

УДК 519.6, 533.6

DOI: 10.53403/9785951505309\_2022\_27\_1\_136

# Искусственная вязкость для подавления ударно-волновой неустойчивости в схемах типа Годунова повышенной точности

**А. В. Родионов**

*Для борьбы с численной неустойчивостью типа «карбункул» в методах сквозного счета предложен новый подход, основанный на добавлении искусственной вязкости. Подход прошел успешное тестирование на схемах первого порядка точности при моделировании двумерных и трехмерных задач. В данной работе он обобщается на случай использования схем типа Годунова повышенного порядка точности. Для исследования проблемы выбрано несколько реализаций хорошо известных схем, включающих алгоритмы реконструкции данных по пространству, применяемые в схемах типа MUSCL и WENO, а также алгоритмы интегрирования по времени, такие как методы Рунге – Кутты и процедура «предиктор – корректор» Хэнкока – Родионова. Расчеты задач типа задачи Кёрка и других популярных тестов позволили настроить предлагаемый подход на отобранных схемах. В результате был подобран базовый коэффициент в модели искусственной вязкости и сформулированы несколько предложений, позволяющих существенно ослабить осцилляции за фронтом ударной волны.*

## *Введение*

В настоящее время в вычислительной газовой динамике широко используются методы (схемы) сквозного счета, базирующиеся на точном или приближенном решении задачи Римана. Такие методы называют методами типа Годунова или (в более широком смысле) противопотоковыми методами. Обладая многими достоинствами, они имеют и изъяны, среди которых наиболее значительным является феномен «карбункула» [1, 2]. За 30 лет, прошедшие с момента обнаружения и идентификации этого феномена, опубликовано большое количество работ, посвященных его изучению и поиску способов борьбы с ним. (Заметим, что термин «carbuncle phenomenon» используется наравне с терминами «карбункул»-неустойчивость или ударно-волновая неустойчивость.)

В работе [3] автор представил обзор публикаций по проблеме «карбункула» и предложил новый подход к ее решению – в базовый метод решения уравнений Эйлера добавлять некоторое количество диссипации в форме правых частей уравнений Навье – Стокса; при этом коэффициент молекулярной вязкости заменяется коэффициентом искусственной вязкости. Новый метод решения проблемы «карбункула» был апробирован и настроен на схемах первого порядка точности при решении двумерных задач. Его эффективность была продемонстрирована на примерах решения известных тестовых задач. В [4] метод был распространен на случай решения трехмерных задач.

Данная работа посвящена проверке применимости нового метода борьбы с ударно-волновой неустойчивостью в схемах типа Годунова повышенного порядка точности.

## 1. Разностные схемы

К настоящему времени разработано огромное количество схем, которые можно отнести к классу схем типа Годунова повышенного порядка точности. От схем первого порядка они отличаются не только способом решения задачи Римана, но и чрезвычайно разнообразными способами повышения точности по пространству и времени. Более того, результат применения конкретной схемы повышенного порядка к какой-либо тестовой задаче может зависеть и от некоторых второстепенных, непринципиальных особенностей ее реализации. По этой причине не представляется возможной проверка эффективности нового способа подавления ударно-волновой неустойчивости для всего многообразия схем данного класса.

В данной работе рассматриваются некоторые реализации хорошо известных схем. По результатам их всестороннего тестирования будут выработаны общие рекомендации, полезные и для других схем типа Годунова повышенного порядка точности.

### 1.1. Уравнения Эйлера

Опишем используемые в данной работе схемы на примере решения двумерных уравнений газовой динамики, которые в декартовых координатах  $(x, y)$  записываются как

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_y}{\partial y} = \text{RHS}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u_x \\ \rho u_y \\ \rho h_0 - P \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_x = \begin{bmatrix} \rho u_x \\ \rho u_x^2 + P \\ \rho u_x u_y \\ \rho u_x h_0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_y = \begin{bmatrix} \rho u_y \\ \rho u_x u_y \\ \rho u_y^2 + P \\ \rho u_y h_0 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

где  $\text{RHS} = 0$  для уравнений Эйлера,  $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$  – вектор скорости и его компоненты,  $\rho$  – плотность,  $P$  – давление,  $h_0$  – полная удельная энтальпия, которая для политропного газа записывается как

$$h_0 = \frac{1}{2}(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) + h, \quad h = \frac{\gamma P}{(\gamma - 1)\rho},$$

$h$  – удельная энтальпия,  $\gamma$  – показатель адиабаты.

### 1.2. Пространственно-временная дискретизация

Численное решение уравнений (1) осуществляется в рамках метода конечных объемов. При этом рассматривается достаточно гладкая структурированная сетка и используются криволинейные координаты  $(\xi, \eta)$ , которые переводят сетку физического пространства  $(x, y)$  в прямоугольную сетку вычислительного пространства с сеточными интервалами  $\Delta \xi = \Delta \eta = 1$ . В качестве метрических величин используются геометрические параметры сетки (здесь и далее сеточные индексы  $i$

и  $j$  соответствуют координатам  $\xi$  и  $\eta$ ):  $V_{i,j}$  – объем ячейки,  $(\mathbf{S}_\xi)_{i+1/2,j}$  и  $(\mathbf{S}_\eta)_{i,j+1/2}$  – векторы-площади боковых граней ячейки в двух сеточных направлениях (каждый вектор-площадь направлен в сторону возрастания соответствующей координаты).

Пусть на фиксированном временном слое  $n$  решение определено, т. е. в момент времени  $t = t^n$  известны осредненные по каждой ячейке величины  $\mathbf{Q}_{i,j}^n \equiv (u_x, u_y, \rho, P)_{i,j}^n$ . Чтобы получить решение на следующем временном слое  $n + 1$ , мы проинтегрируем (1) по ячейке и времени между  $t^n$  и  $t^{n+1} \equiv t^n + \Delta t$ . Получим

$$\mathbf{U}_{i,j}^{n+1} = \mathbf{U}_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{V_{i,j}} \left[ (\mathbf{F}_\xi)_{i+1/2,j} - (\mathbf{F}_\xi)_{i-1/2,j} + (\mathbf{F}_\eta)_{i,j+1/2} - (\mathbf{F}_\eta)_{i,j-1/2} \right], \quad (2)$$

где  $\mathbf{U}_{i,j}^n = \mathbf{U}(\mathbf{Q}_{i,j}^n)$ ,  $\mathbf{U}_{i,j}^{n+1} = \mathbf{U}(\mathbf{Q}_{i,j}^{n+1})$ ,  $\mathbf{F}_\xi = S_{\xi x} \mathbf{F}_x + S_{\xi y} \mathbf{F}_y$  и  $\mathbf{F}_\eta = S_{\eta x} \mathbf{F}_x + S_{\eta y} \mathbf{F}_y$  – векторы потоков через грани ячейки в двух сеточных направлениях.

