sum_p e_{\xi p} \rho_{\xi p} V_{\xi p}}{\sum_p \rho_{\xi p} V_{\xi p}}; \\ S_{xx\xi}^{n+1} &= \frac{\sum_p S_{xx\xi p} V_{\xi p}}{\sum_p V_{\xi p}}; & S_{xy\xi}^{n+1} &= \frac{\sum_p S_{xy\xi p} V_{\xi p}}{\sum_p V_{\xi p}}; & S_{yy\xi}^{n+1} &= \frac{\sum_p S_{yy\xi p} V_{\xi p}}{\sum_p V_{\xi p}}, \end{aligned}$$

где суммирование ведется по всем частицам компонента ξ в рассматриваемой ячейке.

Две континуальные модели разрушения

Континуальный кинетический подход описывает разрушение как процесс накопления повреждений в элементе вещества. Так как частица представляет собой лагранжев элемент среды, то в ней удобно хранить информацию об истории процессов, в данном случае о поврежденности вещества. В рамках этого подхода ниже рассматриваются две модели разрушения, реализованные в методике ЭГАК.

В рассматриваемом случае мера поврежденности вещества ω определяется по формуле

$$\omega = 1 - \frac{\rho}{\rho_c},$$

где ρ — плотность рассматриваемого вещества; ρ_c — плотность сплошного вещества.

В МДЧ при дроблении частиц мера поврежденности, как и другие параметры материнской частицы, переносится в дочерние частицы. При объединении частиц, естественно, вычисляются новые значения поврежденности вещества, определяемые как средневзвешенные по массе частиц.

Модель мгновенного разрушения и компактирования. В рассматриваемой модели по мере поврежденности ω будем выделять следующие состояния материалов [4]:

- $\omega = 0$ — сплошной материал (сопротивляется сжатию и растяжению);
- $0 < \omega < \omega_{кр}$ — поврежденный материал (способность сопротивляться сжатию и растяжению снижается);
- $\omega_{кр} < \omega < \omega_0$ — разрушенный материал (не сопротивляется растяжению);
- $\omega_0 < \omega$ — диспергированный материал (не сопротивляется ни сжатию, ни растяжению).

Здесь $\omega_{кр}$ — критическое значение меры поврежденности; ω_0 — предельное значение меры поврежденности, ниже которого в разрушенном материале появляется прочность.

В простейшей модели мгновенного откола разрушение происходит, если давление сплошного материала $P_c(\omega)$ меньше отрицательного критического значения $P_{отк}$

$$P_c(\omega) < -|P_{отк}|.$$

В разрушенном состоянии давление зануляется, вещество рассчитывается в гидродинамическом приближении, а мера поврежденности ω при заданных плотности ρ и внутренней энергии e определяется из уравнения (см. [16])

$$P_c\left(\frac{\rho}{1-\omega}, e\right) = 0,$$

где $P_c(\rho_c, e)$ — УРС сплошного вещества.

Если поврежденная среда начинает сжиматься, то происходит компактирование. Мера поврежденности определяется из уравнения (см. [16])

$$\omega = \omega_0 \left(1 - \frac{P}{P_k}\right)^2,$$

где P_k — давление компактирования.

Модель Канеля. Модель Канеля и др. [18] является кинетической. В ней для учета развития микроповреждений вводится уравнение, описывающее изменение удельного объема микротрещин $V_T = \omega/\rho$:

$$\frac{\partial V_T}{\partial t} = \begin{cases} 0 & \text{при } P \geq P_k \frac{V_1}{V_1 + V_T} \text{ или } \left(P < -P_k \frac{V_1}{V_1 + V_T} \text{ и } V_T = 0 \right); \\ K_4 \operatorname{sign}(P) \left(|P| - P_k \frac{V_1}{V_1 + V_T} \right) (V_2 + V_T) & \text{при } P < P_k \frac{V_1}{V_1 + V_T} \text{ или } \left(P > -P_k \frac{V_1}{V_1 + V_T} \text{ и } V_T = 0 \right), \end{cases}$$

где P — максимальное нормальное напряжение; V_1, V_2, K_4, P_k — константы материала.

Среднее давление в среде определяется как

$$P = P_c \frac{\rho}{\rho_c} = P_c(1 - \omega),$$

где ρ_c — плотность твердого компонента среды.

Модуль сдвига G и динамический предел текучести Y полагаются зависящими от достигнутого уровня повреждений:

$$G = G_0 \frac{V_3}{V_3 + V_T}; \quad Y = \begin{cases} Y_0 \left(1 - \frac{V_T}{V_4}\right), & \text{если } V_T < V_4; \\ 0, & \text{если } V_T \geq V_4, \end{cases}$$

где V_3, V_4 — константы материала. Разрушенные вещества считаются в гидродинамическом приближении.

Уравнения состояния. В данной работе для непористых (неразрушенных) веществ использовался УРС в форме Ми–Грюнайзена:

$$P = \frac{\rho_0 c_0^2}{n} \left[\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^n - 1 \right] + (\gamma - 1)\rho e, \quad (8)$$

где $\rho_0, c_0, n, \gamma - 1$ — параметры УРСа.

Тестирование метода

Растяжение плоского слоя. Одномерная задача об адиабатическом сжатии и растяжении плоского слоя. В начальный момент времени в одномерной области $0 \leq x \leq L_0$ ($L_0 = 2$ см) задан слой вещества с линейным профилем скорости $U = U_0 x/L_0$, где $U_0 = -1$ км/с. В момент t_1 скорость меняет знак.

Расчеты проведены для трех начальных состояний вещества: 1 — поврежденного, 2 — разрушенного, 3 — диспергированного (табл. 1) с использованием УРСа (8). Параметры модели компактирования приведены в табл. 2.

Вязкость полагалась равной нулю. Расчеты проводились на сетке с шагом $h = 0,05$ см. Задача рассчитывалась в двух постановках: лагранжевой и эйлеровой. Заметим, что в лагранжевых переменных эйлеров этап вычислений отсутствует и соответственно отсутствует погрешность, связанная с этим этапом.

Таблица 1

Растяжение плоского слоя. Параметры расчетов для трех начальных состояний вещества

Номер состояния	ρ , г/см ³	E , кДж/г	ω	t_1 , 10 ⁻⁵ с
1	17,101	0,003	0,1	0,1
2	15,2	0,003788	0,2	0,25
3	11,98	0,0042	0,3702	0,35

Таблица 2

Растяжение плоского слоя. Параметры УРСа и уравнения компактирования

ρ_0 , г/см ³	c_0 , км/с	n	Γ	$\omega_{кр}$	ω_0	P_k , ГПа
19,05	2,62	4,1	2,2	0,15	0,333	1,5

Для случая лагранжева расчета рассматривался один физический компонент, для эйлерова расчета на правой границе было добавлено несколько ячеек вакуума.

Результаты расчетов в виде зависимостей $\omega(t)$ показаны на рис. 3.

В табл. 3 представлены максимальные относительные отклонения ω от точного решения $|\omega_p - \omega_T|_{\max}/\omega$, где ω_p — расчетное значение, ω_T — точное значение.

Для состояния 3 в эйлеровых переменных были проведены расчеты на сходимость (табл. 4).

Как видно из табл. 3 и рис. 3, расчеты в лагранжевых и эйлеровых переменных с использованием МДЧ дают близкие результаты, имеющие малое отклонение от точного решения при сохранении монотонности решения. Имеется сходимость численного решения к точному при уменьшении шага сетки (см. табл. 4).

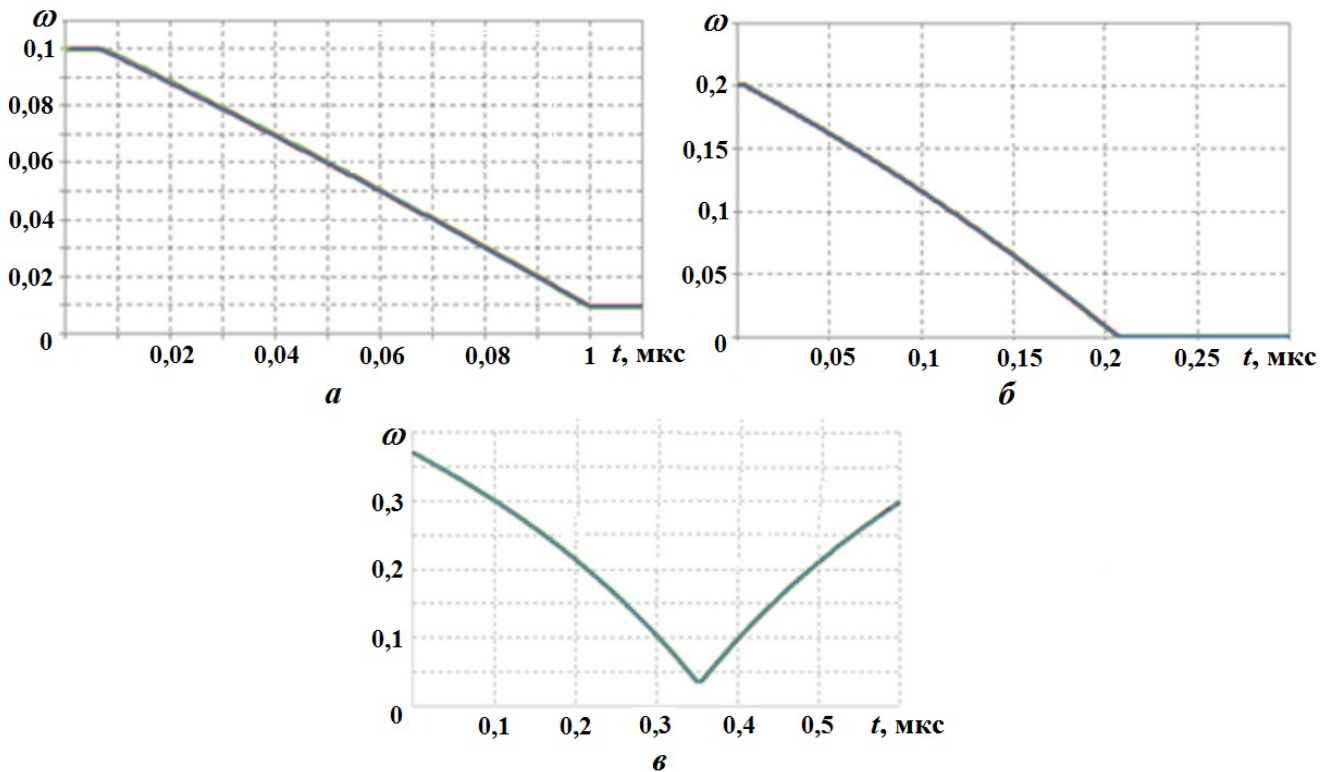


Рис. 3. Растяжение плоского слоя. Расчетные зависимости поврежденности от времени: *a* — для состояния 1; *б* — для состояния 2; *в* — для состояния 3; — точное решение; — лагранжев расчет; — эйлеров расчет

Таблица 3

Растяжение плоского слоя. Максимальные относительные отклонения ω от точного решения

Номер состояния	Лагранжев расчет	Эйлеров расчет
1	$1,43 \cdot 10^{-2}$	$1,43 \cdot 10^{-2}$
2	$1,32 \cdot 10^{-2}$	$1,07 \cdot 10^{-2}$
3	$1,76 \cdot 10^{-3}$	$5,63 \cdot 10^{-3}$

Таблица 4

Растяжение плоского слоя. Максимальные относительные отклонения ω от точного решения в зависимости от шага сетки

h , см	0,05	0,025	0,125
Отклонение ω	$5,63 \cdot 10^{-3}$	$2,28 \cdot 10^{-3}$	$1,87 \cdot 10^{-3}$

Соударение медных пластин. Задача плоская одномерная [19]. В области $0 \leq x \leq 9$ мм размещается медная пластина с нулевой скоростью (мишень). Вторая пластина (ударник), изначально расположенная в области $-2 \text{ мм} \leq x \leq 0$, налетает на мишень со скоростью U , которая в расчетах варьируется. За внешними границами пластин $x < -2$ мм и $x > 9$ мм — вакуум.

Расчеты проводились с использованием модели Канеля и др. Для сравнения также был проведен расчет данной задачи без МДЧ по стандартным схемам методики ЭГАК с использованием той же модели [20].

В табл. 5 приводятся константы модели Канеля, УРС (8) использовался с константами $c_0 = 4,6$ км/с; $n = 4$; $\gamma - 1 = 1,66$; $\rho_0 = 8,92$ г/см³ [6].

Счетная сетка — квадратная с шагом $h = 0,01$ см. В расчетах МДЧ на момент времени $t = 0$ бралось по одной частице в ячейке, содержащей разрушаемое вещество.

Проведены расчеты со скоростями соударения 300, 500, 1000 м/с. Зависимости меры поврежденности частиц мишени от их координат на момент времени $t = 5$ мкс представлены на рис. 4. Для скорости $U = 500$ м/с на рис. 4, б также показаны профили меры поврежденности в зависимости от начального количества частиц в ячейке. Видно, что толщина откольного слоя не зависит от числа частиц в ячейке. Таким образом, по толщине откольного слоя расчеты дают одинаковые результаты.

Для скорости $U = 500$ м/с проведены расчеты с одной частицей в ячейке с вариацией счетной сетки: $h = 0,01, 0,005$ и $0,0025$ см. На рис. 5 приводятся зависимости поврежденности мишени от координат частиц на момент времени $t = 5$ мкс.

Видно, что для МДЧ наблюдается сходимость расчетной поврежденности к некоторому решению при уменьшении шага сетки. При этом при измельчении сетки улучшается монотонность решения.

Таблица 5

Константы модели Канеля для меди

ρ_0 , г/см ³	Y_0 , ГПа	G_0 , ГПа	K_4 м·с/кг	P_k , ГПа	V_1 , 10^{-3} см ³ /г	V_2 , 10^{-3} см ³ /г	V_3 , 10^{-3} см ³ /г	V_4 , 10^{-3} см ³ /г
8,92	0,7	63,0	0,07	2,0	5,47	3,65	7,3	1,2

Соударение сферы с преградой. Постановка этой двумерной цилиндрической задачи взята из работы [21], в которой она исследовалась как экспериментально, так и численно. В работе [20] задача была исследована численно по методике ЭГАК.

Стальная сфера (ударник) радиусом $R = 3,175$ мм с начальной скоростью $U_x = 4,57$ км/с пробивает пластиковую преграду толщиной $L = 3,38$ мм (рис. 6).

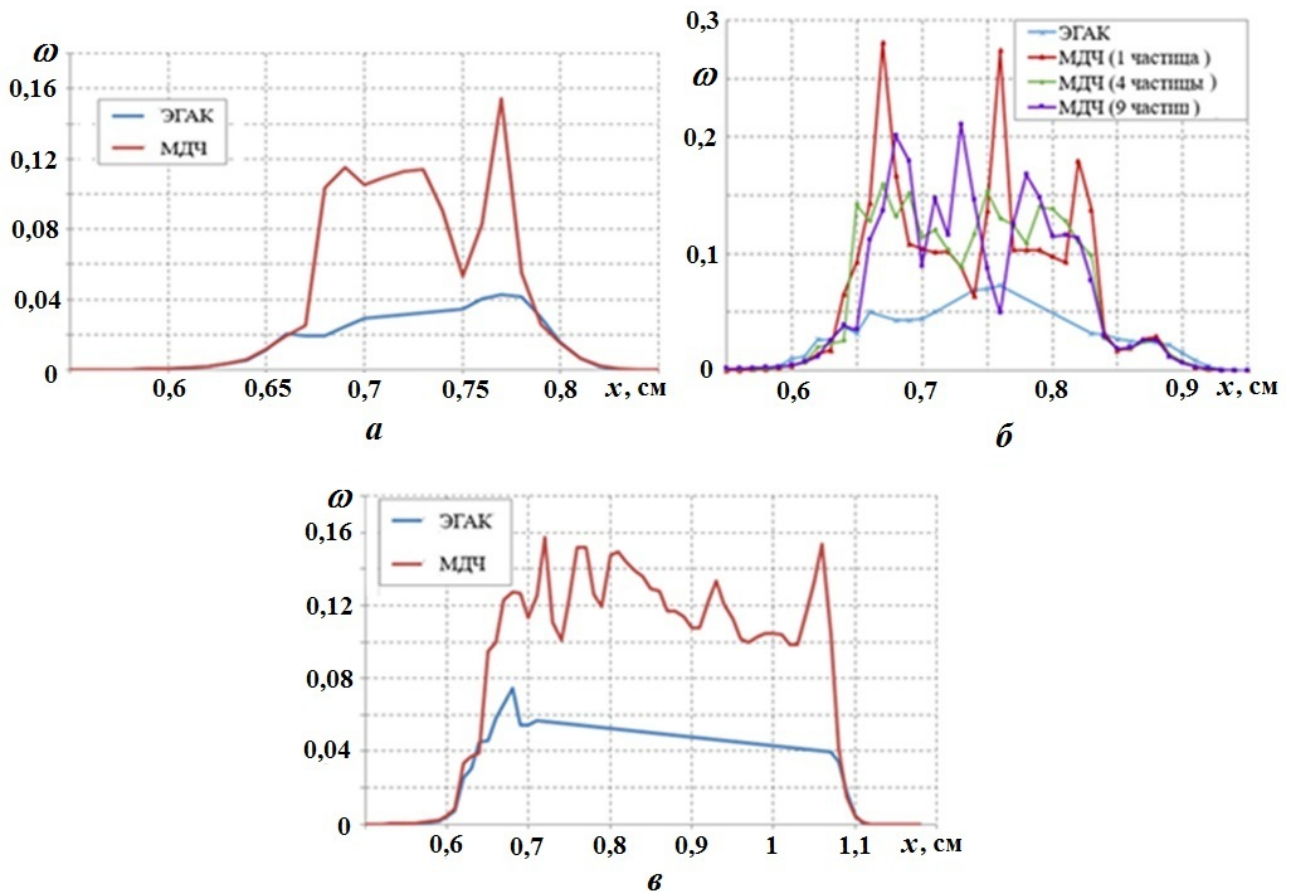


Рис. 4. Соударение медных пластин. Зависимости поврежденности мишени от координат частиц: *а* — $U = 300$ м/с (одна частица в ячейке); *б* — $U = 500$ м/с (разное количество частиц в ячейке); *в* — $U = 1000$ м/с (одна частица в ячейке)

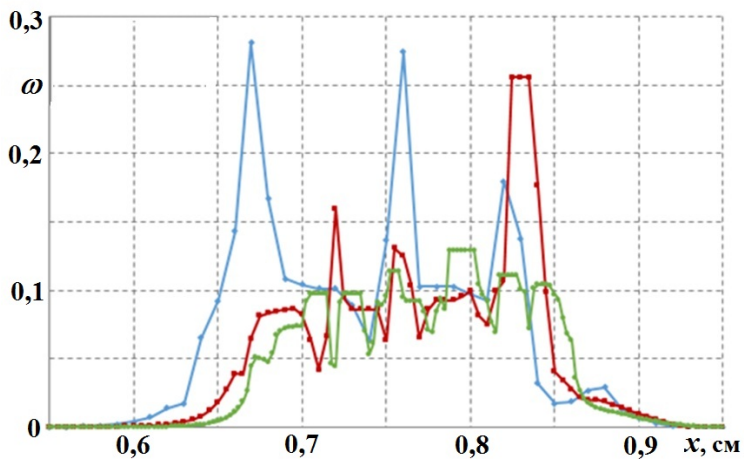


Рис. 5. Соударение медных пластин. Зависимости поврежденности мишени от координат частиц при $U = 500$ м/с для сетки с разными h (одна частица в ячейке): —•— $h = 0,01$; —•— $h = 0,005$; —•— $h = 0,0025$

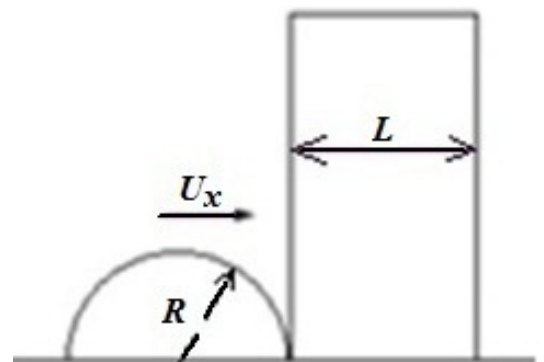


Рис. 6. Начальная геометрия задачи о соударении сферы с преградой

Расчеты проводились на неподвижной квадратной сетке с $h = 0,013$ см. Вещества описывались УРСом (8) с параметрами из табл. 6. Параметры для модели Канеля приведены в табл. 7. В расчете с использованием МДЧ задавалась одна частица в ячейке.

Таблица 6

Параметры УРСа и упругопластические свойства для преграды и ударника

Вещество	$\rho_0, \text{г/см}^3$	$c_0, \text{км/с}$	n	$\gamma - 1$	$Y, \text{ГПа}$	ν
Пластик	1,186	2,598	3	0,97	0,2	0,32
Сталь	7,850	4,6	3	2,17	2,0	0,29

Таблица 7

Параметры модели Канеля для преграды и ударника

Вещество	$\rho_0, \text{г/см}^3$	$K_4, \text{см} \cdot 10 \text{ мкс} / \text{г}$	$P_k, \text{г} / (\text{см} \cdot 10 \text{ мкс})$	$V_1, \text{см}^3 / \text{г}$	$V_2, \text{см}^3 / \text{г}$	$V_3, \text{см}^3 / \text{г}$	$V_4, \text{см}^3 / \text{г}$
Пластик	1,186	500	0,15	0,0049	0,00032	0,000657	0,0085
Сталь	7,850	540	1,5	0,0092	0,00057	0,0016	0,001

В экспериментах исследовался спектральный состав по размерам фрагментов разрушенного ударника. Для получения аналогичной информации в расчетах (рис. 7) была использована модель Грэйди [20]. Масса и число осколков суммировались по размеру фрагментов на отрезке длиной 1 см, равномерно разбитом на 264 интервала длиной 0,0038 см. Размер осколков рассчитывался по формуле

$$s = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{180} K_C}{\rho_0 c_0 \text{div} \mathbf{u}_\xi} \right)^{2/3} \quad (9)$$

В формуле (9) вязкость разрушения K_C бралась равной 0,3 ГПа·см^{1/2} для модели мгновенного разрушения и 0,35 ГПа·см^{1/2} для модели Канеля.

В табл. 8 приводятся размеры осколков, имеющих максимальную массу $m(s)$, в сравнении с расчетными данными ЭГАК (осколки представляются в форме кубиков).

Из табл. 8 видно, что расчеты с использованием МДЧ несколько лучше согласуются с экспериментом по размеру осколков максимальной массы, чем без него.

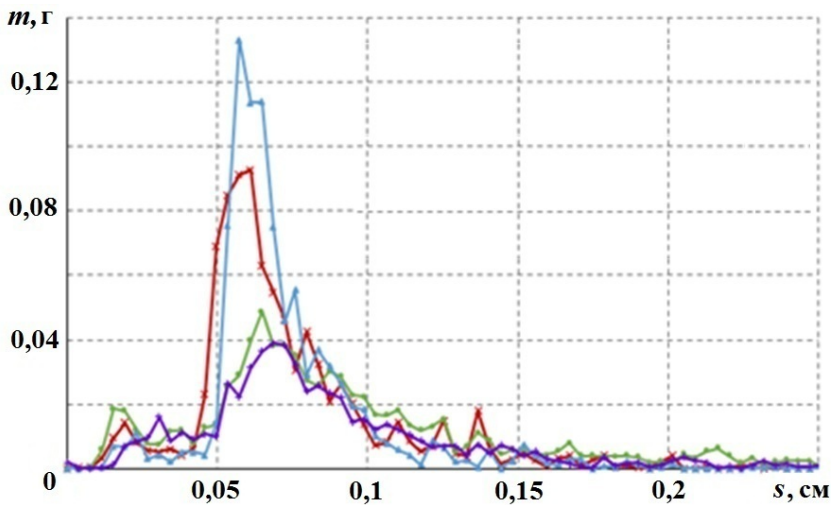


Рис. 7. Соударение сферы с преградой. Распределение массы осколков ударника по размерам: — \times — ЭГАК, мгновенное разрушение; — \bullet — МДЧ, мгновенное разрушение; — \blacktriangle — ЭГАК, модель Канеля; — \blacklozenge — МДЧ, модель Канеля

Соударение сферы с преградой. Размеры осколков (в см) максимальной массы

Эксперимент	Мгновенное разрушение		Модель Канеля	
	ЭГАК	МДЧ	ЭГАК	МДЧ
0,076	0,063	0,070	0,059	0,067

Заключение

В работе описаны основные алгоритмы монотонного МДЧ для моделирования двумерных упругопластических течений, реализованного в рамках лагранжево-эйлеровой методики ЭГАК. Метод сохраняет достоинства классического метода частиц (минимизация погрешности эйлеровых методов при решении уравнения адвекции) при обеспечении монотонности решения. На его основе реализованы две модели разрушения: модель Канеля и модель мгновенного разрушения и компактирования. Применимость метода проверена на двух одномерных и одной двумерной тестовых задачах.

Проведенное в работе исследование показало эффективность МДЧ при моделировании процессов разрушения и компактирования материалов в эйлеровых переменных.

Авторы выражают благодарность Ю. Е. Дудник и А. В. Городничеву за помощь в постановке тестовых задач.

Список литературы

1. *Hirt C. W., Nicols B. D.* Volume of Fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries // *J. Comp. Phys.* 1981. Vol. 39. P. 201–225.
2. *Бахрах С. М., Глаголева Ю. П., Самигулин М. С., Фролов В. Д., Яненко Н. Н., Янилкин Ю. В.* Расчет газодинамических течений на основе метода концентраций // Докл. АН СССР. 1981. Т. 257, № 3. С. 566–569.
Bakhrakh S. M., Glagoleva Yu. P., Samigulin M. S., Frolov V. D. Yanenko N. N., Yanilkin Yu. V. Raschyet gazodinamicheskikh techeniy na osnove metoda kontsentratsiy // Dokl. AN SSSR. 1981. T. 257, № 3. S. 566–569.
3. *Харлоу Ф. Х.* Численные методы частиц в ячейках для задач газодинамики // Вычислительные методы в газодинамике. М.: Мир, 1967. С. 316–342.
Kharlou F. Kh. Chislennyye metody chastits v yacheykakh dlya zadach gazodinamiki // Vychislitelnye metody v gazodinamike. M.: Mir, 1967. S. 316–342.
4. *Tskhakaya D., Matyash K., Schneider R., Taccogna F.* The Particle-In-Cell method // *Contributions to Plasma Physics.* 2007. Vol. 47(8–9). P. 563–594.
5. *Shalaby M., Broderick A. E., Chang P., Pfrommer C., Lamberts A., Puchwein E.* SHARP: A spatially higher-order, relativistic Particle-in-Cell code // *Astrophysical J.* 2017. Vol. 841(1). P. 52.
6. *Jiang C., Schroeder C., Selle A., Teran J., Stomakhin A.* The affine Particle-In-Cell method // *ACM Trans. Graph.* 2015. Vol. 34. P. 4.
7. *Богомолов С. В., Звенков Д. С.* Явный метод частиц, не сглаживающий газодинамические разрывы. Математическое моделирование. 2007. Т. 19:3. С. 74–86.
Bogomolov S. V., Zvenkov D. S. Yavnyy metod chastits, ne sglazhivayushchiy gazodinamicheskie razryvy. Matematicheskoe modelirovanie. 2007. T. 19:3. S. 74–86.
8. *Jiang C., Schroeder C., Teran J.* An angular momentum conserving affine Particle-In-Cell method // *J. Comp. Phys.* 2017. Vol. 338. P. 137–164.
9. *Fu C., Guo Q., Gast T., et al.* A polynomial Particle-In-Cell method // *ACM Trans. Graph.* 2017. Vol. 36. P. 222:1–222:12.

10. *Grigoryev Yu. N., Vshivkov V. A., Fedoruk M. P.* Numerical Particle-In-Cell methods. Theory and Applications. Utrecht, Boston, 2002.
11. *Lapenta G., Brackbill J. U.* Dynamic and selective control of the number of particles in kinetic plasma simulations // *J. Comp. Phys.* 1994. Vol. 115. P. 213–217.
12. *Welch D. R., Genoni T. C., Clark R. E., Rose D. V.* Adaptive particle management in a Particle-In-Cell code // *Ibid.* 2007. Vol. 227. P. 143–155.
13. *Сапожников Г. А.* Комбинированный метод потоков и частиц в ячейках для расчетов газодинамических течений // *Вопросы разработки и эксплуатации пакетов прикладных программ.* Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1981. С. 89–97.
Sapozhnikov G. A. Kombinirovannyuy metod potokov i chastits v yacheykakh dlya raschyetov gazodinamicheskikh techeniy // *Voprosy razrabotki i ekspluatatsii paketov prikladnykh programm.* Novosibirsk: ITPM SO AN SSSR, 1981. S. 89–97.
14. *Янилкин Ю. В., Шмелёв В. А., Колобянин В. Ю., Беляев С. П.* Монотонный метод частиц для моделирования двумерных газодинамических течений // *Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов.* 2012. Вып. 3. С. 3–14.
Yanilkin Yu. V., Shemelyev V. A., Kolobyenin V. Yu., Belyaev S. P. Monotonnyuy metod chastits dlya modelirovaniya dvumernykh gazodinamicheskikh techeniy // *Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov.* 2012. Vyp. 3. S. 3–14.
15. *Yanilkin Y., Shmelev V., Kolobyenin V.* A monotonic Method of Split Particles // *Recent Advances in Numerical Simulations* / Ed. F. Bulnes, P. Hessling. London: INTECH, 2021. P. 43–60.
16. *Янилкин Ю. В., Шанин А. А., Ковалев Н. П. и др.* Методика ЭГАК для расчетов двумерных течений многокомпонентной среды // *Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов.* 1993. Вып. 4. С. 69–75.
Yanilkin Yu. V., Shanin A. A., Kovalyev N. P. i dr. Metodika EGAK dlya raschyetov dvumernykh techeniy mnogokomponentnoy sredy // *Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov.* 1993. Vyp. 4. S. 69–75.
17. *Огородников В. А., Садовой А. А., Софронов В. Н., Козлова Т. А., Ерунов С. В., Михайлов С. В.* Кинетическая модель пластического разрушения с учетом диссипативных процессов // *Химическая физика.* 2002. Т. 21, № 9. С. 104–109.
Ogorodnikov V. A., Sadovoy A. A., Sofronov V. N., Kozlova T. A., Erunov S. V., Mikhaylov S. V. Kineticheskaya model plasticheskogo razrusheniya s uchetom dissipativnykh protsessov // *Khimicheskaya fizika.* 2002. T. 21, № 9. S. 104–109.
18. *Канель Г. И., Сугак С. Г., Фортвов В. Е.* О моделях откольного разрушения // *Проблемы прочности.* 1983. № 8. С. 40–44.
Kanel G. I., Sugak S. G., Fortov V. E. O modelyakh otkolnogo razrusheniya // *Problemy prochnosti.* 1983. № 8. S. 40–44.
19. *Волков И. А.* Численный анализ откольного разрушения медных пластин при ударном деформировании. Упругость // *Прикладная механика и техническая физика.* 1993. № 2. С. 19–24.
Volkov I. A. Chislennyuy analiz otkolnogo razrusheniya mednykh plastin pri udarnom deformirovanii. Uprugost // *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika.* 1993. № 2. S. 19–24.
20. *Yanilkin Yu. V., Gorodnichev A. V., Simonov G. P., Ilkaev R. I.* EGAK-EP method for calculations of fracture and fragmentation of materials // *Proc. Workshop "New Models and Numerical Codes for Shock Wave Processes in Condensed Media".* Oxford, 1997. P. 610–622.
21. *Kipp M. E., Grady D. E., Swegle J. W.* Experimental and Numerical Studies of High-Velocity Impact Fragmentation. SANDI 93-0773. Report. Sandia National Laboratories, 1993.

УДК 539.3

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ТРЕХМЕРНЫХ ЗАДАЧ УДАРНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ТЕЛ В ЭЙЛЕРОВЫХ ПЕРЕМЕННЫХ НА БАЗЕ МОДИФИЦИРОВАННОЙ СХЕМЫ ГОДУНОВА

М. Х. Абузяров, Е. Г. Глазова, А. В. Кочетков, С. В. Крылов, А. А. Лисицын, И. А. Модин
(ННГУ им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород)

Разработанная ранее численная методика решения трехмерных задач динамического взаимодействия деформируемых тел и сред в эйлеровых переменных на базе схемы Годунова повышенной точности применяется для решения задач ударного взаимодействия упругопластических тел. Повышение точности схемы достигается за счет изменения шага *предиктор*. Применяется трехмерное и зависящее от времени решение упругой задачи распада разрыва, обеспечивающее второй порядок аппроксимации по времени и пространству в области гладких решений. Монотонность в области разрывных решений обеспечивается переходом на шаг *предиктор* схемы первого порядка аппроксимации. Используется многосеточный подход с тремя видами расчетных сеток для каждого тела с явным лагранжевым выделением подвижных свободных и контактных поверхностей. Приводятся результаты решения тестовых и прикладных трехмерных задач с большими перемещениями и деформациями, демонстрирующие возможности численного метода. Рассмотрены процессы удара, внедрения и пробивания деформируемыми ударниками однослойных и двухслойных упругопластических преград. Описываются процессы рикошетирувания ударников при наклонном соударении. Полученные результаты демонстрируют хорошую работоспособность численных моделей и методик.

Ключевые слова: численное моделирование, схема Годунова, повышенная точность, многосеточный подход, трехмерная задача, упругопластическая преграда, деформируемый ударник, многослойность, удар, пробивание, рикошет.

Введение

Схема Годунова [1] и ее наиболее известные модификации [2–5] получили широкое распространение для решения нелинейных динамических задач гидро- и газовой динамики в эйлеровых переменных благодаря возможности выделять и описывать разрывные решения без искусственной вязкости. В настоящее время различные модификации этой схемы также применяются для решения задач динамики деформируемого твердого тела в эйлеровых и эйлерово-лагранжевых переменных. Основной проблемой схемы Годунова является первый порядок аппроксимации по времени и пространству и, как следствие, значительная схемная вязкость, приводящая к быстрому затуханию решения. Многочисленные попытки устранить этот недостаток в газовой динамике, близкие по смыслу к изложенным в работах [2, 4, 5], увеличивают разностный шаблон схемы и не обеспечивают второго порядка аппроксимации по времени в области гладких решений в пространственном случае, а также создают дополнительные трудности при реализации граничных условий.

В динамике деформируемого твердого тела при моделировании волновых процессов влияние схемной вязкости еще более существенно, и во многих задачах необходимо использовать варианты схемы

с порядком аппроксимации не менее второго по времени и пространству. В настоящее время для деформируемых тел существует большое количество модификаций схемы Годунова повышенной точности, в частности в работах [6–19]. В указанных работах модификации основаны на различных вариантах гиперупругих моделей динамики твердого тела. Эти модели, включающие уравнение сохранения энергии, являются гиперболическими, инвариантными относительно вращений твердого тела, термодинамически совместимыми и могут быть записаны в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка в форме законов сохранения. Полученные модификации являются трудоемкими, больше представляют академический интерес и поэтому получили ограниченное распространение в вычислительной практике и коммерческих пакетах.

Для гипоупругих моделей решение проблемы повышения точности численных моделей было представлено В. Н. Кукуджановым [20] и далее развито им для различных моделей нелинейного поведения материала [21]. Показано, что для гипоупругих моделей сред, в том числе описывающих необратимые деформации, и для схем типа *предиктор–корректор* с расщеплением по физическим процессам для достижения второго порядка аппроксимации по времени и пространству упругопластических уравнений достаточно на этапе *предиктор* получить со вторым порядком аппроксимации решение линейризованных уравнений в упругом приближении. Учет нелинейного поведения материала производится на этапе *корректор*. При этом сохраняется второй порядок аппроксимации по времени и пространству системы уравнений в целом.

В работах [22,23] М. Х. Абузьяровым и Х. Аисо была предложена модификация двумерной схемы Годунова для деформируемых тел, имеющая второй порядок аппроксимации по времени и пространству на гладких решениях и монотонная на разрывах. В этом случае используется точное решение задачи распада разрыва в упругой постановке для линейризованных уравнений теории пластического течения в соответствии с подходом [20] на компактном шаблоне. Эта модификация решила проблему повышенной схемной вязкости на гладких решениях и проблему реализации граничных условий. Повышение точности достигается за счет сближения областей влияния дифференциальной и разностной задач распада разрыва, монотонность решений в области разрывов обеспечивается переходом на *предиктор* схемы первого порядка аппроксимации. На контактных границах также используется точное решение задачи распада разрыва. В работах [24,25] эта модификация обобщена на трехмерный случай и решены задачи ударно-волнового нагружения упругопластических тел.

Моделирование трехмерных динамических процессов взаимодействия твердых тел в эйлеровых переменных требует адекватного описания сложных процессов на подвижных контактных границах. Поэтому желательно выделять и сопровождать подвижные границы в процессе расчетов. В настоящее время существуют два подхода для описания пространственного движения свободных и контактных границ в эйлеровых переменных — SIM (Sharp Interface Method) и DIM (Diffusive Interface Method). SIM-подход [26–30] включает в себя точное выделение и отслеживание движения поверхности границ. Лучший вариант — это совпадение расчетной сетки с границами тела, что не всегда возможно при больших перемещениях и деформациях и практически возможно только в одномерном и двумерном случаях. Варианты, связанные с использованием различных алгоритмов отслеживания местоположения контактной поверхности внутри подвижных или неподвижных сеток, часто с использованием техники подсеточного разбиения для повышения точности в наиболее интересующих частях расчетной области (AMR — Adaptive Mesh Refinement), также сложны и успешно применяются только для решения двумерных задач. В трехмерном случае этот подход вызывает значительные трудности, связанные с отслеживанием и восстановлением самих поверхностей тел, динамическим нелагранжевым перестроением сеток и реализацией краевых условий.

Миллер и Колелла [28] предложили SIM-подход для трехмерного случая с использованием объемных долей и решения задачи распада разрыва для восстановления и перемещения контактной границы внутри ячеек со смесью различных веществ. Подход консервативен и включает AMR, но ввиду сложности не получил дальнейшего развития, несмотря на то, что по сути указал путь решения проблемы. В работе [29] Бартон и др. также предложили вариант SIM для трехмерного случая. Авторы решают задачу распада разрыва внутри ячеек со смесью, интерполируя и экстраполируя параметры из окружающих ячеек без смеси для постановки и решения задачи распада разрыва. Затем это решение используют для перемещения границы внутри ячеек со смесью и вычисления потоков в окружающие ячейки, "обрезая" их в соответствии с объемными долями в ячейках со

смесью. Ряд процедур имеет итерационный характер. Метод не нашел дальнейшего развития и применения также ввиду сложности. Показательна в этом плане работа Бартона [31], его переход от SIM-подхода в двумерном случае [15, 16, 26] к DIM-подходу в трехмерном [31, 32]. Он приходит к выводу о практической неприменимости SIM для трехмерных задач.