Способ вычисления потоков определяется конкретной схемой. В схемах типа Годунова первого порядка точности используется предположение о постоянстве параметров газа внутри каждой ячейки, а потоки вычисляются с использованием одного из RS (Riemann Solver) – точного или приближенного решения задачи Римана. Любое такое решение можно записать как

$$(\mathbf{F}_\xi)_{i+1/2,j} = \mathbf{F}^{RS} \left( \mathbf{Q}_{i,j}^n, \mathbf{Q}_{i+1,j}^n, (\mathbf{S}_\xi)_{i+1/2,j} \right), \quad (\mathbf{F}_\eta)_{i,j+1/2} = \mathbf{F}^{RS} \left( \mathbf{Q}_{i,j}^n, \mathbf{Q}_{i,j+1}^n, (\mathbf{S}_\eta)_{i,j+1/2} \right).$$

### 1.3. Реконструкция данных

В схемах типа Годунова повышение порядка аппроксимации по пространству обычно достигается процедурой реконструкции данных.

В схемах второго порядка вместо кусочно-постоянного распределения данных применяется кусочно-линейное распределение, которое на каждом временном слое восстанавливается по известным величинам  $\mathbf{Q}_{i,j}^n$ . В случае достаточно гладкой структурированной сетки задача сводится к вычислению так называемых наклонов  $\Delta_\xi \mathbf{Q}_{i,j}^n$  и  $\Delta_\eta \mathbf{Q}_{i,j}^n$ , под которыми понимаются приращения параметров внутри ячейки по каждому сеточному направлению. Тогда величины, экстраполированные на боковые грани ячейки, определяются как

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{i+1/2-,j}^n &= \mathbf{Q}_{i,j}^n + \frac{1}{2} \Delta_\xi \mathbf{Q}_{i,j}^n, & \mathbf{Q}_{i-1/2+,j}^n &= \mathbf{Q}_{i,j}^n - \frac{1}{2} \Delta_\xi \mathbf{Q}_{i,j}^n, \\ \mathbf{Q}_{i,j+1/2-}^n &= \mathbf{Q}_{i,j}^n + \frac{1}{2} \Delta_\eta \mathbf{Q}_{i,j}^n, & \mathbf{Q}_{i,j-1/2+}^n &= \mathbf{Q}_{i,j}^n - \frac{1}{2} \Delta_\eta \mathbf{Q}_{i,j}^n, \end{aligned}$$

а потоки рассчитываются по соотношениям

$$(\mathbf{F}_\xi)_{i+1/2,j} = \mathbf{F}^{RS} \left( \mathbf{Q}_{i+1/2-,j}^n, \mathbf{Q}_{i+1/2+,j}^n, (\mathbf{S}_\xi)_{i+1/2,j} \right), \quad (\mathbf{F}_\eta)_{i,j+1/2} = \mathbf{F}^{RS} \left( \mathbf{Q}_{i,j+1/2-}^n, \mathbf{Q}_{i,j+1/2+}^n, (\mathbf{S}_\eta)_{i,j+1/2} \right).$$

Наклоны вычисляются по единому алгоритму для каждого сеточного направления независимо (одномерная реконструкция). Рассмотрим три алгоритма реконструкции: minmod, vanLeer и MC\* (названия алгоритмов взяты из [5]). Запишем:

\* MC – Monotonized Central-Difference Reconstruction.

$$\Delta f_i = \min\text{mod}(\Delta f_{i-1/2}, \Delta f_{i+1/2}), \quad \min\text{mod}(a, b) \equiv \begin{cases} a, & \text{если } |a| \leq |b| \text{ и } ab > 0, \\ b, & \text{если } |b| < |a| \text{ и } ab > 0, \\ 0, & \text{если } ab \leq 0, \end{cases}$$

$$\Delta f_i = \text{vanLeer}(\Delta f_{i-1/2}, \Delta f_{i+1/2}), \quad \text{vanLeer}(a, b) \equiv \begin{cases} \frac{2ab}{a+b}, & \text{если } ab > 0, \\ 0, & \text{если } ab \leq 0, \end{cases} \quad (3)$$

$$\Delta f_i = \text{MC}(\Delta f_{i-1/2}, \Delta f_{i+1/2}), \quad \text{MC}(a, b) = \min\text{mod}\left(\frac{a+b}{2}, 2 \min\text{mod}(a, b)\right),$$

где  $\Delta f_{i-1/2} = f_i - f_{i-1}$  и  $\Delta f_{i+1/2} = f_{i+1} - f_i$ .

Все реконструкции (3) принадлежат к классу трехточечных реконструкций, удовлетворяющих свойству TVD. В этом классе реконструкция  $\min\text{mod}$  обладает наибольшей диссипацией, а реконструкция MC – наименьшей.

Результат применения реконструкции зависит не только от выбранного алгоритма, но и от того, по каким переменным проводится реконструкция. Наиболее простой способ – реконструкция по *примитивным переменным*, т. е. по компонентам вектора  $\mathbf{Q}$ . Однако этот способ часто приводит к плохим результатам (см. разд. 3.1). Более целесообразно проведение реконструкции по *характеристическим переменным*. Пусть требуется провести реконструкцию в ячейке  $(i, j)$  по сеточному направлению  $\xi$ . Сначала вычисляются два набора приращений примитивных переменных  $\Delta_\xi \mathbf{Q}_{i-1/2, j}^n = \mathbf{Q}_{i, j}^n - \mathbf{Q}_{i-1, j}^n$  и  $\Delta_\xi \mathbf{Q}_{i+1/2, j}^n = \mathbf{Q}_{i+1, j}^n - \mathbf{Q}_{i, j}^n$  и определяются «замороженные» вели-

чины  $\rho_0 = \rho_{i, j}$ ,  $c_0 = \sqrt{\gamma p_{i, j} / \rho_{i, j}}$  и единичные векторы  $\mathbf{n}_1 \equiv (n_{1x}, n_{1y}) = \frac{(\mathbf{S}_\xi)_{i-1/2, j} + (\mathbf{S}_\xi)_{i+1/2, j}}{\|(\mathbf{S}_\xi)_{i-1/2, j} + (\mathbf{S}_\xi)_{i+1/2, j}\|}$ ,

$\mathbf{n}_2 \equiv (n_{2x}, n_{2y}) = (n_{1y}, -n_{1x})$ .

Затем приращения примитивных переменных  $\Delta_\xi \mathbf{Q}_{i-1/2, j}^n$  и  $\Delta_\xi \mathbf{Q}_{i+1/2, j}^n$  переводятся в приращения характеристических переменных  $\Delta_\xi \mathbf{Z}_{i-1/2, j}^n$  и  $\Delta_\xi \mathbf{Z}_{i+1/2, j}^n$  по соотношениям

$$\Delta Z_1 = \Delta u_1 + \frac{\Delta p}{\rho_0 c_0}, \quad \Delta Z_2 = \Delta u_1 - \frac{\Delta p}{\rho_0 c_0}, \quad \Delta Z_3 = \Delta p - \frac{\Delta p}{c_0^2}, \quad \Delta Z_4 = \Delta u_2,$$

$$\Delta u_1 = n_{1x} \Delta u_x + n_{1y} \Delta u_y, \quad \Delta u_2 = n_{2x} \Delta u_x + n_{2y} \Delta u_y, \quad (4)$$

где  $\Delta Z_1 - \Delta Z_4$  – компоненты вектора  $\Delta_\xi \mathbf{Z}_{i-1/2, j}^n$  (или  $\Delta_\xi \mathbf{Z}_{i+1/2, j}^n$ );  $\Delta u_x$ ,  $\Delta u_y$ ,  $\Delta p$ ,  $\Delta p$  – компоненты вектора  $\Delta_\xi \mathbf{Q}_{i-1/2, j}^n$  (или  $\Delta_\xi \mathbf{Q}_{i+1/2, j}^n$ ).

К наборам приращений характеристических переменных применяется одна из реконструкций (3). Полученный в результате вектор  $\Delta_\xi \mathbf{Z}_{i, j}^n$  переводится в  $\Delta_\xi \mathbf{Q}_{i, j}^n$  с помощью преобразований, обратных (4). На этом процедура реконструкции завершается.

В данной работе кроме кусочно-линейных реконструкций (3) применяется реконструкция пятого порядка точности WENO5. Ее подробное описание приведено в [6], в [7] – алгоритм реконструкции на языке FORTRAN. Характеристические переменные в реконструкции WENO5 применяются по аналогии с описанной выше процедурой.

### 1.4. Методы Рунге – Кутты

Перепишем разностное уравнение (2) в компактном виде

$$\mathbf{U}_{i,j}^{n+1} = \mathbf{U}_{i,j}^n + \Delta t \mathbf{L}_{i,j}(\mathbf{Q}^n), \quad (5)$$

где пространственный оператор  $\mathbf{L}_{i,j}$  выражает суммарный поток через все грани ячейки. Его вычисление подразумевает проведение реконструкции по каждому из сеточных направлений и решение задачи Римана на боковых гранях ячейки.

Метод интегрирования по времени вида (5) представляет собой метод Эйлера, имеющий первый порядок аппроксимации. Для повышения точности интегрирования по времени применяют методы Рунге – Кутты, базирующиеся на процедуре пересчета. В данной работе применяются методы Рунге – Кутты второго и третьего порядка [8] (методы RK2 и RK3 соответственно):

• метод RK2

$$\mathbf{U}_{i,j}^{(1)} = \mathbf{U}_{i,j}^n + \Delta t \mathbf{L}_{i,j}(\mathbf{Q}^n),$$

$$\mathbf{U}_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{2} \mathbf{U}_{i,j}^n + \frac{1}{2} \mathbf{U}_{i,j}^{(1)} + \frac{1}{2} \Delta t \mathbf{L}_{i,j}(\mathbf{Q}^{(1)}), \quad \mathbf{Q}_{i,j}^{(1)} = \mathbf{Q}(\mathbf{U}_{i,j}^{(1)}).$$

• метод RK3

$$\mathbf{U}_{i,j}^{(1)} = \mathbf{U}_{i,j}^n + \Delta t \mathbf{L}_{i,j}(\mathbf{Q}^n),$$

$$\mathbf{U}_{i,j}^{(2)} = \frac{3}{4} \mathbf{U}_{i,j}^n + \frac{1}{4} \mathbf{U}_{i,j}^{(1)} + \frac{1}{4} \Delta t \mathbf{L}_{i,j}(\mathbf{Q}^{(1)}), \quad \mathbf{Q}_{i,j}^{(1)} = \mathbf{Q}(\mathbf{U}_{i,j}^{(1)}),$$

$$\mathbf{U}_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{3} \mathbf{U}_{i,j}^n + \frac{2}{3} \mathbf{U}_{i,j}^{(2)} + \frac{2}{3} \Delta t \mathbf{L}_{i,j}(\mathbf{Q}^{(2)}), \quad \mathbf{Q}_{i,j}^{(2)} = \mathbf{Q}(\mathbf{U}_{i,j}^{(2)}).$$

По сравнению с методом Эйлера методы RK2 и RK3 увеличивают объем вычислений при переходе от временного слоя  $n$  к слою  $n + 1$  в два и три раза соответственно.

### 1.5. Процедура типа «предиктор – корректор»

Второй порядок по времени может достигаться иными способами, например, при помощи процедуры типа *предиктор – корректор*, описанной в [9, 10]. Эта специфическая процедура является близким аналогом предложенной ранее схемы Хэнкока [11, 12], поэтому будем называть ее схемой Хэнкока – Родионова (HR).

Используемая в схеме HR процедура *предиктор – корректор* в компактном виде записывается как

$$\tilde{\mathbf{U}}_{i,j}^{n+1} = \mathbf{U}_{i,j}^n + \Delta t \mathbf{L}_{i,j}^{\text{pred}}(\mathbf{Q}^n), \quad \mathbf{U}_{i,j}^{n+1} = \mathbf{U}_{i,j}^n + \Delta t \mathbf{L}_{i,j}^{\text{corr}}(\mathbf{Q}^{n+1/2}),$$

$$\mathbf{Q}_{i,j}^{n+1/2} = \frac{1}{2}(\mathbf{Q}_{i,j}^n + \tilde{\mathbf{Q}}_{i,j}^{n+1}), \quad \tilde{\mathbf{Q}}_{i,j}^{n+1} = \mathbf{Q}(\tilde{\mathbf{U}}_{i,j}^{n+1}).$$

Здесь пространственные операторы  $\mathbf{L}_{i,j}^{\text{pred}}$  и  $\mathbf{L}_{i,j}^{\text{corr}}$  различны. В отличие от  $\mathbf{L}_{i,j}$  оператор  $\mathbf{L}_{i,j}^{\text{pred}}$  не включает в себя решение задачи Римана. Вместо этого потоки вычисляются по тем граничным экстраполированным величинам, которые являются внутренними по отношению к интегрируемой ячейке. Таким образом, для ячейки  $(i, j)$  на этапе *предиктор* потоки вычисляются по простым соотношениям:

$$\begin{aligned} (\mathbf{F}_\xi)_{i-1/2,j} &= \mathbf{F}\left(\mathbf{Q}_{i-1/2+,j}^n, (\mathbf{S}_\xi)_{i-1/2,j}\right), & (\mathbf{F}_\xi)_{i+1/2,j} &= \mathbf{F}\left(\mathbf{Q}_{i+1/2-,j}^n, (\mathbf{S}_\xi)_{i+1/2,j}\right), \\ (\mathbf{F}_\eta)_{i,j-1/2} &= \mathbf{F}\left(\mathbf{Q}_{i,j-1/2+}^n, (\mathbf{S}_\eta)_{i,j-1/2}\right), & (\mathbf{F}_\eta)_{i,j+1/2} &= \mathbf{F}\left(\mathbf{Q}_{i,j+1/2-}^n, (\mathbf{S}_\eta)_{i,j+1/2}\right). \end{aligned}$$

На этапе *корректор* применяется оператор  $\mathbf{L}_{i,j}^{\text{corr}}$ , который использует решение задачи Римана, как и в базовом операторе  $\mathbf{L}_{i,j}$ , но реконструкцию не пересчитывает: на промежуточном временном слое  $n + 1/2$  используются те же наклоны  $\Delta_\xi \mathbf{Q}_{i,j}^n$  и  $\Delta_\eta \mathbf{Q}_{i,j}^n$ , полученные на шаге *предиктор*.