DIM-подход [33–45], применяемый на эйлеровых сетках, не предполагает точного выделения контактной поверхности и допускает использование ячеек, содержащих смеси веществ. При этом подходе приходится конструировать искусственное нефизичное уравнение состояния для смеси. Соответственно необходимо строить решение для задачи распада разрыва для схемы типа Годунова или специальные алгоритмы для определения потоковых величин и контактных параметров для других схем. В наиболее сложных вариантах [32, 36, 37, 41] в ячейке предполагается многокомпонентная смесь с динамическим равновесием с возможным скольжением компонентов смеси внутри ячейки — многоскоростной континуум. Поверхность контакта в этом подходе явно не определяется. Этот подход удобен для решения трехмерных задач, но он имеет значительную численную вязкость и не обладает необходимой точностью при описании сложных контактных явлений, таких как трение, отрывы и т. д. Ю. В. Янилкин и др. [42, 43] развивают аналогичные подходы, позволяющие решать ряд сложных задач динамического взаимодействия элементов конструкций со средами в трехмерной постановке.

Трудности, связанные с выделением и отслеживанием контактных поверхностей и описанием сложных уравнений состояния разнородных материалов, в значительной степени преодолены в многосеточном подходе, предложенном в работах [24, 25]. В этом подходе, который подробно изложен в [25], для каждого тела используются три типа расчетных сеток. Подход не требует сложных трехмерных сеточных генераторов, достаточно задания поверхностей тел STL-файлами, что значительно ускоряет процесс подготовки данных для расчета. Ниже приводятся результаты применения методики [25] для численного решения трехмерных задач ударного взаимодействия упругопластических тел.

Основные уравнения и методика численного решения

Для моделирования используются уравнения гипотупругой динамики сплошных сред в виде [25]

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{f} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{g} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{h} = \mathbf{k}, \quad (1)$$

$$\text{где } \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ e \\ S_{xx} \\ S_{yy} \\ S_{zz} \\ S_{xy} \\ S_{xz} \\ S_{yz} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p - S_{xx} \\ \rho uv - S_{xy} \\ \rho uw - S_{xz} \\ (e + p - S_{xx})u - S_{xy}v - S_{xz}w \\ u \left(S_{xx} - \frac{4}{3}\mu \right) \\ u \left(S_{yy} + \frac{2}{3}\mu \right) \\ u \left(S_{zz} + \frac{2}{3}\mu \right) \\ uS_{xy} - \mu v \\ uS_{xz} - \mu w \\ uS_{yz} \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v w - S_{xy} \\ \rho v^2 + p - S_{yy} \\ \rho v w - S_{yz} \\ (e + p - S_{yy})v - S_{xy}u - S_{yz}w \\ v \left(S_{xx} + \frac{2}{3}\mu \right) \\ v \left(S_{yy} - \frac{4}{3}\mu \right) \\ v \left(S_{zz} + \frac{2}{3}\mu \right) \\ v S_{xy} - \mu u \\ v S_{xz} \\ v S_{yz} - \mu w \end{pmatrix}; \quad \mathbf{h} = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho v w - S_{xz} \\ \rho v w - S_{yz} \\ \rho w^2 + p - S_{zz} \\ (e + p - S_{zz})w - S_{yz}v - S_{xz}u \\ w \left(S_{xx} + \frac{2}{3}\mu \right) \\ w \left(S_{yy} + \frac{2}{3}\mu \right) \\ w \left(S_{zz} - \frac{4}{3}\mu \right) \\ w S_{xy} \\ w S_{xz} - \mu u \\ w S_{yz} - \mu v \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ S_{xx} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + S_{xy} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) + S_{xz} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \lambda S_{xx} \\ S_{xy} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + S_{yy} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + S_{yz} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \lambda S_{yy} \\ S_{xz} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) + S_{yz} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) + S_{zz} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \lambda S_{zz} \\ S_{xy} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \frac{1}{2} (S_{xx} - S_{yy}) \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} S_{xz} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} S_{yz} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \lambda S_{xy} \\ S_{xz} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \frac{1}{2} (S_{xx} - S_{zz}) \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} S_{xy} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{1}{2} S_{yz} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \lambda S_{xz} \\ S_{yz} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \frac{1}{2} (S_{yy} - S_{zz}) \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} S_{xz} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} S_{xy} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \lambda S_{yz} \end{pmatrix}.$$

Здесь p — давление; ρ — плотность; u, v, w — компоненты скорости по осям OX, OY, OZ ; e — полная механическая энергия единицы объема сплошной среды, $e = \rho(\varepsilon + 0,5(u^2 + v^2 + w^2))$; ε — внутренняя энергия единицы массы; $S_{xx}, S_{yy}, S_{zz}, S_{xy}, S_{xz}, S_{yz}$ — компоненты деватора тензора истинных напряжений Эйлера; μ — модуль сдвига. Первые пять уравнений системы (1) представляют собой законы сохранения массы, импульса и энергии. Следующие шесть уравнений — физические соотношения упругости и пластичности с учетом поворота тензора напряжений в эйлеровых координатах (производная Яумана), записанные в дифференциальной форме.

Система (1) замыкается уравнением состояния (УРСом) в форме

$$\varepsilon = \varepsilon(p, \rho). \quad (2)$$

К системе (1), (2) добавляются начальные и краевые условия. В случае отсутствия сдвиговых напряжений система (1) переходит в уравнения Эйлера для движения сжимаемого газа [1]. Для описания процессов в плотных сжимаемых средах применяется баротропная зависимость вида $p = p(\rho)$,

позволяющая избежать интегрирования уравнения сохранения энергии. Для деформируемых тел с плотностью ρ_0 это будет зависимость идеального упругопластического тела $p = K\varepsilon_V$, где K — модуль объемного сжатия, $\varepsilon_V = 1 - \rho_0/\rho$ — объемная деформация. Критерием перехода из упругого напряженно-деформированного состояния в пластическое является условие текучести Мизеса: $J_2 = 1/2 S_{ij} S_{ij} \geq 1/3 \sigma_T^2$, где J_2 — второй инвариант девиатора тензора напряжений S_{ij} , σ_T — предел текучести. В соответствии с [20] в этом случае происходит коррекция компонент девиатора напряжений умножением на $\lambda = \sigma_T / \sqrt{3J_2}$.

Интегральная форма системы (1), на базе которой строится разностная схема, имеет вид

$$\iiint_{\omega} \mathbf{u} dx dy dz + \mathbf{f} dy dz dt + \mathbf{g} dx dz dt + \mathbf{h} dx dy dt = \iiint_{\Omega} \mathbf{k} dx dy dz dt, \quad (3)$$

где Ω — любой замкнутый объем, поверхность ω которого — гомеоморфная сфера в четырехмерном пространстве (x, y, z, t) . На границах контакта тел ставится условие непроникания с возможным кулоновским трением.

Решение уравнений (1)–(3) выполняется методом Годунова повышенной точности [22, 25] для упругопластических течений, модифицированного для решения задач динамики сжимаемых сред с необратимыми сдвиговыми деформациями на эйлерово-лагранжевых сетках. Данная модификация позволяет повысить порядок аппроксимации схемы до второго на гладких решениях, сохранив монотонность на разрывных, без изменения разностного шаблона явной двухшаговой схемы, модифицировав только шаг *предиктор*. Для численного моделирования динамических упругопластических уравнений со вторым порядком аппроксимации по времени и пространству для схем типа *предиктор–корректор* достаточно решения упругих уравнений со вторым порядком аппроксимации на этапе *предиктор* с использованием линейризованных уравнений (1), (2). При этом учет пластического поведения среды происходит на этапе *корректор* после интегрирования уравнений и сводится к "посадке" девиаторов напряжений на поверхность текучести. В соответствии с этим решение задачи распада разрыва проводится на основе упрощенной системы уравнений в упругом приближении, получаемой из (1), если положить $\lambda = 0$.

Граничные условия на границе упругопластической среды также реализуются на этапе *предиктор* схемы Годунова, т. е. на этапе решения задачи распада разрыва. Со стороны деформируемого тела используются инварианты, приходящие на границу, и граничные условия [25]. В случае контакта с трением вместо уравнений для сдвиговых инвариантов берутся кулоновские соотношения, связывающие нормальные и касательные соотношения напряжений. Распределения и направления для сдвиговых компонент при этом берутся в соответствии с касательными скоростями с нижнего временного слоя. Для повышения точности в области гладких решений на границе используется экстраполяция инвариантов из граничной и предграничной ячеек.

В данной работе используется эйлерово-лагранжев подход [25]. Подход является многосеточным и использует три типа расчетных сеток. Первый тип — лагранжевы сетки в виде STL-файлов, задающие и сопровождающие деформируемые поверхности тел. Внутри однородных областей используются сетки второго типа — неподвижные регулярные с кубическими ячейками. Третий тип сеток — вспомогательные локальные подвижные эйлерово-лагранжевы сетки, связанные с поверхностями тел. Используемый многосеточный алгоритм расчета контактного взаимодействия сред и конструкций детально приведен в работе [25].

Результаты численных расчетов

Удар пластины по полупространству (тест Уилкинса). Рассматривается задача высокоскоростного удара пластины о покоящееся полупространство [44]. Материал пластины и преграды — алюминий, толщина пластины 5 мм, тыльная поверхность пластины свободна. Для алюминия используется УРС для шаровых компонент: $p(\rho) = 72(\rho/\rho_0 - 1) + 172(\rho/\rho_0 - 1)^2 + 40(\rho/\rho_0 - 1)^3$, где $p(\rho)$ — гидростатическое давление в ГПа, $\rho_0 = 2700$ кг/м³; модуль сдвига $G = 24,8$ ГПа; предел текучести $\sigma_T = 0,2976$ ГПа. Начальное положение контактной границы $x_k = 0,5$ см. До прихода

возмущений с боковых границ расчетной области решение на прямой $y = 0, z = 0$ остается одномерным.

Расчеты проводились для скоростей соударения 0,8 км/с на равномерной разностной сетке $500 \times 500 \times 500$ ячеек (10 ячеек на миллиметр). Для оценки сходимости проводились расчеты на более грубой сетке — примерно 5 ячеек на миллиметр. Для схемы повышенной точности по напряжению и плотности результаты практически совпали. Размеры более подробной сетки соответствовали разностной сетке из работы [44], где приводится решение задачи в лагранжевых переменных. По толщине пластины принималось 50 ячеек.

На рис. 1 показаны распределения нормальных напряжений вдоль оси Ox в полупространстве на момент времени 5 мкс, полученные по схемам Годунова второго и первого порядка аппроксимации по времени и пространству, а также по схеме Уилкинса, имеющей второй порядок аппроксимации по времени и пространству [44]. Наблюдается хорошее совпадение решения по схеме Годунова второго порядка аппроксимации с решением Уилкинса. Решение по схеме первого порядка недостаточно точно описывает амплитуды волновых фронтов и контактных разрывов.

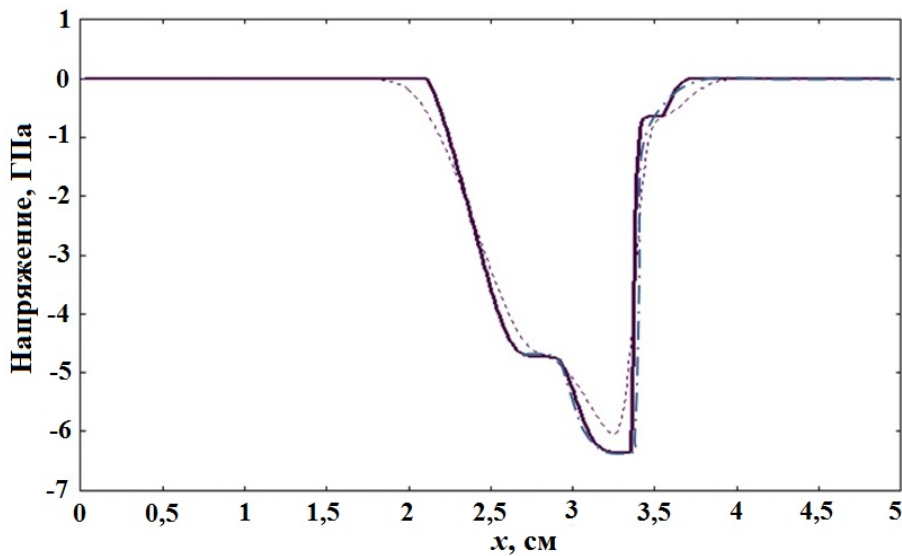


Рис. 1. Напряжение в алюминиевой преграде, $t = 5$ мкс: — — схема Годунова второго порядка аппроксимации; - - - — схема Годунова первого порядка аппроксимации; - · - — схема Уилкинса

Моделирование проникания медного ударника в алюминиевую преграду. Ударник — медный цилиндр высотой $H_1 = 2$ см, радиусом $R_1 = 0,4$ см; начальная вертикальная скорость 870 м/с; преграда — алюминиевый цилиндр высотой $H_2 = 6$ см, радиусом $R_2 = 3$ см на жестком основании (рис. 2). Свойства материалов: отожженная медь — $\rho = 8,9$ г/см³, $K = 178$ ГПа, $G = 48,7$ ГПа, $\sigma_T = 75$ МПа; отожженный алюминий — $\rho = 2,7$ г/см³, $K = 63,9$ ГПа, $G = 27$ ГПа, $\sigma_s = 0,08$ ГПа. Предполагается идеальная пластичность обоих материалов.

Размер ячейки по меди — 0,011 см, по алюминию — 0,025 см. Выбор указанных размеров ячеек проводился после исследований сходимости численного решения путем сравнения с решением на более грубой сетке с размерами ячеек в два раза больше. По размерам каверны и глубине проникания ударника наблюдалось совпадение результатов, но для описания растекания ударника по стенкам каверны потребовалась более подробная сетка.

На рис. 2 показаны контуры ударника и преграды в осевом сечении на разные моменты времени. Момент остановки ударника $t_k = 100$ мкс и конечная глубина проникания ударника $h_k = 3,6$ см близки к экспериментальным значениям, полученным Н. А. Златиным [45]. Наблюдаются большие изменения формы как ударника, так и преграды.

На рис. 3 в безразмерных координатах показаны результаты расчета в трехмерной постановке, расчета по лагранжево-эйлеровой методике на подвижных криволинейных сетках, связанных с границами тел, в двумерном комплексе UPSGOD [46], а также экспериментальные результаты [45].

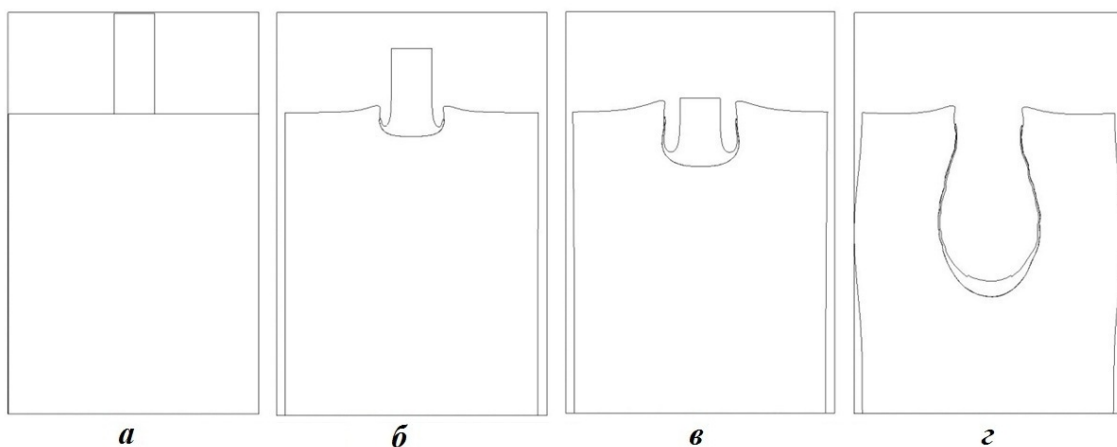


Рис. 2. Контуры ударника и преграды в осевом сечении в различные моменты времени: *a* — $t = 0$; *б* — $t = 9$ мкс; *в* — $t = 21$ мкс; *г* — $t = 100$ мкс

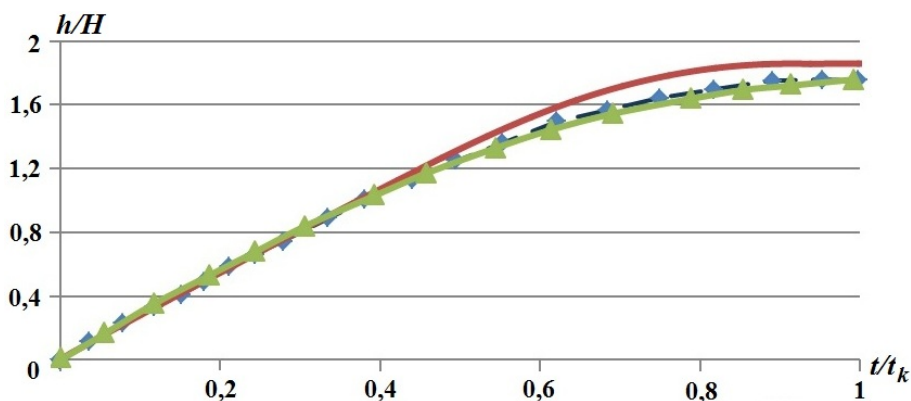


Рис. 3. Глубина проникания ударника от времени: — — расчет в трехмерной постановке; —◆— расчет по двумерному комплексу UPSGOD; —▲— эксперимент

Пробивание алюминиевой плиты стальным стержнем с оживальной головной частью при наклонном ударе. На рис. 4 приведена постановка задачи моделирования экспериментов по пробиванию стальным ударником с начальной скоростью 400 м/с алюминиевой плиты под углом 30° [47]. На рис. 5 показаны подробные фрагменты сеток поверхностей ударника и плиты, заданных в виде STL-файлов. Сталь имеет следующие параметры: $\rho = 7,85$ г/см³, $K = 175$ ГПа, $G = 80,77$ ГПа, $\sigma_T = 3,4$ ГПа, модуль упрочнения 2,4 ГПа; алюминий — $\rho = 2,71$ г/см³, $K = 67,64$ ГПа, $G = 26$ ГПа, $\sigma_T = 0,262$ ГПа, идеальная пластичность. В эксперименте [47] плита имела размеры $55 \times 55 \times 2,63$ см; с целью сокращения времени расчетов использовалась плита меньших размеров $10 \times 10 \times 2,63$ см со свободными границами, опирающаяся по периметру на жесткую квадратную раму шириной 1 см (рис. 6).

Размеры ячеек основной сетки в обоих телах 0,01 см. На рис. 7, *a*, *б* показаны сетки на моменты времени $t = 200$ и 540 мкс соответственно.

На рис. 8 показана пробитая плита в направлении начального вектора скорости ударника на момент $t = 540$ мкс. На рис. 9 приведены формы ударника: на момент $t = 40$ мкс с прогибом с тенденцией на рикошет и на момент вылета $t = 540$ мкс с противоположным прогибом, что было отмечено в экспериментах [47]. Численные значения запреградной скорости ударника изменяются в диапазоне от 195 до 205 м/с из-за упругих колебаний, что близко к экспериментально полученному среднему значению 200 м/с [47].

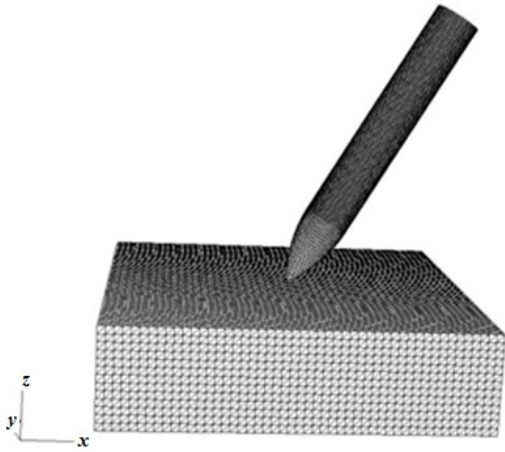


Рис. 4. Постановка задачи (STL-поверхности тел при $t = 0$) о пробивании алюминиевой плиты стальным стержнем

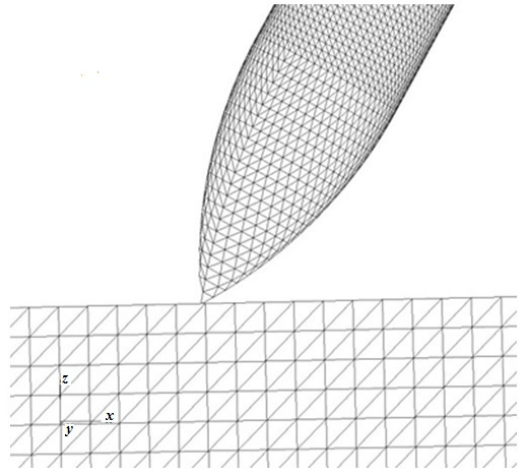


Рис. 5. Подробный фрагмент сетки в окрестности контакта

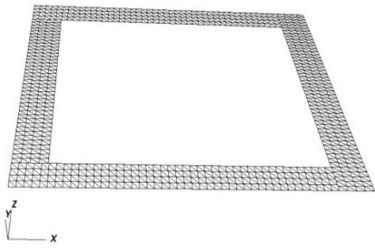
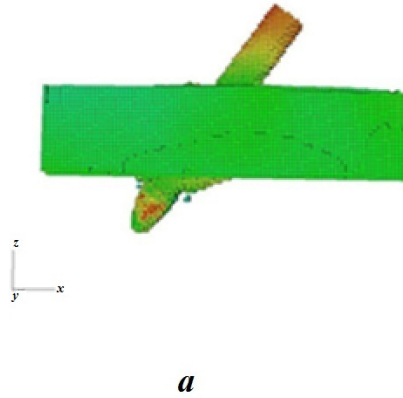


Рис. 6. Жесткая опора



a



б

Рис. 7. Пробивание алюминиевой плиты стальным стержнем: *a* — $t = 200$ мкс; *б* — $t = 540$ мкс

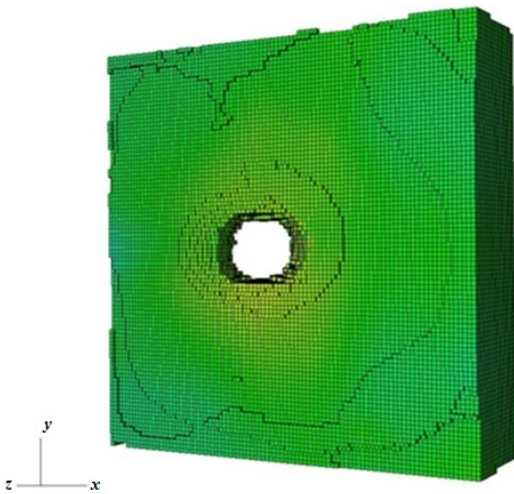


Рис. 8. Пробитая алюминиевая плита, $t = 540$ мкс

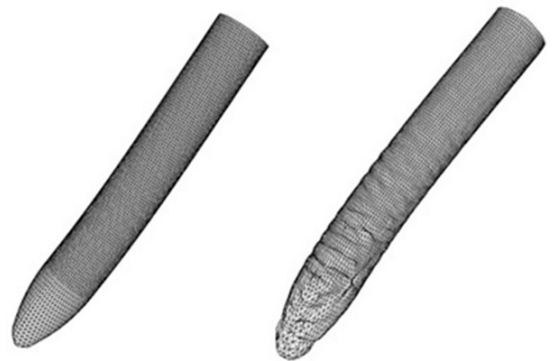


Рис. 9. Стальной стержень, $t = 40; 540$ мкс (STL-поверхности)

Нормальный и наклонный удары по двухслойной преграде. Для тестирования алгоритмов были проведены расчеты по взаимодействию ударника с двухслойной преградой. В этом случае алюминиевая плита из предыдущего теста разделена на два слоя в соотношении верхнего к нижнему 2 : 1. По плите осуществлялся нормальный удар тем же стальным ударником с начальной скоростью 400 м/с. На рис. 10 показаны STL-сетки ударника и двухслойной плиты на два момента времени для нормального удара. Подобные расчеты были проведены и для наклонного соударения с двухслойной плитой (см. рис. 4–9).

Сравнение численных результатов пробивания двухслойной плиты и такой же плиты в однослойной постановке [47] дало практически совпадающие результаты, что свидетельствует об адекватном выполнении контактных алгоритмов.

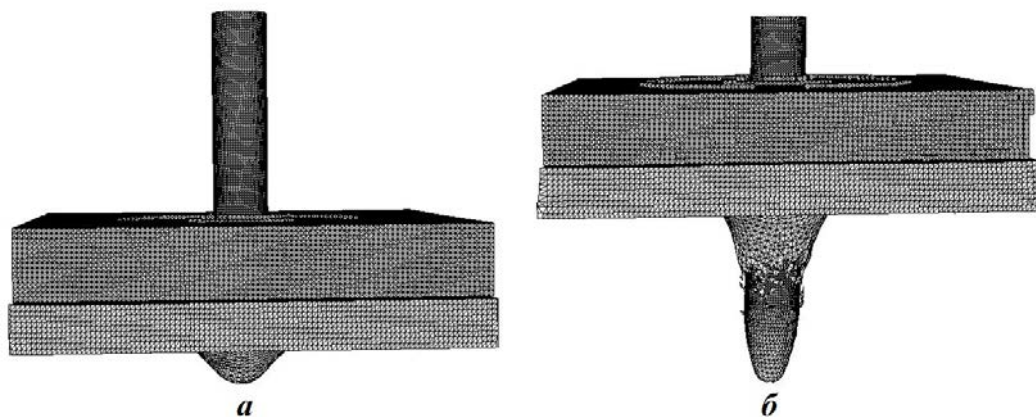


Рис. 10. Пробивание двухслойной алюминиевой плиты стальным ударником, 400 м/с: *a* — $t = 100$ мкс; *б* — $t = 250$ мкс

Нормальный и наклонный удар по усиленной двухслойной преграде. При замене нижнего слоя плиты на стальной с теми же параметрами стали, что и материал ударника, пробивания не происходит. На рис. 11 показаны распределение вертикальной скорости практически остановившегося ударника и основная сетка в плоскости симметрии задачи на момент времени $t = 180$ мкс при нормальном ударе; здесь изображены только ячейки внутри STL-поверхностей объектов. На рис. 12 на момент $t = 194$ мкс показано распределение вертикальной скорости в ударнике и двухслойной плите в плоскости симметрии при наклонном ударе под углом 30° ; на рис. 13 для этой же задачи изображены STL-поверхность ударника и распределение вертикальной скорости. К этому времени ударник также практически останавливается, совершая упругие колебания. Форма головной части ударника претерпевает значительные изменения. На рис. 14 приведены основные сетки и распределение вертикальной скорости для удара под углом 60° ; в этом случае происходит рикошет ударника со значительными изменениями его формы и деформациями.

Заключение

Применение многосеточной численной методики решения трехмерных задач взаимодействия деформируемых тел и сред в эйлеровых переменных на базе схемы Годунова повышенной точности для моделирования ударного взаимодействия упругопластических тел показало ее высокую точность, адекватность и эффективность. Методика позволяет моделировать в трехмерной постановке процессы глубокого проникания деформируемых тел в упругопластические преграды, перфорации многослойных преград, рикошетирования деформируемых ударников при различных углах соударения. В отличие от известных методик, применяемых для решения данного класса задач, используемый подход позволяет достаточно точно выделять контактные поверхности взаимодействующих тел на неподвижных сетках при больших перемещениях и деформациях с определением параметров

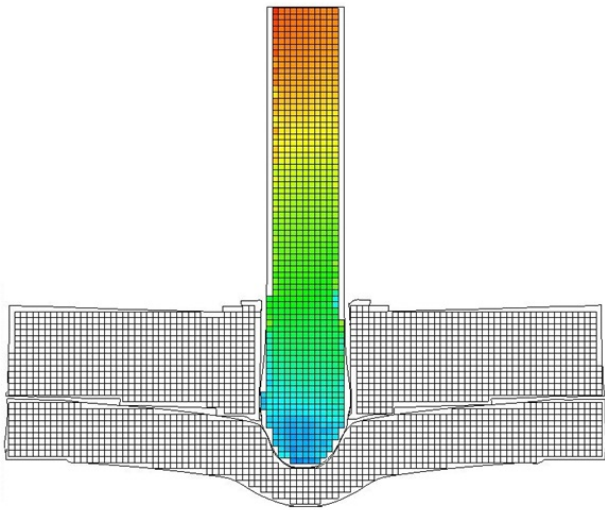


Рис. 11. Распределение вертикальной скорости и основная сетка при нормальном ударе со скоростью 400 м/с по усиленной двухслойной преграде, $t = 180$ мкс

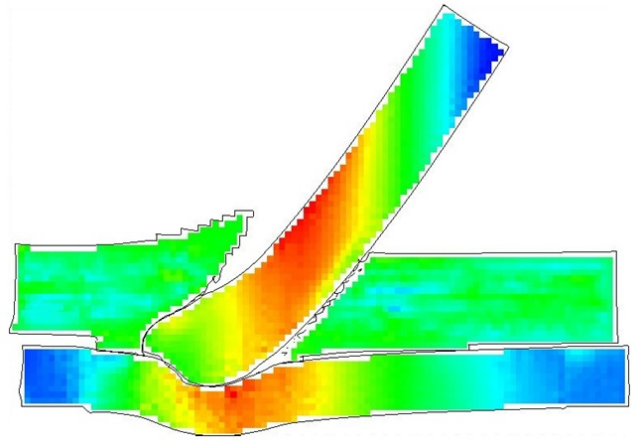


Рис. 12. Распределение вертикальной скорости в ударнике и двухслойной плите при ударе под углом 30° со скоростью 400 м/с, $t = 194$ мкс

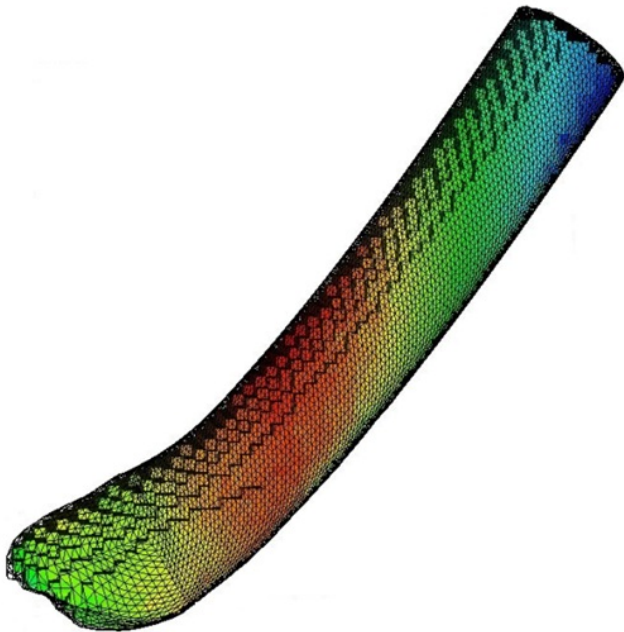


Рис. 13. Поверхность ударника и распределение вертикальной скорости при ударе под углом 30°

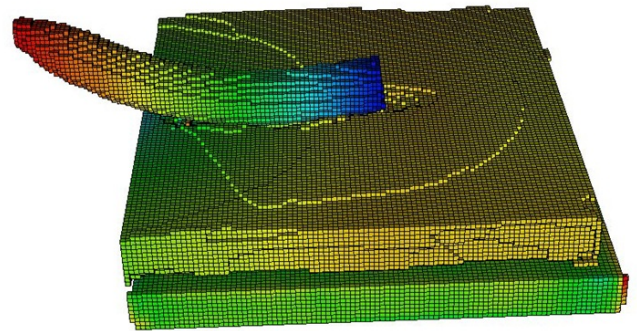


Рис. 14. Основные сетки и распределение вертикальной скорости при рикошете ударника (удар под углом 60°)

контактного взаимодействия. Сравнение с экспериментами по нормальному и наклонному пробиванию [47] показало несколько более интенсивное торможение ударника в расчетах. Авторы объясняют это отсутствием учета разрушения материала преграды: сильно деформированные ячейки преграды продолжают влиять на торможение так же, как и слабо деформированные. Одним из путей развития методики является включение в ее состав моделей динамического накопления повреждений и разрушения деформируемых тел.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект № 22-29-00672.

Список литературы

1. Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я., Крайко А. Н., Прокопов Г. П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976.
Godunov S. K., Zabrodin A. V., Ivanov M. Ya., Krayko A. N., Prokopov G. P. Chislennoe reshenie mnogomernykh zadach gazovoy dinamiki. M. Moskva: Nauka, 1976.
2. Колган В. П. Применение принципа минимальных значений производной к построению конечноразностных схем для расчета разрывных решений газовой динамики // Ученые записки ЦАГИ. 1972. Т. 3, № 6. С. 68–77.
Kolgan V. P. Primenenie printsipa minimalnykh znacheniy proizvodnoy k postroeniyu konechnoraznostnykh skhem dlya raschyeta razryvnykh resheniy gazovoy dinamiki // Uchyenye zapiski TsAGI. 1972. T. 3, № 6. S. 68–77.
3. Van Leer B. Towards the ultimate conservative difference scheme V: A second-order sequel to Godunov's method // J. Comp. Phys. 1979. Vol. 32. P. 101–136.
4. Roe P. L. Approximate riemann solvers, parameter vectors and difference schemes // Ibid. 1981. Vol. 43. P. 357–372.
5. Colella P., Woodward P. R. The piecewise-parabolic method (PPM) for gas-dynamics simulations // Ibid. 1984. Vol. 54. P. 174–201.
6. Hill D. J., Pullin D., Ortiz M., Meiron D. An Eulerian hybrid WENO centered-difference solver for elastic–plastic solids // Ibid. 2010. Vol. 229. P. 9053–9072.
7. Trangenstein J. A., Colella P. A higher-order Godunov method for modelling finite deformation in elastic–plastic solids // Commun. Pure Appl. Math. 1991. Vol. 44. P. 41–100.
8. Miller G. H., Colella P. A high-order Eulerian Godunov method for elastic-plastic flow in solids // J. Comp. Phys. 2001. Vol. 167. P. 131–176.
9. Gavrilyuk S. L., Favrie N., Saurel R. Modelling wave dynamics of compressible elastic materials // Ibid. 2008. Vol. 227. P. 2941–2969.
10. Favrie N., Gavrilyuk S.L. Dynamics of shock waves in elastic–plastic solids // ESAIM: Proc. EDP Sciences, 2011. Vol. 33. P. 50–67.
11. Dumbser M., Peshkov I., Romenski E., Zanotti O. High order ADERschemes for a unified first order hyperbolic formulation of continuum mechanics: viscous heat-conducting fluids and elastic solids // J. Comp. Phys. 2016. Vol. 314. P. 824–862.
12. Barton P. T., Drikakis D., Romenski E., Titarev V. A. Exact and approximate solutions of Riemann problems in non-linear elasticity // Ibid. 2009. Vol. 228. P. 7046–7068.
13. Barton P., Romenski E. On computational modelling of strain-hardening material dynamics // Commun. Comp. Phys. 2012. Vol. 11. P. 1525–1546.
14. Меньшов И. С., Мищенко А. В., Сережжкин А. А. Численное моделирование упругопластических течений методом Годунова на подвижных эйлеровых сетках // Мат. моделирование. 2013. Т. 25. С. 89–108.
Menshov I. S., Mishchenko A. V., Seryezhkin A. A. Chislennoe modelirovanie uprugoplasticheskikh techeniy metodom Godunova na podvizhnykh eylerovykh setkakh // Mat. modelirovanie. 2013. T. 25. S. 89–108.
15. Barton P. T., Drikakis D. An Eulerian method for multi-component problems in non-linear elasticity with sliding interfaces // J. Comp. Phys. 2010. Vol. 229 (15). P. 5518–5540.
16. Barton P. T., Drikakis D., Romenski E. An Eulerian finite-volume scheme for large elastoplastic deformations in solids // Int. J. Numer. Methods Eng. 2010. Vol. 81. P. 453.
17. López Ortega A., Lombardini M., Pullin D. I., Meiron D. I. Numerical simulation of elastic-plastic solid mechanics using an Eulerian stretch tensor approach and HLLD Riemann solver // J. Comp. Phys. 2014. Vol. 257. P. 414–441.

18. Schoch S., Nordin-Bates K., Nikiforakis N. An Eulerian algorithm for coupled simulations of elastoplastic-solids and condensed-phase explosives // J. Comp. Phys. 2013. Vol. 252. P. 163–194.
19. Titarev V. A., Romenski E., Toro E. F. MUSTA-type upwind fluxes for non-linear elasticity // Int. J. Numer. Methods Eng. 2008. Vol. 73. P. 897.
20. Кукуджанов В. Н. Метод расщепления упругопластических уравнений // Механика твердого тела. 2004. № 1. С. 98–108.
Kukudzhanov V. N. Metod rasshchepleniya uprugoplasticheskikh uravneniy // Mekhanika tverdogo tela. 2004. № 1. S. 98–108.
21. Кукуджанов В. Н. Связанные модели упругопластичности и поврежденности и их интегрирование // Там же. 2006. № 6. С. 83–109.
Kukudzhanov V. N. Svyazannye modeli uprugoplastichnosti i povrezhdynnosti i ikh integrirovaniye // Tam zhe. 2006. № 6. S. 83–109.
22. Abouziarov M., Aiso H., Takahashi T. An application of conservative scheme to structure problems // Mathematical Analysis in Fluid and Gas Dynamics. Series from Research Institute of Mathematics of Kyoto University. 2004. No 1353. P. 192–201.
23. Abouziarov M. X., Aiso H. An application of retroactive characteristic method to conservative scheme for structure problems (elastic-plastic flows) // 10th Int. Conf. "Hyperbolic Problems, Theories, Numerics, Applications". Osaka, September 2004. Yokohama Publishers, Inc., 2006. P. 223–230.
24. Abuziarov K. M., Abuziarov M. H., Kochetkov A. V. 3D fluid structure interaction problem solving method in Euler variables based on the modified Godunov scheme // Materials Physics and Mechanics. 2016. Vol. 28, No 1–2. С. 1–5.
25. Абузаров М. Х., Глазова Е. Г., Кочетков А. В., Крылов С. В. Численная методика решения трехмерных задач взаимодействия высокоскоростных газовых струй с упругопластическими преградами // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2021. Вып. 4. С. 24–40.
Abuzyarov M. Kh., Glazova E. G., Kochetkov A. V., Krylov S. V. Chislennaya metodika resheniya tryekhmernykh zadach vzaimodeystviya vysokoskorostnykh gazovykh stuy s uprugoplasticheskimi pregradami // Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Matematicheskoye modelirovaniye fizicheskikh protsessov. 2021. Vyp. 4. S. 24–40.
26. Barton P., Deiterding R., Meiron D., Pullin D. Eulerian adaptive finite-difference method for high-velocity impact and penetration problems // J. Comp. Phys. 2013. Vol. 240. P. 76–99.
27. Schoch S., Nordin-Bates K., Nikiforakis N. An Eulerian algorithm for coupled simulations of elastoplastic-solids and condensed-phase explosives // Ibid. Vol. 252. P. 163–194.
28. Miller G. H., Colella P. A conservative three-dimensional Eulerian method for coupled fluid-solid shock capturing // Ibid. 2002. Vol. 183. P. 26–82.
29. Barton P. T., Obadia B., Drikakis D. A conservative level-set based method for compressible solid/fluid problems on fixed grids // Ibid. 2011. Vol. 230. P. 7867–7890.
30. Udaykumar H. S., Tran L., Belk D. M., Vanden K. J. An Eulerian method for computation of multimaterial impact with ENO shock-capturing and sharp interfaces // Ibid. 2003. Vol. 186. P. 136–177.
31. Barton P. T. An interface-capturing Godunov method for the simulation of compressible solid-fluid problems // Ibid. 2019. Vol. 390. P. 25–50.
32. Wallis T., Barton P. T., Nikiforakis N. A flux-enriched Godunov method for multi-material problems with interface slide and void opening // Ibid. 2021. Vol. 442. Paper 110499.
33. Michael L., Nikiforakis N. A multi-physics methodology for the simulation of reactive flow and elastoplastic structural response // Ibid. 2018. Vol. 367. P. 1–27.