По сравнению с методом RK2 схема HR характеризуется меньшим объемом вычислений, но, как правило, обеспечивает лучшую точность.

### 1.6. Уравнения Навье – Стокса

Применяемый в данной работе метод подавления «карбункул»-неустойчивости предполагает использование уравнений Навье – Стокса. В этом случае правые части уравнений (1) имеют вид

$$\text{RHS} = \frac{\partial \mathbf{F}_x^v}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_y^v}{\partial y}, \quad \mathbf{F}_m^v = \left[ 0, \tau_{xm}, \tau_{ym}, q_m + u_x \tau_{xm} + u_y \tau_{ym} \right]^T, \quad m = x, y. \quad (6)$$

Входящие в (6) тензор напряжений ( $\tau_{nm}$ ) и тепловой поток ( $q_m$ ) записываются как

$$\begin{aligned} \tau_{nm} &= \mu \left[ \frac{\partial u_n}{\partial m} + \frac{\partial u_m}{\partial n} - \frac{2}{3} (\nabla \mathbf{u}) \delta_{nm} \right], & \nabla \mathbf{u} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y}, \\ q_m &= \lambda \frac{\partial T}{\partial m} = \frac{\mu}{\text{Pr}} \frac{\partial h}{\partial m} = \frac{\mu}{\text{Pr}} \left[ \frac{\partial h_0}{\partial m} - \left( u_x \frac{\partial u_x}{\partial m} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial m} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial m} \right) \right], & m, n &= x, y, \end{aligned}$$

где  $\delta_{nm}$  – символ Кронекера, коэффициент вязкости  $\mu = \mu_{AV}$ , а число Прандтля  $\text{Pr} = 3/4$ .

Пространственная дискретизация выражения (6) имеет вид

$$\text{RHS} = \frac{1}{V_{i,j}} \left[ (\mathbf{F}_\xi^v)_{i+1/2,j}^n - (\mathbf{F}_\xi^v)_{i-1/2,j}^n + (\mathbf{F}_\eta^v)_{i,j+1/2}^n - (\mathbf{F}_\eta^v)_{i,j-1/2}^n \right],$$

где  $\mathbf{F}_\xi^v = S_{\xi x} \mathbf{F}_x^v + S_{\xi y} \mathbf{F}_y^v + S_{\xi z} \mathbf{F}_z^v$  и  $\mathbf{F}_\eta^v = S_{\eta x} \mathbf{F}_x^v + S_{\eta y} \mathbf{F}_y^v + S_{\eta z} \mathbf{F}_z^v$ .

При расчете вязких потоков используются явные центрально-разностные аппроксимации, как описано в [4]. Полученные в результате значения правых частей уравнений Навье – Стокса вводятся в оператор  $\mathbf{L}_{i,j}$  или любую его разновидность как источниковые члены, которые остаются постоянными (не пересчитываются) на всех этапах перехода к следующему временному слою  $n + 1$ .

### 1.7. Модель искусственной вязкости

В схемах повышенного порядка точности применяется та же модель искусственной вязкости, что и для схем первого порядка [3]. Согласно этой модели коэффициент искусственной вязкости определяется как

$$\mu_{AV} = \begin{cases} C_{AV}\rho h^2 \sqrt{(\nabla \mathbf{u})^2 - (C_{th}a/h)^2}, & \text{если } (\nabla \mathbf{u}) < -C_{th}a/h, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Здесь  $a$  – скорость звука,  $h$  – характерный размер ячейки,  $C_{AV}$  – безразмерный параметр,  $C_{th} = 0,05$  – коэффициент в пороговой интенсивности сжатия, которая ограничивает действие искусственной вязкости только фронтом ударной волны (УВ). В случае неквадратных ячеек характерный размер ячейки вычисляется как  $h = \max(d_1, d_2)/\sqrt{2}$ , где  $d_1$  и  $d_2$  – длины диагоналей ячейки. Для прямоугольных ячеек в декартовых координатах это выражение сводится к  $h = \sqrt{(h_x^2 + h_y^2)}/2$ .

Адаптация модели искусственной вязкости к схемам типа Годунова повышенного порядка точности заключается в подборе подходящего коэффициента  $C_{AV}$ .

## 2. Тестирование и настройка метода

Тестирование проводилось с использованием схем HR–minmod, HR–vanLeer, HR–MC, RK2–MC и RK3–WENO5. Для решения задачи Римана, как правило, использовался точный решатель Годунова [13]; выборочные расчеты с применением решателей Роу [14] и HLLC [15] давали близкие результаты (аналогично тому, что наблюдалось в схемах первого порядка [3]). Подавляющее большинство тестовых расчетов проведено с использованием модификаций задачи Кёрка.

Для облегчения восприятия материала данного раздела приведем заранее два важных вывода: 1) схема HR–minmod демонстрирует наименьшую склонность к генерации паразитных колебаний за фронтом ударной волны; 2) при выполнении рекомендаций, сформулированных ниже, значение коэффициента  $C_{AV} = 0,5$  в модели искусственной вязкости обеспечивает подавление «кар-бункул»-неустойчивости для всех рассмотренных схем.

### 2.1. Задача о двойном маховском отражении: примитивные или характеристические переменные

Используется первоначальная постановка задачи о двойном маховском отражении [16] с одним уточнением: в процессе счета в расчетных точках, расположенных выше и левее всех ударных волн (удаленных от них не менее чем на 5 сеточных интервалов), поддерживаются точные значения параметров потока за УВ с числом Маха  $M_S = 10$ . Это делается для того, чтобы устранить небольшие паразитные возмущения, образующиеся из-за неподходящего (несогласованного с численной вязкостью) размывания главной УВ в начальных данных и на верхней границе расчетной области (подробнее см. разд. 15.8.4 в [5]).

На рис. 1 приведены данные расчета задачи методом HR–MC на квадратной сетке с разрешением  $h = 1/480$ . Представлены четыре варианта расчета, отличающиеся типом переменных, используемых в реконструкции, и наличием или отсутствием искусственной вязкости. Рис. 1,а соответствует варианту расчета с использованием примитивных переменных без искусственной вязкости. Стрелки на рисунке указывают на возмущения различных видов, заметно ухудшающие качество данных. Возмущения 1 и 2 расположены за отраженной УВ слева от тройной точки.

Можно с уверенностью сказать, что их причиной не является «карбункул»-неустойчивость, поскольку в этой части течения линии тока не ориентированы вдоль линий сетки. Другие возмущения расположены на ножке Маха (УВ между тройной точкой и пластиной  $y = 0$ ). Здесь наблюдаются пилообразное искажение ножки Маха (стрелка 3) и ее искривление (стрелка 4), приводящие к нефизической структуре течения за УВ. Эти возмущения являются проявлением «карбункул»-неустойчивости.