34. Favrie N., Gavriljuk S. L., Saurel R. Solid-fluid diffuse interface model in cases of extreme deformations // J. Comp. Phys. 2009. Vol. 228. P. 6037–6077.
35. Favrie N., Gavriljuk S. L. Diffuse interface model for compressible fluid-compressible elastic-plastic solid interaction // Ibid. 2012. Vol. 231. P. 2695–2723.
36. Ndanou S., Favrie N., Gavriljuk S. Multi-solid and multi-fluid diffuse interface model: applications to dynamic fracture and fragmentation // Ibid. 2015. Vol. 295. P. 523–555.
37. Michael L., Nikiforakis N. A hybrid formulation for the numerical simulation of condensed phase explosives // Ibid. 2016. Vol. 316. P. 193–217.
38. Jackson H., Nikiforakis N. A unified Eulerian framework for multimaterial continuum mechanics // Ibid. 2020. Vol. 401. P. 109022.
39. Adler M. C., Jain S. S., West J. R., Mani A., Lele S. K. Diffuse-Interface Capturing Methods for Compressible Multiphase Fluid Flows and Elastic-Plastic Deformation in Solids: Part I. Methods. Center for Turbulence Research, Annual Research Briefs, 2020. <https://www.researchgate.net/publication/348297377>.
40. Yashraj Bhosale, Tejaswin Parthasarathy, Mattia Gazzol A remeshed vortex method for mixed rigid/soft body fluid–structure interaction // J. Comp. Phys. 2021. Vol. 444. Paper 110577.
41. Краюхин А. А., Стадник Л. Н., Янилкин Ю. В. Численное моделирование движения жестких ударников в упругопластических средах на неподвижной счетной сетке по методике ЭГАК // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2019. Вып. 1. С. 19–32.
Krayukhin A. A., Stadnik L. N., Yanilkin Yu. V. Chislennoe modelirovanie dvizheniya zhyestkikh udarnikov v uprugoplasticheskikh sredakh na nepodvizhnoy schetnoy setke po metodike EGAK // Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov. 2019. Vyp. 1. S. 19–32.
42. Янилкин Ю. В. Модели замыкания уравнений лагранжевой газодинамики и упругопластики в многокомпонентных ячейках. Часть 1. Изотропные модели // Там же. 2017. Вып. 3. С. 3–21.
Yanilkin Yu. V. Modeli zamykaniya uravneniy lagranzhevoy gazodinamiki i uprugoplastiki v mnogokomponentnykh yacheykakh. Chast 1. Izotropnye modeli // Tam zhe. 2017. Vyp. 3. S. 3–21.
43. Янилкин Ю. В., Топорова О. О., Колобянин В. Ю. Модели замыкания уравнений лагранжевой газодинамики и упругопластики в многокомпонентных ячейках. Часть 2. Анизотропные модели // Там же. С. 22–38.
Yanilkin Yu. V., Toporova O. O., Kolobyanin V. Yu. Modeli zamykaniya uravneniy lagranzhevoy gazodinamiki i uprugoplastiki v mnogokomponentnykh yacheykakh. Chast 2. Anizotropnye modeli // Tam zhe. S. 22–38.
44. Уилкинс М. Л. Расчет упругопластических течений // Вычислительные методы в гидродинамике. М.: Мир, 1967. С. 212–263.
Uilkins M. L. Raschet uprugoplasticheskikh techeniy // Vychislitelnye metody v gidrodinamike. M.: Mir, 1967. S. 212–263.
45. Златин Н. А., Мишин Г. И. Баллистические установки и их применение в экспериментальных исследованиях. М.: Наука, 1974.
Zlatin N. A., Mishin G. I. Ballisticheskie ustanovki i ikh primenenie v eksperimentalnykh issledovaniyakh. M.: Nauka, 1974.
46. Абузьяров М. Х., Крылов С. В., Цветкова Е. В. Моделирование гидроупругопластического взаимодействия с помощью программного комплекса UPSGOD // Проблемы прочности и пластичности. 2013. Вып. 75 (1). С. 25–32.
Abuzyarov M. Kh., Krylov S. V., Tsvetkova E. V. Modelirovanie gidrouprugoplasticheskogo vzaimodeystviya s pomoshchyu programmnoy kompleksa UPSGOD // Problemy prochnosti i plastichnosti. 2013. Vyp. 75 (1). S. 25–32.

47. *Piekutowski A. J., Forrestal M. J., Poormon K. L., Warren T. L.* Perforation of aluminum plates with ogive nose steel rods at normal and oblique impacts // *Int J. Impact Eng.* 1996. Vol. 7—8. P. 877.

Статья поступила в редакцию 06.10.22.

УДК 519.65

АППРОКСИМАЦИЯ ДАННЫХ ГИСТОГРАММЫ МЕТОДОМ УСЛОВНОЙ МИНИМИЗАЦИИ ДЛИНЫ КУБИЧЕСКОГО СПЛАЙНА КЛАССА C^1 , ОБЛАДАЮЩЕГО СВОЙСТВАМИ НЕОТРИЦАТЕЛЬНОСТИ И ЛОКАЛЬНОЙ МОНОТОННОСТИ. ЧАСТЬ 1

С. В. Мжачих, Н. В. Колобянина, Ю. Н. Лапшина
(ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области)

Проблема, рассматриваемая в настоящей работе, относится к обработке данных, которые доступны в виде функции одной переменной, заданной ступенчатой гистограммой. Построив для таких данных аппроксимацию в виде кубического сплайна класса C^1 с желаемыми свойствами, среди которых могут быть неотрицательность и локальная монотонность, исследователь сможет оценить участки монотонности и значения в заданных точках, причем как для самой функции, так и для ее производной.

В статье представлены основные положения методики расчета аппроксимации. Задача решается с помощью метода минимизации целевой функции, представляющей собой зависимость длины кривой сплайна от векторной величины. Для искомого вектора формируется область, которая задает сплайну нужные свойства. Наиболее точно проблема решается с помощью ограничений в виде нелинейных неравенств, но в некоторых задачах допустимыми могут быть и линейные неравенства. В последнем случае решение находится приближенно, но быстро и практически безаварийно.

Ключевые слова: кубический сплайн, условная минимизация, локально монотонная аппроксимация, неотрицательная аппроксимация, модифицированный метод Лагранжа, метод градиентного спуска, метод линеаризации Ньютона, внутригрупповой спектр.

Введение

Задача, которая рассматривается в настоящей работе, относится к обработке данных, заданных скалярной (одномерной) функцией одного аргумента в виде ступенчатой гистограммы. Такие данные типичны, например, для разностных задач, когда одномерному или многомерному множеству (пространственной ячейке, энергетической группе, шагу по времени и т. п.) ставится в соответствие одно числовое значение, которое является некоторым усредненным значением непрерывной функции на рассматриваемом множестве. Аналитическое представление функции не известно, но иногда для анализа нужна оценка ее вида. Поэтому делается попытка конструирования непрерывной аппроксимации. В некоторых исследованиях интересен вид производной функции. Для таких случаев необходимо строить аппроксимацию класса C^1 .

К аппроксимирующей функции могут предъявляться разные требования. Так, в некоторых задачах физическая величина, для которой рассчитывается аппроксимация, не может быть отрицательной по определению (концентрация частиц, энергия и т. п.). Часто требуется наличие у аппроксимирующей функции свойства локальной монотонности (ЛМ), т. е. когда на отрезках данных пользователя функция либо не возрастает, либо не убывает.

Решать задачу расчета аппроксимации данных гистограммы можно разными путями (см., например, работы [1, 2]). В работе [2] схематично описан метод восстановления непрерывных внутригрупповых нейтронных спектров. Рассчитывались энергетические зависимости, используемые

для описания концентрации частиц, при этом сеточная функция усреднялась по различным пространственным областям (зонам). В качестве независимой использовалась переменная латаргии ($\ln(10/E)$, E — энергия, выраженная в МэВ). Метод из работы [2] прошел испытание временем и хорошо себя зарекомендовал. Его идея заключалась в аппроксимации ступенчатой гистограммы непрерывной функцией, заданной параболой в пределах каждой энергетической группы. Для расчета использовался метод условной минимизации. В результате получалась непрерывная, но не дифференцируемая (на границах групп) неотрицательная зависимость со свойством ЛМ.

В настоящей работе достаточно подробно описан метод, который является дальнейшим развитием метода из работы [2]. Несмотря на наличие многих общих черт, новый алгоритм существенно отличается от предыдущего.

Во-первых, теперь в качестве искомой функции используется кубический сплайн класса C^1 , который намного точнее аппроксимирует ступенчатые данные с большими перепадами значений.

Во-вторых, используется другая целевая функция (ЦФ), точка минимума которой определяет решение задачи. В новом методе ищется минимум длины кривой кубического сплайна класса C^1 . Ранее была использована ЦФ, которая имеет минимальное нулевое значение, если искомая кусочно-параболическая функция относится к классу C^1 .

В-третьих, используются другие неравенства, которые задают ограничения на искомый вектор решения. Новые идеи появились после того, как авторы больше узнали о локально комонотонных сплайнах класса C^1 (см., например, работы [3, 4]).

В-четвертых, используется другой решатель системы линейных уравнений. Вместо метода исключения Гаусса применяется метод квадратного корня, разработанный специально для систем с симметричной матрицей (см., например, книгу [5]).

Знания о методе условной минимизации, использованном в настоящей работе, были получены, главным образом, из книги [6].

1. Аппроксимирующая функция в виде кубического сплайна класса C^1

Рассмотрим множество из отрезков $[t_{n-1}, t_n]$, где $n = \overline{1, N}$, $n \in \mathbb{Z}$ (\mathbb{Z} — множество целых чисел). Для каждого n -го отрезка известно положительное значение \bar{f}_n . Величины \bar{f}_n образуют вектор* $\bar{\mathbf{f}} \equiv (\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_N)^T \equiv (\bar{f}_n)_{n=\overline{1, N}}$.

В предлагаемом методе используются абсолютные значения рассчитываемых величин, при этом полагается, что некоторое среднее значение элементов вектора $\bar{\mathbf{f}}$ равно единице. С помощью множителя проведем нормирование исходного вектора $\bar{\mathbf{f}}$ так, чтобы истинным стало равенство

$$\sum_{n=1}^N \bar{f}_n \Delta_n = \sum_{n=1}^N \Delta_n = t_N - t_0, \quad (1)$$

где $\Delta_n \equiv \Delta t_n \equiv t_n - t_{n-1}$.

Будем также полагать, что для всех значений индекса n истинны неравенства

$$\bar{f}_n > \varphi_0, \quad (2)$$

где φ_0 — неотрицательный параметр. Если для данных, которые требуют обработки, некоторые неравенства (2) оказываются ложными, то задачу надо переформулировать, удалив из рассмотрения "плохие" отрезки. Возможно, что при этом задачу придется разбить на несколько подзадач, для которых равенства (1) и неравенства (2) истинны. Действия подсказаны практикой расчетов. Дело в том, что для "плохих" отрезков не всегда удается получить решение с приемлемой точностью, при этом сам процесс расчета может быть слишком дорогостоящим.

Ступенчатую гистограмму $\bar{\mathbf{f}}$ будем аппроксимировать сплайном $F(t)$ класса $C^1[t_0, t_N]$, заданным на отрезке $[t_{n-1}, t_n]$ в виде полинома третьей степени

$$F_n(t) \equiv b_n(t - t_{n-1})^3 + c_n(t - t_{n-1})^2 + d_{n-1}(t - t_{n-1}) + f_{n-1}, \quad t \in [t_{n-1}, t_n], \quad (3)$$

*Символ тождества иногда будет использоваться для задания обозначения (записи) или равенства по определению.

откуда $F(t_i) = f_i$, $F'(t_i) = d_i$, где $i = \overline{0, N-1}$. Полагаем $F(t_N) = f_N$, $F'(t_N) = d_N$.

Из условий непрерывности функций $F(t)$ и $F'(t)$ получаем коэффициенты (см. [3])

$$c_n = \frac{3}{\Delta_n} \left(\delta_n - \frac{2d_{n-1} + d_n}{3} \right); \quad b_n = \frac{2}{\Delta_n^2} \left(\frac{d_n + d_{n-1}}{2} - \delta_n \right), \quad (4)$$

где

$$\delta_n \equiv \frac{\Delta f_n}{\Delta_n}, \quad \Delta f_n \equiv f_n - f_{n-1}, \quad n = \overline{1, N}.$$

Рассмотрим некоторые свойства кубического полинома $F_n(t)$.

Пусть $b_n \neq 0$. Полином может иметь два действительных локальных экстремума:

$$F'_n(t_n^\pm) = 0, \quad t_n^\pm = \tilde{t}_n \pm \frac{\sqrt{p_n}}{3b_n}, \quad \tilde{t}_n = t_{n-1} - \frac{c_n}{3b_n} = \frac{1}{2}(t_n^+ + t_n^-), \quad p_n = c_n^2 - 3b_n d_{n-1}. \quad (5)$$

Если $p_n < 0$, то уравнение $F'_n(t) = 0$ не имеет действительных корней и функция $F_n(t)$ на всей действительной оси (на множестве \mathbb{R}) ведет себя строго монотонно. Если $p_n > 0$, то $F''_n(t_n^\pm) = \pm 2\sqrt{p_n}$. Следовательно, точка t_n^+ всегда является точкой минимума, а точка t_n^- — точкой максимума. Если $p_n = 0$, то точки экстремумов совпадают, функция при этом монотонна. В случае $b_n \neq 0$ такая точка называется точкой перегиба.

Пусть $b_n = 0$. Имеем $p_n = c_n^2 \geq 0$. Если $c_n < 0$, то парабола имеет точку максимума, если $c_n > 0$ — точку минимума. В случае $c_n = 0$ ($p_n = 0$) функция $F_n(t)$ линейна.

Итак, для точки перегиба и точки локального минимума, включая случай $b_n = 0$ ($\sqrt{p_n} = c_n$), справедливы эквивалентные формулы

$$t_n^+ = t_{n-1} + \frac{-c_n + \sqrt{p_n}}{3b_n} = t_{n-1} + \frac{-d_{n-1}}{c_n + \sqrt{p_n}}.$$

Для расчета аппроксимирующей функции $F(t)$ привлечем N равенств

$$\int_{t_{n-1}}^{t_n} F_n(t) dt = \bar{f}_n \Delta_n, \quad n = \overline{1, N}. \quad (6)$$

Учитывая (4), из равенств (6) можно получить рекуррентное соотношение

$$d_n - d_{n-1} - \frac{6}{\Delta_n} (f_n + f_{n-1} - 2\bar{f}_n) = 0, \quad n = \overline{1, N}. \quad (7)$$

Зададим для сплайна в крайней правой точке граничное условие (ГУ) в виде $F''(t_N) = 0$, которое принято называть естественным. Другие ГУ возможны, но в этой работе не рассматриваются. Поскольку $F''(t_N) = 6b_N \Delta_N + 2c_N$, то, учитывая (4), получаем соотношение

$$d_N = \frac{1}{2} (-d_{N-1} + 3\delta_N). \quad (8)$$

Из соотношения (8) и соотношения (7), записанного для $n = N$, следует формула

$$d_N = \frac{1}{\Delta_N} (3f_N + f_{N-1} - 4\bar{f}_N). \quad (9)$$

Аналогичное задание ГУ в крайней левой точке приводит к формуле

$$d_0 = \frac{1}{\Delta_1} (-3f_0 - f_1 + 4\bar{f}_1). \quad (10)$$

Из формул (9) и (10) следует выбрать одну. Если вектор $\mathbf{f} \equiv (f_n)_{n=0, \overline{N}}$ считать искомым, то с помощью соотношений (7) можно рассчитать вектор $\mathbf{d} \equiv (d_n)_{n=0, \overline{N}}$, а затем по формулам (4) определить векторы $\mathbf{c} \equiv (c_n)_{n=1, \overline{N}}$ и $\mathbf{b} \equiv (b_n)_{n=1, \overline{N}}$. Переменные b_n, c_n, d_n, p_n задают значения соответствующих функций вектора \mathbf{f} : $b_n = B_n(\mathbf{f}), c_n = C_n(\mathbf{f}), d_n = D_n(\mathbf{f}), p_n = P_n(\mathbf{f})$.

Далее будем использовать обозначения $\nabla Y \equiv \left(\frac{\partial Y}{\partial f_i} \right)_{i=0, \overline{N}}, \nabla^2 Y \equiv \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial f_j \partial f_i} \right)_{i, j=0, \overline{N}}$ соответственно для вектора градиента и симметричной матрицы Гессе для произвольной функции $Y(\mathbf{f})$ класса C^1 . Заметим, что величины $\nabla D_n, \nabla B_n, \nabla C_n$ не зависят от вектора \mathbf{f} , поэтому они определяются на стадии расчета начальных данных (РНД) задачи.

2. Постановка задачи расчета точки условного минимума для функции нескольких переменных

Будем решать задачу конструирования кубического сплайна $F(t)$ (см. (3)), который должен:

- 1) принадлежать классу $C^1[t_0, t_N]$;
- 2) сохранять известные интегралы гистограммы (см. (6));
- 3) обладать свойством ЛМ;
- 4) быть неотрицательным.

Проблема построения аппроксимирующей функции с заданными свойствами относится к задаче восстановления данных. Для такой задачи, как правило, единственного решения не существует, а заключение о пригодности решения, полученного на основании выбранной математической модели расчета, для конкретного приложения во многом является субъективным.

Для решения проблемы воспользуемся методом условной минимизации. Для этого, во-первых, нужно определить зависящую от вектора \mathbf{f} скалярную ЦФ, для которой требуется найти минимальное значение. И, во-вторых, нужно определить семейство равенств и неравенств, задающих область, в пределах которой вектор решения \mathbf{f} формирует сплайн с требуемыми свойствами.

За свойство 1 (из указанных четырех) отвечают формулы (4), за свойство 2 — рекуррентное соотношение (7). Метод представляет собой итерационную процедуру. Равенства-ограничения (7) учтем так, чтобы для каждой итерации решения \mathbf{f}_k они выполнялись точно. Для этого навяжем сплайну ГУ в одной из граничных точек отрезка $[t_0, t_N]$. Можно задавать любое ГУ, которое сводится к известной функции $D_0(\mathbf{f})$ или $D_N(\mathbf{f})$. В работе рассматривается условие $F''(t_N) = 0$ или $F''(t_0) = 0$ (т. е. используется (9) или (10)).

Наличие у аппроксимирующей функции свойства 2 для некоторых приложений может быть критически важным. Так, например, если искомая функция задает энергетическую зависимость концентрации частиц (спектр), то свойство 2 позволяет аппроксимации точно воспроизводить известные числа частиц в энергетических группах.

Для задания свойств 3 и 4 привлекаются неравенства. Под точным будем понимать решение сформулированной выше задачи с заданным ГУ при использовании ЦФ и нелинейных неравенств-ограничений, приводимых далее. В такой постановке минимум ЦФ ищется на самом широком множестве значений \mathbf{f} , для которого свойства 3 и 4 гарантируются. Для решения проблемы, обозначенной в начале данного раздела, можно использовать другие варианты метода, которые получаются при задании ограничений с помощью линейных неравенств. Возможно, пользователь предпочтет один из них, так как у них есть свои преимущества. Следует заметить, что искомый сплайн $F(t)$ зависит от некоторых параметров метода решения.

2.1. Целевая функция. Будем искать аппроксимирующий сплайн $F(t)$, соответствующий минимуму длины его кривой, т. е. будем решать задачу вида

$$\sum_{n=1}^N \int_{t_{n-1}}^{t_n} \sqrt{1 + S_n^2(t)} dt \rightarrow \min, \quad \text{где } S_n(t) \equiv F'_n(t). \quad (11)$$

Интеграл, используемый в (11), не может быть выражен через элементарные функции, поэтому длину кривой будем рассчитывать приближенно. Применим метод численного интегрирования, например, метод Гаусса. Пусть M_G — число квадратур на каждом отрезке $[t_{n-1}, t_n]$. Зададим ЦФ в виде

$$\Gamma(\mathbf{f}) \equiv \sum_{n=1}^N \Gamma_n(\mathbf{f}), \quad \Gamma_n(\mathbf{f}) \equiv \sum_{m=1}^{M_G} \Delta_{n,m} \sqrt{E_{n,m}(\mathbf{f})} \approx \int_{t_{n-1}}^{t_n} \sqrt{1 + S_n^2(t)} dt, \quad E_{n,m}(\mathbf{f}) \equiv 1 + S_{n,m}^2(\mathbf{f}).$$

Здесь

$$\Delta_{n,m} = \frac{1}{2} \omega_m \Delta_n; \quad S_{n,m}(\mathbf{f}) \equiv F'_n(t_{n,m}) = \beta_{2,n,m} b_n + \beta_{1,n,m} c_n + d_{n-1};$$

$$t_{n,m} = t_{n-1} + \tau_{n,m}, \quad \tau_{n,m} = \frac{1}{2} (\mu_m + 1) \Delta_n; \quad \beta_{k,n,m} = (k+1) \tau_{n,m}^k, \quad k = \overline{1, 2};$$

$$\omega_m, \mu_m \text{ — веса и узлы квадратуры, } \sum_{m=1}^{M_G} \omega_m = 2;$$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial f_i} = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^{M_G} \frac{\Delta_{n,m} S_{n,m}(\mathbf{f})}{E_{n,m}^{1/2}} \frac{\partial S_{n,m}(\mathbf{f})}{\partial f_i}; \quad \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial f_j \partial f_i} = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^{M_G} \frac{\Delta_{n,m}}{E_{n,m}^{3/2}} \frac{\partial S_{n,m}(\mathbf{f})}{\partial f_i} \frac{\partial S_{n,m}(\mathbf{f})}{\partial f_j}; \quad (12)$$

$$\nabla S_{n,m} = \beta_{2,n,m} \nabla B_n + \beta_{1,n,m} \nabla C_n + \nabla D_{n-1}.$$

Значения $\beta_{1,n,m}$, $\beta_{2,n,m}$ и $\nabla S_{n,m}$ определяются на стадии РНД задачи. Матрица $\nabla^2 \Gamma$ полностью заполнена, ее элементы на главной диагонали положительны.

Если для рекуррентного соотношения используется значение d_0 , то $D_0(\mathbf{f}) \equiv D_0(f_0, f_1)$, а для $n \in [1, N]$ зависимость $D_n(\mathbf{f})$ превращается в зависимость вида $D_n(f_0, f_1, \dots, f_n)$. Следовательно, если $i \notin [0, n]$, то $\frac{\partial D_n}{\partial f_i} = \frac{\partial B_n}{\partial f_i} = \frac{\partial C_n}{\partial f_i} = 0$. Дальнейший анализ приводит к выводу, что в первой формуле (12) суммирование ведется от $n = \max(1, i)$, а во второй — от $n = \max(1, i, j)$.

Если для рекуррентного соотношения используется значение d_N , то можно показать, что $\frac{\partial D_{n-1}}{\partial f_i} = \frac{\partial B_n}{\partial f_i} = \frac{\partial C_n}{\partial f_i} = 0$, если $i \notin [n-1, N]$. Поэтому в первой формуле (12) задаем суммирование до $n = \min(N, i+1)$, а во второй — до $n = \min(N, i+1, j+1)$.

На практике было исследовано несколько вариантов задания ЦФ. Выбор авторов обусловлен полезным свойством данной ЦФ, которое было предсказано, а затем подтвердилось в процессе тестирования методики. Было замечено, что расчеты с рассматриваемой ЦФ без использования ограничений, относящихся к ЛМ, приводили к наиболее сглаженным аппроксимациям, при этом эффективно подавлялись численные (физически не обоснованные) осцилляции. Это свойство продемонстрировано на расчетах задач безусловной минимизации. Отметим, что выбранная ЦФ не определяет свойство ЛМ сплайна.

2.2. Ограничения, относящиеся к ЛМ сплайна, в виде нелинейных неравенств. Пусть значения гистограммы на отрезках $[t_{n-2}, t_{n-1}]$, $[t_{n-1}, t_n]$ и $[t_n, t_{n+1}]$ монотонно возрастают, при этом выполняется двойное неравенство

$$\rho \bar{f}_{n-1} < \bar{f}_n < \frac{1}{\rho} \bar{f}_{n+1}, \quad (13)$$

где $\rho = \frac{2+\varsigma}{2-\varsigma}$ — параметр, зависящий от неотрицательного параметра ς . Заметим, что $\rho \geq 1$.

Условие (13) формируется из неравенств

$$\bar{f}_n - \bar{f}_{n-1} > \frac{\varsigma}{2} (\bar{f}_{n-1} + \bar{f}_n) \geq 0; \quad \bar{f}_{n+1} - \bar{f}_n > \frac{\varsigma}{2} (\bar{f}_n + \bar{f}_{n+1}) \geq 0.$$

Если условие (13) выполнено, то потребуем от функции $F_n(t)$ неубывания на отрезке $[t_{n-1}, t_n]$, т. е. $F'_n(t) \geq 0, \forall t \in [t_{n-1}, t_n]$.

Условие монотонности сплайна $F(t)$ на отрезке $[t_{n-1}, t_n]$ в случае $\delta_n \neq 0$ задается системой трех неравенств (см. [3])

$$x_n + y_n - 3 - \sqrt{x_n y_n} \leq 0; \quad (14)$$

$$x_n \geq 0; \quad y_n \geq 0, \quad (15)$$

где

$$x_n \equiv \frac{d_{n-1}}{\delta_n}; \quad y_n \equiv \frac{d_n}{\delta_n}.$$

Вместо неравенства (14), функция которого не дифференцируется при $x_n = 0$ и $y_n = 0$, лучше использовать эквивалентное (для области (15)) неравенство

$$\Psi(x_n, y_n) \leq 0, \quad (16)$$

где

$$\Psi(x, y) \equiv \begin{cases} -xy, & \text{если } x + y - 3 \leq 0; \\ (x + y - 3)^2 - xy & \text{в других случаях,} \end{cases} \quad \Psi \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}).$$

Запишем неравенство (16) в виде

$$r_n = R_n(\mathbf{f}) \leq 0, \quad (17)$$

При условии (13) полагаем $R_n(\mathbf{f}) \equiv R_n^-(\mathbf{f})$, где

$$R_n^\pm(\mathbf{f}) \equiv \begin{cases} 0, & \text{если } \pm \delta_n > 0 \text{ или } (\pm d_{n-1} > 0 \text{ и } \pm d_n > 0); \\ -\Delta_n^2 d_{n-1} d_n, & \text{если } \pm (d_{n-1} + d_n - 3\delta_n) \geq 0; \\ \Delta_n^2 [(d_{n-1} + d_n - 3\delta_n)^2 - d_{n-1} d_n] & \text{в других случаях.} \end{cases}$$

Пусть значения гистограммы на трех соседних отрезках монотонно убывают, при этом выполняется двойное неравенство

$$\rho \bar{f}_{n+1} < \bar{f}_n < \frac{1}{\rho} \bar{f}_{n-1}, \quad (18)$$

которое формируется из неравенств

$$\bar{f}_{n-1} - \bar{f}_n > \frac{\varsigma}{2} (\bar{f}_{n-1} + \bar{f}_n) \geq 0; \quad \bar{f}_n - \bar{f}_{n+1} > \frac{\varsigma}{2} (\bar{f}_n + \bar{f}_{n+1}) \geq 0.$$

Если условие (18) выполнено, то потребуем от функции $F_n(t)$ невозрастания на отрезке $[t_{n-1}, t_n]$, т. е. $F'_n(t) \leq 0, \forall t \in [t_{n-1}, t_n]$.

В этом случае используем неравенство (17), полагая $R_n(\mathbf{f}) \equiv R_n^+(\mathbf{f})$.

Сформулируем в общем виде ограничения, которые определяют свойство ЛМ. Для отрезка $[t_{n-1}, t_n]$ при истинности одного из условий (13) или (18), которые не могут быть истинными одновременно, зададим ограничение в виде нелинейного неравенства (17), а также линейных неравенств в узлах сплайна

$$g_j = G_j(\mathbf{f}) \leq 0, \quad (19)$$

где $j = \overline{n-1, n}$;

$$G_j(\mathbf{f}) \equiv G_j^\pm(\mathbf{f}); \quad R_n(\mathbf{f}) \equiv R_n^\pm(\mathbf{f}); \quad (20)$$

$$G_j^\pm(\mathbf{f}) \equiv \pm \frac{1}{2} (\Delta_j + \Delta_{j+1}) D_j(\mathbf{f}).$$

В выражении (20), а также в подобных выражениях далее используется знак "минус", если истинно неравенство (13), и знак "плюс" при условии (18).

Неравенства (19) относятся к границам отрезков (узлам сплайна), поэтому следует исключить двойное задание одного неравенства для соседних отрезков.

Укажем на некоторые особенности автоматического (программного) задания ограничений, связанных с ЛМ сплайна. Как показала практика расчетов, после того как будет определено множество *монотонных* отрезков по условиям (13) и (18), для некоторых из них ограничения лучше отменить. Прежде всего это касается отрезков, непосредственно соседствующих с отрезками, для которых условия монотонности не выполняются. Замечено, что уменьшение числа монотонных отрезков повышает эффективность метода.

Можно показать, что множество комонотонности (см. (14), (15)) выпукло и находится внутри множества, образуемого касательными линиями к его внешней границе. Так, для решения задачи истинны неравенства

$$x_n + y_n - 6 \leq 0; \quad x_n - 4 \leq 0; \quad y_n - 4 \leq 0,$$

которые представим в виде

$$\tilde{r}_n = \tilde{R}_n(\mathbf{f}) \leq 0; \quad \overleftarrow{r}_n = \overleftarrow{R}_n(\mathbf{f}) \leq 0; \quad \vec{r}_n = \vec{R}_n(\mathbf{f}) \leq 0, \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{R}_n(\mathbf{f}) &\equiv \tilde{R}_n^\pm(\mathbf{f}); \quad \overleftarrow{R}_n(\mathbf{f}) \equiv \overleftarrow{R}_n^\pm(\mathbf{f}); \quad \vec{R}_n(\mathbf{f}) \equiv \vec{R}_n^\pm(\mathbf{f}); \\ \tilde{R}_n^\pm(\mathbf{f}) &\equiv \pm \Delta_n (6\delta_n - d_{n-1} - d_n); \quad \overleftarrow{R}_n^\pm(\mathbf{f}) \equiv \pm \Delta_n (4\delta_n - d_{n-1}); \quad \vec{R}_n^\pm(\mathbf{f}) \equiv \pm \Delta_n (4\delta_n - d_n). \end{aligned}$$

Легко удостовериться, что из неравенств (19) и (21) следует, что $\pm\delta_n \leq 0$, т. е. в случае $\delta_n \neq 0$ неравенства (15) истинны. Заметим, что если $\delta_n = 0$, то из тех же неравенств получаем $d_{n-1} = d_n = 0$, т. е. функция $F_n(t)$ на основании (4) монотонна: $F_n(t) \equiv f_{n-1} = f_n$.

Решаем задачу, привлекая только линейные неравенства (19) и (21), затем проверяем нелинейные неравенства (17) и, если они окажутся истинными, считаем задачу решенной. В противном случае продолжаем вычисления, добавив ограничения (17).

2.3. Ограничения, относящиеся к ЛМ сплайна, в виде линейных неравенств. Использование линейных ограничений характеризуется высокой скоростью расчета задачи, так как все производные от функций, задающих неравенства, рассчитываются на стадии РНД. Более того, практика показала, что замена нелинейных ограничений на линейные повышает надежность метода решения задачи условной минимизации.

Считаем истинным неравенство либо (13), либо (18). Предложим способ задания ограничений, относящихся к монотонному поведению функции $F_n(t)$ на множестве $[t_{n-1}, t_n]$, но уже с помощью линейных неравенств. Используем квадратное подмножество комонотонности, впервые представленное в работе [4]. Для того чтобы сплайн $F(t)$ на множестве $[t_{n-1}, t_n]$ был монотонен, достаточно истинности неравенств (15), а также неравенств

$$\Psi_1(x_n, y_n) \equiv y_n - 3 \leq 0; \quad \Psi_2(x_n, y_n) \equiv x_n - 3 \leq 0. \quad (22)$$

Переходя к функциям от вектора \mathbf{f} , получим систему, включающую неравенства (19) для $j = n-1$ и $j = n$, а также неравенства

$$r_{n,i} = R_{n,i}(\mathbf{f}) \leq 0, \quad i = \overline{1, 2I}, \quad (23)$$

где $I = 1$;

$$R_{n,i}(\mathbf{f}) \equiv R_{n,i}^\pm(\mathbf{f}); \quad R_{n,i}^\pm(\mathbf{f}) \equiv \mp \Delta_n \delta_n \Psi_i(x_n, y_n).$$

Подмножество комонотонности можно расширить, если воспользоваться линейной системой, включающей неравенства (15) и неравенства вида

$$\Psi_i(x_n, y_n) \leq 0, \quad i = \overline{1, 2I}, \quad (24)$$

где $I \geq 1$; $\Psi_{I+j}(x, y) \equiv \Psi_j(y, x)$, $j = \overline{1, I}$.

Случай $I = 1$ представлен формулами (22). Для случая $I \geq 2$ линейные функции $\Psi_i(x, y)$ определим так, чтобы площадь подмножества комонотонности в виде N -угольника, где $N = 2(I + 1)$, была максимальной. Вершины многоугольника, симметричного относительно прямой $y = x$, принадлежат границе области комонотонности. В множество вершин всегда входят вершины квадрата Фрича—Карлсона (случай $I = 1$). Функция внешней границы области комонотонности для $x \in [0, 3]$ имеет вид

$$\Phi(x) \equiv \frac{1}{2} \left[6 - x + \sqrt{3x(4-x)} \right].$$

Для $I = 2$ задача сводится к поиску точки (x^*, y^*) на кривой $y = \Phi(x)$ в области $x \in (0, 3)$, для которой площадь треугольника, образуемого точками $(0, 3)$, (x^*, y^*) и $(3, 3)$, максимальна. Задача легко решается, получаем точку $(1, 4)$. Для $I = 3$ задача сводится к поиску двух вершин на кривой $y = \Phi(x)$ в области $x \in (0, 3)$, для которых максимальна площадь четырехугольника, образуемого точками $(0, 3)$, (x_1^*, y_1^*) , (x_2^*, y_2^*) и $(3, 3)$. Решение находится из кубического уравнения $y_1^* = y_2^*$ при условии $x_2^* = x_1^*(4 - x_1^*)$. Получаем $x_1^* = 4 \sin^2 \frac{\pi}{9}$. Итак, площадь подмножества максимальна при задании

$$I = 2 \quad \text{и} \quad \Psi_1(x, y) \equiv y - x - 3, \quad \Psi_2(x, y) \equiv 2y + x - 9;$$

$$I = 3 \quad \text{и} \quad \Psi_1(x, y) \equiv y - \frac{y_1^* - 3}{x_1^*} x - 3, \quad \Psi_2(x, y) \equiv y - y_1^*, \quad \Psi_3(x, y) \equiv y - \frac{3 - y_1^*}{3 - x_2^*} (x - x_2^*) - y_1^*.$$

Площадь подмножества в случае $I = 1$ составляет примерно 68% от площади всего множества комонотонности. Значение возрастает до 91%, если $I = 2$, и до 96%, если $I = 3$.

Множество линейных ограничений является подмножеством области нелинейных ограничений, поэтому линейные ограничения решают проблему ЛМ сплайна точно. Но не следует забывать, что задача минимизации длины кривой сплайна при этом решается приближенно, так как при использовании нелинейных ограничений можно получить сплайн с ЛМ с меньшим значением длины кривой. Однако, как правило, с точки зрения пользователя методики, это не является принципиальным (см. второй абзац разд. 2).

2.4. Ограничения, относящиеся к неотрицательности сплайна, в виде нелинейных неравенств. Прежде всего зададим простейшие константные ограничения в узлах сплайна

$$f_n \geq 0, \quad n = \overline{0, N}. \quad (25)$$

Потребуем от функции $F_n(t)$ неотрицательности в точке локального минимума t_n^+ (см. (5)), если $t_n^+ \in (t_{n-1}, t_n)$. Вместо переменной t_n^+ будем использовать переменную t_n^* , рассчитываемую по формуле $t_n^* = t_{n-1} + \tau_n^*$, где

$$\tau_n^* = T_n(\mathbf{f}) \equiv \begin{cases} \frac{-d_{n-1}}{z_n^+}, & \text{если } c_n > 0, \quad d_{n-1} < 0, \quad z_n^+ \Delta_n > -d_{n-1}; \\ \frac{z_n^-}{3b_n}, & \text{если } c_n \leq 0, \quad b_n > 0, \quad z_n^- < 3b_n \Delta_n; \end{cases} \quad (26)$$

$$z_n^\pm \equiv \Lambda(p_n) \pm c_n,$$

$$\Lambda(p) \equiv \begin{cases} p^{1/2}, & \text{если } p \geq \varphi_1; \\ 0, & \text{если } p \leq 0; \\ \frac{1}{2} \varphi_1^{-3/2} p(3\varphi_1 - p), & \text{если } p \in (0, \varphi_1), \end{cases} \quad \Lambda \in C^1(0, +\infty), \quad \Lambda \in C(\mathbb{R}).$$

Здесь φ_1 — малый положительный параметр. Значение t_n^* определяется только в случае $\tau_n^* \in (0, \Delta_n)$: условия расчета приведены в (26). Если $p_n \geq \varphi_1$ или $p_n = 0$, то справедливо точное равенство $t_n^* = t_n^+$. Если $p_n \leq 0$, что возможно только в случае $b_n \neq 0$, то $t_n^* = \tilde{t}_n$.

Для формулирования ограничения, относящегося к неотрицательности функции $F_n(t)$ внутри интервала (t_{n-1}, t_n) , используем переменную $f_n^* \equiv F_n(t_n^*)$ (см. (3)).

Предлагается еще один вариант расчета значения f_n^* . Из разложения Тейлора для полинома третьей степени $F_n(t)$ в окрестности точки локального минимума $t_n^* = t_n^+$ имеем

$$F_n(t) = f_n^* + (t - t_n^*)^2 [c_n + (t + 2t_n^* - 3t_{n-1}) b_n],$$

следовательно,

$$f_n = f_n^* + (\Delta_n - \tau_n^*)^2 [c_n + (2\tau_n^* + \Delta_n) b_n], \quad f_{n-1} = f_n^* + (\tau_n^*)^2 (c_n + 2\tau_n^* b_n); \quad (27)$$

$$\int_{t_{n-1}}^{t_n} F_n(t) dt = \bar{f}_n \Delta_n = f_n^* \Delta_n + \frac{c_n}{3} [(\Delta_n - \tau_n^*)^3 + (\tau_n^*)^3] + \frac{\Delta_n b_n}{4} [\Delta_n^3 - 6\Delta_n (\tau_n^*)^2 + 8(\tau_n^*)^3]. \quad (28)$$

Используя (27), исключаем в (28) слагаемое со множителем c_n и получаем соотношение

$$f_n^* = \frac{3}{2} \bar{f}_n - \frac{1}{2} (1 - \gamma_n^*) f_n - \frac{1}{2} \gamma_n^* f_{n-1} + \Delta_n^3 U(\gamma_n^*) b_n,$$

где

$$\gamma_n^* = \frac{\tau_n^*}{\Delta_n}, \quad \gamma_n^* \in [0, 1]; \quad U(\gamma) \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \gamma \right) \left[\left(\frac{1}{2} - \gamma \right)^2 + \frac{1}{4} \right].$$

На принадлежность точки t_n^* интервалу (t_{n-1}, t_n) укажет область положительных значений финитной функции класса $C^1(\mathbb{R})$

$$W_n(t) \equiv \begin{cases} 1, & \text{если } t \in [t_{n-1} + \theta_n, t_n - \theta_n]; \\ x_{1,n}^2 (3 - 2x_{1,n}), & \text{если } t \in (t_{n-1}, t_{n-1} + \theta_n); \\ x_{2,n}^2 (3 - 2x_{2,n}), & \text{если } t \in (t_n - \theta_n, t_n); \\ 0, & \text{в других случаях } (t \notin (t_{n-1}, t_n)), \end{cases}$$

где

$$x_{1,n}(t) = \frac{t - t_{n-1}}{\theta_n}, \quad x_{2,n}(t) = \frac{t_n - t}{\theta_n}, \quad x_{1,n}, x_{2,n} \in (0, 1); \\ \theta_n = \lambda \Delta_n, \quad \lambda - \text{параметр: } \lambda \in \left(0, \frac{1}{2} \right].$$

Для тех отрезков $[t_{n-1}, t_n]$, которые ранее не были задействованы в формировании ограничений, относящихся к ЛМ сплайна, зададим ограничения для искомого вектора \mathbf{f} в виде неравенств

$$q_n = Q_n(\mathbf{f}) \equiv -f_n^* w_n^* \leq 0, \quad n \in [1, N], \quad (29)$$

где $w_n^* = W_n(t_n^*)$. Если величина t_n^* на интервале (t_{n-1}, t_n) не рассчитывалась, то значения функции $Q_n(\mathbf{f})$ и ее производных равны нулю.

Проведем анализ неравенства (29).

Если $t_n^* \notin (t_{n-1}, t_n)$, то $w_n^* = 0$ и неравенство (29) является истинным. В рассматриваемом случае сплайн не имеет точки локального минимума на интервале и его неотрицательность на интервале гарантируется неравенствами (25).

Если $p_n < 0$, то искомая функция $F_n(t)$ строго монотонна на множестве \mathbb{R} . В случае $p_n = 0$ функция $F_n(t)$ либо имеет точку перегиба ($b_n \neq 0$), либо она линейна ($b_n = c_n = 0$). Следовательно, в случае $p_n \leq 0$ функция монотонна и неравенства (25) гарантируют неотрицательность сплайна на отрезке $[t_{n-1}, t_n]$. При этом неравенство (29) справедливо, даже если $w_n^* > 0$. Случай $p_n \in (0, \varphi_1)$ на практике не отличим от случая $p_n \leq 0$.

Пусть t_n^* является точкой локального минимума функции $F_n(t)$ и $t_n^* \in (t_{n-1}, t_n)$, т. е. $p_n \geq \varphi_1$ и $w_n^* > 0$. Следовательно, неравенство (29) является истинным при условии $f_n^* \geq 0$. Если при этом точка локального максимума t_n^- функции $F_n(t)$ не принадлежит множеству (t_{n-1}, t_n) , то неотрицательность функции на отрезке обеспечивается только неравенством (29). Если же $t_n^- \in (t_{n-1}, t_n)$, то минимальное значение функции на отрезке определяется как минимум значений f_n , f_{n-1} и f_n^* . Неотрицательность значений функции в граничных точках отрезка обеспечивается введением ограничений вида (25).

2.5. Ограничения, относящиеся к неотрицательности сплайна, в виде линейных неравенств. В некоторых задачах требование неотрицательности сплайна $F_n(t)$ на отрезке $[t_{n-1}, t_n]$ можно ослабить, разрешив полиному третьей степени $F_n(t)$ иметь отрицательные значения на некотором открытом подмножестве отрезка, мера которого задается коэффициентом величины Δ_n . В таких случаях разумно использовать ограничения в виде линейных неравенств. О достоинствах постановки задачи с линейными ограничениями было сказано ранее.

Потребуем для решения выполнения неравенств (25).

На отрезке $[t_{n-1}, t_n]$ определим сетку из узлов $t_{n,m}$:

$$t_{n,m} = t_{n-1} + \frac{\Delta_n}{M}m, \quad m = \overline{1, M-1}, \quad M \geq 2.$$

Используем ограничения в виде системы линейных неравенств

$$q_{n,m} = Q_{n,m}(\mathbf{f}) \equiv -F_n(t_{n,m}) \leq 0, \quad n \in [1, N]. \quad (30)$$

Условия (30) являются необходимыми условиями неотрицательности функции $F_n(t)$ на интервале (t_{n-1}, t_n) . Однако эти условия не являются достаточными. Заметим, что искомый полином $F_n(t)$ может быть отрицателен только на открытом подмножестве отрезка $[t_{n-1}, t_n]$, содержащем единственную точку локального минимума t_n^* . Размер такого интервала не превышает значения Δ_n/M . С увеличением числа M дефект решения ослабляется.

2.6. Ограничения, относящиеся к крайним точкам и отрезкам сплайна, в виде неравенств. В некоторых задачах требуется, чтобы сплайн не убывал (не возрастал) в точке t_0 . Аналогичное условие может потребоваться и для точки t_N . При необходимости вводим неравенство $g_0 \leq 0$ и/или неравенство $g_N \leq 0$. Используем выражение (20), в котором знаки диктуются задачей. Определим $\Delta_0 = \Delta_1$ и $\Delta_{N+1} = \Delta_N$.

В подразд. 2.2 были использованы неравенства для задания ЛМ сплайна на отрезках $[t_{n-1}, t_n]$ для $n \in [2, N-1]$. В некоторых задачах от сплайна требуется монотонность в крайних интервалах. Для этого зададим фиктивные значения $\bar{f}_0 = \bar{f}_{N+1} = 0$ и используем их при формировании неравенств для первого ($n = 1$) и последнего ($n = N$) отрезков $[t_{n-1}, t_n]$.

3. Модифицированный метод Лагранжа расчета точки минимума функции нескольких переменных при наличии ограничений в виде неравенств

Задачу поиска точки минимума ЦФ $\Gamma(\mathbf{f})$ при наличии S ограничений-неравенств запишем в виде

$$\Gamma(\mathbf{f}) \rightarrow \min; \quad \Omega(\mathbf{f}) \leq 0, \quad (31)$$

где $\Omega(\mathbf{f}) \equiv \left(\Omega_s(\mathbf{f}) \right)_{s=\overline{1, S}}$, $\Omega \in \mathbb{R}^S$ ($\Omega_s \in \mathbb{R}$, $\forall s$).

Для решения задачи условной минимизации (31) будем использовать модифицированный метод Лагранжа [6]. Задача сводится к последовательности решения подзадач нахождения итераций \mathbf{f}_k решения \mathbf{f} .

3.1. Модифицированная функция Лагранжа. Определим для итерационного индекса k ($k = \overline{1, K}$) модифицированную функцию Лагранжа

$$\mathcal{L}_k(\mathbf{f}) \equiv \Gamma(\mathbf{f}) + \left(\boldsymbol{\eta}_k, \boldsymbol{\Omega}^+(\mathbf{f}, \boldsymbol{\eta}_k, \chi_k) \right) + \frac{\chi_k}{2} \left| \boldsymbol{\Omega}^+(\mathbf{f}, \boldsymbol{\eta}_k, \chi_k) \right|^2.$$

Здесь используются следующие переменные и обозначения:

$\boldsymbol{\eta}_k$ — вектор множителей Лагранжа: $\boldsymbol{\eta}_k \equiv (\eta_{k,s})_{s=\overline{1,S}}$, $\eta_{k,s} \in \mathbb{R}$, $\eta_{k,s} \geq 0$;

χ_k — параметр квадратичного штрафа: $\chi_k \in \mathbb{R}$, $\chi_k > 0$;

$\boldsymbol{\Omega}^+(\mathbf{f}, \boldsymbol{\eta}_k, \chi_k) \equiv \left(\Omega_s^+(\mathbf{f}, \boldsymbol{\eta}_k, \chi_k) \right)_{s=\overline{1,S}}$, $\boldsymbol{\Omega}^+ \in \mathbb{R}^S$; $\Omega_s^+(\mathbf{f}, \boldsymbol{\eta}_k, \chi_k) \equiv \max \left\{ \Omega_s(\mathbf{f}), -\frac{\eta_{k,s}}{\chi_k} \right\}$;

$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{s=1}^S x_s y_s$, если $\mathbf{x} \equiv (x_s)_{s=\overline{1,S}}$, $\mathbf{y} \equiv (y_s)_{s=\overline{1,S}}$; $|\mathbf{x}| \equiv \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$.

Определим множество ограничений, выполняющихся на интервалах (t_{n-1}, t_n) , $n = \overline{1, N}$:

$$\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{f}) \equiv \left(\Omega_0(\mathbf{f}), \Omega_1(\mathbf{f}), \dots, \Omega_6(\mathbf{f}) \right)^T, \quad \Omega_i(\mathbf{f}) \equiv \left(\Omega_{i,n}(\mathbf{f}) \right)_{n \in \omega_i}, \quad i = \overline{0, 6};$$

$$\Omega_{0,n}(\mathbf{f}) \equiv -f_n; \quad \Omega_1(\mathbf{f}) \equiv \mathbf{Q}(\mathbf{f}); \quad \Omega_2(\mathbf{f}) \equiv \mathbf{G}(\mathbf{f}); \quad \Omega_3(\mathbf{f}) \equiv \tilde{\mathbf{R}}(\mathbf{f});$$

$$\Omega_4(\mathbf{f}) \equiv \tilde{\mathbf{R}}; \quad \Omega_5(\mathbf{f}) \equiv \tilde{\mathbf{R}}(\mathbf{f}); \quad \Omega_6(\mathbf{f}) \equiv \mathbf{R}(\mathbf{f});$$

$$\omega_i \equiv (\omega_{i,s})_{s=\overline{1,S_i}} \equiv \{n : n \in [0, N], \text{ задано ограничение } \Omega_{i,n}(\mathbf{f}) \leq 0\}.$$

Целочисленные множества-векторы ω_i формируются на стадии РНД задачи. Заметим, что

$$\omega_0 \equiv \{\overline{0, N}\}; \quad \omega_3 = \omega_4 = \omega_5 = \omega_6; \quad \sum_{i=0}^6 S_i = S.$$

Функцию Лагранжа можно преобразовать к виду

$$\mathcal{L}_k(\mathbf{f}) = \Gamma(\mathbf{f}) + \frac{1}{2\chi_k} \sum_i \sum_{n \in \omega_i} (\max^2 \{0, \eta_{i,k,n} + \chi_k \Omega_{i,n}(\mathbf{f})\} - \eta_{i,k,n}^2),$$

где

$$\boldsymbol{\eta}_k \equiv (\boldsymbol{\eta}_{0,k}, \boldsymbol{\eta}_{1,k}, \dots, \boldsymbol{\eta}_{6,k})^T; \quad \boldsymbol{\eta}_{i,k} \equiv (\eta_{i,k,n})_{n \in \omega_i}.$$

Если использованы линейные ограничения вида (30), то вместо слагаемого для $i = 1$ либо дополнительно следует задать слагаемое

$$\frac{1}{2\chi_k} \sum_{n \in \omega_7} \sum_{m=1}^{M-1} (\max^2 \{0, \eta_{7,k,n,m} + \chi_k Q_{n,m}(\mathbf{f})\} - \eta_{7,k,n,m}^2),$$

где $\omega_7 = \omega_1$.

Если использованы линейные ограничения вида (23), то вместо слагаемых для $i = \overline{3, 6}$ следует задать слагаемое

$$\frac{1}{2\chi_k} \sum_{n \in \omega_8} \sum_{m=1}^{2I} (\max^2 \{0, \eta_{8,k,n,m} + \chi_k R_{n,m}(\mathbf{f})\} - \eta_{8,k,n,m}^2),$$

где $\omega_8 = \omega_3$.

Для каждого индекса k будем решать задачу безусловной минимизации модифицированной функции Лагранжа. Запишем задачу в виде

$$\mathcal{L}_k(\mathbf{f}) \rightarrow \min, \quad \mathbf{f} \in \mathbb{R}^{N+1}. \quad (32)$$

Задача (32) сводится к нахождению действительного вектора \mathbf{f}_k , который является решением системы нелинейных уравнений

$$\nabla \mathcal{L}_k(\mathbf{f}_k) = 0. \quad (33)$$

Задача (33) решается при фиксированных значениях η_k и χ_k , которые пересчитываются в конце каждого итерационного шага (см. далее подразд. 3.6).

3.2. Метод Ньютона. Эффективным методом решения задачи (33) является метод линеаризации Ньютона, который порождает итерационный цикл по индексу l ($l = \overline{1, L}$). Пусть значение индекса $l = L + 1$ отвечает условию нормального завершения полного цикла. В цикле решаются системы линейных уравнений

$$H_{k,l} \delta \mathbf{f}_{k,l} = -\nabla \mathcal{L}_k(\mathbf{f}_{k,l-1}), \quad (34)$$

где $\delta \mathbf{f}_{k,l}$ — шаг смещения вектора $\mathbf{f}_{k,l-1}$; $\mathbf{f}_{k,0} = \mathbf{f}_{k-1}$ (см. (33)). Новая итерация решения рассчитывается согласно формуле

$$\mathbf{f}_{k,l} = \mathbf{f}_{k,l-1} + \alpha_{k,l} \delta \mathbf{f}_{k,l}. \quad (35)$$

Для расчета значения $\alpha_{k,l}$, где $\alpha_{k,l} \in (0, 1]$, применяется специальный алгоритм.

Используем в качестве матрицы $H_{k,l}$ матрицу Гессе, т. е. $H_{k,l} = \nabla^2 \mathcal{L}_k(\mathbf{f}_{k,l-1})$. Ниже приводятся формулы расчета вектора $\nabla \mathcal{L}_k$ и матрицы $\nabla^2 \mathcal{L}_k$ в точке $\mathbf{f}_{k,l-1}$:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_k}{\partial f_i} = \frac{\partial \Gamma}{\partial f_i} + \sum_{s=1}^S \begin{cases} 0, & \text{если } \eta_{k,s} + \chi_k \Omega_s \leq 0; \\ (\eta_{k,s} + \chi_k \Omega_s) \frac{\partial \Omega_s}{\partial f_i} & \text{в других случаях;} \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}_k}{\partial f_j \partial f_i} = \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial f_j \partial f_i} + \sum_{s=1}^S \begin{cases} 0, & \text{если } \eta_{k,s} + \chi_k \Omega_s \leq 0; \\ \chi_k \frac{\partial \Omega_s}{\partial f_j} \frac{\partial \Omega_s}{\partial f_i} + (\eta_{k,s} + \chi_k \Omega_s) \frac{\partial^2 \Omega_s}{\partial f_j \partial f_i} & \text{в других случаях.} \end{cases}$$

Как видим, матрица $\nabla^2 \mathcal{L}_k(\mathbf{f}_{k,l-1})$ полностью заполнена. Для решения систем уравнений с симметричной матрицей используется метод квадратного корня [5].

3.3. Критерий завершения расчета задачи безусловной минимизации. Полагаем, что задача (32) для текущего номера итерации k успешно решена, если для текущего индекса l , где $l \in [1, L]$, выполнены все следующие условия:

- 1) последняя система уравнений (34) была решена для $H_{k,l} = \nabla^2 \mathcal{L}_k(\mathbf{f}_{k,l-1})$ (в подразд. 3.4 будет показано, что в некоторых случаях для решения может привлекаться метод градиентного спуска (МГС) с диагональной матрицей $H_{k,l}$);
- 2) истинны неравенства

$$\begin{aligned} (\delta \mathbf{f}_{k,l}, \nabla \mathcal{L}_k(\mathbf{f}_{k,l-1})) &\leq 0; \\ \mathcal{L}_k(\mathbf{f}_{k,l}) &\leq (1 + \varepsilon_3) \mathcal{L}_k(\mathbf{f}_{k,l-1}); \\ |\Gamma_n(\mathbf{f}_{k,l-1}) - \Gamma_n(\mathbf{f}_{k,l})| &\leq \begin{cases} \varepsilon_4 \Gamma_n(\mathbf{f}_{k,l}), & \text{если } \bar{f}_n > \varphi_5; \\ \varepsilon_5 \Gamma_n(\mathbf{f}_{k,l}) & \text{в противном случае;} \end{cases} \quad n = \overline{1, N}, \end{aligned} \quad (36)$$

где $\varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varphi_5$ — неотрицательные параметры. Здесь вектор $\mathbf{f}_{k,l}$ рассчитан по формуле (35) при $\alpha_{k,l} = 1$.

Если задача (32) для текущего номера итерации k была решена, то следует принудительно выйти из цикла по индексу l .

Из неравенства (36) следует, что существует окрестность точки $\mathbf{f}_{k,l-1}$, в которой функция $\mathcal{L}_k(\mathbf{f})$ не возрастает в направлении вектора $\delta \mathbf{f}_{k,l}$. Несложно показать, что для положительно определенной матрицы $H_{k,l}^{-1}$ неравенство (36) всегда истинно.

Если неравенство (36) ложно, то пересчитаем шаг $\delta \mathbf{f}_{k,l}$, используя МГС (см. подразд. 3.4). В противном случае определим значение $\alpha_{k,l}$ с помощью специального итерационного алгоритма, который предполагается описать в части 2 данной статьи.

Использование шагового множителя $\alpha_{k,l}$ обеспечивает понижение значения функции $\mathcal{L}_k(\mathbf{f})$ на каждом l -м цикле. Вычислительный опыт показывает, что, начиная с некоторого значения l , в качестве множителя $\alpha_{k,l}$ принимается его стандартное единичное значение. Однако для первых итераций иногда требуется значительно уменьшить шаг $\delta \mathbf{f}_{k,l}$.

3.4. Метод градиентного спуска. МГС не относится к эффективным алгоритмам, поэтому задействуем его только в следующих случаях:

- метод Ньютона не может должным образом понизить функцию Лагранжа, т. е. либо неравенство (36) является ложным, либо не удастся определить значение $\alpha_{k,l}$;
- при решении системы (34) с матрицей Гессе произошел отказ метода квадратного корня (на главной диагонали был получен близкий к нулю элемент).

Стандартно используем МГС с масштабированием. Для этого модифицируем матрицу Гессе, обнулив все ее элементы вне главной диагонали.

Матрица, обратная к диагональной матрице $H_{k,l}$, является диагональной. При этом если у исходной матрицы все элементы положительны, то и у обратной матрицы диагональ также положительна. Очевидно, такая матрица $H_{k,l}^{-1}$ является положительно определенной.

Уточним: МГС с масштабированием будем задействовать только в случае положительности всех диагональных элементов матрицы $H_{k,l}$. В противном случае привлечем к расчету МГС в варианте метода наискорейшего спуска. Для этого используем диагональную единичную матрицу, т. е. полагаем $H_{k,l} = H_{k,l}^{-1} = E$.

С учетом положительной определенности матрицы $H_{k,l}^{-1}$ для МГС истинность неравенства (36) следует априори. После расчета вектора $\delta \mathbf{f}_{k,l}$ из системы (34) запускаем алгоритм расчета коэффициента $\alpha_{k,l}$, затем используем формулу (35). Если произошел отказ алгоритма расчета коэффициента $\alpha_{k,l}$, то, скорее всего, задача не решается с требуемой точностью.

По окончании расчета с применением МГС следует вернуться к расчету по методу Ньютона на следующем шаге цикла по l .

3.5. Критерий завершения расчета задачи условной минимизации. После принудительного выхода из цикла по индексу l ($l \leq L$) или по его завершении ($l > L$) определим $\mathbf{f}_k = \mathbf{f}_{k, \min\{l, L\}}$ и $L_k = l$. Задача (31) для текущего номера итерации k , где $k \in [2, K]$, считается успешно решенной, если выполнены все следующие условия:

- 1) последняя подзадача (32) была успешно решена (см. подразд. 3.3);
- 2) истинны неравенства

$$|\Gamma_n(\mathbf{f}_{k-1}) - \Gamma_n(\mathbf{f}_k)| \leq \varepsilon_5 \Gamma_n(\mathbf{f}_k), \quad n = \overline{1, N},$$

где ε_5 — параметр, введенный в подразд. 3.3;

- 3) для каждого индекса n из множества ω_2 истинно неравенство

$$g_n \leq \Delta_1 (\varepsilon_2 |\delta_1| + \varphi_2), \quad \text{если } n = 0; \quad g_n \leq \Delta_N (\varepsilon_2 |\delta_N| + \varphi_2), \quad \text{если } n = N;$$

$$g_n \leq \frac{1}{2} (\Delta_n + \Delta_{n+1}) (\varepsilon_2 \min\{|\delta_n|, |\delta_{n+1}|\} + \varphi_2), \quad \text{если } n \in [1, N-1],$$

где ε_2, φ_2 — неотрицательные параметры, величины δ_n определены в разд. 1;

- 4) если от сплайна требуется свойство неотрицательности, то должны быть выполнены все следующие условия:

– истинны неравенства

$$-f_0 \leq \varepsilon_1 \bar{f}_1 + \varphi_4; \quad -f_N \leq \varepsilon_1 \bar{f}_N + \varphi_4; \quad -f_n \leq \varepsilon_1 \min \{ \bar{f}_n, \bar{f}_{n+1} \} + \varphi_4, \quad n = \overline{1, N-1},$$

где ε_1, φ_4 — неотрицательные параметры;

– для каждого индекса n из множества ω_1 либо выполняется неравенство

$$q_n \leq \varepsilon_2 \bar{f}_n + \varphi_2, \quad (37)$$

либо истинны неравенства

$$q_{n,m} \leq \varepsilon_2 \bar{f}_n + \varphi_2 \quad \forall m. \quad (38)$$

Неравенство (37) проверяется, если проблема неотрицательности решается точно с помощью нелинейных неравенств (29). Если проблема решается приближенно с помощью линейных неравенств (30), то проверяются неравенства (38);

5) если от сплайна требуется свойство ЛМ, то для каждого индекса n из множества ω_3 должно быть выполнено соответствующее задаче условие из следующих:

– если проблема монотонности решается точно с привлечением нелинейного неравенства (17), то истинны неравенства

$$\pm \delta_n \leq \varphi_3; \quad r_n \leq \Delta_n r_n^{\max},$$

где $r_n^{\max} = \Delta_n (\varepsilon_2 |\delta_n| + \varphi_2)$; φ_3 — неотрицательный параметр;

– если проблема монотонности решается точно с привлечением линейных неравенств (23), то истинны неравенства

$$\pm \delta_n \leq \varphi_3; \quad r_{n,i} \leq r_n^{\max}, \quad i = \overline{1, 2I};$$

– если проблема монотонности решается приближенно с привлечением линейных неравенств (21), то истинны неравенства

$$\tilde{r}_n \leq r_n^{\max}, \quad \hat{r}_n \leq r_n^{\max}, \quad \vec{r}_n \leq r_n^{\max}.$$

3.6. Расчет векторов Лагранжа и параметра штрафа. Если критерий решения задачи (31) не выполнен и $k < K$, то прежде чем перейти к расчету новой итерации \mathbf{f}_{k+1} , рассчитываем вектор Лагранжа $\boldsymbol{\eta}_{k+1}$ и параметр штрафа χ_{k+1} .

Последовательность векторов Лагранжа будем вычислять по рекуррентной формуле

$$\eta_{k+1,s} = \max \{ 0, \eta_{k,s} + \chi_k \Omega_s(\mathbf{f}_k) \}, \quad s = \overline{1, S}, \quad 1 \leq k < K; \quad \boldsymbol{\eta}_1 = 0.$$

Положительная последовательность штрафа χ_k может выбираться как заранее, так и в ходе вычислений, исходя из анализа решения. На практике хорошо зарекомендовала себя следующая схема (см. [6]). Начальное значение χ_1 выбирается относительно небольшим, например $\chi_1 = 1/32$. В ходе итерационного процесса обеспечивается монотонное возрастание значений последовательности χ_k , например, соотношением $\chi_{k+1} = \theta_{k+1} \chi_k$, где $\theta_{k+1} \in [2, 8]$. Стандартное значение $\theta_{k+1} = 4$.

Однако следует учитывать, что с ростом параметра штрафа ухудшается обусловленность задачи, и это влечет за собой уменьшение эффективности применяемых методов. В частности, для решения плохо обусловленных задач заведомо не применим МГС. Даже использование метода Ньютона может быть сопряжено с серьезными трудностями, если значение χ_k очень велико, а начальная точка недостаточно близка к решению. По этой причине увеличивать штрафной параметр следует относительно медленно.

В работе [6] предложена еще одна схема расчета параметра штрафа, которая состоит в том, чтобы пересчитывать значение штрафа только в тех случаях, когда не обеспечивается линейная скорость убывания модуля вектора $\boldsymbol{\Omega}_k^+ \equiv \boldsymbol{\Omega}^+(\mathbf{f}_k, \boldsymbol{\eta}_k, \chi_k)$.

Заключение

В настоящей статье достаточно подробно представлена методика, положения которой тщательно выверялись на практике на большом множестве тестов. Например, варьировались формы записи неравенств, критерии обрыва итерационных циклов, подбирались значения параметров. Однако некоторые важные вопросы остались в статье не освещенными. Не был рассмотрен алгоритм расчета шагового множителя $\alpha_{k,l}$. Также не была исследована проблема расчета начального приближения (вектора \mathbf{f}_0). Вопрос значим, так как метод Ньютона при всех его достоинствах имеет существенный недостаток: он относится к методам локальной итерационной сходимости и при неудачном выборе стартовой итерации может отказать.

Упомянутые выше вопросы теории будут рассмотрены в следующей публикации. Там же авторы намерены обсудить результаты численного тестирования методики, а также представить оптимальную тактику счета и выводы о качестве получаемого решения.

Список литературы

1. Горелов В. П., Фарафонов Г. Г. Оценка энергетического спектра нейтронов в слоях цилиндрической многослойной ячейки Вигнера—Зейца // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1993. Вып. 1. С. 19—23.
Gorelov V. P., Farafontov G. G. Otsenka energeticheskogo spektra neytronov v sloyakh tsilindricheskoy mnogoslounoy yacheyki Vignera—Zeytsa // Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Matematicheskoe modlirovanie fizicheskikh protsessov. 1993. Vyp. 1. S. 19—23.
2. Гребенников А. Н., Фарафонов Г. Г., Алексеев А. В., Мжачих С. В., Крутько Н. А. Технология подготовки групповых макроскопических констант и методика их уточнения в процессе расчета задач переноса нейтронов // Там же. 2005. Вып. 4. С. 15—24.
Grebennikov A. N., Farafontov G. G., Alekseev A. V., Mzhachikh S. V., Krutko N. A. Tekhnologiya podgotovki gruppyvykh makroskopicheskikh constant i metodika ikh utochneniya v protsesse raschyeta zadach perenosa neytronov // Tam zhe. 2005. Vyp. 4. S. 15—24.
3. Мжачих С. В., Лапшина Ю. Н. Об одном локально комонотонном кубическом сплайне класса C^1 // Там же. 2021. Вып. 2. С. 56—69.
Mzhachikh S. V., Lapshina Yu. N. Ob odnom localno komonotonnom kubicheskom splayne klasa C^1 // Tam zhe. 2021. Vyp. 2. S. 56—69.
4. Fritsch F. N., Carlson R. E. Monotone piecewise cubic interpolation // SIAM J. Numer. Anal. 1980. Vol. 17, No 2. P. 238—246.
5. Фадеев Д. К., Фадеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры. С.-Пб.: Лань, 2009.
Fadeev D. K., Fadeeva V. N. Vychislitelnye metody lineynoy algebrы. S.-Pb.: Lan, 2009.
6. Бертсекас Д. Условная оптимизация и методы множителей Лагранжа. М.: Радио и связь, 1987.
Bertsekas D. Uslovnaya optimizatsiya i metody mnozhiteley Lagranzha. M.: Radio i svyaz, 1987.

Статья поступила в редакцию 30.05.22.

УДК 519.6

АДАПТАЦИЯ МЕТОДИКИ "ЭГАК" К СЧЕТУ НА ГИБРИДНЫХ ЭВМ С ГРАФИЧЕСКИМИ УСКОРИТЕЛЯМИ

А. М. Ерофеев, Е. А. Сизов, И. Ю. Турутина, И. Н. Чистякова
(ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области)

Представлены результаты работы по адаптации методики ЭГАК к гибридным параллельным ЭВМ, содержащим графические ускорители. Методика ЭГАК предназначена для численного моделирования многомерных задач механики сплошной среды на неподвижной счетной сетке. В ней активно используется адаптивно-встраиваемая дробная сетка, вносящая нерегулярность в сеточную структуру.

Последовательно описаны подходы к решению проблем, возникших в процессе создания программы, приспособленной к счету на графических ускорителях. Рассматриваются вопросы выбора программной реализации при адаптации существующих алгоритмов методики, вопросы обмена информацией при использовании в расчетах нескольких графических ускорителей. Затронута проблема одновременного задействования всех счетных ресурсов рабочего узла (одновременный параллельный счет на всех доступных ядрах центральных процессоров и всех доступных графических ускорителях). Представлены показатели полученного ускорения при использовании гибридного вычислительного узла с графическими ускорителями относительно узла только с центральными процессорами на характерных для методики тестовых задачах.

Ключевые слова: ЭГАК, ЭГИДА-ТЕСТ, GPU, ускорение, распараллеливание, CUDA, MPI, OpenMP, эффективность, газовая динамика, адаптивно-встраиваемая дробная сетка.

Введение

Вычислительные устройства с архитектурой графических ускорителей (GPU) давно перестали быть только средствами отображения графики и прочно заняли свое место в качестве вычислительных устройств благодаря высокой степени параллелизма. Более того, GPU уже захватили лидерство в области высокопроизводительных вычислений. Активно ведутся работы по исследованию и применению данной архитектуры к решению прикладных задач [1–3]. На рынке GPU пока лидирующие позиции довольно прочно удерживает фирма Nvidia. Для использования GPU этой фирмы, как правило, применяется разработанная ею же технология CUDA [4].

В данной статье представлен первый вариант реализации разработанной и эксплуатируемой в РФЯЦ-ВНИИЭФ методики ЭГАК [5] для обеспечения счета задач с применением GPU.

Областью применения методики ЭГАК является моделирование ударно-волновых течений многокомпонентной сплошной среды с большими деформациями на многомерной пространственной неподвижной сетке с использованием АLE-подхода. Ключевой особенностью методики ЭГАК является возможность ведения счета на адаптивно-встраиваемой дробной сетке [6].

Для адаптации к счету на GPU выбран код программы ЭГИДА-ТЕСТ [7], включенный в систему тестов РФЯЦ-ВНИИЭФ для исследования параметров высокопроизводительных систем. Это упрощенная реализация методики ЭГАК, в которой присутствует лишь основной набор программ, позволяющих рассчитывать процесс газовой динамики. Расчет процесса выполняется в два этапа — лагранжев и эйлеров, решение на каждом из которых получается с помощью явных схем. В процессе адаптации к счету с использованием GPU для более широкого охвата тестовых задач методики ЭГАК в про-

грамму ЭГИДА-ТЕСТ была добавлена возможность ведения счета на адаптивно-встраиваемой дробной сетке. Это внесло элемент нерегулярности как в расчетную сетку, так и в структуры данных.

В процессе адаптации к счету на GPU понадобились глубокий анализ и существенная переработка текстов программ газовой динамики. Результатом стали новые коды, позволяющие вести работу как на одном, так и на нескольких устройствах GPU. Для более эффективного использования возможностей GPU некоторые программы были переписаны полностью с изменением алгоритма.

Работоспособность и эффективность полученной адаптированной программы ЭГИДА-ТЕСТ-GPU подтверждается результатами численных экспериментов, приведенными в статье.

Анализ существующего кода ЭГИДА-ТЕСТ и пути адаптации к счету на GPU

Адаптация программы к счету на GPU начинается с профилирования и анализа существующего кода. Результатом этих действий является набор особенностей, которые определяют дальнейший процесс адаптации.

Профилирование кода программы ЭГИДА-ТЕСТ показало, что "горячие пятна" (небольшая часть программы, занимающая более 50% времени от общего исполнения) в коде отсутствуют. Поэтому простейший путь адаптации только горячих пятен в данном случае не подходит и необходимо адаптировать для GPU весь счетный код программы.

Анализ кода, реализующего формирование и хранение данных решаемых задач, привел к выводу о нецелесообразности реализации на GPU аналогичного способа. При запуске в программе ЭГИДА-ТЕСТ производится расчет необходимого количества памяти для решаемой задачи. Весь необходимый объем памяти ЭВМ выделяется единым фрагментом. Работа с данным фрагментом памяти организована через сложную структуру, содержащую внутри себя как другие структуры, так и указатели на отдельные участки этого фрагмента. Работа с этой структурой реализована через систему так называемых функций доступа.

При адаптации можно скопировать весь выделяемый фрагмент памяти на GPU, но тогда

появится необходимость в организации на GPU структуры, аналогичной той, что имеется для CPU. При этом простого копирования заполненной структуры недостаточно, так как конечными элементами данной структуры в основном являются указатели, а они на каждом устройстве свои. Смысл в копировании на GPU указателей на память CPU отсутствует. Кроме того, для GPU адаптируется только код счетных программ, поэтому достаточно большая часть информации, хранящаяся в размеченном фрагменте памяти ЭВМ на CPU, не будет востребована на GPU. Таким образом, организовывать подобную структуру на GPU нецелесообразно.

Исходя из указанных соображений в памяти GPU выделены только те массивы, которые нужны для работы счетных программ. Размер и структура таких массивов соответствуют их расположению на CPU. В случае необходимости есть возможность обмена данными между CPU и GPU для каждого массива отдельно единым куском памяти, целиком содержащим этот массив.

При реализации счетных модулей методики ЭГАК в ЭГИДА-ТЕСТ, как правило, используются программы расчета одной ячейки. Порядок расчета ячеек, обмен данными между ячейками, рассчитываемыми разными MPI-процессами, организует типовая схема [8, 9]. Типовая схема реализована в виде функции, одним из параметров которой также является функция, выполняющая расчет ячейки. Поэтому при адаптации на GPU в качестве процесса, рассчитываемого на каждой GPU-нити, в большинстве случаев выбран расчет одной ячейки. Каждая GPU-нить ассоциируется с номером ячейки. При текущей реализации программы ЭГИДА-ТЕСТ-GPU авторы отказались от единой типовой схемы, ориентированной на использование CPU. Вместо вызова функции типовой схемы выполняется вызов ядра GPU.

Решаемая система дифференциальных уравнений на лагранжевом этапе имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{u}}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \text{grad } P; \\ \frac{d\rho_i}{dt} &= -\rho_i \text{div } \vec{u}_i; \\ \frac{d\beta_i}{dt} &= \beta_i (\text{div } \vec{u}_i - \text{div } \vec{u}); \\ \frac{de_i}{dt} &= -\frac{P_i}{\rho_i} \text{div } \vec{u}_i. \end{aligned}$$

Здесь \vec{u} — скорость; ρ — плотность; e — удельная внутренняя энергия; P — давление; β — объемная концентрация; i — номер компонента. Скорость определена в узлах счетной сетки, скалярные величины $\rho_i, e_i, P_i, P, \beta_i = V_i/V$ определены в центрах ячеек, где V_i и V — объемы i -го компонента вещества и всей ячейки соответственно. Индекс i в выражении для дивергенции относится не к скорости, а к дивергенции в целом.

Данная система замыкается уравнением состояния компонентов среды

$$P_i = P_i(\rho_i, e_i).$$

На эйлеровом этапе счетная сетка возвращается в исходное до лагранжева этапа состояние и осуществляется пересчет величин за счет потоков через грани ячеек (здесь используется расщепление по направлениям).

Каждый этап разделен на подэтапы, что очень удобно и для последовательной реализации, и для анализа эффективности распараллеливания.

Лагранжев этап содержит:

- 1) расчет предвычисленных давлений;
- 2) расчет ускорений на гранях ячеек;
- 3) пересчет ускорения и расчет скорости в узлах сетки;
- 4) решение уравнений неразрывности и энергии.

Эйлеров этап включает в себя расчеты:

- 1) потоков объема;
- 2) потоков масс, объемных концентраций и плотности;
- 3) энергии;
- 4) потоков импульса;
- 5) скорости.

Каждый из этих подэтапов адаптирован к счету на GPU независимо от остальных. Подэтап на CPU, как правило, реализован одним или несколькими вызовами функции типовой схемы. На GPU вместо функций типовой схемы вызывается реализованная функция, своя для каждого подэтапа, организующая работу одного или нескольких последовательно вызванных ядер GPU. Впоследствии объединение таких функций позволило перевести весь счет на GPU. На CPU производится работа, связанная со считыванием и записью данных. Это первоначальная инициализация задачи при считывании файлов с начальными данными, а также выдача полученных значений результатов счета в файлы.

На рис. 1 представлена схема выполнения программы ЭГИДА-ТЕСТ-GPU.