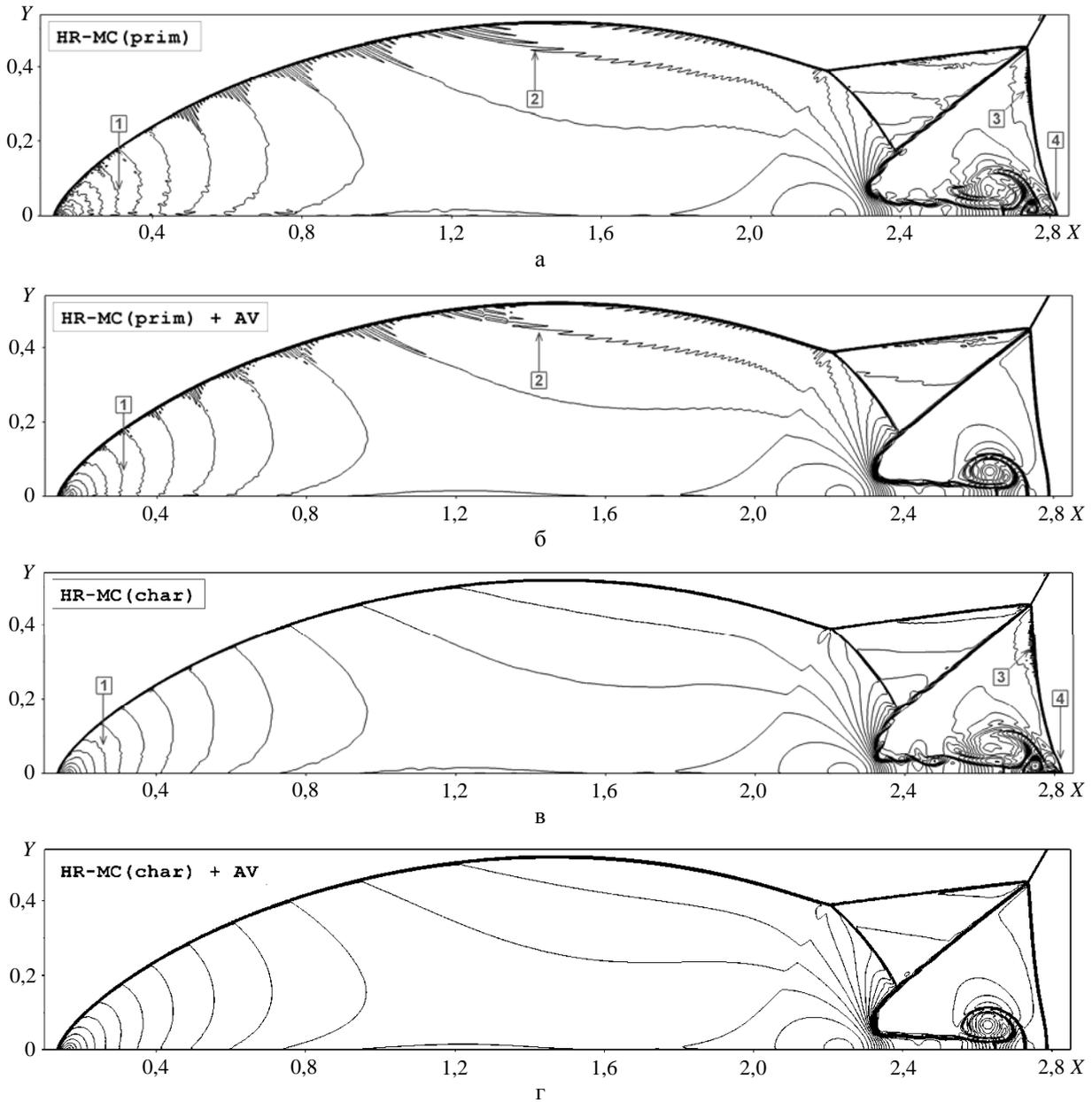


Рис. 1. Изолинии плотности в тестовой задаче о двойном маховском отражении. Расчеты по схеме HR–MC на сетке с  $h = 1/480$ : а, б – реконструкция по примитивным переменным; в, г – реконструкция по характеристическим переменным; б, г – расчеты с добавлением искусственной вязкости

На рис. 1,б представлены данные, полученные с использованием примитивных переменных и искусственной вязкости. Видно, что в этом варианте расчета проявления «карбункул»-неустойчивости полностью отсутствуют, остались лишь возмущения первого и второго вида (стрелки 1 и 2): возмущения первого вида заметно ослабли, возмущения второго вида сохранились на прежнем уровне.

Рис. 1,в соответствует варианту расчета с использованием характеристических переменных без искусственной вязкости. Сравнение с рис. 1,а показывает, что использование характеристических переменных вместо примитивных приводит к полному исчезновению возмущений второго вида и заметному ослаблению возмущений первого вида; при этом проявления «карбункул»-неустойчивости остаются без изменений.

Наконец, расчет с использованием характеристических переменных и искусственной вязкостью (рис. 1,г) демонстрирует наилучшее качество: все паразитические возмущения либо полностью устранены, либо ослаблены до пренебрежимо малого уровня.

Таким образом, в схемах повышенного порядка точности искусственная вязкость позволяет эффективно устранять паразитические возмущения, связанные с «карбункул»-неустойчивостью. Однако для подавления возмущений иного рода добавление искусственной вязкости может оказаться недостаточным или неэффективным. В таком случае необходимо усовершенствование самих расчетных методов. Одно предложение по такого рода усовершенствованию можно сформулировать на основании представленных данных – это известная рекомендация, которую можно найти, например, в работе [17].

**Предложение 1 (использование характеристических переменных).** В схемах повышенной точности процедуру реконструкции данных предпочтительнее проводить с использованием характеристических переменных.

Во всех дальнейших расчетах будет учитываться предложение 1. Подчеркнем, что использование примитивных переменных в реконструкции *minmod* обычно не приводит к заметным возмущениям за ударной волной, как это наблюдается для других, менее диссипативных реконструкций. Однако и для этой реконструкции будет учитываться предложение 1, если не указано другое.

## 2.2. Формулировка тестовых задач типа задачи Кёрка

В тестовых задачах типа задачи Кёрка проверяется устойчивость плоской УВ при ее расчете в двумерной постановке. В работе [3] при исследовании схем первого порядка различались три вида ударных волн: поступательная, отраженная и стационарная. В данной работе рассматриваются только случаи с поступательной и стационарной ударными волнами как наиболее критичные.

**Поступательная УВ.** Расчетная область  $[0, X] \times [0, Y]$  в плоскости  $xu$  покрывается регулярной сеткой, состоящей из квадратных ( $h_y = h_x = 1$ ) или прямоугольных ( $h_y \neq h_x = 1$ ) ячеек. Начальное состояние газа (компоненты скорости, плотность и давление) в расчетной области:  $(u_x, u_y, \rho, P) = (0, 0, 1, 1)$ . На нижней и верхней границах ( $y = 0$  и  $y = Y$ ) ставится условие периодичности течения. На правой границе ( $x = X$ ) задается непроницаемая стенка, а на границе слева ( $x = 0$ ) задается втекающий поток с параметрами  $(u_1, 0, \rho_1, P_1)$ , которые определяются ударно-волновым числом Маха ( $M_S$ ) и показателем адиабаты ( $\gamma$ ):

$$u_1 = u_S \frac{2(M_S^2 - 1)}{(\gamma + 1)M_S^2}, \quad \rho_1 = \frac{(\gamma + 1)M_S^2}{(\gamma - 1)M_S^2 + 2}, \quad P_1 = \frac{2\gamma M_S^2 - (\gamma - 1)}{(\gamma + 1)},$$

где  $u_S = \sqrt{\gamma}M_S$  – скорость распространения УВ.