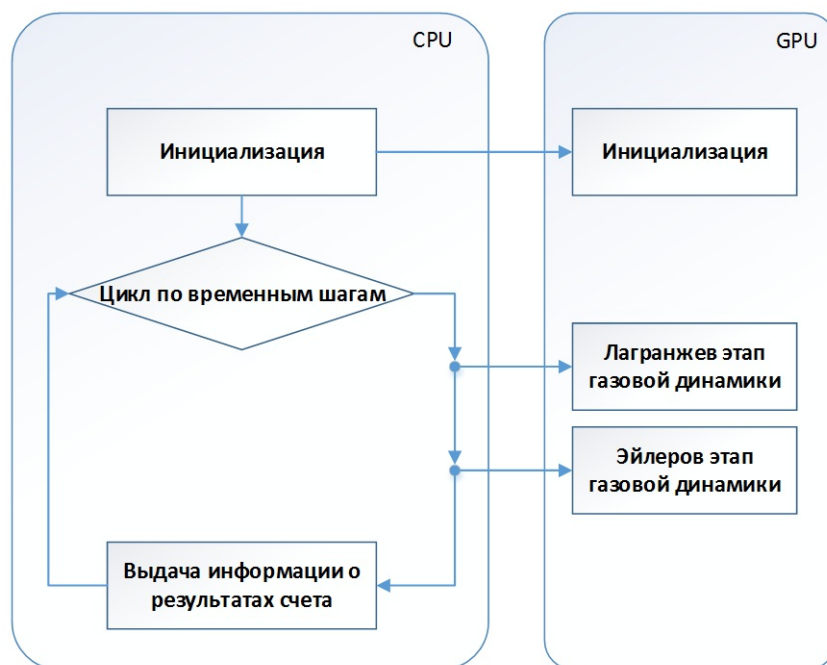


Рис. 1. Схема выполнения программы ЭГИДА-ТЕСТ-GPU при использовании одного устройства GPU

Особенности адаптации программ к счету на GPU

Коды функций расчета одной ячейки на CPU и коды ядер GPU схожи между собой. Отличия заключаются в отказе от функций доступа, используемых на CPU, в пользу прямых ссылок на используемые массивы, выделенные на GPU. Кроме того, при разработке ядер GPU авторы стремились максимально избавиться от дивергентных ветвлений (условных операторов, заставляющих разные GPU-нити выполнять неидентичную работу). Также ветвления приводят к замедлению работы вследствие того, что GPU-нити одного варпа (группа GPU-нитей, выполняющих свою работу физически одновременно) не могут одновременно рассчитывать разные ветви условного оператора.

Работа по избавлению от дивергентного ветвления на GPU схожа с векторизацией кода на CPU.

На рис. 2 показан пример, позволяющий понять необходимость отказа от дивергентного ветвления на GPU. В примере ведется расчет восьми ячеек, но в одной из них (это ячейка номер четыре) по каким-либо критериям реализуется простой случай, позволяющий сократить вычисления до нескольких операторов. GPU, благодаря своему параллелизму, рассчитывает сразу все ячейки одного варпа. Но сначала считаются все ячейки, кроме четвертой, попавшие в первую часть ветвления. После этого считается вторая часть ветвления (четвертая ячейка). Таким образом, на GPU условный опера-

тор формально может превратиться в последовательный. Если частота срабатывания критерия реализации простого случая невелика, то лучше не сокращать вычисления в коде.

Примером дивергентного ветвления в коде ЭГИДА-ТЕСТ может служить ветвление при расчете средней плотности смешанной (несколько веществ) и чистой (только одно вещество в данный момент) ячеек. В смешанной ячейке выполняется суммирование произведений объемных концентраций на удельную плотность каждого вещества ячейки. В чистой ячейке одна из объемных концентраций равна единице, а остальные — нулю. Поэтому при вычислении средней плотности вещества в чистой ячейке суммирование не выполняется, а ведется поиск присутствующего вещества и берется значение его плотности. Если такой алгоритм оставить при реализации на GPU, то GPU-нити, рассчитывающие смешанные и чистые ячейки, даже в пределах одного варпа будут работать не одновременно. Поэтому при реализации на GPU в данном случае все ячейки рассматриваются как смешанные (в чистой ячейке суммируются преимущественно нулевые слагаемые).

Другая особенность, напоминающая дивергентное ветвление, но при этом используемая для решения проблемы декомпозиции вычислительной работы при зависимости по данным, — это маркировка признаков, определяющих, считать ту или иную величину в данной ячейке или ее можно не считать, а брать уже посчитанное значение из соседней ячейки. Такая маркировка часто используется в программе ЭГИДА-ТЕСТ. Ее применение является следствием избыточности хранящейся информации для обеспечения независимого расчета ячейки. Маркировка применяется при расчете смежных величин, определенных на грани, ребре или узле и принадлежащих сразу нескольким ячейкам. На CPU такая величина в каждой ячейке помечается маркером, обозначающим, что расчет для этой ячейки уже произведен. Перед началом расчета очередной ячейки анализируется маркер соседней ячейки, и, если он находится в состоянии *посчитано*, расчет не проводится, а значение величины берется из соседней ячейки.

На GPU для указанной реализации необходимо прибегать к медленным атомарным функциям, да и не всегда это возможно. В таких случаях приходится несколько видоизменять алгоритм, избавляясь от маркировки, как от дивергентного ветвления. Если для расчета маркиру-

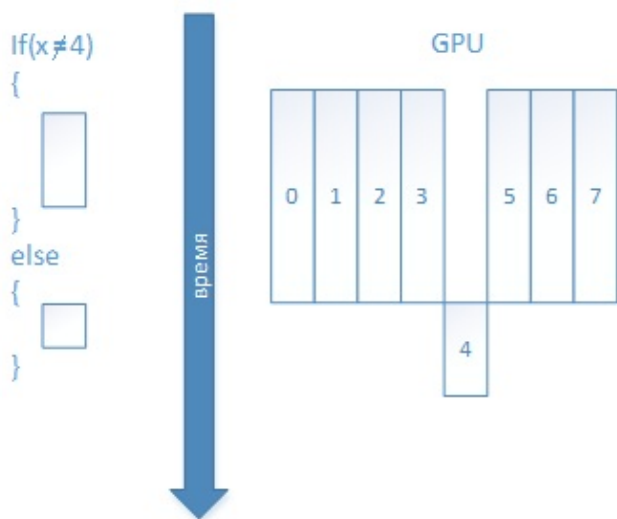


Рис. 2. Дивергентное ветвление

емой величины требуются небольшие вычисления, то они выполняются для каждой ячейки со смежной величиной и одна и та же работа дублируется на разных GPU-нитях. Если для расчета маркируемой величины требуются значительные вычисления, то одно GPU-ядро заменяется двумя ядрами. В первом ядре для всех ячеек рассчитывается смежная величина только на одной фиксированной по расположению грани (ребре, узле) ячейки. Во втором ядре копируется уже посчитанная информация от соседней ячейки.

На рис. 3 показан схематичный пример последовательности расчета скорости в узлах двумерной сетки. Приведен простейший случай фрагмента сетки, где ни одна из представленных ячеек не находится на границе расчетной области. Закрашенным кружком помечены посчитанные значения величины, незакрашенный кружок означает, что значение данной величины в текущей ячейке скопировано из соседней ячейки.

Использование нескольких GPU

Для возможности использования при расчете задачи нескольких устройств GPU в код внесена привязка MPI-процесса к GPU. Остальные MPI-процессы ничего об этом устройстве "не знают". По сути при такой реализации GPU является сопроцессором для MPI-процесса. Такой подход позволяет оставить неизменным ал-

горитм MPI-распараллеливания, реализованный на CPU. Вследствие этого без дополнительных трудозатрат появляется возможность производить расчеты в гетерогенном режиме, т. е. с одновременным использованием всех доступных CPU- и GPU-ресурсов для одного исполняемого файла.

Для экономии трудозатрат авторы используют существующие в ЭГИДА-ТЕСТ программы обмена, выполняемые при вызове типовой схемы. Таким образом, реализован способ обмена информацией через CPU с помощью MPI-интерфейса типовой схемы ЭГИДА-ТЕСТ, в которой отключен расчет ячеек. Для корректности такого обмена необходимо обеспечить наличие данных в граничных ячейках на CPU.

До и после вызова типовой схемы производится копирование данных граничных точек по каналам GPU—CPU с использованием промежуточного массива. Размер промежуточного массива определяется как максимум из количества граничных и *внешнепроцессорных* ячеек (типы *B* (boundary) и *E* (external) соответственно [8]). Ячейки типа *E* являются фиктивными ячейками, точными копиями ячеек типа *B* с других MPI-процессов. На рис. 4 ячейки типа *B* выделены жирными линиями, типа *E* — пунктиром. Для наглядности на рисунке представлена двумерная сетка, а не трехмерная, используемая в ЭГИДА-ТЕСТ.

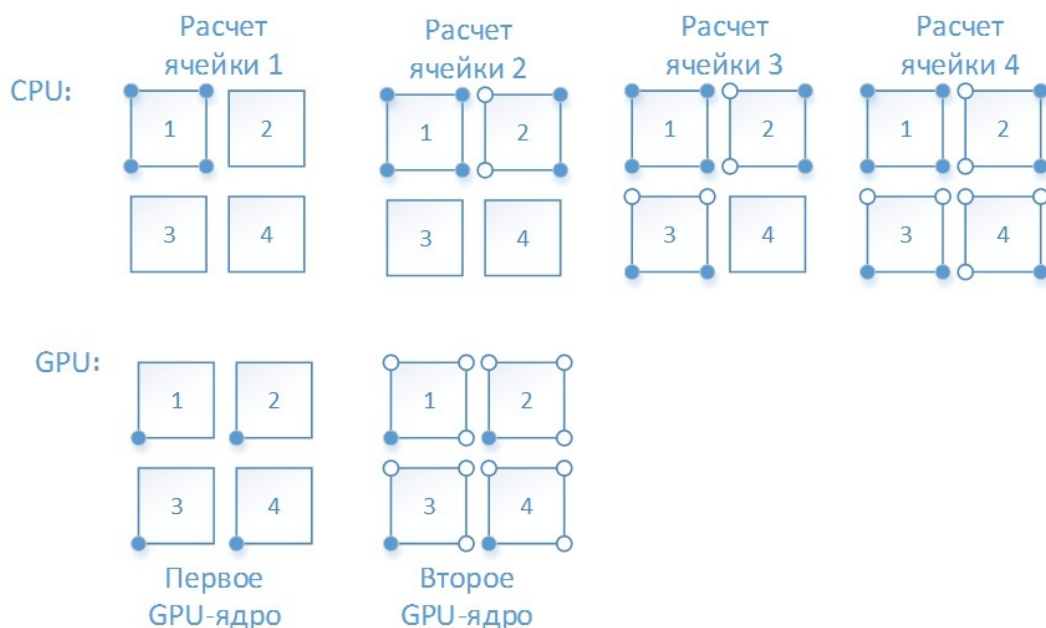


Рис. 3. Последовательности расчета скорости на CPU и GPU

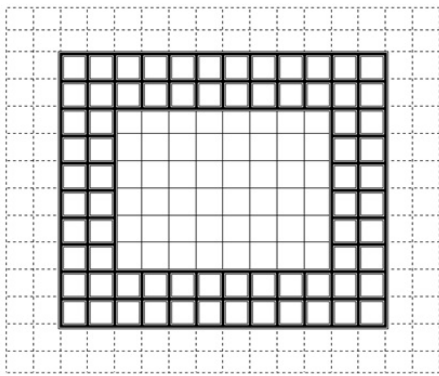


Рис. 4. Типы ячеек пространственной сетки

Для осуществления обмена значениями величин в граничных ячейках выполняются следующие действия:

1. Запуск ядра GPU, собирающего эти значения из граничных ячеек в промежуточный массив.
2. Передача данных промежуточного массива с GPU на CPU.
3. Выполнение программы, копирующей данные из промежуточного массива в реальные места хранения этой информации в системе памяти ЭГИДА-ТЕСТ на CPU.
4. Работа типовой схемы по MPI-обмену без вызова расчетных функций.
5. Выполнение программы, копирующей данные, полученные с других MPI-процессов и находящиеся в системе памяти ЭГИДА-ТЕСТ, в промежуточный массив на CPU.
6. Передача данных промежуточного массива с CPU на GPU.
7. Запуск ядра GPU, "раскладывающего" новые значения величин из промежуточного массива в граничные ячейки на GPU.

На рис. 5 показана используемая в ЭГИДА-ТЕСТ-GPU схема MPI-обменов.

Реализация адаптивно-встраиваемой дробной сетки на GPU

Для повышения точности расчетов на неподвижной сетке и экономии ресурсов в методике ЭГАК активно используется адаптивно-встраиваемая дробная сетка (далее просто *дробная сетка*). Она вводится либо в начальный момент времени с привязкой к пространству или веществу, либо в силу срабатывания некоторых условий или критериев.

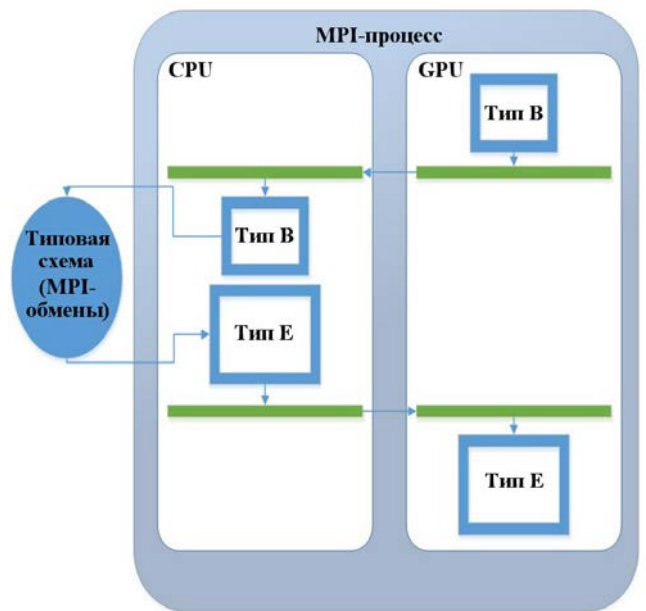


Рис. 5. Схема MPI-обменов

Применение дробной сетки означает, что в процессе счета в конце каждого временного шага любая счетная ячейка независимо от других может быть раздроблена на восемь частей. Вновь полученные ячейки также могут быть раздроблены вплоть до пятого уровня дробления (программное ограничение, связанное с выделением памяти). При необходимости ранее полученные дробные ячейки могут удаляться. Вычисления выполняются на полученной нерегулярной сетке до следующего изменения ее состояния.

Расчет каждого этапа ведется в цикле по уровням дробления, начиная от самых мелких ячеек. Ячейки основной, регулярной, сетки называются ячейками нулевого уровня дробления.

Для того чтобы была возможность в процессе счета создавать новые ячейки, в ЭГИДА-ТЕСТ существует список номеров ячеек, участвующих в расчете в данный момент. Номера ячеек, которые в данный момент в расчете не участвуют, хранятся в стеке свободных ячеек. Создание и удаление ячеек в конце счетного шага подразумевает: – проверку каждой ячейки на соответствие критериям дробления; – изменение списков ячеек, участвующих в счете; – установление соседства между ячейками как одного, так и разных уровней дробления; – заполнение вновь созданных ячеек физическими данными.

Работа по изменению списков ячеек, участвующих в счете, не является параллельной. Вообще, как правило, работы по формированию раз-

личных списков плохо адаптируются на GPU. Поэтому в данном случае авторы отошли от парадигмы адаптации всего кода на GPU. Проведен поиск "горячих пятен" в программах создания и удаления дробных ячеек. Такой оказалась только одна программа, которая устанавливает признаки дробления для ячеек, попадающих в переходную зону дробления с заданной шириной. *Ширина переходной зоны дробления* задается исполнителем расчета в количестве ячеек и определяет радиус шаров, центрами которых являются все дробные ячейки. Нераздробленные ячейки, попадающие в объединение всех таких шаров, дробятся и формируют переходную зону дробления.

На рис. 6 показана схема выполнения программы при использовании дробной сетки. Последним этапом является заполнение вновь созданных ячеек физическими данными. Этот этап не занимает много времени, но использует большое количество информации о физическом со-

стоянии рассчитываемой системы. Данная информация в актуальном состоянии хранится на GPU. Поэтому в целях минимизации передаваемой информации по каналу CPU—GPU работа по заполнению физическими данными (усреднением от соседей) вновь созданных ячеек выполняется на GPU.

Постановка тестовых задач

Тест 1. Движение сферической системы.

Данный тест представляет собой трехмерную задачу, в которой двенадцать веществ находятся в сферических слоях толщиной 1 см, имеющих общий центр [10].

Тест 2. Седовский (точечный) взрыв.

Данный тест является трехмерной задачей о сферически-симметричном взрыве. Постановка задачи взята из работы [11].

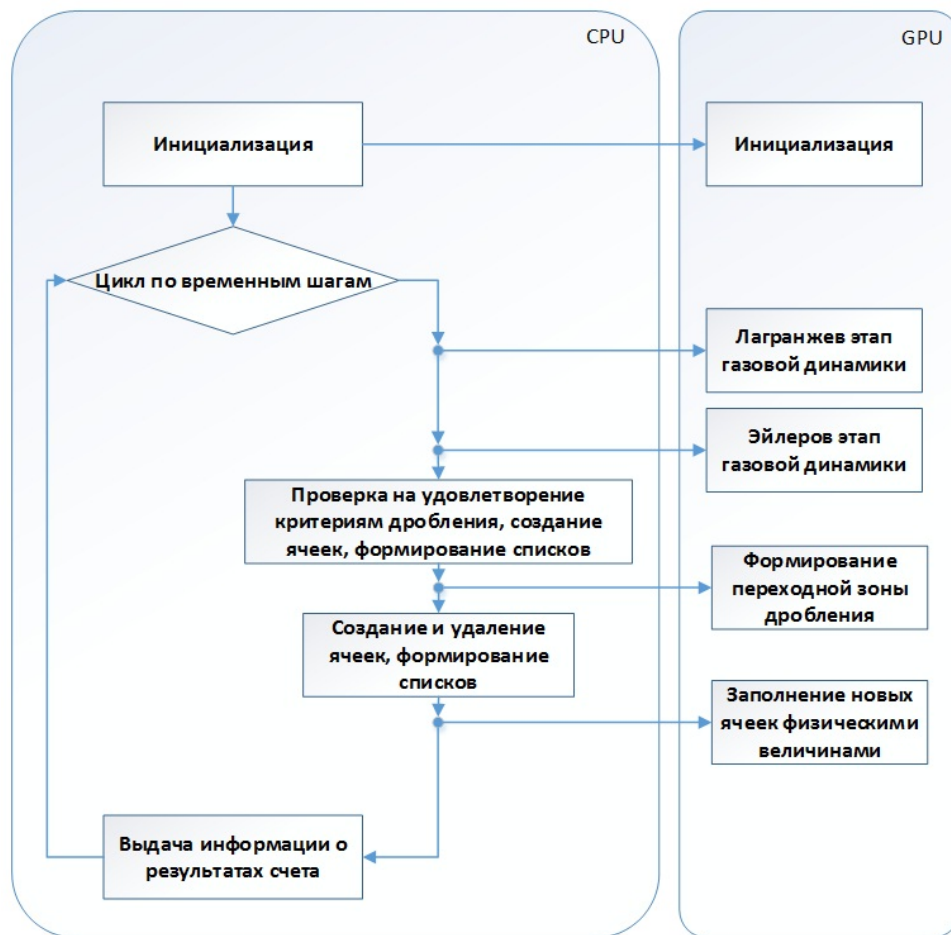


Рис. 6. Схема выполнения программы при использовании дробной сетки

Тест 2 характеризуется малой областью возмущения. Тем самым он является хорошим примером необходимости использования дробной сетки.

Использование дробной сетки в расчете определяется наличием критериев дробления. Наиболее часто в качестве критерия дробления используется номер вещества: ячейки, содержащие вещество с этим номером, дробятся. Кроме того, вокруг уже раздробленных ячеек создается переходная зона дробления с заданной шириной. В тесте 1 дробятся ячейки, содержащие вещества 1, 2 и 3, в тесте 2 — ячейки, содержащие возмущенное вещество.

Количество ячеек нулевого уровня дробления задается при старте задачи. Количество ячеек других уровней дробления в задачах варьировалось с помощью ширины переходной зоны дробления.

Результаты тестирования

Тестирование проводилось на гибридной ЭВМ, содержащей два процессора Intel Xeon CPU E5-2690 v4 2.6 GHz и два графических ускорителя Nvidia Tesla V100. Наилучший режим загрузки для программы ЭГИДА-ТЕСТ без использования ускорителей достигается с двумя MPI-процессами и двадцатью восемью OpenMP-нитьями ($MPI \times OMP = 2 \times 28$). Данный режим использовался для всех тестов, рассчитываемых без применения GPU.

При использовании двух GPU запуски проводились в таком же режиме. Заметим, что OMP-распараллеливание необходимо, так как

процесс создания и удаления дробных ячеек рассчитывается на GPU не полностью.

Полученные результаты расчетов всех вариантов тестов по программам ЭГИДА-ТЕСТ и ЭГИДА-ТЕСТ-GPU в пределах ста временных шагов полностью между собой согласуются.

Далее представлены результаты тестирования различных вариантов тестов 1 и 2. Показательным является среднее время выполнения второго временного шага в расчете (на первом шаге часть времени занимает создание и обмен начальной информацией).

В табл. 1 показаны результаты выполнения теста 1 на двух CPU, а также одном и двух GPU. На CPU запуск теста производится по программе ЭГИДА-ТЕСТ без использования GPU, он и является отправной точкой при расчете ускорения программы. Показанные в таблице результаты на двух GPU получены при запуске теста 1 в двух режимах масштабирования — деления (на сетке $150 \times 100 \times 100$) и умножения (на сетках $300 \times 100 \times 100$ и $150 \times 200 \times 100$). При использовании режима умножения в обоих случаях пространственная декомпозиция выполнялась вдоль первого пространственного направления. Приведенные в табл. 1 времена соответствуют выполнению лагранжева и эйлера этапов процесса газовой динамики, этапа создания и удаления дробных ячеек, а также выполнению временного шага.

Общее количество ячеек в задаче немного варьируется в зависимости от декомпозиции, так как учитываются все используемые ячейки (в том числе типы *B* и *E*). Основным показателем расчета является количество ячеек (в млн), посчитанных за секунду (*R*). Исходя из этого по-

Таблица 1

Результаты выполнения теста 1

Параметры выполнения	Количество ячеек		Время, мс				<i>R</i> , млн/с	<i>S</i>	<i>E</i> , %
	0-й уровень	1-й уровень	Лагр. этап	Эйлер. этап	Дроб. ячейки	Временной шаг			
150 × 100 × 100:									
2 CPU	1 540 000	111 232	160	686	333	1 179	1,4	—	—
1 GPU	1 500 000	103 664	53	277	194	524	3,1	2,2	—
2 GPU	1 540 000	111 232	45	248	111	404	4,1	2,9	66
300 × 100 × 100:									
2 GPU	3 040 000	177 120	71	379	211	661	4,9	3,5	79
150 × 200 × 100:									
2 GPU	3 080 000	192 832	89	478	219	786	4,2	3	68

казателя считаются ускорение (S) и эффективность (E).

Аналогичные результаты для теста 2 приведены в табл. 2.

Пиковая производительность гибридной ЭВМ без учета GPU составляет $\sim 1,2$ Тфлопс, а пиковая производительность используемого GPU $\sim 7,1$ Тфлопс. Таким образом, ускорение от использования одного устройства GPU (2,2–2,7) приблизительно в два раза проигрывает отношению пиковых производительностей ($7,1/1,2 = 5,9$ раз). Такие показатели являются удовлетворительным результатом.

Однако ускорение от использования двух устройств GPU (2,9–4,4) составляет лишь $\sim 25\%$ от соотношения пиковых производительностей ($14,2/1,2 = 11,8$), что подтверждается значениями эффективности использования двух GPU (66–81 %).

В табл. 3, 4 представлены суммарные времена полезной арифметической нагрузки (kernel), передачи данных между CPU и GPU (CPU–GPU) и MPI-обменов (MPI) на разных этапах расчета тестов 1 и 2, а также их доли от общего времени расчета этапов. На этапе создания и удаления дробных ячеек производится некоторая работа на CPU, ее время учтено вместе с MPI (CPU+MPI).

В табл. 3, 4 явно не показано, но просматривается, что эффективность распараллеливания полезной нагрузки при переходе от одного GPU к двум в среднем находится на уровне 90 %. Проблему составляет низкая общая эффективность при передаче информации как по каналам CPU–GPU, так и между MPI-процессами. Такие передачи занимают до 50 % времени выполнения программы. Необходима дальнейшая работа для достижения асинхронности полезной нагрузки и

Таблица 2

Результаты выполнения теста 2

Параметры выполнения	Количество ячеек		Время, мс				R , млн/с	S	E , %
	0-й уровень	1-й уровень	Лагр. этап	Эйлер. этап	Дроб. ячейки	Временной шаг			
150 × 150 × 150:									
2 CPU	3 456 000	2 512	286	689	761	1 736	2	–	–
1 GPU	3 375 000	2 512	99	141	384	624	5,4	2,7	–
2 GPU	3 465 000	2 512	78	174	209	461	7,5	3,8	70
300 × 150 × 150:									
2 GPU	6 840 000	2 512	127	240	404	771	8,9	4,4	81
150 × 300 × 150:									
2 GPU	6 930 000	2 512	154	346	416	916	7,6	3,7	69

Таблица 3

Время и доля выполнения операций для теста 1 при использовании GPU

Этап	Тип операции	1 GPU		2 GPU				
		150 × 100 × 100	150 × 100 × 100	300 × 100 × 100	300 × 100 × 100	150 × 200 × 100	150 × 200 × 100	
		Время, мс	Время, мс	Доля, %	Время, мс	Доля, %	Время, мс	Доля, %
Лагранжев	kernel	53	28	62	54	76	54	61
	CPU–GPU		12	27	12	17	26	29
	MPI		5	11	5	7	9	10
Эйлеров	kernel	277	161	65	292	77	304	63
	CPU–GPU		66	27	66	17	132	28
	MPI		21	8	21	6	42	9
Дробные ячейки	kernel	100	53	48	103	49	105	48
	CPU–GPU		65	29	65	31	65	30
	CPU+MPI		29	26	43	20	49	22

Таблица 4

Время и доля выполнения операций для теста 2 при использовании GPU

Этап	Тип операции	1 GPU			2 GPU			
		150 × 150 × 150 Время, мс	150 × 150 × 150		300 × 150 × 150		150 × 300 × 150	
			Время, мс	Доля, %	Время, мс	Доля, %	Время, мс	Доля, %
Лагранжев	kernel	99	53	68	102	80	106	69
	CPU—GPU		18	23	18	14	34	22
	MPI		7	9	7	6	14	9
Эйлеров	kernel	141	93	54	159	66	187	54
	CPU—GPU		60	34	60	25	114	33
	MPI		21	12	21	9	45	13
Дробные ячейки	kernel	226	118	56	232	57	237	57
	CPU—GPU		85	20	85	21	85	20
	CPU+MPI		73	24	87	22	94	23

обменов, что влечет за собой разработку новой или совершенствование старой типовой схемы в программе ЭГИДА-ТЕСТ-GPU.

Стоит отметить, что на этапе создания и удаления дробных ячеек практически не используется типовая схема. Обмен CPU—GPU здесь является необходимым для осуществления работы со списками на CPU. Такой обмен присутствует даже при использовании одного GPU. Поэтому эффективность распараллеливания на двух GPU данного этапа находится на приемлемом уровне (~ 90 %).

Перед выполнением дальнейших работ по оптимизации использования нескольких GPU в расчете необходимо иметь результаты "в нулевом приближении", за которые можно принять результаты первой версии работающей программы ЭГИДА-ТЕСТ-GPU. Такие результаты представлены в табл. 5, 6 для разных размеров сеток.

В таблицах указаны размеры счетных сеток нулевого уровня. Ширина переходной зоны дробления подбиралась таким образом, чтобы общее число ячеек в вариантах задачи приблизительно совпадало. Данный параметр сильно влияет на время выполнения этапа создания и удаления дробных ячеек. Также указано количество ячеек на каждом из используемых уровней дробления и общее количество ячеек на всех уровнях дробления. По этому параметру можно понять, какой максимальный уровень дробления использовался в данном варианте теста. Значения ускорений, приведенные в табл. 6, получены путем отношения времени выполнения в режиме CPU (без использования GPU) ко времени выполнения с использованием двух GPU.

Использование GPU позволило получить на тесте 1 общее ускорение от 3 до 5 раз, на тесте 2 — от 4 до 6 раз. Данные результаты яв-

Таблица 5

Параметры сеток для тестов 1 и 2

Сетка	Ширина переход. зоны	Кол-во ячеек				Всего
		0-й уровень	1-й уровень	2-й уровень	3-й уровень	
Тест 1:						
226 × 160 × 160	—	5 785 600	—	—	—	5 785 600
210 × 156 × 156	16	5 207 904	616 608	—	—	5 824 512
194 × 140 × 140	6	3 880 800	247 440	1 659 648	—	5 787 888
Тест 2:						
200 × 200 × 200	—	8 000 000	—	—	—	8 000 000
198 × 198 × 198	16	7 919 208	26 560	—	—	7 945 768
196 × 196 × 196	16	7 683 200	33 360	212 480	—	7 929 040
190 × 190 × 190	12	7 003 400	17 040	118 696	819 712	7 958 848

Ускорения при выполнении этапов тестов 1 и 2

Сетка	Лагранжев этап	Эйлеров этап	Дробные ячейки	Временной шаг
Тест 1:				
226 × 160 × 160	4,4	3,2	–	3,4
210 × 156 × 156	4,1	3,2	5,8	5,2
194 × 140 × 140	3,5	2,9	2,3	2,8
Тест 2:				
200 × 200 × 200	3,9	4,4	–	4,2
198 × 198 × 198	4,2	4,8	5,9	5,8
196 × 196 × 196	4,1	4,7	5,7	5,5
190 × 190 × 190	4,5	5,2	4,9	4,9

ляются удовлетворительными, так как соотношение между пиковой производительностью используемых устройств составляет около 12 раз.

Гетерогенный режим загрузки счетного узла

Схема MPI-обменов, используемая в ЭГИДА-ТЕСТ-GPU, позволяет вести счет в режиме, когда один или несколько MPI-процессов работают каждый со своим GPU, а другие выполняются только на CPU. То есть для расчета задачи можно использовать все счетные ресурсы узла в рамках одного исполняемого файла. Для этого в программу ЭГИДА-ТЕСТ внедрена статическая балансировка по первому пространственному направлению. В итоге получилась рабочая версия кода, позволяющая вести счет в режиме (MPI × OpenMP) + (MPI × CUDA).

В течение разработки программы ЭГИДА-ТЕСТ-GPU гетерогенный режим загрузки поддерживается в работоспособном состоянии, но не развивается и не оптимизируется: основной целью исследования является эффективное освоение только нескольких устройств GPU.

Счет в гетерогенном режиме загрузки исследовался на тесте 1 с размером счетной сетки 226 × 160 × 160 без использования дробной сетки: исследования проводились сразу после введения возможности счета с использованием нескольких MPI-потоков, когда возможность использования дробной сетки еще не была реализована.

Так как устройства GPU значительно мощнее ядер CPU и тестирование проводилось на ЭВМ, содержащей только два GPU, то оптимальный вариант декомпозиции решаемой задачи можно представить в виде двух столбиков

вдоль любого (выбрано первое) пространственного направления, в основании которых находятся MPI-процессы с GPU (рис. 7).

Такой вид декомпозиции позволяет балансировать счетную нагрузку MPI-процессов только вдоль первого пространственного направления (вдоль второго направления нагрузка всегда делится на две части поровну, вдоль третьего направления нет разбиения) за счет распределения *слоев* ячеек (или, другими словами, количества ячеек вдоль первого пространственного направления) на MPI-процессах. Количество слоев ячеек на всех MPI-процессах, работающих с CPU, совпадает между собой (аналогично на MPI-процессах, работающих с GPU).

В табл. 7 приведены средние времена выполнения временного шага для задачи с разными

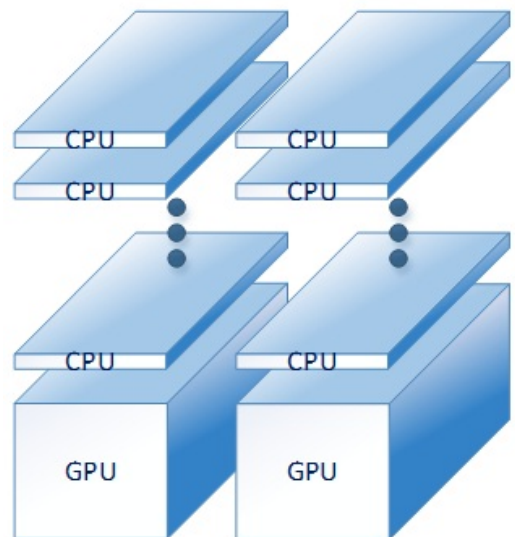


Рис. 7. Декомпозиция решаемой задачи

Среднее время (в мс) выполнения одного шага при различных режимах загрузки сервера

MPI × OMP	Количество слоев ячеек					
	4	6	8	10	12	14
4 × 6	1 022	957	940	933	989	–
4 × 14	1 048	989	981	970	1 016	–
6 × 2	991	1 040	1 011	1 089	1 108	1 207
6 × 4	953	999	926	966	904	952
6 × 5	960	996	926	969	897	961
6 × 6	951	996	993	961	961	945
6 × 7	943	995	924	963	889	982
8 × 3	1 020	932	920	909	966	–
8 × 4	1 012	932	920	896	947	–
8 × 5	1 007	932	907	883	917	–
8 × 6	1 059	992	961	939	960	–
16 × 2	1 074	1 163	1 344	1 456	–	–

параметрами. Во всех указанных вариантах два MPI-процесса работают с GPU, остальные выполняются на CPU. Результаты представлены для разного количества слоев ячеек (от 4 до 14), расчет которых производится на каждом MPI-процессе, содержащем CPU.

Время счета шага с применением только двух устройств GPU на момент тестирования составляло 906 мс. При гетерогенном режиме получено несколько комбинаций, при которых время счета, хотя и незначительно, но меньше (в табл. 7 выделено жирным шрифтом). Тем самым показана принципиальная возможность получения выигрыша от гетерогенного режима загрузки, когда задействуются все вычислительные возможности устройств на узле, хотя на текущий момент вычисления по программе ЭГИДА-ТЕСТ-GPU эффективнее вести только на GPU.

Заключение

Приведено описание исследований и их результатов по адаптации к счету на гибридной ЭВМ, содержащей GPU, программы ЭГИДА-ТЕСТ. Данная программа реализует алгоритмы лагранжева и эйлерова эталов газовой динамики методики ЭГАС с возможностью ведения счета на адаптивно-встраиваемой дробной сетке.

Результатом работ стала первая версия программы ЭГИДА-ТЕСТ-GPU, позволяющая вести счет задач газовой динамики на адаптивно-встраиваемой дробной сетке с применением

GPU. Получено хорошее согласие результатов расчета тестовых задач на гибридной параллельной ЭВМ с результатами, полученными на многопроцессорной ЭВМ (без GPU).

При использовании двух устройств GPU на разных тестовых задачах получено ускорение счета от 3 до 6 раз по сравнению со счетным узлом с двумя CPU.

Анализ полученных результатов показывает необходимость продолжения работы по оптимизации и повышению эффективности при использовании нескольких GPU, например, за счет прямых обменов между устройствами. Кроме того, по мнению авторов, следует сосредоточиться на адаптации к счету на GPU программ теплопроводности методики ЭГАС с применением дробных сеток.

Исследование выполнено в рамках научной программы Национального центра физики и математики г. Сарова, направление № 1 "Национальный центр исследования архитектур суперкомпьютеров".

Список литературы

1. Быков А. Н., Гордеев Д. Г., Куделькин В. Г., Сизов Е. А., Фёдоров А. А. Методика РАМЗЕС-КП на гибридных параллельных ЭВМ с графическими ускорителями // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2017. Вып. 3. С. 70–76.

- Bykov A. N., Gordeev D. G., Kudelkin V. G., Sizov E. A., Fyedorov A. A.* Metodika RAMZES-KP na gibridnykh parallelnykh EVM s graficheskimi uskoritelyami // *Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov.* 2017. Vyp. 3. S. 70–76.
2. *Геллер О. В., Васильев М. О., Холодов Я. А.* Построение высокопроизводительного вычислительного комплекса для моделирования задач газовой динамики // *Компьютерные исследования и моделирование.* 2010. Т. 2, № 3. С. 309–317.
Geller O. V., Vasilyev M. O., Kholodov Ya. A. Postroenie vysokoproizvoditelnogo kompleksa dlya modelirovaniya zadach gazovoy dinamiki // *Kompyuternye issledovaniya i modelirovanie.* 2010. Т. 2, № 3. С. 309–317.
3. *Анисов В. О., Вазиев Э. М., Ушаков Д. А.* Реализация метода решения двумерного уравнения теплопроводности на гибридной архитектуре (CPU+GPU) // *Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов.* 2021. Вып. 1. С. 39–52.
Anisov V. O., Vaziev E. M., Ushakov D. A. Realizatsiya metoda resheniya dvumernogo uravneniya teploprovodnosti na gibridnoy arkhitekture (CPU+GPU) // *Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov.* 2021. Vyp. 1. S. 39–52.
4. *Боресков А. В., Харламов А. А.* Основы работы с технологией CUDA. М.: ДМК Пресс, 2010.
Boreskov A. V., Kharlamov A. A. Osnovy raboty s tekhnologiyey CUDA. M.: DMK Press, 2010.
5. *Шанин А. А., Янилкин Ю. В.* Комплекс программ ЭГАК. Газодинамические разностные схемы в эйлеровых переменных // *Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов.* 1993. Вып. 1. С. 24–30.
Shanin A. A., Yanilkin Yu. V. Kompleks programm EGAK. Gazodinamicheskie raznostnye skhemy v eylerovykh peremennykh // *Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov.* 1993. Vyp. 1. S. 24–30.
6. *Янилкин Ю. В., Беляев С. П., Городничев А. В., Воронов Е. Г., Гужова А. Р., Дегтяренко Л. И., Жарова Г. В., Кучерова П. А., Стадник А. Л., Ховрин Н. А.* Комплекс программ ЭГАК++ для моделирования на адаптивно-встраиваемой дробной счетной сетке // *Вопросы атомной науки и техники. Сер. Методики и программы численного решения задач математической физики.* 2003. Вып. 1. С. 20–28.
Yanilkin Yu. V., Belyaev S. P., Gorodnichyev A. V., Voronov E. G., Guzhova A. P., Degtyarenko L. I., Zharova G. V., Kucherovaly P. A., Stadnik A. L., Khovrin N. A. Kompleks programm EGAK++ dlya modelirovaniya na adaptivno-vstrayvayushchey drobnoy raschyetnoy setke // *Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Metodiki i programmy chislennogo resheniya zadach matematicheskoy fiziki.* 2003. Vyp. 1. S. 20–28.
7. *Алексеев А. В., Беляев С. П., Бочков А. И., Быков А. Н., Ветчинников М. В., Залылов А. Н., Нухудин А. А., Огнев С. П., Самсонова Н. С., Чистякова И. Н., Янилкин Ю. В.* Методические прикладные тесты РФЯЦ-ВНИИЭФ для численного исследования параметров высокопроизводительных систем // *Там же. Сер. Математическое моделирование физических процессов.* 2020. Вып. 2. С. 86–100.
Alekseev A. V., Belyaev S. P., Bochkov A. I., Bykov A. N., Vetchinnikov M. V., Zalyalov A. N., Nuzhdin A. A., Ognev S. P., Samsonova N. S., Chistyakova I. N., Yanilkin Yu. V. Metodicheskie prikladnye testy RFYATs-VNIIEF dlya chislennogo issledovaniya parametrov vysokoproizvoditelnykh sistem // *Tam zhe. Ser. Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov.* 2020. Vyp. 2. S. 86–100.
8. *Беляев С. П.* Метод мелкозернистого распараллеливания с динамической балансировкой на примере задачи газовой динамики и вычислительные эксперименты на параллельной системе // *Там же.* 2000. Вып. 1. С. 45–49.
Belyaev S. P. Metod melkozernistogo rasparallelivaniya s dinamicheskoy balansirovkoy zadachi gazovoy dinamiki i vychislitelnye eksperimenty na parallelnoy sisteme // *Tam zhe.* 2000. Vyp. 1. S. 45–49.
9. *Колобянин В. Ю., Фёдоров А. А., Антипина Н. Р.* Двухуровневое распараллели-

- вание явных разностных схем методики ЭГАК // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2017. Вып. 3. С. 62–69.
- Kolobyatin V. Yu., Fyedorov A. A., Antipina N. R.* Dvukhurovnevoe raspallelivanie yavnykh raznostnykh skhem metodiki EGAK // Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov. 2017. Вып. 3. С. 62–69.
10. *Колобянин В. Ю., Чистякова И. Н.* Программа ЭГИДА-ТЕСТ для численного исследования параметров высокопроизводительных вычислительных систем // Там же. 2023. Вып. 1. С. 42–50.
- Kolobyatin V. Yu., Chistyakova I. N.* Programma EGIDA-TEST dlya chislennogo issledovaniya parametrov vysokoproizvoditelnykh vychislitelnykh system // Tam zhe. 2023. Вып. 1. С. 42–50.
11. *Седов Л. И.* Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1965.
- Sedov L. I.* Metody podobiya i razmernosti v mekhanike. М.: Nauka, 1965.
- Статья поступила в редакцию 22.08.22.
-

УДК 623.4.083.25

СОЗДАНИЕ ОДНОРОДНОГО ПОТОКА ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ПИКОСЕКУНДНОЙ ДЛИТЕЛЬНОСТИ НА ВНУТРЕННЕЙ ПОВЕРХНОСТИ МИШЕНИ С ОБРАЩЕННОЙ КОРОНОЙ С ПОМОЩЬЮ ОТРАЖАТЕЛЯ РАСЧЕТНОЙ ФОРМЫ

В. М. Ямщиков
(ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области)

Рассматривается идея о добавлении в конструкцию мишени с обращенной короной отражателя, который рассеивает от своей поверхности лазерную энергию максимально однородно по внутренней поверхности мишени. При теоретическом исследовании предполагалось, что индикатриса рассеянного излучения состоит из суммы зеркальной и ламбертовской частей. Для такой индикатрисы рассчитана форма поверхности отражателя, позволяющая абсолютно однородно распределять зеркальную составляющую рассеянной энергии по внутренней поверхности мишени с обращенной короной. В работе не учитывался газодинамический разлет плазмы от поверхности отражателя: показано, что при некоторых реальных параметрах мишени и лазерного излучения им можно пренебречь. Для описания распространения излучения использовалось приближение геометрической оптики.

Ключевые слова: мишень с обращенной короной, зеркальный отражатель, индикатриса, закон Ламберта, лазерная плазма.

Введение

Одним из перспективных вариантов конструкции мишени для исследования термоядерных процессов с внутренним вводом излучения является мишень с обращенной короной (МОК) [1–3]. Главной задачей при облучении МОК лазерным излучением является получение максимального выхода нейтронов. Возможным способом достижения этой цели является равномерное распределение энергии лазера по внутренней стенке мишени. Тогда образовавшаяся у поверхности стенки высокотемпературная плазма будет симметричным образом схлопываться в центре мишени, что приведет к эффективному преобразованию кинетической энергии ионов в тепловую энергию и нагреву плазмы до высоких значений ионной температуры, а это, в свою очередь, поспособствует интенсивному протеканию термоядерных реакций.

Для получения максимально равномерного распределения лазерной энергии по внутренней поверхности МОК предлагается поместить внутрь мишени специальную конструкцию, которая является отражателем излучения. При этом вводимая через отверстие на поверхности мишени лазерная энергия частично поглотится отражателем, и за короткий промежуток времени на его поверхности образуется плазма. Предполагается, что она не успеет разлететься за время действия лазерного импульса и будет рассеивать падающее на нее лазерное излучение. Тогда, зная индикатрису рассеяния от поверхности плазмы, можно найти такую поверхность отражателя, чтобы рассеянная от него лазерная энергия распределялась по внутренней поверхности МОК максимально однородно.

Идея о добавлении в полую мишень отражателя не новая. В статье [4] для более равномерного облучения внутренней поверхности мишени был добавлен конический конвертор. Целью работы [4] являлось исследование взаимодействия лазерной плазмы с магнитным полем. При этом поиск оптимальной поверхности конвертора не проводился.

В данной работе предполагается, что индикатриса рассеянного излучения состоит из зеркальной и ламбертовской составляющих. Газодинамический разлет плазмы от поверхности отражателя не учитывается; считается, что лучи распространяются по законам геометрической оптики. При этом задача сводится к решению дифференциального уравнения первого порядка. Для зеркальной составляющей излучения получена форма отражающей поверхности, которая абсолютно равномерно распределяет эту часть отраженной лазерной энергии по внутренней поверхности сферы.

Расчет формы поверхности зеркального отражателя

Пусть в тонкостенную полую сферу радиусом R через отверстие радиусом r_0 на ее верхнем полюсе в направлении вертикальной оси z (вниз) вводится параллельный пучок излучения, имеющий круговое сечение (рис. 1). Пучок свободно распространяется внутри сферы. В нижней части сферы размещен зеркальный отражатель, форма которого задана зависимостью $z = f(r)$ ($0 \leq r \leq r_0$ и $0 \leq z \leq h$, где h — высота отражателя).

Всюду далее будем предполагать применимость геометрической оптики.

Дополнительно предполагается, что образовавшаяся плазма, а именно поверхность критического слоя, не успевает сместиться на расстояние, заметно превышающее первоначальные размеры отражателя. Математически это условие можно представить как $c_0\tau \ll r_0$ (c_0 — скорость плазмы на критической поверхности [5], τ — время действия лазерного импульса). Выражая c_0 через интенсивность лазерного излучения и критическую плотность [5], получаем условие выполнения данного предположения:

$$c_0\tau = \left(\frac{I}{4\rho_{\text{кр}}}\right)^{1/3} \tau = \frac{Q^{1/3}\tau^{2/3}}{(4\pi)^{1/3}r_0^{2/3}\rho_{\text{кр}}^{1/3}} \ll r_0, \quad \text{или} \quad K = \frac{Q^{1/3}\tau^{2/3}}{(4\pi)^{1/3}r_0^{5/3}\rho_{\text{кр}}^{1/3}} \ll 1, \quad (1)$$

где Q — энергия лазерного импульса; $\rho_{\text{кр}}$ — плотность критического слоя.

Для примера найдем значение величины K (1) для МОК радиусом $R = 2$ мм с максимальной координатой отражателя вдоль оси r $r_0 = 0,2R = 0,2 \cdot 2$ мм = 400 мкм. Воспользуемся параметрами лазерной установки "Омега", которые взяты из работы [6]: $Q = 20$ Дж (энергия, которую можно получить на одном канале); $\tau = 30$ пс. Тогда (при $\rho_{\text{кр}} \sim 10^{-2}$ г/см³) получим $K \approx 0,02$.

Выполнение условия (1) позволяет не учитывать газодинамические процессы при расчете формы поверхности отражателя, что сильно упрощает задачу.

Рассмотрим картину отражения световых лучей от поверхности 2 на рис. 1, где \vec{e}_0 , \vec{n} , \vec{e}_1 — единичные векторы направления падения луча, нормали к поверхности в точке A и направления отраженного луча соответственно. Угол падения по отношению к нормали равен углу отражения луча. Луч, отраженный от точки A , попадает на внутреннюю поверхность сферы в точке B , характеризуемой углом θ между осью z и радиусом R , проведенным в точку B . Пусть \vec{e}_r — единичный вектор вдоль оси r , а \vec{e}_z — единичный вектор вдоль оси z . Тогда

$$\vec{e}_0 = 0 \cdot \vec{e}_r + (-1) \cdot \vec{e}_z; \quad \vec{n} = -\frac{f'}{\sqrt{1+f'^2}}\vec{e}_r + \frac{1}{\sqrt{1+f'^2}}\vec{e}_z; \quad \vec{e}_1 = \vec{e}_0 - 2(\vec{e}_0, \vec{n})\vec{n}.$$

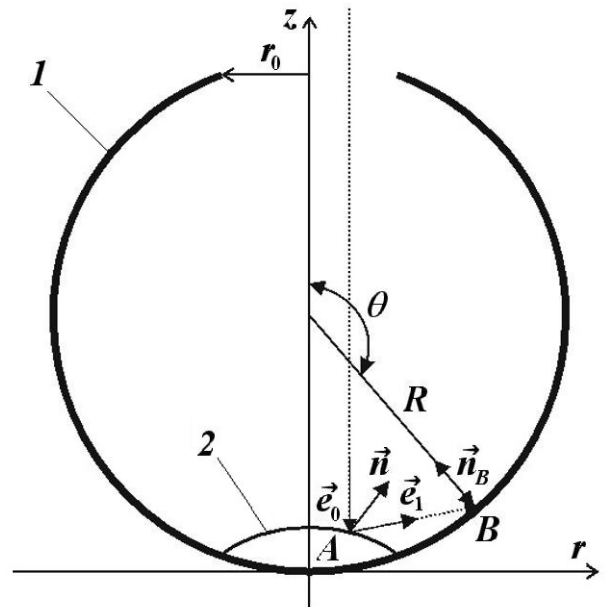


Рис. 1. Схема МОК с отражателем: 1 — оболочка мишени; 2 — зеркальный отражатель лазерной энергии

Найдем связь между углом θ и прицельным параметром r в точке A падающего луча. Обозначив через L расстояние между точками $A(r, f)$ и $B(r_B, z_B)$, запишем выражения для координат точки B на поверхности сферы:

$$r_B = r + L(\vec{e}_1, \vec{e}_r) = r - L \frac{2f'}{1+f'^2} = R \sin \theta; \quad z_B = f + L(\vec{e}_1, \vec{e}_z) = f + L \frac{1-f'^2}{1+f'^2} = R(1 + \cos \theta). \quad (2)$$

Для точек с координатами (2) выполняется соотношение

$$r_B^2 + (R - z_B)^2 = R^2.$$

Исключая L из выражений (2), после некоторых математических преобразований получаем

$$-2f'[R(1 + \cos \theta) - f] = (R \sin \theta - r)(1 - f'^2). \quad (3)$$

Корнями уравнения (3) будут обыкновенные дифференциальные уравнения

$$f'_\pm = \frac{R(1 + \cos \theta) - f \pm \sqrt{[R(1 + \cos \theta) - f]^2 + (R \sin \theta - r)^2}}{R \sin \theta - r}. \quad (4)$$

Ищем такую форму поверхности $f(r)$, чтобы лазерный импульс с плотностью потока $q(r)$ (поток в трубке кругового сечения $0 < r < r_0$ (см. рис. 1)), попадая на отражатель искомого формы и отражаясь от него зеркально, создавал на внутренней поверхности сферы однородный поток. При этом лучи, распространяющиеся в круговом кольце площадью $2\pi r dr$, попадают на участок внутренней поверхности сферы площадью $2\pi R^2 \sin(\theta) d\theta$. Полный поток излучения, входящего внутрь сферы, есть интеграл от величины $2\pi q(r) r dr$ с пределами интегрирования от 0 до r_0 . Он равномерно распределяется по площади сферы, которая не экранируется отражателем: $S = 2\pi R^2 \left(1 + \frac{\sqrt{R^2 - r_0^2}}{R}\right)$.

Следовательно, плотность потока Q_0 на внутренней поверхности сферы равна

$$Q_0 = \frac{1}{2\pi R^2 \left(1 + \frac{\sqrt{R^2 - r_0^2}}{R}\right)} \int_0^{r_0} 2\pi q(r) r dr.$$

Из соотношения $q(r)2\pi r dr = Q_0 2\pi R^2 \sin(\theta) d\theta$ следует уравнение

$$\frac{1}{R^2 Q_0} \int_0^r q(\xi) \xi d\xi = \int_0^\theta \sin \theta d\theta = 1 - \cos \theta. \quad (5)$$

В итоге получена система уравнений (4), (5), которая позволит найти искомую форму отражателя $z = f(r)$. Систему необходимо дополнить начальным условием (так как решается задача Коши)

$$f(r_0) = R - \sqrt{R^2 - r_0^2}.$$

На рис. 2 сплошной кривой представлено численное решение системы уравнений (4), (5) методом Рунге—Кутты четвертого порядка для случая, когда интенсивность лазерного излучения однородна ($q(r) = \text{const}$). На рис. 2, *a* отражатель описывается уравнением (4), в котором выбран знак "+", на рис. 2, *б* — уравнением (4), в котором выбран знак "-". Ось ординат — r/R , ось абсцисс — z/R .

Таким образом, найдена форма поверхности, которая однородно рассеивает зеркальную составляющую лазерного излучения. Часть излучения может рассеиваться по закону Ламберта. Как будет показано далее, в отсутствие отражателя эта часть лазерной энергии распределяется по внутренней поверхности мишени однородно. Поэтому необходимо исследовать, как влияет на распределение ламбертовской части лазерной энергии по мишени присутствие отражателя.

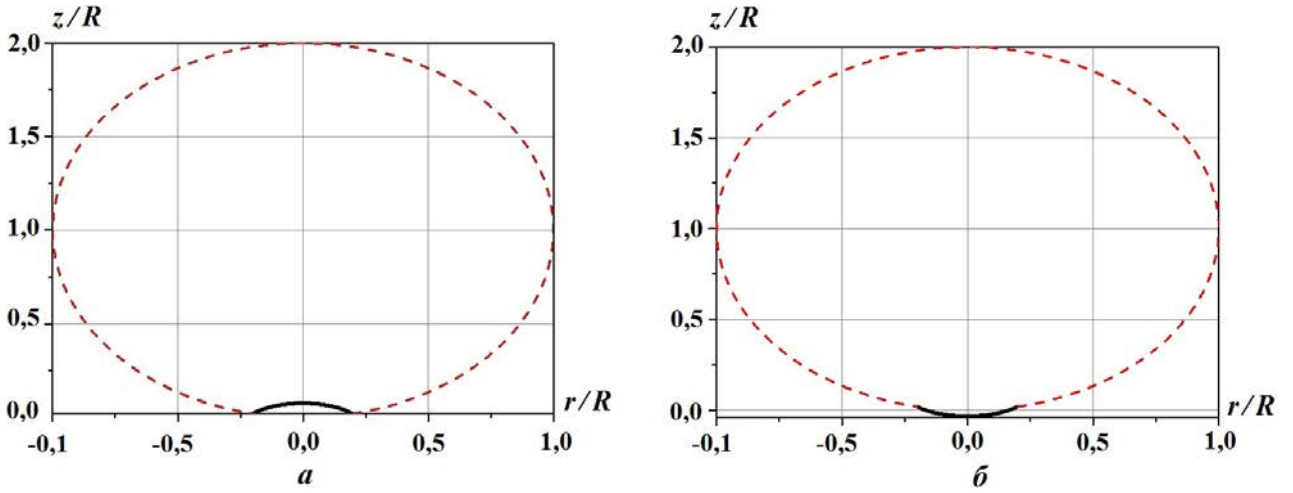


Рис. 2. Полученная форма отражателя: *a* — в виде выступа; *b* — в виде каверны (--- корпус МОК)

Расчет ламбертовского рассеяния в присутствии отражателя

Как уже сказано, часть потока лазерного излучения однородно рассеивается от поверхности плазмы, образованной от отражателя, в телесном угле 2π и попадает на внутреннюю поверхность МОК. В расчете использовались следующие фотометрические формулы:

$$B = \frac{d\Phi}{d\Omega' ds \cos \alpha}; \quad E = \int_{\Omega} B \cos \alpha' d\Omega. \quad (6)$$

Здесь E — освещенность в точке N на внутренней поверхности сферы, создаваемая протяженным источником света в точке M с известной поверхностной яркостью B (рис. 3); $d\Phi$ — поток энергии, облучающий элементарную площадку отражателя ds ; ds' — освещаемая элементарная площадка на внутренней поверхности МОК; r — расстояние между точками M и N ; α и α' — углы между нормальными к площадкам и прямой MN . Телесный угол, под которым из площадки ds видна площадка ds' , равен $d\Omega'$. Телесный угол, под которым из площадки ds' видна площадка ds , равен $d\Omega$. Поток энергии, который попадает на отражатель, равен Φ .

Предполагается, что часть лазерной энергии рассеивается по закону Ламберта. Поверхностная яркость будет равна

$$B = \frac{\eta\Phi}{S\pi}, \quad \Phi = \int_0^{r_0} q(r)\pi r dr, \quad (7)$$

где S — площадь поверхности отражателя; η — часть энергии, которая идет в ламбертовскую составляющую рассеяния.

Пусть координаты точки M равны x, y, f , а координаты точки N — $x_{\text{сф}}, y_{\text{сф}}, z_{\text{сф}}$. Уравнение, описывающее поверхность сферы МОК, имеет вид

$$x_{\text{сф}}^2 + y_{\text{сф}}^2 + (z_{\text{сф}} - R)^2 = R^2.$$

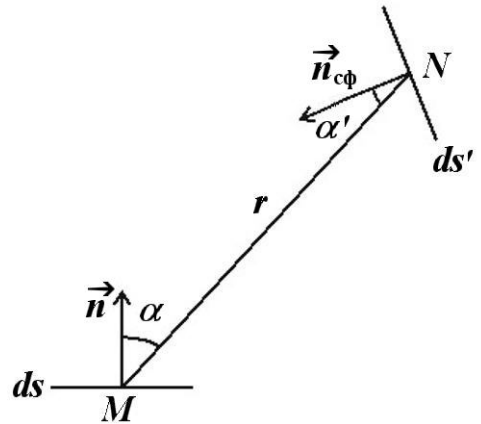


Рис. 3. Участок поверхности зеркального отражателя в точке M , который освещает участок поверхности мишени в точке N

Считается, что вектор нормали $\vec{n}_{\text{сф}}$ в точке N направлен внутрь сферы. Тогда угол α' между $\vec{n}_{\text{сф}}$ и вектором \overrightarrow{MN} определяется по формуле

$$\cos \alpha' = -\frac{\vec{n}_{\text{сф}} \cdot \overrightarrow{MN}}{|\overrightarrow{MN}|} = -\frac{x_{\text{сф}}(x_{\text{сф}} - x) + y_{\text{сф}}(y_{\text{сф}} - y) + (z_{\text{сф}} - R)(z_{\text{сф}} - f)}{R\sqrt{(x_{\text{сф}} - x)^2 + (y_{\text{сф}} - y)^2 + (z_{\text{сф}} - f)^2}}. \quad (8)$$

Используя вектор нормали к поверхности отражателя \vec{n} и вектор \overrightarrow{MN} , можно найти угол α (см. рис. 3):

$$\cos \alpha = \frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{MN}}{|\overrightarrow{MN}|} = \frac{f'(x - x_{\text{сф}}) \cos \varphi + f'(y - y_{\text{сф}}) \sin \varphi + (z_{\text{сф}} - f)}{\sqrt{1 + f'^2} \sqrt{(x_{\text{сф}} - x)^2 + (y_{\text{сф}} - y)^2 + (z_{\text{сф}} - f)^2}}, \quad \varphi = \arctg\left(\frac{y}{x}\right). \quad (9)$$

С помощью формул (6)–(9) можно найти освещенность в точке N сферы МОК:

$$E = \frac{\eta\Phi}{S\pi} \sum \frac{\cos \alpha' \cos \alpha}{r^2} \Delta S, \quad (10)$$

где ΔS — элемент площади отражателя.

Рассмотрим ситуацию, когда зеркального отражателя внутри МОК нет и лазерный импульс падает на внутреннюю стенку мишени. В таком случае в формуле (9) $\alpha' = \alpha$, $r = 2R \cos \alpha$, а значит, $E = \text{const}$. То есть ламбертовская часть рассеянного излучения равномерно распределяется по внутренней поверхности МОК. Этот результат использовался для апробации численного решения.

Получается, что отсутствие отражателя приводит к равномерному рассеянию ламбертовской составляющей лазерной энергии. Поэтому необходимо определить влияние присутствия отражателя на однородность распределения ламбертовской части энергии на внутренней поверхности МОК.

На рис. 4 представлен результат расчета ламбертовского рассеяния по формуле (10) для случая, когда в МОК находится отражатель, который имеет форму в виде выступа (см. рис. 2, а). При расчете считалось, что интенсивность падающего излучения однородна по сечению и равна 10^{14} Вт/см² (импульсный режим). Вся падающая на зеркальный отражатель энергия рассеивается по закону Ламберта. Угол θ соответствует рис. 1.

Из рис. 4 видно, что в пределах от 0 до 140 градусов распределение ламбертовской части лазерной энергии практически однородно. Энергия, находящаяся в пределах этих углов, составляет около 40 % от общей энергии. Оставшиеся 60 % энергии рассеиваются по стенкам, находящимся в промежутке углов от 140 до 168 градусов, т. е. больше половины ламбертовской части лазерной энергии облучает поверхность МОК неоднородно. В пределах углов от 168 до 180 градусов находится поверхность отражателя, поэтому на рис. 4 зависимость построена до 168 градусов.

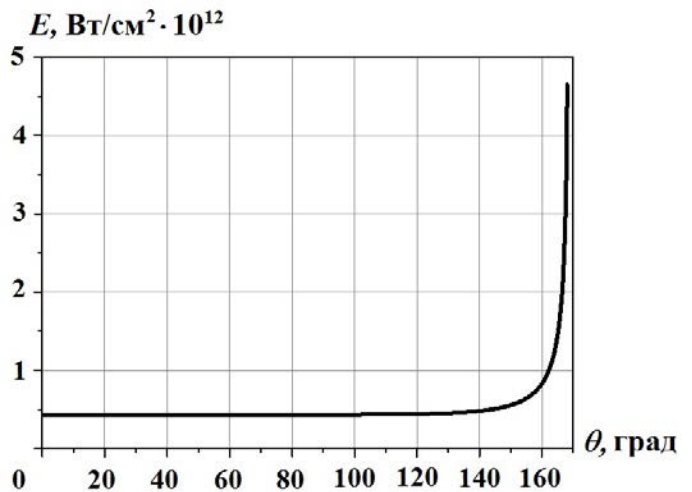


Рис. 4. Распределение ламбертовской части энергии по внутренней поверхности МОК при наличии отражателя

Заключение

В работе рассмотрена идея о добавлении в конструкцию МОК отражателя. По выведенным формулам выполнен расчет формы поверхности отражателя, обеспечивающей рассеяние всей зеркальной составляющей лазерной энергии однородно по внутренней стенке сферической МОК. Предполагалось, что отражатель помещается внутрь мишени, а индикатриса рассеяния лазерного излучения от образовавшейся на его поверхности плазмы имеет зеркальную и ламбертовскую составляющие.

Определено влияние присутствия отражателя на однородность рассеяния ламбертовской части лазерной энергии. Показано, что $\approx 40\%$ процентов энергии, рассеянной по закону Ламберта, однородно облучает внутреннюю поверхность сферической мишени.

Зная реальную индикатрису, можно рассчитать такую форму поверхности отражателя, от которой лазерная энергия будет распределяться по внутренней поверхности МОК максимально однородно.

Список литературы

1. Бессараб А. В., Долголёва Г. В., Зарецкий А. И., Кириллов Г. А., Кочемасов Г. Г., Муругов В. М., Насыров Г. Ф., Рогачёв В. Г., Романов Ю. А., Сеник А. В., Сухарев С. А. Исследование термоядерной лазерной плазмы в мишенях с обращенной короной // Докл. АН СССР. 1985. Т. 282, № 4. С. 857–861.
Bessarab A. V., Dolgolyava G. V., Zaretskiy A. I., Kirillov G. A., Kochemasov G. G., Murugov V. M., Nasyrov G. F., Rogachyev V. G., Romanov Yu. A., Senik A. V., Sukharev S. A. Issledovanie termoyadernoy lazernoy plazmy v mishenyakh s obrashchyennoy koronoy // Dokl. AN SSSR. 1985. T. 282, № 4. S. 857–861.
2. Бессараб А. В., Гайдаш В. А., Долголева Г. В., Зидков Н. В., Изгородин В. М., Кириллов Г. А., Кочемасов Г. Г., Кунин А. В., Литвин Д. Н., Муругов В. М., Насыров Г. Ф., Пунин В. Т., Рогачев В. Г., Сеник А. В., Суслов Н. А., Тачаев Г. В., Шемьякин В. И. Results of the first experiments with fusion targets at the "Iskra-5" high-power laser installation // JETP. 1992. Vol. 102. P. 1800–1807.
3. Гаранин С. Г., Душина Л. А., Елин И. П., Жидков Н. В., Изгородин В. М., Калмыков Н. А., Коваленко В. П., Кравченко А. Г., Литвин Д. Н., Петров С. И., Поздняков Е. В., Рогачёв В. Г., Стародубцев К. В., Суслов Н. А., Тачаев Г. В., Чаунин А. Е. Исследование работы термоядерных мишеней с обращенной короной при сверхтонком слое рабочего вещества на лазерной установке "Искра-5" // ЖЭТФ. 2019. Т. 155, вып. 4. С. 759–764.
Garanin S. G., Dushina L. A., Elin I. P., Zhidkov N. V., Izgorodin V. M., Kalmykov N. A., Kovalenko V. P., Kravchenko A. G., Litvin D. N., Petrov S. I., Pozdnyakov E. V., Rogachyev V. G., Starodubtsev K. V., Suslov N. A., Tachaev G. V., Chaunin A. E. Issledovanie raboty termoyadernykh misheney s obrashchyennoy koronoy pri sverkhthonkom sloe rabocheho veshchestva na lazernoy ustanovke "Iskra-5" // ZhETF. 2019. T. 155, vyp. 4. S. 759–764.
4. Бессараб А. В., Бондаренко Г. А., Долголёва Г. В., Жмайло В. А., Кунин А. В., Никитин И. Н., Новикова Е. А., Стаценко В. П., Сунгатуллин Р. Р. Исследование механизмов диффузии магнитного поля в разлетающуюся лазерную плазму // Физика плазмы. 2007. Т. 33, № 10. С. 891–904.
Bessarab A. V., Bondarenko G. A., Dolgolyeva G. V., Zhmaylo V. A., Kunin A. V., Nikitin I. N., Novikova E. A., Statsenko V. P., Sungatullin R. R. Issledovanie mekhanizmov diffuzii magnitnogo polya v razletayushchuyusya lazernuyu plazmu // Fizika plazmy. 2007. T. 33, № 10. S. 891–904.
5. Коротеев Н. И., Шумай И. Л. Физика мощного лазерного излучения. М.: Наука, 1991.
Koroteev N. I., Shumay I. L. Fizika moshchnogo lazernogo izlucheniya. M.: Nauka, 1991.
6. Справочник по лазерной технике: Пер. с нем. М.: Энергоатомиздат, 1991.
Spravochnik po lazernoy tekhnike: Per. S nem. M.: Energoatom izdat, 1991.

УДК 519.6

ИСПРАВЛЕНИЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ В ПОВЕРХНОСТНЫХ ТРЕУГОЛЬНЫХ СЕТКАХ В ПРЕПРОЦЕССОРЕ ПАКЕТА ПРОГРАММ "ЛОГОС" ПРИ ПОДГОТОВКЕ ЗАДАЧ АЭРО- И ГИДРОДИНАМИКИ

Е. О. Евстифеева
(ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области)

Приводится описание алгоритма исправления пересечений в поверхностных треугольных сетках различного типа. Алгоритм применяется в цепочке подготовки расчетной модели в препроцессоре пакета программ "Логос" при решении задач аэро- и гидродинамики. В отличие от большинства существующих подходов, которые ориентированы на определенный тип исходной сетки и применяют глобальное перестроение сетки для исправления, предложенный алгоритм не имеет ограничений на входные данные и изменяет сетку только в локальных областях, где были диагностированы пересечения.

Алгоритм состоит из двух последовательных частей: сначала производится исправление пересечений с помощью локальных операций над элементами сетки (треугольными ячейками и их вершинами), затем в случае наличия неисправленных пересечений применяются удаление области треугольных ячеек, заполнение образованного отверстия новыми треугольниками и оптимизация новой области для повышения качества сетки.

Ключевые слова: пакет программ "Логос", препроцессор, генератор поверхностной треугольной сетки (поверхностный генератор), пересечения ячеек, качество сетки.

Введение

В настоящее время во ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ" ведется разработка отечественного пакета программ (ПП) "Логос", предназначенного для компьютерного моделирования, а также анализа результатов при решении разных типов задач, в частности аэро- и гидродинамики [1, 2]. Для проведения моделирования используется расчетная дискретная модель, которая предварительно подготавливается в препроцессоре ПП "Логос".

Исходная модель может быть загружена в препроцессор в фасеточном [3] или параметрическом представлении [4]. По ней с помощью генератора поверхностных сеток [5] выполняется построение треугольной сетки (состоящей из треугольных ячеек), которая, в свою очередь, является исходной для генераторов объемных сеток [6–8] и должна быть замкнутой, иначе процесс подготовки модели будет остановлен.

Для выполнения этого требования необходимо, в частности, чтобы в поверхностной сетке отсутствовали пересечения треугольных ячеек (далее для простоты *треугольников*) (рис. 1). Треугольники образуют пересечение, если они имеют общие точки, не принадлежащие в точности их ребрам и вершинам.

Если в загруженной в препроцессор модели в фасеточном представлении имеется большое количество ошибок — вырожденных треугольников (имеющих площадь, близкую к нулю), пересечений, наложений (пересечений треугольников, лежащих в одной плоскости), свободных и многосвязных ребер и др. [9], — лучшим решением при подготовке стартовой для поверхностного генератора модели является использование *генератора замкнутой оболочки (враннера)* [10, 11], который перестраивает сетку глобально.

Данная статья посвящена разработанному алгоритму автоматического устранения пересечений в поверхностной треугольной сетке, моди-

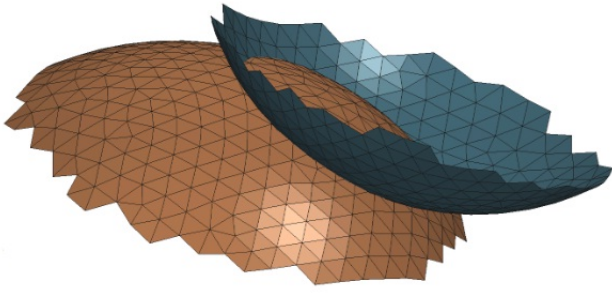


Рис. 1. Фрагмент поверхностной сетки с пересечением

фицирующему сетку в локальных областях, что позволяет использовать его как перед построением поверхностной сетки, так и после.

Пересечения могут появиться в сетке после перестроения вследствие задания крупного целевого размера, не соответствующего размерам определенных областей модели, что влечет за собой большое отклонение от исходной поверхности. Особенно часто такие коллизии встречаются при построении сетки для моделей, содержащих мелкие детали, выступы и скругленные поверхности (рис. 2).

Если построение сетки выполняется по модели в фасеточном представлении, в которой имеются пересечения, то эффективность построения существенно снижается: в большинстве случаев пересечения остаются в результирующей сетке либо сетку совсем не удастся перестроить ввиду особенностей внутренних алгоритмов генерации. Таким образом, исправление пересечений на на-

чальном этапе генерации поверхностной сетки также является актуальной задачей.

Существующие по данной проблематике работы [12–15] описывают подходы к исправлению пересечений, ориентированные на определенный тип исходной сетки, а также могут накладывать ограничения на исходную сетку, например, в некоторых случаях предполагается, что сетка не содержит свободных и многосвязных ребер или вырожденных треугольников.

В большинстве рассматриваемых статей при определении типа сетки делается акцент на распределении треугольников, т. е. соотношении площадей смежных треугольников. С точки зрения области рассматриваемых задач более всего интересуют изотропные и анизотропные поверхностные треугольные сетки [16] как два противоположных случая типов сеток по распределению и качеству [17] треугольников. Изотропная сетка характеризуется равномерным распределением треугольников и высоким качеством (рис. 3). Анизотропная сетка имеет неравномерное распределение треугольников и зачастую представляет собой сетку невысокого качества за счет вытянутых ячеек, а также может содержать разные виды ошибок (рис. 4). Процесс получения анизотропной сетки по модели в параметрическом представлении называется тесселяцией.

Сетки, полученные с помощью генератора замкнутой оболочки, не имеют четкого вида распределения треугольников и могут состоять из треугольников разного качества (рис. 5).

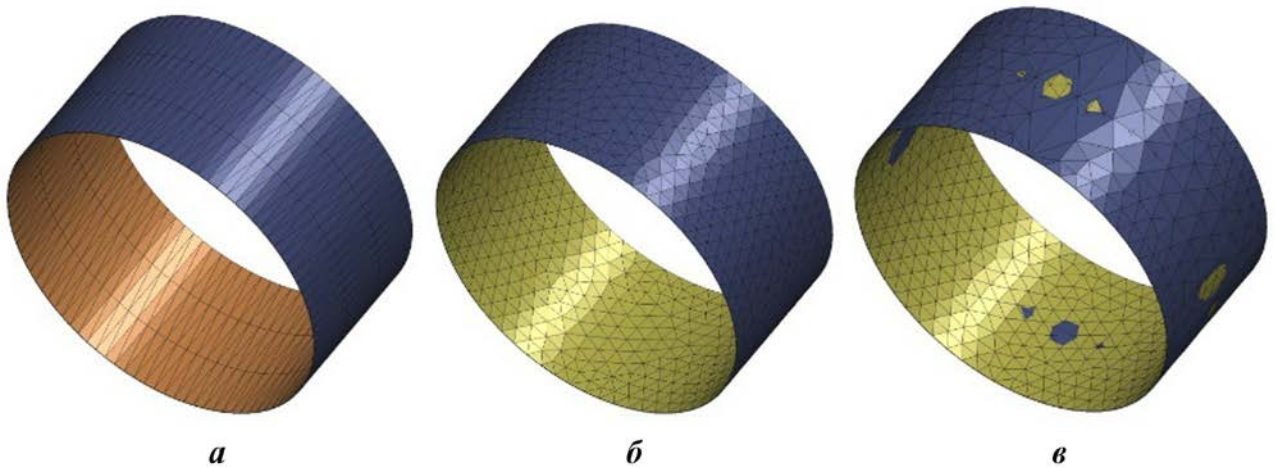


Рис. 2. Модель тонкостенного цилиндра: *a* — исходная; *б* — после перестроения без образования пересечений; *в* — после перестроения с образованием пересечений

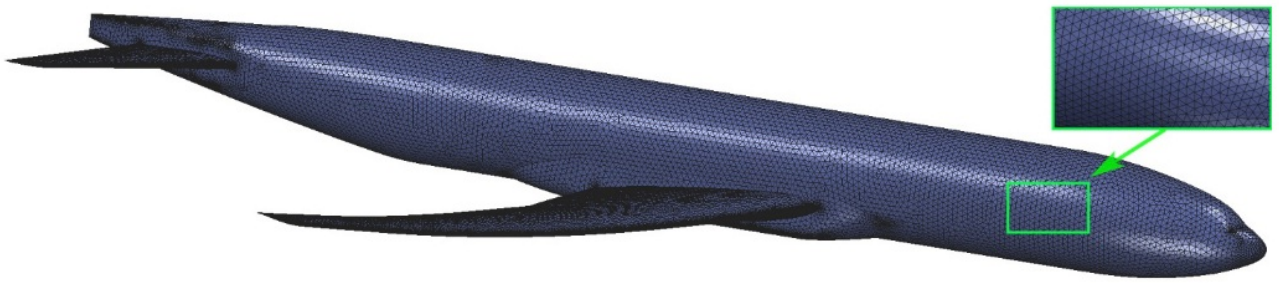


Рис. 3. Пример неструктурированной изотропной сетки, построенной для модели [14]

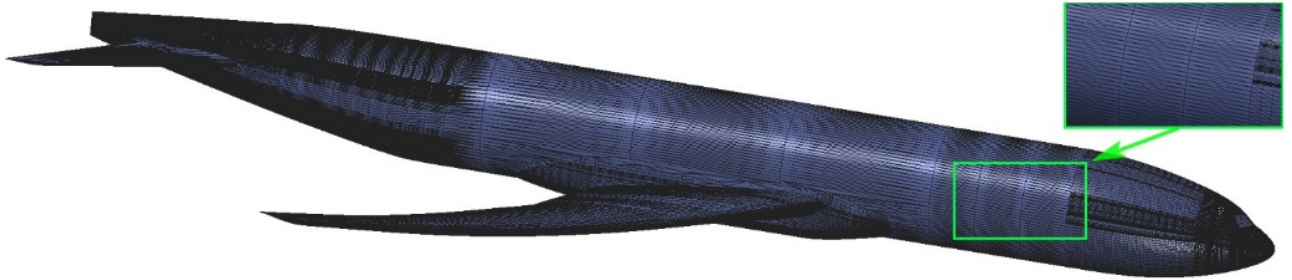


Рис. 4. Пример анизотропной сетки, полученной с помощью тесселяции для модели [18]

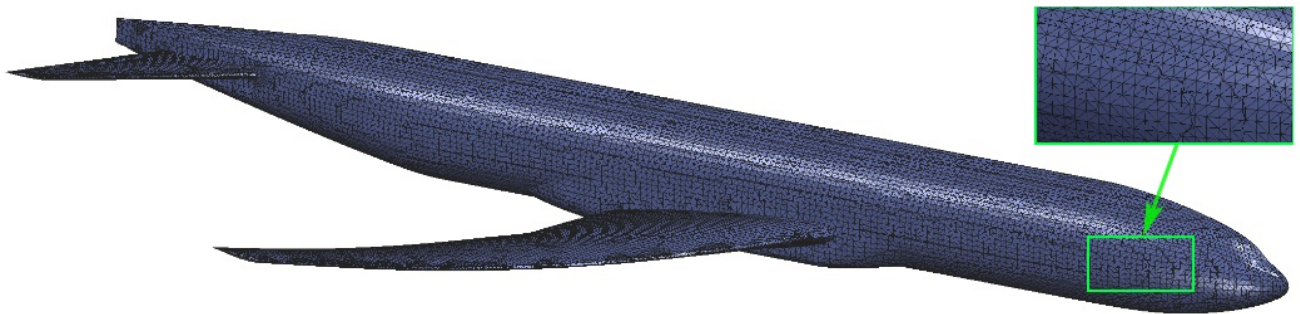


Рис. 5. Пример сетки, построенной с помощью генератора замкнутой оболочки по модели [14]

В работе [12] приведен алгоритм исправления пересечений для изотропных сеток, построенных по модели в параметрическом представлении, с помощью нескольких локальных операций. Данный алгоритм не накладывает дополнительных ограничений на исходную сетку.

Алгоритм исправления пересечений, предложенный в [13], предполагает, что исходная сетка представляет собой оцифрованную сетку низкого качества. Для исправления пересечений, однако, добавляется условие, что треугольники сетки в основном не должны иметь большого различия в размерах, т. е. сетка должна иметь равномерное распределение треугольников. В отличие от многих других подходов здесь используются локальные модификации выделен-

ных областей, которые необходимо перестроить для получения сетки без пересечений.