Неустойчивость поступательной УВ инициируется ничтожно малым возмущением сетки в сечении  $x = 10$ :  $\hat{x}_{i_0, j} = x_{i_0, j} + \delta(2 \cdot RND_j - 1)$ , где  $i$  и  $j$  – сеточные индексы в продольном и поперечном направлениях соответственно ( $0 \leq i \leq I$ ,  $0 \leq j \leq J$ ),  $i_0 = 10$ ,  $\delta = 10^{-4}$ ,  $RND_j$  – случайные числа, генерируемые в интервале  $[0, 1]$ . Таким образом, УВ получает однократное (в момент прохождения сеточной линии  $i = i_0$ ) возмущение по всему фронту. Ударно-волновая неустойчивость выявляется по росту степени отклонения решения от одномерного потока, для измерения которой используется величина

$$\varepsilon_0 = \max_{i, j} (|\rho_{i, j} - \bar{\rho}_i|), \quad \bar{\rho}_i = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J \rho_{i, j}. \quad (7)$$

**Стационарная УВ.** В этом случае фронт УВ располагается на сеточной линии  $i = i_0 = I - 10$  (вблизи правой границы расчетной области), что соответствует поперечному сечению  $x = x_0 = X - 10$ . Начальное распределение параметров:

$$(u_x, u_y, \rho, P) = \begin{cases} ((u_1 - u_S), 0, \rho_1, P_1), & \text{если } x < x_0, \\ (-u_S, 0, 1, 1), & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В ходе расчета поддерживаются неизменными параметры потоков на правой и левой границах расчетной области. Как и в предыдущем случае, на нижней и верхней границах ставится условие периодичности течения. Неустойчивость УВ также генерируется возмущением сетки, но здесь возмущаются несколько сеточных линий вблизи фронта УВ (где  $|i - i_0| \leq 2$ ), а параметр  $\delta = 10^{-6}$ .

**Расчеты на параллелограммной сетке.** В ряде тестовых расчетов используется сетка с параллелограммными ячейками, когда вертикальные линии сетки  $x = \text{const}$  заменяются наклонными линиями  $x + \alpha y = \text{const}$ , причем свободный параметр  $\alpha$  подбирается таким, чтобы значение  $N_{\text{shift}} \equiv \alpha J (h_y / h_x)$  было целым положительным числом. Тогда верхняя граница расчетной области сдвинется относительно нижней границы на  $N_{\text{shift}}$  ячеек влево, и на этих границах можно установить условие периодичности течения со сдвигом. В случае расчета поступательной УВ, в ячейках, центры которых расположены в области  $x < 0$ , будут задаваться и поддерживаться в процессе всего счета параметры втекающего потока  $(u_1, 0, \rho_1, P_1)$ .

Во всех тестовых случаях (если не оговорено особо) предполагается, что  $\gamma = 1,4$ ,  $M_S = 20$  (в гиперзвуковых течениях ударно-волновая неустойчивость проявляется максимально [3]). Расчеты по схеме RK3–WENO5 проводятся при числе Куранта  $C_{\text{eff}} = 0,6$ , для остальных схем  $C_{\text{eff}} = 0,8$ .

### 2.3. Поступательная ударная волна: прямоугольная сетка

Эта тестовая задача рассчитывалась по различным схемам при следующих соотношениях сторон ячейки:  $h_y/h_x = 1/8, 1/4, 1/2, 1, 2, 4, 8$ . Количество ячеек в расчетной области составляло:  $I \times J = 1600 \times 50$  при  $h_y/h_x \geq 1/2$  и  $I \times J = 1600 \times 100$  при  $h_y/h_x < 1/2$ . В каждом варианте проводилось несколько расчетов: изменялся коэффициент  $C_{AV}$  в модели искусственной вязкости и определялось минимальное значение  $C_{AV}^{\min}$ , необходимое для подавления «карбункул»-неустойчивости. Неустойчивость выявлялась по следующему критерию (будем называть его  $\varepsilon_0$ -критерием): сохранение значения  $\varepsilon_0$  (формула (7)) на «фоновом» уровне говорит об устойчивом счете, тогда как экспоненциальный рост  $\varepsilon_0$  указывает на неустойчивость.

Расчеты показали, что в случае использования схем HR–minmod и HR–vanLeer значение коэффициента  $C_{AV} = 0,20$  обеспечивает подавление «карбункул»-неустойчивости во всем диапазоне соотношений сторон ячейки. Для схем HR–MC и RK3–WENO5 это утверждение справедливо только при  $h_y/h_x \geq 1$ , а для схемы RK2–MC – при  $h_y/h_x \geq 4$ . В иных случаях использование  $\varepsilon_0$ -критерия для выявления неустойчивости оказалось малоэффективным.

На рис. 2 показаны зависимости  $\varepsilon_0$  от расстояния, пройденного УВ ( $x_s = u_s t$ ), для схемы HR–MC при двух значениях  $h_y/h_x$ . Видно, что с ростом  $C_{AV}$  наклон кривых на рис. 2,а (случай  $h_y/h_x = 1$ ) быстро уменьшается вплоть до горизонтального уровня, когда значения  $\varepsilon_0$  остаются на «фоновом» уровне; здесь можно принять  $C_{AV}^{\min} \approx 0,17$ . В случае с  $h_y/h_x = 1/4$  (рис. 2,б) наклон кривых с ростом  $C_{AV}$  падает очень медленно, причем сами кривые сильно осциллируют. Здесь использование  $\varepsilon_0$ -критерия оказывается малоэффективным, следовательно, возникает необходимость выработки альтернативного способа определения  $C_{AV}^{\min}$ .

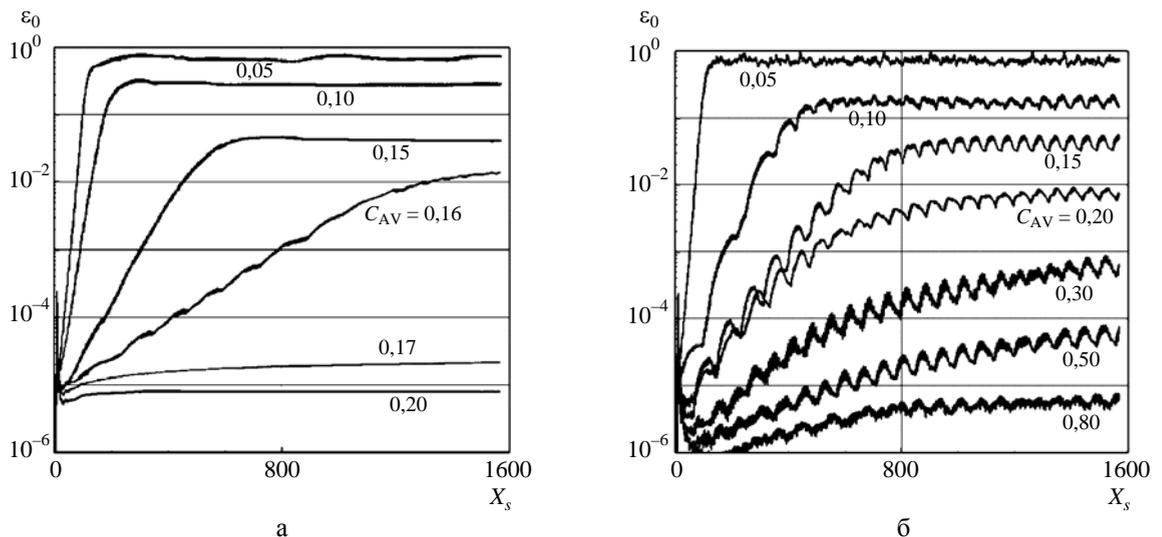


Рис. 2. Развитие неустойчивости по  $\varepsilon_0$ -критерию в модифицированной задаче Кёрка (поступательная УВ,  $M_S = 20$ ). Расчеты по схеме HR–MC: а –  $h_y/h_x = 1$ ; б –  $h_y/h_x = 1/4$