В статьях [14, 15] рассматривается исправление пересечений на анизотропных сетках, полученных с помощью тесселяции. В статье [14] предполагается, что в загруженной сетке есть информация о ее разбиении на границы, соответствующие граням исходной CAD¹-модели, и пересечения образованы на стыках этих границ, причем по отдельности сетки на границах пересечений не имеют. Поскольку информация об исходных границах параметрической модели на момент загрузки сетки в фасеточном представ-

¹CAD (Computer Aided Design) — система автоматизированного проектирования.

лении отсутствует, алгоритм из статьи неприменим.

В статье [15] описывается эффективный алгоритм исправления пересечений, который конвертирует исходную сетку в BSP-дерево². Для корректного вычисления BSP-дерева необходимо, чтобы сетка не имела свободных ребер и вырожденных треугольников, что также не может быть гарантировано для произвольной загруженной сетки.

В данной статье предложен алгоритм исправления пересечений, состоящий из двух последовательных этапов. Предложенный алгоритм не накладывает на исходную сетку дополнительных ограничений, таких как отсутствие ошибок сетки, а также не предъявляет требований к ее типу (изотропная, анизотропная и др.). В заключение представлены примеры применения реализованного алгоритма и полученные результаты.

Основы алгоритма исправления пересечений

Поскольку препроцессор принимает на вход сетку произвольного типа, алгоритм исправления пересечений, соответственно, должен выполняться корректно для любых исходных данных.

Для того чтобы гарантировать, что в результате исправления модель не будет искажена с точки зрения отклонения от исходной поверхности и появления других ошибок сетки, необходимо ввести ряд дополнительных ограничений и рассмотреть допустимость применения операций, используемых для исправления пересечений.

Поиск пересечений осуществляется с помощью построения *kd*-дерева³ и проверки пересекающихся треугольников в каждом из его блоков. Исходными данными для алгоритма исправления пересечений является список пар пересекающихся треугольников.

На первом этапе алгоритма к элементам сетки (треугольникам и их вершинам) применяются локальные операции. Второй этап алгоритма выполняется только в том случае, если в сетке остались пересечения после первого этапа. Он заключается в удалении области треугольников

с пересечениями и последующем заполнении образованного отверстия новыми треугольниками. На обоих этапах сетка модифицируется локально, без глобального перестроения.

Исправление пересечений с помощью локальных операций

На первом этапе исправления пересечений в сетке используются две локальные операции над элементами сетки, описанные в статье [12], а именно смещение вершины и треугольника. Для возможности применения данных операций для всех типов сеток были добавлены дополнительные ограничения, модифицированы формулы поиска новой позиции при смещении вершины и треугольника. Для ускорения исправления операции применяются не последовательно к каждой паре пересекающихся треугольников, а к сформированным несвязным областям из треугольников, т. е. к областям, которые не имеют общих вершин.

Обязательным критерием успешности операции является сокращение количества пересечений и отсутствие новых пересекающихся треугольников.

Алгоритм является итерационным, максимальное количество итераций равно 15. Данное значение выбрано исходя из баланса между временными затратами и эффективностью алгоритма при исправлении пересечений.

Каждая итерация алгоритма состоит из следующих шагов:

1. Формирование из всех треугольников с пересечениями несвязных областей $region_i$, $i = \overline{1, m}$.
2. Цикл по областям $region_i$, $i = \overline{1, m}$:
 - оценка изменения объема исходной модели в результате применения каждой из локальных операций;
 - оценка изменения площади модифицированных треугольников в результате применения каждой из операций;
 - формирование очереди из операций, удовлетворяющих критерию изменения площади, сортировка очереди по возрастанию изменения объема.
3. Цикл по количеству операций:
 - применение первой в очереди операции для всех неисправленных областей $region_i$, $i = \overline{1, m}$;
 - поиск пересечений на всей сетке;

²BSP (Binary Space Partitioning)-дерево — представление объекта с помощью двоичного разбиения пространства.

³*kd*-дерево — особый вид BSP-дерева.

- для каждой области проверка успешности:
 - если в области не осталось пересечений, то удаление области из списка;
 - если в области сократилось количество пересечений и не было образовано новых, то пометка области как исправленной на данном шаге;
 - если количество пересечений не сократилось или были образованы новые, то отмена операции и удаление ее из очереди.

Для оценки изменения площади для каждой выделенной области вычисляется суммарная площадь треугольников, участвующих в модификации, до и после применения локальной операции и вычисляется отношение r_S минимального из этих двух значений к максимальному. При $r_S \geq \varepsilon_S$, где $0 < \varepsilon_S \leq 1$, операция считается успешной. Чем больше задано значение параметра ε_S , тем меньше изменение площади допускается. При реализации было установлено значение $\varepsilon_S = 0,95$, при котором получаемые результаты характеризуются небольшим изменением поверхности и одновременно с этим высокой эффективностью исправлений.

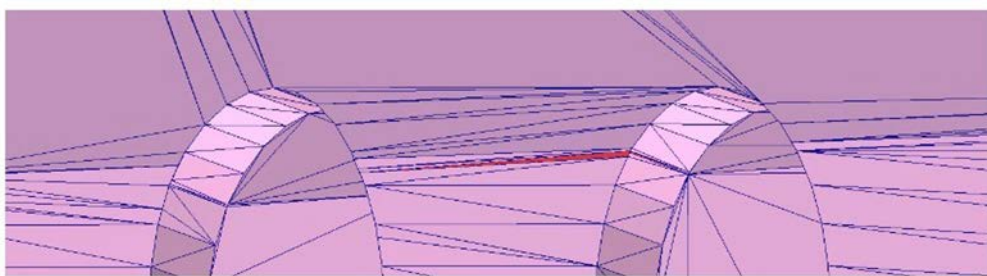
На рис. 6, а приведен фрагмент анизотропной сетки низкого качества. Красным цветом вы-

делены близкие к вырожденным треугольники, образующие область с пересечением. В данном случае применение локальных операций в области с вырожденными треугольниками сопровождается небольшим изменением объема, но при этом недопустимым изменением площади поверхности модели, как показано на рис. 6, б (значение r_S в данном случае равно 0,4). Предложенное ограничение на изменение площади поверхности позволяет сохранить более точное описание исходной модели.

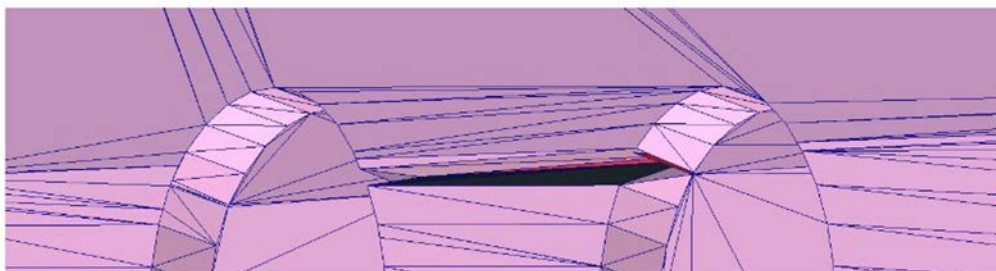
Операция смещения вершины. Одной из модифицированных относительно [12] операций является смещение вершины. Пример фрагмента сетки с пересечением представлен на рис. 7, а, где выделена вершина, выбранная для смещения, а также стрелкой указано направление, по которому смещение производится. На рис. 7, б показан фрагмент сетки после выполнения локальной операции, где пересечение устранено.

Формула смещения вершины была модифицирована таким образом, чтобы, во-первых, минимизировать изменение сетки и, во-вторых, сделать операцию применимой на сетках, полученных с помощью тесселяции.

На каждой итерации для смещения выбирается та вершина области, которая принадлежит наибольшему количеству ребер, пересекающих



а



б

Рис. 6. Фрагмент анизотропной сетки: а — с выделенной областью пересекающихся треугольников; б — после применения операции с недопустимым изменением площади модифицированной области

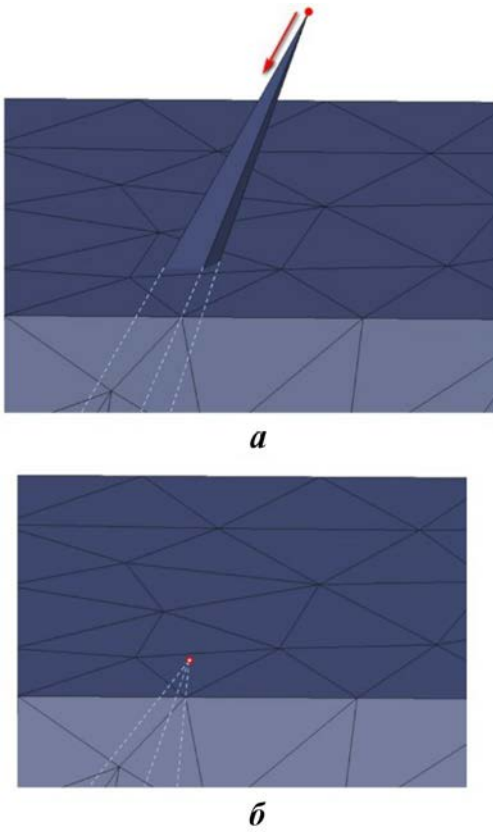


Рис. 7. Фрагмент сетки: *a* — до операции смещения вершины; *б* — после операции смещения вершины

треугольники. Новое положение смещенной вершины вычисляется как суперпозиция нескольких новых точек.

Для выделенной области $region_i$, $i = \overline{1, m}$, треугольников с пересечениями рассчитаем длину минимального и максимального ребер в этой области: l_i и L_i соответственно.

Пусть a — вершина, выбранная для смещения, а ребро ab_n ($n = \overline{1, N}$) является инцидентным вершине a ребром, пересекающим треугольники.

Введем параметр $0 \leq t \leq 1$, определяющий положение точки на отрезке (значениями $t = 0$ и 1 определяются концы отрезка), α и β — коэффициенты смещения. Положение точки смещения вычисляется следующим образом:

- a*) если ребро ab_n пересекается с одним треугольником в точке x , то точка для сдвига a'_n вычисляется по формуле⁴

$$\vec{a}'_n = t_n (\vec{b}_n - \vec{x}) + \vec{b}_n,$$

⁴Здесь и далее в формулах запись \vec{r} означает радиус-вектор точки r , а $|\vec{pq}|$ — расстояние между точками p и q .

где t_n вычисляется в зависимости от выполнения условий:

- если $0,5 |\vec{x}b_n| > l_i$, то

$$t_n = \begin{cases} \alpha, & l_i < \alpha |\vec{x}b_n| < \beta L_i; \\ \frac{l_i}{|\vec{x}b_n|} & \text{в других случаях;} \end{cases}$$

- если $0,5 |\vec{x}b_n| \leq l_i$, то $t_n = 0,5$.

- б*) если ребро ab_n пересекается с несколькими треугольниками в точках x_1, x_2, \dots, x_k и x_1, x_2 являются двумя точками пересечения, ближайшими к вершине a , то точка для сдвига a'_n вычисляется по формуле

$$\vec{a}'_n = t_n (\vec{x}_1 - \vec{x}_2) + \vec{x}_1,$$

где t_n вычисляется в зависимости от выполнения условий:

- если $0,5 |\vec{x}_1x_2| > l_i$, то

$$t_n = \begin{cases} \alpha, & l_i < \alpha |\vec{x}_1x_2| < \beta L_i; \\ \frac{l_i}{|\vec{x}_1x_2|} & \text{в других случаях;} \end{cases}$$

- если $0,5 |\vec{x}_1x_2| \leq l_i$, то $t_n = 0,5$.

Предложенный метод смещает вершину a в вершину a' , определяемую как суперпозиция найденных вершин:

$$\vec{a}' = \sum_n \frac{\vec{a}'_n}{n}, \quad n = \overline{1, N}.$$

Схематичный пример операции смещения вершины приведен на рис. 8.

Применение операции по приведенным формулам гарантирует, что расстояние между точкой смещения и точкой пересечения для каждого пересеченного ребра не слишком мало относительно длины минимального ребра и не слишком велико относительно длины максимального ребра области. При этом образованного просвета между новой точкой и точкой пересечения до исправления достаточно, чтобы обеспечить отсутствие пересечения после данной модификации. Коэффициенты α и β можно варьировать. При реализации применялись следующие значения: $\alpha = 0,25$; $\beta = 0,1$. Результаты исправления пересечений с данными коэффициентами показали свою эффективность, и при этом отклонение

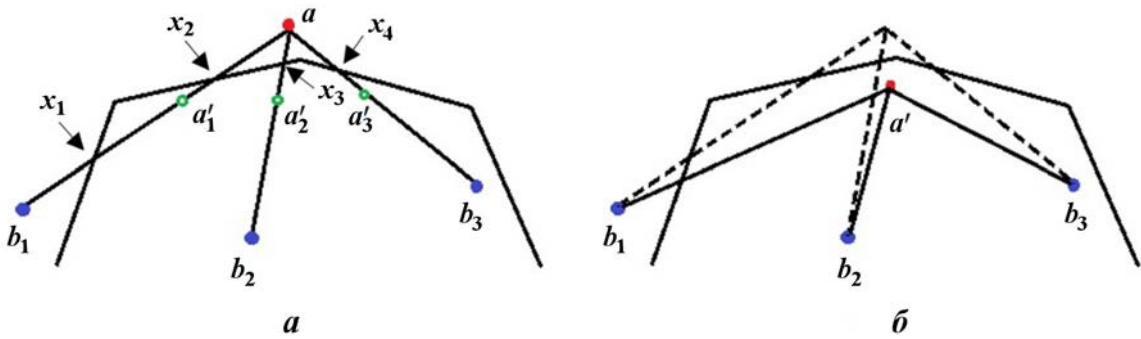


Рис. 8. Схематичное изображение операции смещения вершины: *a* — до смещения вершины *a*; *б* — после смещения вершины *a* в вершину *a'*

от начальной точки было сокращено, что существенно для сеток, полученных с помощью тесселяции.

Операция смещения треугольника. Данная операция смещает треугольник вдоль нормали к его плоскости в двух направлениях. На каждой итерации для каждой области $region_i$, $i = \overline{1, m}$, выбирается треугольник с наибольшим количеством пересечений.

Предположим, что треугольник T с вершинами v_1, v_2, v_3 пересекается с одним или более ребрами и вершины p_1, p_2, \dots, p_k инцидентны этим ребрам. Вектор \vec{n} — вектор единичной нормали для T .

Минимум и максимум расстояний (взятых со знаками) от вершин p_i , $i = \overline{1, k}$, до плоскости треугольника T обозначим как d_{\min} и d_{\max} соответственно и будем вычислять по формулам

$$d_{\min} = \min_i \{(\vec{p}_i - \vec{v}_1) \cdot \vec{n}\};$$

$$d_{\max} = \max_i \{(\vec{p}_i - \vec{v}_1) \cdot \vec{n}\}.$$

Предложенный метод перемещает треугольник T на две возможные позиции с помощью смещения каждой его вершины от начального положения по формулам

$$\vec{v}'_i = \vec{v}_i + \vec{n}(d_{\max} + \varepsilon_{move}),$$

$$\vec{v}'_i = \vec{v}_i + \vec{n}(d_{\min} - \varepsilon_{move}), \quad i = \overline{1, 3},$$
(1)

где ε_{move} — выбранное смещение.

Выбор смещения зависит от точности исходной модели ε , если она задана. При отсутствии заданной точности модели предлагается ее вычисление по формуле

$$\varepsilon = \begin{cases} 0,05l_{\min}, & 0,05l_{\min} > 10^{-16}; \\ 10^{-16}, & 0,05l_{\min} \leq 10^{-16}, \end{cases}$$

где l_{\min} — минимальная длина среди всех ребер исходной сетки. Тогда смещение ε_{move} вычисляется по формуле

$$\varepsilon_{move} = \begin{cases} \max\{10^{-16}, \delta\varepsilon\}, & \delta\varepsilon \leq \gamma L_i; \\ \gamma L_i, & \delta\varepsilon > \gamma L_i, \end{cases}$$

где L_i — максимальная длина ребра среди треугольников области $region_i$, $i = \overline{1, m}$; δ, γ — коэффициенты смещения.

При реализации использовались следующие значения коэффициентов смещения: $\delta = 0,5$; $\gamma = 0,001$.

Каждое из смещений, заданных формулами (1), определяет отдельную операцию, которая добавляется в очередь локальных операций.

Второй этап исправления пересечений

После применения локальных операций в сетке все еще могут присутствовать пересечения. В качестве второго этапа исправления пересечений был разработан алгоритм, основанный на работе [13].

Алгоритм является итерационным, максимальное количество итераций равно трем. Как и на первом этапе, предварительно выделяются все пары пересекающихся треугольников t_i , $i = \overline{1, M}$ из них формируется начальное множество треугольников $T = \{t_1, \dots, t_i\}$, $i = \overline{1, M}$ для обработки алгоритмом. В цикле по $j = \overline{0, 2}$ выполняются следующие шаги алгоритма:

1. Нарращивание для множества треугольников T слоя окружения (рис. 9) и добавление его треугольников к текущему множеству T ;

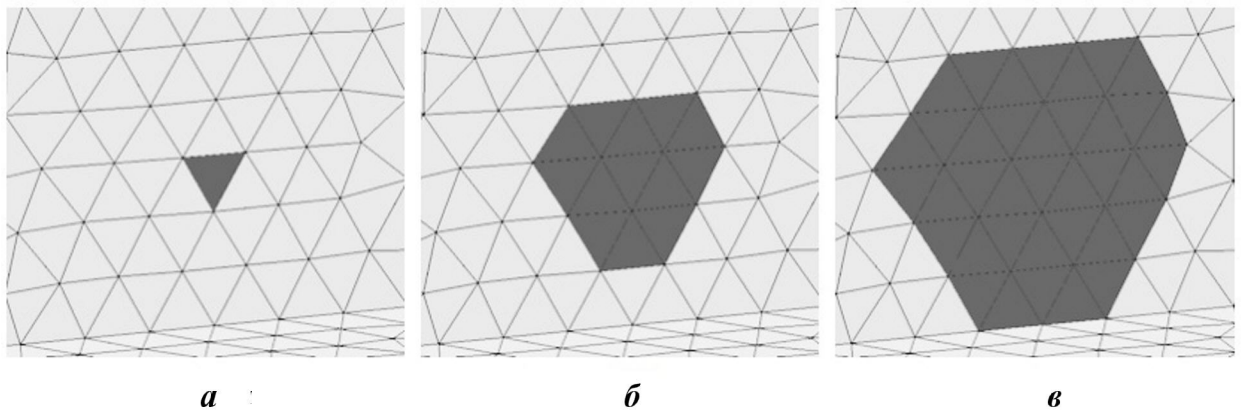


Рис. 9. Нарращивание слоя окружения: *a* — слой окружения нулевого порядка (выделенный треугольник); *б* — слой окружения первого порядка; *в* — слой окружения второго порядка

2. Формирование из T несвязных областей $region_i, i = \overline{1, m}$;
3. Для каждой области $region_i, i = \overline{1, m}$:
 - 1) удаление всех треугольников области, формирование контура из свободных ребер;
 - 2) заполнение образованного отверстия новыми треугольниками с использованием только вершин свободного контура [5];
 - 3) адаптивное измельчение треугольников [19], сформированных на предыдущем шаге;
 - 4) сглаживание сетки [20], построенной на предыдущем шаге;
 - 5) проверка допустимости изменения площади поверхности, отсутствия многосвязных и свободных ребер:
 - если хотя бы одна из проверок не успешна, то возвращение исходных треугольников области.
4. Поиск пересечений после модификации сетки.
5. Для каждой модифицированной области $region_i, i = \overline{1, m}$, проверка сокращения количества пересечений, а также отсутствия новых пересечений:
 - если хотя бы одна из проверок не успешна, то замена сетки области на исходную,
 - если все проверки успешны, то удаление из множества T всех его треугольников и удаление области из списка $region_i, i = \overline{1, m}$.
6. Проверка критерия останова алгоритма:

- если в сетке не осталось пересечений или достигнуто максимальное количество итераций, то завершение алгоритма;
- иначе переход на шаг 1.

После выполнения второго этапа исправления пересечений добавлена проверка на появление несвязных областей сетки. Такие ситуации возможны при сложной конфигурации сетки в области с пересечением, например, при наличии в области других ошибок. На данном этапе возможно удаление таких областей, если они малы по количеству треугольников и площади поверхности относительно всей модели.

Внедренные этапы адаптивного разбиения треугольников и сглаживания сетки выполняются после формирования новой области, чтобы она как можно точнее аппроксимировала исходную поверхность. Предложенные проверки допустимости изменения площади поверхности, а также отсутствия многосвязных и свободных ребер предотвращают искажение поверхности и появление новых ошибок сетки.

Результаты

Реализованный алгоритм был протестирован на большой базе моделей с пересечениями. База моделей состоит из сеток различного типа, используемых при подготовке моделирования задач аэро- и гидродинамики. Часть тестовых случаев представляет собой реальные модели задач аэро- и гидродинамики, на которых были обнаружены пересечения при подготовке к моделированию, другая часть — искусственно созданные сетки.

Алгоритм показал свою эффективность при исправлении сеток различного типа. В случае изотропных сеток хорошего качества исправление пересечений в большинстве случаев проходит успешно. На рис. 10 приведен фрагмент тестовой изотропной сетки до и после исправления пересечений. Не всегда полностью удается исправить пересечения в областях, содержащих другие сеточные ошибки, а также в сетках, исходная модель которых изначально неправильно спроектирована (например, состоит из несвязных деталей, которые пересекаются).

При тестировании алгоритма на анизотропных сетках процент успешных исправлений составил 79 % в случае отсутствия большого количества ошибок других типов.

В случае анизотропной сетки низкого качества с большим количеством ошибок предполагается

предварительная обработка сетки с помощью генератора замкнутой оболочки: в данном случае требуется ее глобальное исправление. Однако, поскольку препроцессор работает с любым типом входных данных, тестирование алгоритма также было проведено на подобных сетках. Исправление пересечений выполнялось достаточно эффективно, даже несмотря на сложность конфигурации сетки из-за наличия других ошибок. На рис. 11, *а* приведен фрагмент анизотропной сетки [21] низкого качества с большим количеством ошибок: красным цветом выделены пересекающиеся треугольники, желтым цветом — вырожденные треугольники, оранжевым — наложения треугольников. На рис. 11, *б* — фрагмент той же сетки после исправления пересечений: исправлено 8 областей из 12, неисправ-

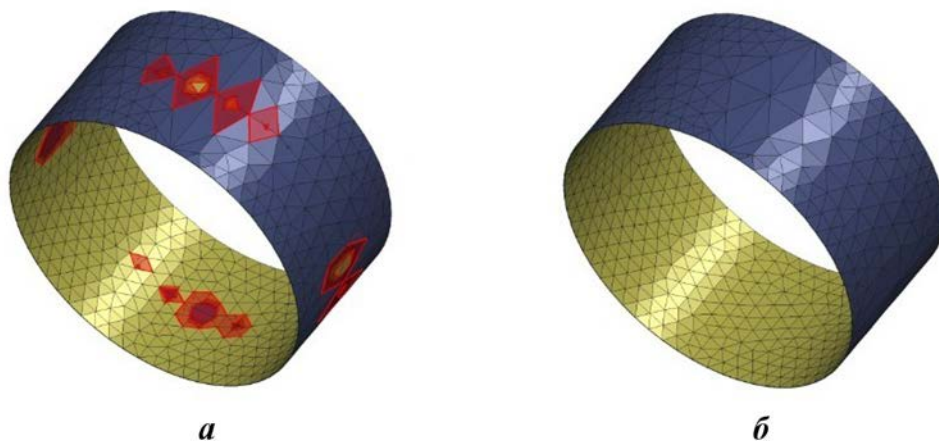


Рис. 10. Фрагмент изотропной сетки: *а* — с пересечениями (выделены красным цветом); *б* — после исправления пересечений с помощью алгоритма

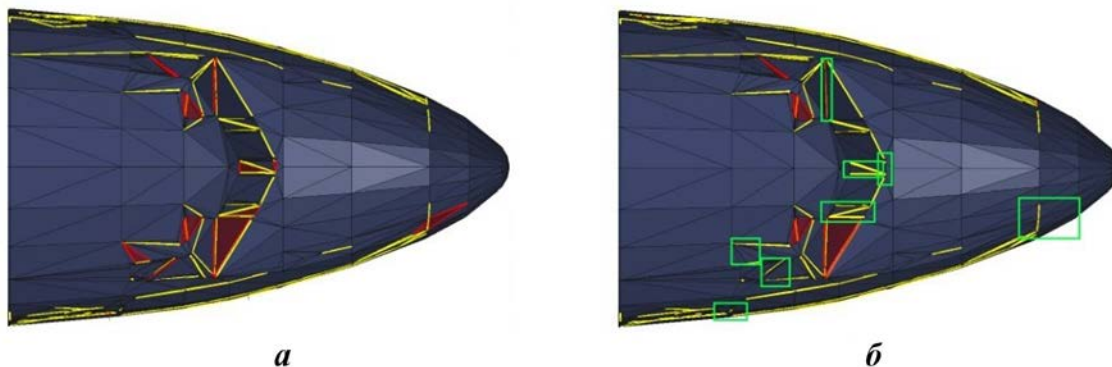


Рис. 11. Фрагмент анизотропной сетки с пересечениями, наложениями и вырожденными треугольниками: *а* — до исправления пересечений; *б* — после исправления пересечений (области исправления выделены рамками зеленого цвета)

ленные области содержат наложения и вырожденные треугольники.

Скорость выполнения алгоритма зависит от количества треугольников в сетке, количества пересечений и их конфигурации, определяющей степень "запутывания" сетки, которая повышается из-за наличия других видов ошибок.

Важным вопросом при разработке алгоритма исправления пересечений является допустимость модификации сетки. С одной стороны, пересечение нарушает замкнутость сетки, но с другой, применение исправления означает отступление от исходного описания модели. В данной работе считается приоритетным исправление пересечений, поскольку при их наличии в поверхностной сетке блокируется построение объемной сетки. Более того, при выполнении каждой модификации сетки по описанному алгоритму вычисляется величина, контролирующая относительное отклонение измененной поверхности от исходной, а также проверяются введенные ограничения на изменение площади, при невыполнении которых изменение не производится. Сравнение сеток до и после исправления проводилось с помощью программы metro [22]. Максимальное отклонение не превышает $0,0086d$, где d — диагональ габаритной коробки модели.

Таким образом, применение разработанного алгоритма обеспечивает исправление большинства пересечений, где это допустимо в рамках введенных ограничений, а исправление оставшихся ошибок, требующее детальной проработки, возлагается на пользователя.

Заключение

В статье указаны основные источники пересечений треугольников в сетке, типы поверхностных сеток, для которых предполагается использование алгоритма исправления пересечений, а также существующие подходы к исправлению пересечений. Приведено описание алгоритма исправления пересечений, разработанного с целью подготовки поверхностной треугольной сетки, удовлетворяющей требованиям генератора объемных сеток. Данный алгоритм внедрен в препроцессор ПП "Логос" и применяется в цепочке подготовки расчетной сетки для моделирования задач аэро- и гидродинамики.

До реализации алгоритма проведение сквозного построения поверхностной и объемной сеток могло быть прервано из-за образования пересечений в поверхностной сетке. Сетку надо было

исправлять с помощью интерактивных средств препроцессора вручную, что является трудоемким и затратным по времени процессом. Реализованный автоматический инструмент позволил проводить исправление пересечений в процессе построения сетки без участия пользователя, что существенно снизило влияние данных ошибок на результат построения и сократило временные затраты на подготовку расчетной сетки.

Предложенный алгоритм показал свою эффективность, при этом изменение сетки контролируется дополнительными ограничениями и введенной величиной, обеспечивающей минимальное относительное отклонение от исходной поверхности.

Список литературы

1. *Погосян М. А., Савельевских Е. П., Стрелец Д. Ю., Корнев А. В., Шагалев Р. М., Козелков А. С.* Использование отечественных суперкомпьютерных технологий при проектировании новых образцов авиационной техники // *Авиационная промышленность*. 2013. № 3. С. 3—7.
Pogosyan M. A., Savelyevskikh E. P., Strelets D. Yu., Kornev A. V., Shagaliev R. M., Kozelkov A. S. Ispolzovanie otechestvennykh superkompyuternykh tekhnologiy pri proektirovanii novykh obraztsov aviatsionnoy tekhniki // *Aviatsionnaya promyshlennost*. 2013. № 3. S. 3—7.
2. *Козелков А. С., Дерюгин Ю. Н., Зеленский Д. К., Полищук С. Н., Лашкин С. В., Жучков Р. Н., Глазунов В. А., Яцевич С. В., Курulin В. В.* Многофункциональный пакет программ "Логос": физико-математические модели расчета задач аэро-, гидродинамики и теплообмена: Препринт № 111. Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2013.
Kozelkov A. S., Deryugin Yu. N., Zelen-skiy D. K., Poloshchuk S. N., Lashkin S. V., Zhuchkov R. N., Glazunov V. A., Yatse-vich S. V., Kurulin V. V. Mnogofunktsionalnyy paket programm "Logos": fiziko-matematicheskie modeli raschyeta zadach aero-, gidrodinamiki i teploobmena: Preprint № 111. Sarov: RFYaTs-VNIIEF, 2013.
3. *Cohen-Steiner D., Morvan J.-M.* Restricted delaunay triangulations and normal cycle // *Proc. Annual Symposium of Computational Geometry*. California, 2003. P. 312—321.

4. *Piegl L., Tiller W.* The NURBS Book. Second Edition. Springer, 1997.
5. *Борисенко О. Н., Лукичев А. Н., Евстифеева Е. О., Панкратов Д. М., Цалко Т. В., Гиниятуллина А. Г.* Алгоритмы обработки особенностей геометрических моделей при построении поверхностных треугольных сеток в препроцессоре пакета программ "Логос" // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2020. Вып. 3. С. 40–52.
Borisenko O. N., Lukichyev A. N., Evstifeeva E. O., Pankratov D. M., Tsalko T. V., Giniyatullina A. G. Algoritmy obrabotki osobennostey geometricheskikh modeley pri postroenii poverkhnostnykh treugolnykh setok v preprotssessore paketa programm "Logos" // Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov. 2020. Vyp. 3. S. 40–52.
6. *Смолкина Д. Н., Борисенко О. Н., Черенкова М. В., Гиниятуллина А. Г., Кузьменко М. В., Чухманов Н. В., Потехина Е. В., Попова Н. В., Турусов М. Р.* Автоматический генератор неструктурированных многогранных сеток в препроцессоре пакета программ "Логос" // Там же. 2018. Вып. 2. С. 25–39.
Smolkina D. N., Borisenko O. N., Cherenkova M. V., Giniyatullina A. G., Kuzmenko M. V., Chukhmanov N. V., Potekhina E. V., Popova N. V., Turusov M. R. Avtomaticheskii generator nestrukturirovannykh mnogogrannykh setok v preprotssessore paketa programm "Logos" // Tam zhe. 2018. Vyp. 2. S. 25–39.
7. *Попова Н. В., Борисенко О. Н., Корнеева И. И., Чухманов Н. В., Потехина Е. В., Лазарев В. В., Гиниятуллина А. Г.* Автоматический генератор неструктурированных тетраэдральных сеток с призматическими слоями в препроцессоре пакета программ "Логос" // Там же. 2020. Вып. 1. С. 43–57.
Popova N. V., Borisenko O. N., Korneeva I. I., Chukhmanov N. V., Potekhina E. V., Lazarev V. V., Giniyatullina A. G. Avtomaticheskii generator nestrukturirovannykh tetradralnykh setok s prizmaticheskimi sloyami v preprotssessore paketa programm "Logos" // Tam zhe. 2020. Vyp. 1. S. 43–57.
8. *Попова Н. В.* Автоматический генератор неструктурированных многогранных сеток на основе тетраэдральных сеток с призматическими слоями // Там же. 2021. Вып. 3. С. 70–83.
Popova N. V. Avtomaticheskiiy generator nestrukturirovannykh mnogogrannykh setok na osnove tetradralnykh setok s prizmaticheskimi sloyami // Tam zhe. 2021. Vyp. 3. S. 70–83.
9. *Attene M., Campen M., Kobbelt L.* Polygon mesh repairing: an application perspective // ACM Computing Surveys. 2013. Vol. 45, No 2. P. 1–33.
10. *Kobbelt L. P., Vorsatz J., Labsik U., Seidel H.-P.* A shrink wrapping approach to remeshing polygonal surfaces // Computer Graphics Forum, 2000. Vol. 18. P. 119–130.
11. *Никитин В. А., Шурыгин А. В., Новиков И. Г., Егоров А. В., Соколов С. С., Панов А. И.* Программный модуль генерации замкнутой поверхностной триангуляционной сетки в пакете программ "Логос" // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2021. Вып. 2. С. 70–79.
Nikitin V. A., Shurygin A. V., Novikov I. G., Egorov A. V., Sokolov S. S., Panov A. I. Programmnyy modul generatsii zamknutoy poverkhnostnoy triangulyatsionnoy setki v pakete programm "Logos" // Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov. 2021. Vyp. 2. S. 70–79.
12. *Yamakawa S. and Shimada K.* Removing self intersections of a triangular mesh by edge swapping, edge hammering, and face lifting // Proc. 18th Int. Meshing Roundtable. Carnegie Mellon University, 2009. P. 13–29.
13. *Attene M.* A lightweight approach to repairing digitized polygon meshes // The Visual Computer. 2010. Vol. 26. P. 1393–1406.
14. *Bischoff S., Kobbelt L.* Structure Preserving CAD Model Repair // Eurographics. 2005. Vol. 24, No 3. P. 527–536.
15. *Campen M., Kobbelt L.* Exact and robust (self-)intersections for polygonal meshes // Ibid. 2010. Vol. 29, No 2. P. 397–406.

16. *Sadrehghighi I.* Mesh generation in CFD. A review — CFD Open Series, Patch 1.86.5. Annapolis, 2019.
17. *Knupp P. M.* Algebraic mesh quality metrics // Siam J. Sci. Comput. 2001. Vol. 23, No 1. P. 193—218.
18. 3rd AIAA CFD Drag Prediction Workshop. San Francisco, June 2006 // <http://aiaa-dpw.larc.nasa.gov/Workshop3/workshop3.html>.
19. *Liepa P.* Filling holes in meshes // Eurographics Symposium on Geometry Processing. The Eurographics Association, 2003. P. 200—206.
20. *Botsch M., Sorkine O.* On linear variational surface deformation methods // IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics. 2008. Vol. 14(1). P. 213—230.
21. Free3D: <https://free3d.com/3d-models/stl-aircraft>.
22. *Cignoni P., Rocchini C., Scopigno R.* Metro. Measuring Error on Simplified Surfaces. Technical Report B4-01-01-96. Istituto I. E. I.-C. N. R. Pisa, Italy, January 1996.

Статья поступила в редакцию 21.07.22.

УДК 621.383:004.721

МАГИСТРАЛЬНЫЕ ЗАЩИЩЕННЫЕ ВОЛОКОННО-ОПТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ ПЕРЕДАЧИ

В. В. Шубин

(ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области)

Рассмотрены многоволновые защищенные волоконно-оптические системы передачи с оптическими усилителями и соответствующая им технология современных оптических транспортных сетей. Предлагается новое решение для построения таких систем. Показано, что магистральные защищенные волоконно-оптические системы передачи могут быть построены при расположении промежуточных пунктов вне контролируемой зоны. Предлагаемая защищенная магистральная волоконно-оптическая система состоит из трех частей: информационной, мониторинга и защиты информации. Для мониторинга систем с оптическими усилителями применяются когерентные рефлектометры, которые берут на себя часть функций защиты на основе метода обратного рассеяния. Защита информации обеспечивается специально введенным устройством на основе метода прямого детектирования. Таким образом, защита информации организована с использованием двух методов. В магистральных волоконно-оптических системах передачи защита информации техническими средствами может быть осуществлена с применением технологий трансокеанских волоконно-оптических систем.

Ключевые слова: магистральная защищенная волоконно-оптическая система передачи, технология оптических транспортных сетей, оптические усилители на активных оптических волокнах, система мониторинга на основе когерентных оптических рефлектометров, технические решения для магистральных волоконно-оптических трансокеанских линий передачи.

Введение

Магистральные системы строятся на основе технологии оптических транспортных сетей (Optical Transport Network — OTN) [1]. Отличительными особенностями волоконно-оптических систем передачи (ВОСП) по технологии OTN являются:

- высокая скорость передачи информации (40, 100, 200, 600 Гбит/с и выше);
- длина волны в С-диапазоне (1 535—1 565 нм);
- плотное волновое уплотнение (по технологии DWDM) [2];
- фазовая манипуляция (PSK) [3];
- упреждающая коррекция ошибок (FEC) [4];
- многофункциональность.

В одном волокне присутствуют каналы разнородной информации: для цифрового телевидения, видеоконференций, интегральной телефонии, информационно-вычислительных систем

и др. Качество магистральных ВОСП определяется вероятностью ошибки на канал (BER) (по требованию Международного союза электросвязи, сектор телекоммуникаций (МСЭ-Т), $BER = 10^{-12}$). Для магистральных систем используются только одномодовые волокна [5—9], в которых излучение одной моды сосредоточено преимущественно в сердцевине волокна (диаметр модового пятна 8—12 мкм соизмерим с размерами сердцевины) и не выходит в оболочку и защитное покрытие волокна. Извлечение излучения из волокна неизбежно приводит к потерям информационного сигнала в месте съема (закон сохранения энергии).

Современный перехват информации для магистральных ВОСП производится (так считается при расчете) в наиболее благоприятном месте и при оптимальной чувствительности на основе *активных* и *компенсационных* способов съема [10].

При активном способе через боковую поверхность волокна выводится часть мощности излучения, при этом используются приемники с предельной чувствительностью. К ним относятся устройства с квантовым ограничением (Limit Quantum Detection — LQD) при коэффициенте ошибок $BER = 10^{-2}$. Для фазовой манипуляции приемник перехвата должен содержать соответствующие устройства.

При компенсационных способах выведенное излучение компенсируется вводом оптического сигнала через боковую поверхность волокна, поэтому метод относится к *нейнтризивным* (без вторжения в волокно). При полном совпадении параметров выведенный и введенный сигналы отличает только их неодновременность (а она присутствует всегда) за счет переходных процессов.

На рис. 1 представлена схема многопролетной обычной ВОСП. Многопролетная система может быть разбита на ряд однопролетных ВОСП, где средства защиты для каждого пролета существуют отдельно.

В многопролетной системе РФЯЦ-ВНИИЭФ на одном пролете реализована защищенная ВОСП на основе контроллеров FOBOS-100GL, которая удовлетворяет требованиям ФСЭК и ФСБ России для передачи информации, составляющей государственную тайну [11]. Конечно, схема ВОСП, основанная на FOBOS-100GL, имеет право на существование, но не все оптические усилители должны быть расположены в пределах контролируемой зоны. Такая ВОСП применима для многопролетных систем, но требует разбиения системы защиты на отдельные однопролетные системы с организацией отдельных абонентских пунктов, которые предусматрива-

ют создание новой контролируемой зоны, подготовку обслуживающего персонала, помещений и т. д. К тому же требуется создание технического и программного обеспечения общей контрольной системы ВОСП. Это решение экономически и технически не оптимально для предприятий и организаций, создающих новую контролируемую зону. Поэтому требуется система, где защита информации осуществляется только на концах линии.