Одним из признаков неустойчивости являются «забросы» плотности за фронтом УВ. С ростом  $C_{AV}$  интенсивность таких забросов уменьшается, пока не становится настолько малой, чтобы ей можно было пренебречь. В этом случае можно не учитывать остаточную неустойчивость, даже если она присутствует в расчете.

Таким образом, для измерения степени неустойчивости решения за УВ можно использовать величину

$$\varepsilon_1 = \max_{i,j} (\varepsilon_{i,j}), \quad \varepsilon_{i,j} = \frac{\rho_{i,j}}{\rho_1} - 1,$$

где  $\rho_1$  – точное значение плотности за ударной волной;  $\varepsilon_{i,j}$  – локальная погрешность плотности. Будем считать, что ударно-волновой неустойчивостью можно пренебречь, если в процессе счета значение  $\varepsilon_1$  не превышает порогового уровня  $10^{-3}$ . Этот критерий будем называть  $\varepsilon_1$ -критерием.

На рис. 3 показаны зависимости  $\varepsilon_1(x_S)$  для тех же тестовых случаев, что и на рис. 2. Видно, что на расчетной сетке с  $h_y/h_x = 1$  (рис. 3,а)  $\varepsilon_1$ -критерий дает значение  $C_{AV}^{\min}$ , близкое к полученному с использованием  $\varepsilon_0$ -критерия:  $C_{AV}^{\min} \approx 0,17$ . В случае с  $h_y/h_x = 1/4$  (рис. 3,б) новый критерий дает значение  $C_{AV}^{\min} \approx 0,20$ , что ненамного выше.

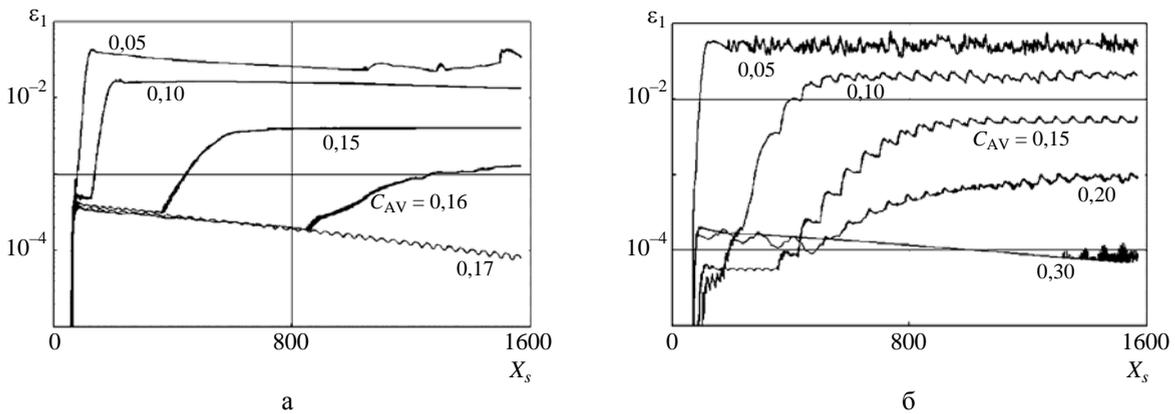


Рис. 3. Развитие неустойчивости по  $\varepsilon_1$ -критерию в модифицированной задаче Кёрка (поступательная УВ,  $M_S = 20$ ). Расчеты по схеме HR–MC: а –  $h_y/h_x = 1$ ; б –  $h_y/h_x = 1/4$

Рассмотрим пространственное распределение локальных ошибок  $\varepsilon_{i,j}$ . Рис. 4 демонстрирует характер неустойчивости течения в отобранных тестовых случаях при двух значениях  $C_{AV}$ . Видно, что при  $C_{AV} = 0,05$  неустойчивость за УВ носит неупорядоченный характер и погрешность плотности превышает 2 %. При  $C_{AV} = 0,15$  неустойчивость снижается до  $\sim 0,5$  % и приобретает вид упорядоченных структур. В тестовом случае с  $h_y/h_x = 1$  фронт УВ имеет зубчатую структуру (с периодичностью  $\sim 3h_y$ ), которая в процессе счета не эволюционирует (локальные ошибки сохраняются вдоль горизонтальных линий). В случае с  $h_y/h_x = 1/4$  фронт УВ имеет синусоидальную структуру (с периодичностью  $\sim 10h_y$ ), причем ячеистый характер уровней плотности вниз

по течению указывает не на акустические волны (ошибки в давлении здесь на порядок меньше ошибок в плотности), а на циклическое развитие во времени самой ударно-волновой структуры.