В мире существует множество трансокеанских систем, промежуточные пункты которых находятся под водой и не обслуживаются длительное время (до 25–30 лет) [12]. Эти ВОСП относятся к магистральным линиям со своей спецификой, обусловленной погружением на глубину промежуточных пунктов (до 7 000 метров). Таким образом, для передачи информации магистральные защищенные ВОСП могут строиться так же, как трансокеанские системы. Такие оптические системы должны содержать систему защиты информации, размещенную только на концах линии. Мощность канального информационного сигнала на входе пролета защищенной ВОСП (так же, как мощность информационного сигнала на входе контролируемой зоны для однопролетной линии) может быть не более чем

$$W_0 = W_{\text{п}} - 10 \lg \left(K_{\text{п}} (1 - 10^{-0,1A_{\text{к}}}) \right) \text{ [дБм]}, \quad (1)$$

где $W_{\text{п}}$ [дБм] — чувствительность оптического приемника перехвата информации (на канал) при заданной скорости приема; $K_{\text{п}}$ [отн. ед.] — коэффициент передачи бокового излучения из волокна; $A_{\text{к}}$ [дБ] — сигнал срабатывания системы защиты (при средних вероятностях обнаружения и ложной тревоги при нарушении).

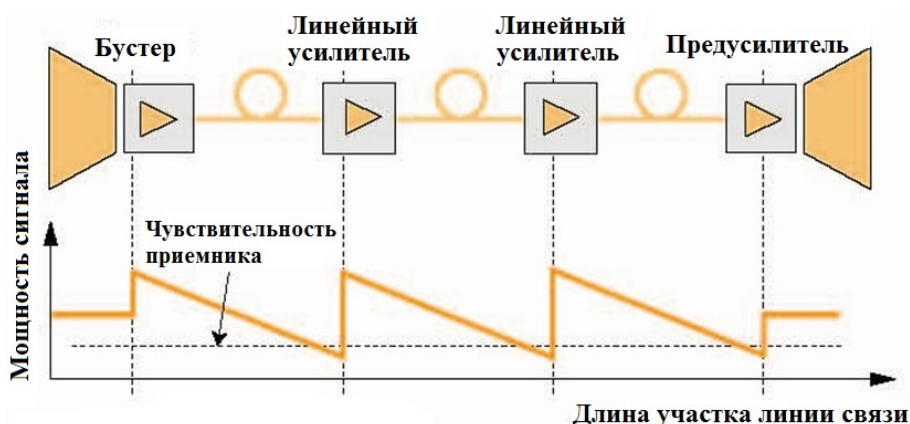


Рис. 1. Типовая схема многопролетной обычной ВОСП

В табл. 1 приведена рассчитанная по формуле (1) мощность информационного сигнала (на канал) защищенных ВОСП для скоростей передачи от 0,6 до 40 Гбит/с и выше, характерных для современных магистральных систем. Для многопролетной ВОСП, вероятно, чувствительность системы контроля будет больше, чем для однопролетных систем. Исходя из этого, проверенный на практике коэффициент срабатывания системы защиты 0,03 дБ для однопролетных систем увеличиваем до 0,1 дБ для семипролетных систем при условии независимости каждого пролета от других.

Как следует из табл. 1, при скорости передачи 10 Гбит/с и коэффициенте $A_k = 0,1$ дБ средняя мощность канального сигнала составляет $W_0 = -8,4$ дБ, для скоростей 40 Гбит/с и выше $W_0 = -3,4$ дБ. С учетом рекомендуемого МСЭ-Т эксплуатационного запаса (3 дБ на систему) при применении стандартного волокна на длине волны 1550 нм (табл. G.652D [5]) и чувствительности приемника с квантовым ограничением (LQD) для магистральных систем длина линии между пролетами составит 78,7 км. При этом общая длина линии, например, для семи пролетов должна быть 626,6 км.

Длина линии между пролетами по рекомендации МСЭ-Т для обычных ВОСП составляет 80–120 км [13]. Поскольку для защищенных магистральных линий полученное значение (78,7 км) не намного меньше, то возможна практическая реализация данных систем.

Общее описание новой схемы защиты информации

В предлагаемой многоволновой ВОСП с оптическими усилителями, расположенными за пределами контролируемой зоны, для обеспечения

технической защиты информации необходимо наличие трех составляющих:

- информационной части;
- системы мониторинга;
- технической системы защиты информации.

Информационная часть предназначена для передачи информации в соответствии со стандартами. Она должна соответствовать всем международным критериям OTN, рекомендованным МСЭ-Т [1–4]. Таким требованиям отвечают все многоволновые ВОСП, построенные на отечественной аппаратуре передачи информации с волновым уплотнением со скоростью 2,5–600 Гбит/с на канал фирмы "Т8" [14].

На рис. 2 представлена схема защищенной многоволновой многопролетной ВОСП для скорости передачи 10 Гбит/с [14].

Системой *мониторинга* снабжаются все магистральные ВОСП [14]. Основу системы мониторинга составляют оптические временные рефлектометры (Optical Time Domain Reflectometer — OTDR) [15]. В рефлектометрах реализуется метод обратного рассеяния. Для многопролетных ВОСП вместо обычных рефлектометров используются специальные когерентные рефлектометры (COTDR) или рефлектометры, работающие на нескольких длинах волн из сетки DWDM (FDM-OTDR). Когерентные рефлектометры используют для зондирования и обратного рассеяния два волокна: по одному распространяется зондирующий сигнал, по другому — обратное излучение. Это сопряжено с установкой на выходе и входе оптических усилителей-изоляторов, которые пропускают излучение только в одном направлении. Дальность мониторинга таких рефлектометров достигает 12 000 км [16, 17].

Техническая *система защиты информации* может быть основана на сравнении соседних сиг-

Таблица 1

Мощность информационного сигнала на входе оптического волокна

Скорость передачи, Гбит/с	Чувствительность приемника перехвата $W_{п}$, дБм	Срабатывание системы защиты A_k , дБ		Коэффициент передачи через боковую поверхность $K_{п}$, отн. ед.	Мощность информационного сигнала (на канал) W_0 , дБ	
		1 пролет	7 пролетов		1 пролет	7 пролетов
0,6	-53				-17,4	-23,4
2,5	-43				-7,4	-13,4
10,0	-38	0,03	0,1	0,04	-2,4	-8,4
40,0 и выше	-33				+2,6	-3,4

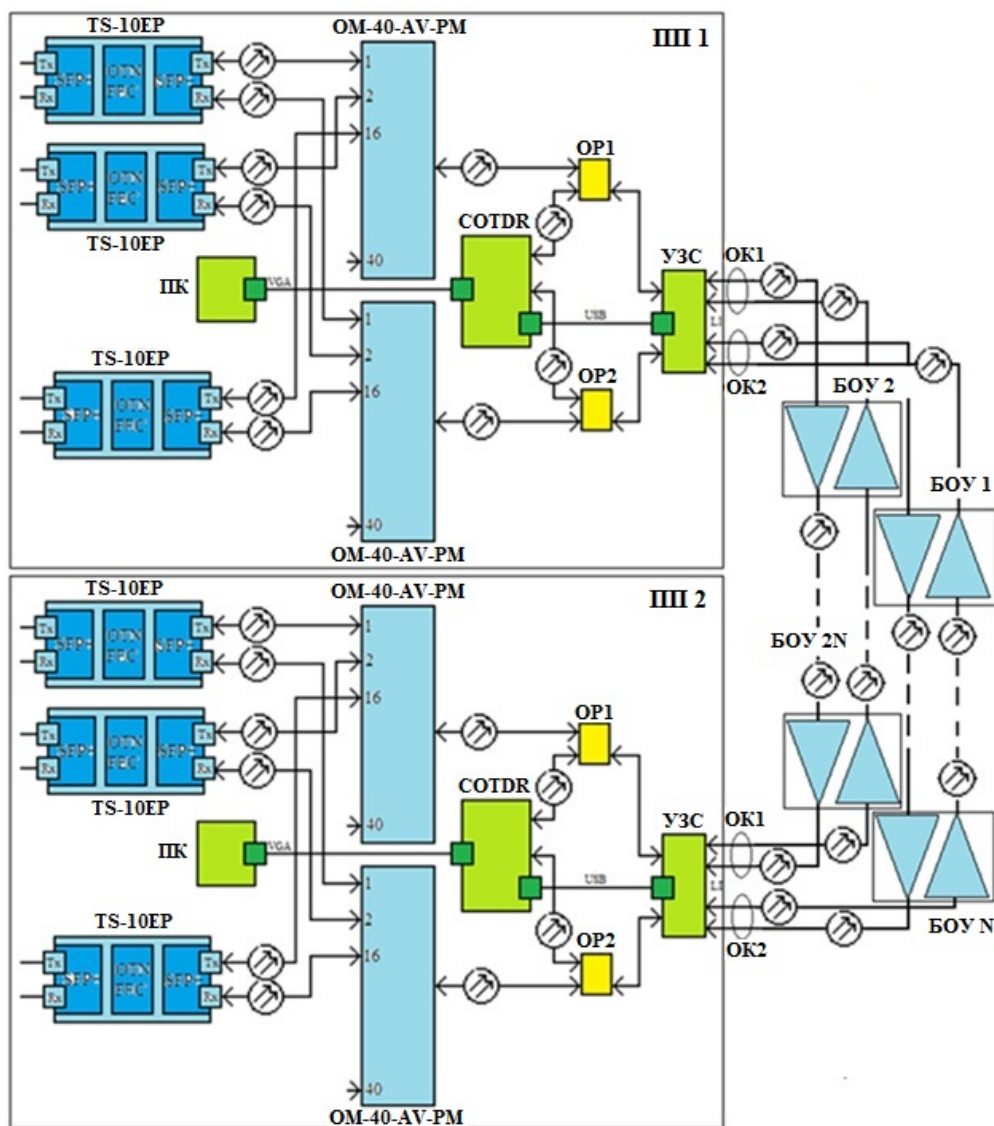


Рис. 2. Схема защищенной многоволновой многопролетной ВОСП: ПК — персональный компьютер; COTDR — когерентный рефлектометр; ОР — оптический разветвитель; УЗС — устройство защиты сигнала, основанное на прямом детектировании; ОК — оптический кабель; OM-40-AV-PM — мультиплексор/демультиплексор; TS-10EP — транспондер; БОУ — блок оптических усилителей; III — приемопередатчик ВОСП

налов (остальные функции защиты берет на себя система мониторинга). Устройство защиты, в котором реализован метод прямого детектирования, взаимодействует с оптическим рефлектометром системы мониторинга по каналу управления.

Например, защита информации может быть организована следующим образом. Устройство защиты постоянно контролирует оптическое волокно. В случае обнаружения нарушения оно подает сигнал на рефлектометр, который снимает рефлектограмму оптического волокна. Ре-

флектограмма, полученная в данный момент времени, сравнивается с эталонной, записанной в памяти персонального компьютера для того же оптического волокна.

При обнаружении новых локальных потерь рефлектометр включает сигнализацию (звуковую, световую, передачу SMS администратору безопасности) о нарушении и передает сигнал на устройство защиты, которое переключает основное волокно на резервное. Все эти действия фиксируются на персональном компьютере с указанием значения локальных потерь, времени, ме-

ста нарушения и т. д. Устройства находятся только на концах линии. Информация в сигналах оптических усилителей, расположенных по длине линии, защищается отдельно (на рис. 2 схема защиты не показана).

Таким образом, защита основана на сочетании лучших свойств двух методов — быстрого действия прямого детектирования и точности и постоянства во времени метода обратного рассеяния.

Система мониторинга и защиты

Система мониторинга и защиты для схем, содержащих оптические усилители, основана на включении когерентного рефлектометра, особенностью которого, как уже было отмечено, является передача и прием излучения по разным волокнам в отличие от обычного рефлекто-

метра, который использует только одну линию. На рис. 3 показано такое включение COTDR в ВОСП с оптическими усилителями [16, 17].

В табл. 2 приведены основные параметры когерентного рефлектометра COTDR типа MW90010A с уплотнением информации в С-диапазоне (1 535—1 565 нм) по технологии DWDM (с шагом между каналами 50 ГГц) [17]. Тестирование рефлектометра проведено на одномодовом волокне со смещенной дисперсией [6]. Рефлектометр может выводить на дисплей до восьми длин волн из сетки DWDM (с шагом по частоте 50 ГГц).

Для мониторинга может быть использован когерентный рефлектометр FDM-OTDR, усредняющий значения обратнорассеянного сигнала на нескольких длинах волн из сетки DWDM. Такое усреднение повышает чувствительность ре-

Таблица 2

Основные параметры рефлектометра COTDR MW90010A [17]

Items	Specifications	Remarks
Fiber under test	ITU-T G.653 (DSF)	
Optical connector	FC, SC, DIN, HSM-10/A, ST	Replaceable, PC type
Wavelength (Probe light)	1535.03 nm to 1565.08 nm	ITU-T Grid Wavelength in vacuum setting with 50 GHz steps
Wavelength accuracy	± 0.2 nm	+20° to +30°C
Warm-up time	30 minutes	+20° to +30°C
Loading light source (Dummy)	«wavelength of probe light» +50 GHz or –50 GHz	The loading wavelength can be selectable at +50 GHz or –50 GHz of the probe (OTDR) wavelength.
Pulse width	3, 10, 30, 60, 100 μs	
Optical output power	0 to +13 dBm (0.5 dB steps)	
Dead zone	0.5 km	Pulse width: 3 μs
Distance measurement accuracy (m)	±10 m ± 0.5 × 10 ⁻⁶ × measurement value	This does not include optical fiber refraction index (IOR) based uncertainty.
Vertical scale	0.02, 0.05, 0.1, 0.2, 0.5, 1.0, 2.0, 5.0, 10.0 dB/div	
Distance range	100 km, 500 km to 12,000 km (500 km steps)	
Measurement time	15 minutes	Distance Range: 1000 km Average times: 2 ¹⁶
Monitor output	–25 to –15 dBm	For OTDR Wavelength Monitor
Display	8.4 inch, XGA (1024 x 768) color LCD with touch panel	
Interface	USB (2 ports, REV1.1), Mouse (USB), Keyboard (PS/2), VGA	

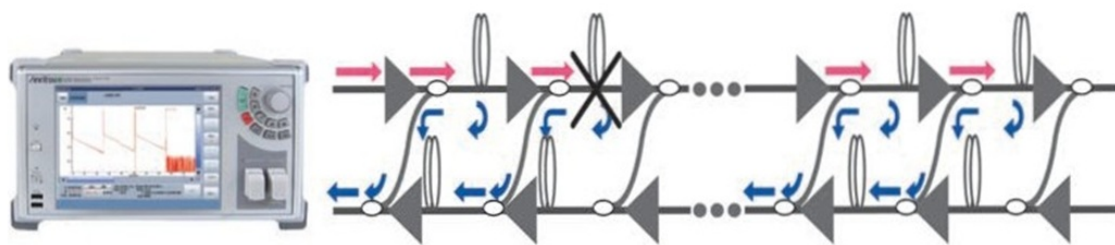


Рис. 3. Подключение когерентного рефлектометра к магистральной ВОСП

флектометра в 10–40 раз и увеличивает динамический диапазон. По сравнению с COTDR MW90010A применение многоволнового рефлектометра FDM-OTDR FOTDR-300 увеличивает динамический диапазон на 6 дБ (с 17 до 23 дБ). Также многоволновой рефлектометр не уступает представленному когерентному рефлектометру по внутренним возможностям и внешнему взаимодействию [16].

В табл. 3 приведены основные параметры когерентного многоволнового рефлектометра FDM-OTDR FOTDR-300, работающего на

одной, десяти и сорока длинах волн из сетки DWDM для C-диапазона [16].

В ВОСП с указанными рефлектометрами устройство прямого детектирования защищает от компенсационных и активных способов на малых временных интервалах, а когерентный рефлектометр COTDR (FDM-OTDR) — от активных способов съема при больших временах нарушения. Рефлектометр также обеспечивает сравнение текущей рефлектограммы с эталонным измерением. Такая защита ВОСП соединяет в себе постоянные и переменные средства защиты ин-

Таблица 3

Основные параметры рефлектометра FDM-OTDR FOTDR-300 [16]

Category	Parameter	Specification
Optical	Center Wavelength(OTDR)	1535.03~1565.08 nm(ITU-Grid.Fixed at time of order)
	Center Wavelength(Dummy)	Center Wavelength(OTDR) +/- 3 nm
	Pulse Width	2.5, 5, 10, 30, 60, 100 μ s
	Outpup Power	0~+13 dBm(0.2 dB step)
	Dynamic Range	>23 dB ⁽¹⁾
	Rayleigh Dead Zone	<0.5 km ⁽²⁾
	Optical Connector	FC, SC, LC, ST (PC/APC, other types can also be specified)
Operation	Distance Range	100 km, 500~12.000 km (500 km step)
	Frequency Mux	1, 10, 40
	Averaging	2 ⁸ ~ 2 ²⁴
	IOR(Index of refraction)	1.300000~1.700000
Electrical	Mode	Normal/High Resolution
	Display	10.1 inch VGA(1024×600). Color LCD, Touch Panel
	Interface	USB (3 ports)/ RJ-45 (1 port), VGA (1 port)
	Power Supply	AC 100~240 V (50/60 Hz)
	Electricity Consumption	220W
Physical	Inrush Current	25A
	Dimension(WxHxD)	450 ⁽³⁾ ×240×440 mm
	Weight	<20 kg
	Operating Temperature	10 ~ 40°C
	Storage Temperature	-10 ~ 50°C
	Humidity	40 ~ 80 %
	EMC	CISPR22. IEC61000-4-2,-3, -4, -5, -6
	Shock	IEC C60068-2-27
Vibration	IEC C60068-2-6	

формации [18]. При этом контроль потерь средней мощности (как более точных и независимых от времени) обеспечивается переходом рефлектометра в режим измерения при достижении локальных потерь заданного значения на устройстве защиты сигнала.

Таким образом, к защищенным многоволновым ВОСП с оптическими усилителями необходимо предъявить следующие основные требования:

- информационная часть ВОСП строится на отечественной или другой доступной для пользователя аппаратуре передачи;
- система мониторинга ВОСП представлена на основе когерентных рефлектометров COTDR или FDM-OTDR (например, MW90010A или FOTDR-300);
- система защиты ВОСП, состоящая из двух устройств, комплексная — на основе прямого детектирования и обратного рассеяния. Устройство на основе прямого детектирования реализует только быстрое действие системы защиты, а контроль локальных потерь в волокне обеспечивает рефлектометр COTDR или FDM-OTDR;
- автоматическое сообщение срабатывания устройства прямого детектирования является сигналом запуска когерентного рефлектометра, который измеряет локальные потери на новом дефекте;
- реакция защищенной ВОСП на нарушение — это переключение оптического волокна

на на *горячий* резервный канал (резервирование 1+1).

Промежуточные пункты регенерации сигналов

Промежуточные пункты регенерации сигналов защищенных ВОСП состоят из оптических усилителей, как в трансокеанских магистральных системах. Промежуточные пункты в трансокеанских системах погружаются в морскую воду на большую глубину на длительное время [12]. Для защищенных ВОСП пункты помещаются в грунт на глубину более метра (защита от промерзания грунта), в канализацию либо подвешиваются над землей. Промежуточные пункты не обслуживаются длительное время. Оптические усилители отличаются от обычных усилителей для наземных систем не только схемой включения для организации удаленного мониторинга, но и резервированием [12].

Для примера на рис. 4 показана схема дуплексного оптического усилителя для трансокеанских ВОСП [12]. Схема выполнена для мониторинга когерентным рефлектометром на основе соединения выхода первого оптического усилителя первого направления со входом второго усилителя другого направления. Особенность промежуточного пункта — двойное резервирование лазеров накачки, схем его возбуждения. Обеспечиваются мониторинг системы контроля лазеров накачки и дистанционное питание.

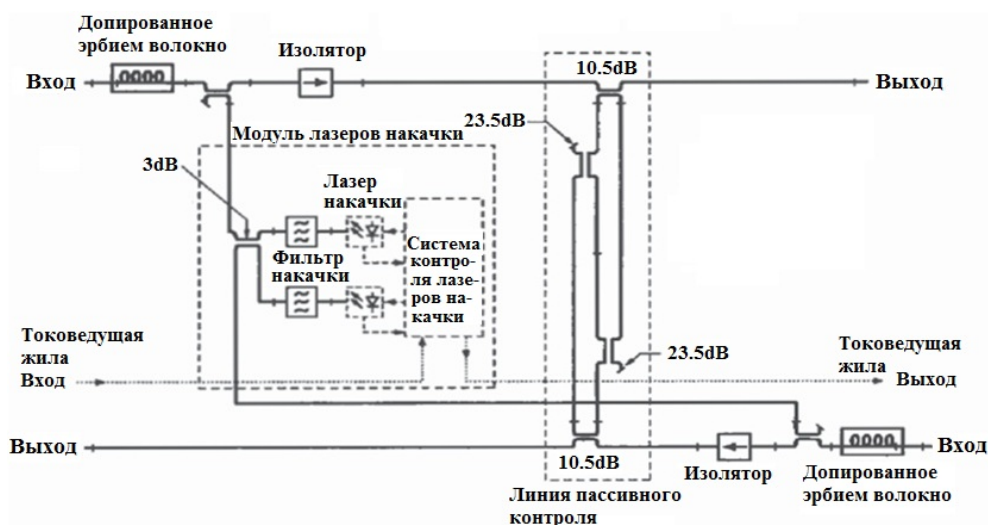


Рис. 4. Схема оптического усилителя для трансокеанских систем [12]

На рис. 5 показаны внешний вид и конструкция промежуточного пункта для магистральных трансокеанских систем, состоящего из опускаемых на глубину оптических усилителей [12].

Оптические кабели, обеспечивающие питание всех промежуточных пунктов регенерации высоковольтным напряжением и передачу информации по волокнам, также могут быть взяты из трансокеанских систем. Кабели имеют физическую защиту волокон металлическими слоями и обеспечивают подачу высокого напряжения для питания усилителей.

На рис. 6 показан пример подводного оптического кабеля, у которого стальная трубка, медные жилы и бронирование предназначены для защиты от внешних воздействий. Эти же слои

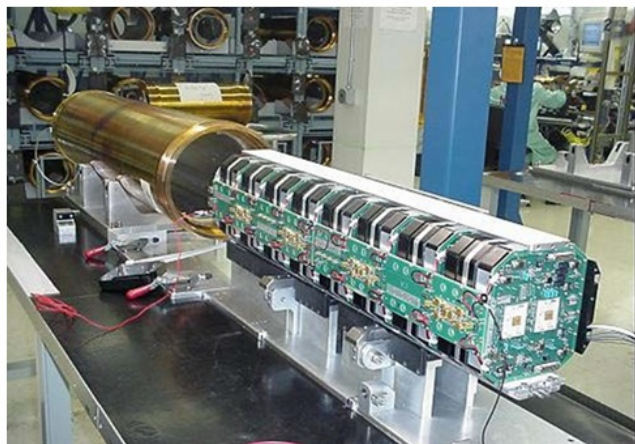


Рис. 5. Внешний вид и конструкция промежуточного пункта для магистральных трансокеанских систем [12]

могут быть использованы для защиты от внешнего нарушителя и обеспечения целостности кабеля [12].

На рис. 7 показаны поперечные сечения различных подводных оптических кабелей в зависимости от их применения [12], из многообразия которых можно выбрать волоконный кабель для защищенных систем.

Защита оптических подводных кабелей зависит от глубины, на которую спускается кабель, профиля дна и других факторов. Для питания подводных оптических усилителей используется высокое напряжение, источник которого расположен на берегу.

На рис. 8 представлено питание постоянным током трансокеанской оптоволоконной линии связи Сидней—Гуам [12]. На каждой станции энергоснабжения имеется источник высокого напряжения VDC. На станции А источник подключается положительным полюсом к токоведущей жиле подводного кабеля, а отрицательный полюс заземляется. На станции Б, наоборот, к токоведущей жиле подводного кабеля подсоединяется отрицательный полюс источника, а положительный заземляется. Таким образом создается цепь постоянного электрического тока, в которой ток от станции А идет к станции Б через подводный кабель, а от станции Б к станции А — через землю.

Для питания линий протяженностью более 6 000 км используется напряжение свыше 10 кВ. Для линий протяженностью от 2 000 до 6 000 км — напряжение от 5 до 10 кВ. До 2 000 км используется напряжение до 5 кВ [12].

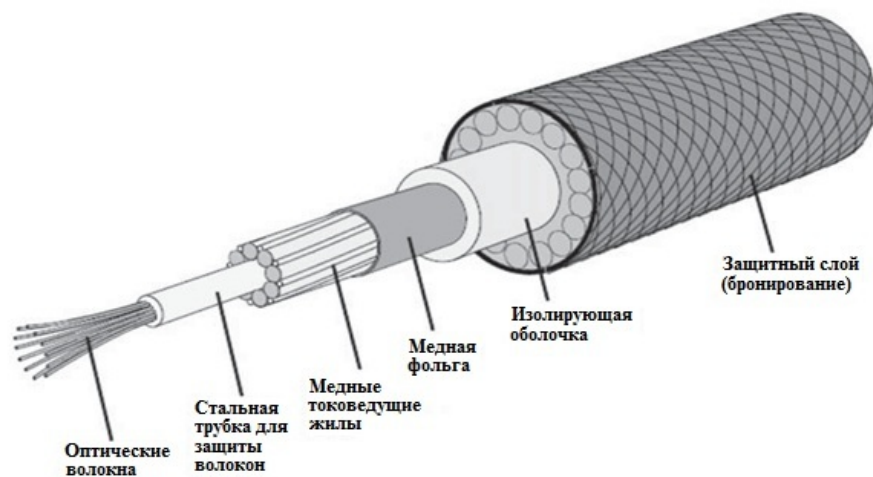


Рис. 6. Пример конструкции подводного оптического кабеля [12]

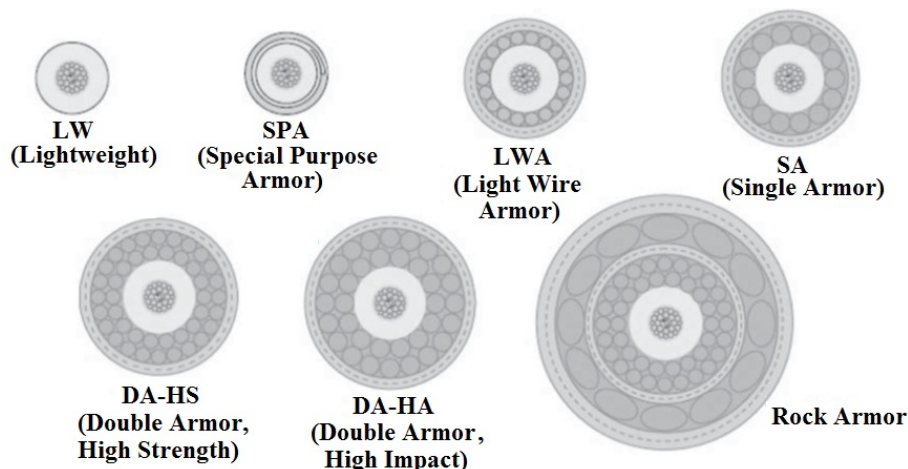


Рис. 7. Поперечные сечения подводных оптоволоконных кабелей [12]: LW — легковесовой; SPA — специальный бронированный; LWA — легкий проволочный бронированный; SA — однослойный бронированный; DA-HS — двойного бронирования, усиленный; DA-HA — двойного бронирования, высокоударный; Rock Armor — скальный бронированный



Рис. 8. Питание подводных оптических усилителей [12]

Напряжение и мощность источников питания рассчитываются исходя из параметров линии: длины линии, количества узлов (на подводных усилителях и устройствах сопровождения), мощности, потребляемой в каждом узле, удельного сопротивления токоведущей жилы [12].

Таким образом, для защищенных ВОСП с уплотнением информации по длинам волн и оптическими усилителями, расположенными за пределами контролируемой зоны, аппаратура может быть практически реализована. Для них можно использовать технические решения из трансокеанских волоконно-оптических систем.

Выводы

Многоволновые многопролетные защищенные ВОСП могут строиться на основе контроллеров FOBOS-100GL, но только на одном пролете. Указанные устройства защиты также размещаются только в пределах контролируемой зоны.

Предлагаемые магистральные защищенные ВОСП строятся на основе трех систем: информационной, мониторинга и технической системы защиты информации, которые взаимодействуют между собой. Магистральные защищенные ВОСП информации, у которых промежуточные пункты расположены за пределами контролируемой зоны, могут быть выполнены техническими средствами с использованием методов прямого детектирования и обратного рассеяния. Встроенная система мониторинга, которой оснащаются все магистральные ВОСП и которая строится на основе когерентных рефлектометров (COTDR, FDM-OTRD), может быть использована для систем защиты информации. Указанные рефлектометры используются для защиты информации методом обратного рассеяния, выполняя основные функции системы защиты: точный контроль локальных потерь в волокне на протяжении длительного времени эксплуатации. Для быстрого действия системы защиты используется устройство на основе прямого детектирования. Это устройство, специально введенное в состав ВОСП, управляет рефлектометром и системой защиты информации.

Промежуточные регенерационные пункты эксплуатируются длительное время без обслуживания, так же, как в трансокеанских системах. Для магистральных защищенных ВОСП можно воспользоваться техническим заданием, существующим в трансокеанских необслуживаемых системах.

Список литературы

1. ITU-T. G.709. Interfaces for the optical transport network.
2. ITU-T. G.694.1. Spectral grids for WDM applications: DWDM frequency grid.
3. ITU-T. G.872. Architecture of optical transport networks.
4. ITU-T. G.975.1. Forward error correction for high bit rate DWDM submarine systems.
5. ITU-T. G.652. Characteristics of a single-mode optical fibre and cable.
6. ITU-T. G.653. Characteristics of a dispersion-shifted single-mode optical fibre and cable.
7. ITU-T. G.654. Characteristics of a cut-off shifted single-mode optical fibre and cable.
8. ITU-T. G.655. Characteristics of a non-zero dispersion-shifted single-mode optical fibre and cable.
9. ITU-T. G.656. Characteristics of fibre and cable with non-zero dispersion for wideband optical transport.
10. Волков А. П., Зайцев А. Л., Ивченко С. Н., Кращенко И. А., Курило А. П., Попов С. Н., Шубин В. В. Исходные данные для построения модели съема информации, передаваемой по волоконно-оптическому тракту // Вопросы защиты информации. 1989. № 1 (24). С. 43–48.
Volkov A. P., Zaytsev A. L., Ivchenko S. N., Krashchenko I. A., Kurilo A. P., Popov S. N., Shubin V. V. Iskhodnye dannye dlya postroeniya modeli syema informatsii, peredavaemoy po volokonno-opticheskomu traktu // Voprosy zashchity informatsii. 1989. № 1 (24). S. 43–48.
11. Система сертификации средств защиты информации по требованиям безопасности информации № РОСС RU.0001.01БИ00. ФСТЭК России. Сертификат соответствия № 3329 от 30.12.2014.
Sistema sertifikatsii sredstv zashchity informatsii po trebovaniyam bezopasnosti informatsii № ROSS RU.0001.01BI00. FSTEK Rossii. Sertifikat sootvetstviya № 3329 ot 30.12.2014.
12. Денисов С. Л., Самарцев И. Э. Подводные оптоволоконные линии связи: конструкции, способы прокладки, оборудование // Электросвязь. 2010. № 2. С. 24.
Denisov S. L., Samartsev I. E. Podvodnye optovolokonnye linii svyazi: konstruksii, sposoby prokladki, oborudovanie // Elektrosvyaz. 2010. № 2. S. 24.
13. ITU-T. G.692. Optical interfaces for multichannel systems with optical amplifiers.
14. DWDM системы "Волга". Объединяем Россию. Технологии бесконечности. [http:// T8-80000km.ru](http://T8-80000km.ru).
DWDM sistemy "Volga". Obyedinyaem Rossiyu. Tekhnologii beskonechnosti. http:// T8-80000km.ru.
15. RFTS — системы мониторинга ВОЛС. [http:// www.teralink.ru](http://www.teralink.ru).
RFTS — sistemy monitoringa VOLS. http:// www.teralink.ru.
16. Frequency-Division-Multiplexed Coherent OTDR. [http:// www.alnair-labs.com](http://www.alnair-labs.com).
17. MW90010A.Coherent OTDR. Catalog No MW90010A-E-A-1-(5.00). Printed in Japan 26/JAN/2015 ddch/CDT.
18. Шубин В. В. Информационная безопасность и волоконно-оптические системы. Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2015.
Shubin V. V. Informatsionnaya bezopasnost i volokonno-opticheskie sistemy. Sarov: RFYaTs-VNIIEF, 2015.

Статья поступила в редакцию 07.07.22.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Абузьяров Мустафа Хасьянович — ННГУ им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, ведущий научный сотрудник, *e-mail*: abouziar@mech.unn.ru

Глазова Елена Геннадьевна — ННГУ им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, ученый секретарь, *e-mail*: glazova@mech.unn.ru

Евстифеева Елена Олеговна — ФГУП "РФЯЦ–ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области, научный сотрудник, *e-mail*: EOEvstifeeva@vniief.ru

Ерофеев Алексей Михайлович — ФГУП "РФЯЦ–ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области, заместитель начальника научно-исследовательского отдела — начальник научно-исследовательской лаборатории, *e-mail*: AMErofeev@vniief.ru

Колобянина Наталья Викторовна — ФГУП "РФЯЦ–ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области, научный сотрудник

Кочетков Анатолий Васильевич — ННГУ им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, главный научный сотрудник, *e-mail*: kochetkov@mech.unn.ru

Крылов Сергей Валерьевич — ННГУ им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, старший научный сотрудник, *e-mail*: krylov@mech.unn.ru

Лапшина Юлия Николаевна — ФГУП "РФЯЦ–ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области, старший научный сотрудник, *e-mail*: YNLapshina@vniief.ru

Лисицын Артём Александрович — ННГУ им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, младший научный сотрудник, *e-mail*: ntvbrrrr@mail.ru

Мжачих Сергей Викторович — ФГУП "РФЯЦ–ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области, начальник научно-исследовательской лаборатории, *e-mail*: SVMzhachikh@vniief.ru

Модин Иван Александрович — ННГУ им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, старший научный сотрудник, *e-mail*: mianet@mail.ru

Сизов Евгений Александрович — ФГУП "РФЯЦ–ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области, старший научный сотрудник, *e-mail*: EASizov@vniief.ru

Турутина Инна Юрьевна — ФГУП "РФЯЦ–ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области, старший научный сотрудник

Чередниченко Илма Евгеньевна — ФГУП "РФЯЦ–ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области, математик

Чистякова Ирина Николаевна — ФГУП "РФЯЦ–ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области, ведущий научный сотрудник, *e-mail*: INChistyakova@vniief.ru

Шмелёв Владимир Александрович — ФГУП "РФЯЦ–ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области, научный сотрудник, *e-mail*: VAShmelev@vniief.ru

Шубин Владимир Владимирович — ФГУП "РФЯЦ–ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области, главный научный сотрудник, *e-mail*: VVShubin@vniief.ru

Ямщиков Виталий Михайлович — ФГУП "РФЯЦ–ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области, младший научный сотрудник, *e-mail*: VMYamschikov@vniief.ru

Янилкин Юрий Васильевич — ФГУП "РФЯЦ–ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области, главный научный сотрудник, *e-mail*: YVYanilkin@vniief.ru

INFORMATION ABOUT AUTHORS

- Abuzyarov Mustafa Khasyanovich** — Lobachevskiy NNSU, Nizhniy Novgorod, leading scientist,
e-mail: abouziar@mech.unn.ru
- Glazova Elena Gennadyevna** — Lobachevskiy NNSU, Nizhniy Novgorod, academic secretary,
e-mail: glazova@mech.unn.ru
- Evstifeeva Elena Olegovna** — FSUE "RFNC-VNIIEF", Sarov, Nizhniy Novgorod region, scientist,
e-mail: EOEvtifeeva@vniief.ru
- Erofeev Aleksey Mikhaylovich** — FSUE "RFNC-VNIIEF", Sarov, Nizhniy Novgorod region, deputy head of research department — head of research laboratory, *e-mail:* AMErofeev@vniief.ru
- Kolobyanina Natalya Viktorovna** — FSUE "RFNC-VNIIEF", Sarov, Nizhniy Novgorod region, scientist
- Kochetkov Anatoliy Vasilyevich** — Lobachevskiy NNSU, Nizhniy Novgorod, chief scientist,
e-mail: kochetkov@mech.unn.ru
- Krylov Sergay Valeryevich** — Lobachevskiy NNSU, Nizhniy Novgorod, senior scientist,
e-mail: krylov@mech.unn.ru
- Lapshina Yuliya Nikolaevna** — FSUE "RFNC-VNIIEF", Sarov, Nizhniy Novgorod region, senior scientist, *e-mail:* YNLapshina@vniief.ru
- Lisitsyn Artyem Aleksandrovich** — Lobachevskiy NNSU, Nizhniy Novgorod, junior scientist,
e-mail: ntvbrrrr@mail.ru
- Mzhachikh Sergey Viktorovich** — FSUE "RFNC-VNIIEF", Sarov, Nizhniy Novgorod region, head of research laboratory, *e-mail:* SVMzhachikh@vniief.ru
- Modin Ivan Aleksandrovich** — Lobachevskiy NNSU, Nizhniy Novgorod, senior scientist,
e-mail: mianet@mail.ru
- Sizov Evgeniy Aleksandrovich** — FSUE "RFNC-VNIIEF", Sarov, Nizhniy Novgorod region, senior scientist, *e-mail:* EASizov@vniief.ru
- Turutina Inna Yuryevna** — FSUE "RFNC-VNIIEF", Sarov, Nizhniy Novgorod region, senior scientist
- Cherednichenko Ilma Evgenyevna** — FSUE "RFNC-VNIIEF", Sarov, Nizhniy Novgorod region, mathematician
- Chistyakova Irina Nikolaevna** — FSUE "RFNC-VNIIEF", Sarov, Nizhniy Novgorod region, leading scientist, *e-mail:* INChistyakova@vniief.ru
- Shmelyev Vladimir Aleksandrovich** — FSUE "RFNC-VNIIEF", Sarov, Nizhniy Novgorod region, scientist, *e-mail:* VAShmelev@vniief.ru
- Shubin Vladimir Vladimirovich** — FSUE "RFNC-VNIIEF", Sarov, Nizhniy Novgorod region, chief scientist, *e-mail:* VVShubin@vniief.ru
- Yamshchikov Vitaliy Mikhaylovich** — FSUE "RFNC-VNIIEF", Sarov, Nizhniy Novgorod region, junior scientist, *e-mail:* VMYamshchikov@vniief.ru
- Yanilkin Yuriy Vasilyavich** — FSUE "RFNC-VNIIEF", Sarov, Nizhniy Novgorod region, chief scientist,
e-mail: YVYanilkin@vniief.ru