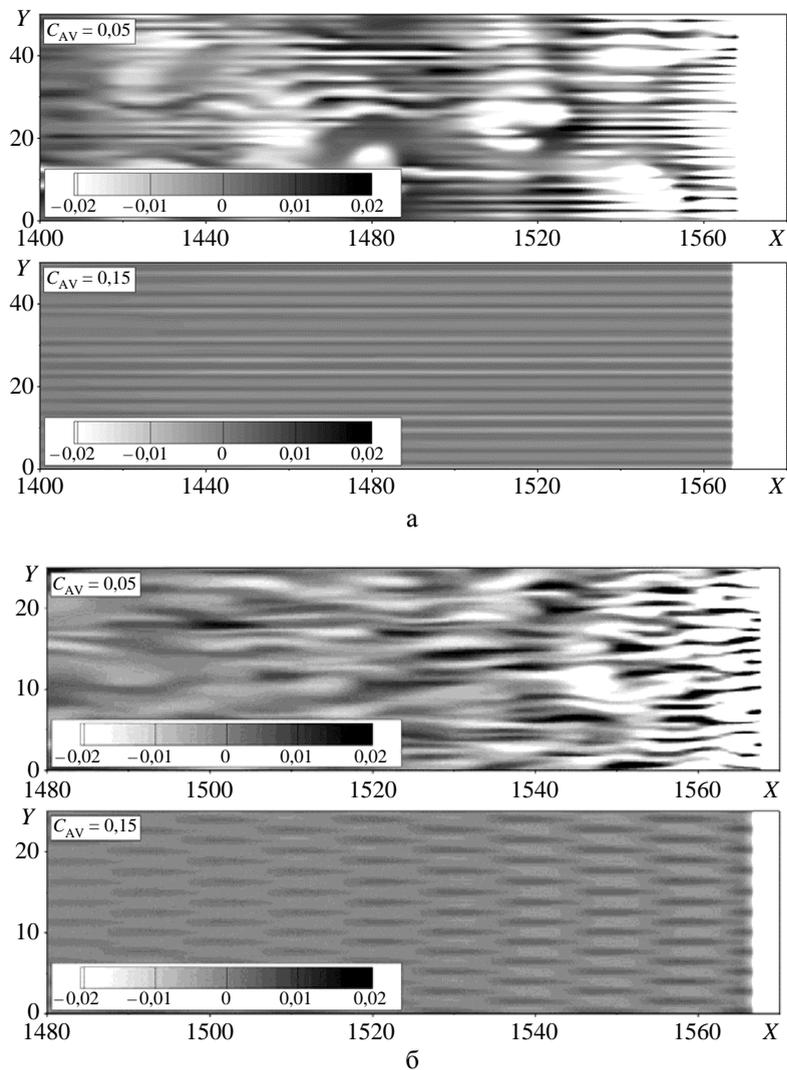


Рис. 4. Распределение локальной погрешности плотности  $\varepsilon$  в модифицированной задаче Кёрка (поступательная УВ,  $M_S = 20$ ). Расчеты по схеме HR–MC: а –  $h_y/h_x = 1$ ; б –  $h_y/h_x = 1/4$

Итак, использование  $\varepsilon_1$ -критерия в данной тестовой задаче оказалось весьма эффективным. С его помощью удалось установить, что значение коэффициента  $C_{AV} = 0,30$  обеспечивает подавление «карбункул»-неустойчивости для любой из рассматриваемых схем во всем диапазоне соотношений сторон ячейки:  $1/8 \leq h_y/h_x \leq 8$ .

Считается, что схемы сквозного счета, которые используют неполные приближенные решатели задачи Римана, базирующиеся на грубых волновых моделях, не содержащих явно контактный разрыв, не страдают от «карбункул»-проблемы. Однако это не совсем верно. Так, например,

расчеты тестовой задачи с поступательной УВ по схеме HR–MC с неполным решателем схемы HLL [18] обнаруживают «карбункул»-неустойчивость при  $h_y/h_x \leq 1/4$ . На рис. 5 представлены данные для случая с  $h_y/h_x = 1/4$ . Видно, что при  $C_{AV} = 0$  неустойчивость развивается весьма интенсивно, однако быстро угасает с добавлением искусственной вязкости.

Появление неустойчивости объясняется следующим образом. Известно, что причина развития «карбункул»-неустойчивости кроется в недостатке диссипации через контактный разрыв в направлении, параллельном ударной волне. Так случается, если полный решатель задачи Римана используется на гранях, расположенных вдоль линий тока. При использовании схемы повышенного порядка точности на сетке с  $h_y/h_x \ll 1$  диссипация в поперечном направлении существенно уменьшается, что создает условия для развития неустойчивости даже в случае применения неполного решателя. К тому же, расчет по схеме HLL первого порядка точности на сетке с  $h_y/h_x = 1/32$  (довольно редкий случай) также показал неустойчивость УВ.

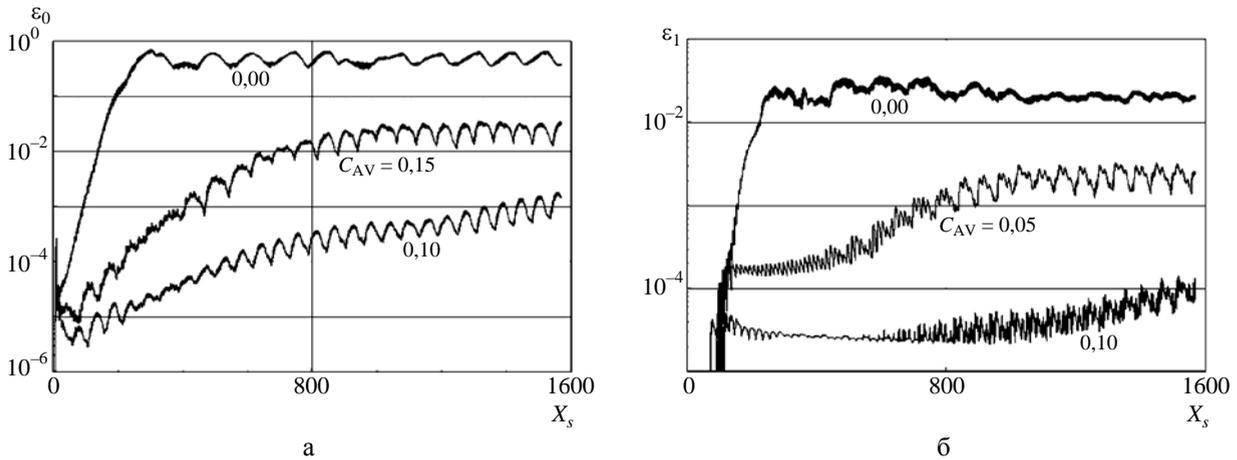


Рис. 5. Развитие неустойчивости в модифицированной задаче Кёрка (поступательная УВ,  $M_S = 20$ ). Расчеты по схеме HR–MC с решателем HLL на сетке с  $h_y/h_x = 1/4$ : а –  $\varepsilon_0$ -критерий; б –  $\varepsilon_1$ -критерий

#### 2.4. Поступательная ударная волна: параллелограммная сетка

Поступательная УВ рассчитывается на параллелограммной сетке с  $\alpha = 1$  (вертикальные линии сетки заменены наклонными линиями  $x + y = \text{const}$ ) и  $h_y/h_x = 1, 1/2, 1/4, 1/8$ ; расчетная сетка состоит из  $I \times J = 1200 \times 48$  ячеек. Как отмечалось в [3], численное решение этой задачи остается квазиодномерным в том смысле, что параметры течения на одной вертикальной линии  $x = \text{const}$  идентичны. Однако неустойчивость УВ проявляется и в этом варианте тестовой задачи: внесение небольшого сеточного возмущения со временем приводит к существенному искажению фронта УВ и течения за ним. Добавление искусственной вязкости здесь также приводит к подавлению неустойчивости.

В табл. 1 представлены результаты обработки расчетов тестовой задачи. Для различных схем приведены минимальные значения  $C_{AV}$ , необходимые для подавления неустойчивости по  $\varepsilon_1$ -критерию. Видно, что в случае использования схемы HR–minmod значение  $C_{AV} = 0,15$  обеспечивает подавление неустойчивости во всем диапазоне соотношения сторон ячейки. (Заметим, что

для данной схемы использование  $\epsilon_0$ -критерия дает близкие значения  $C_{AV}^{min}$ .) Схемы HR-vanLeer и RK3-WENO5 в целом демонстрируют приемлемые результаты, тогда как схемы HR-MC и RK2-MC сталкиваются с проблемой расчета на сетке с  $h_y/h_x = 1$ .

Таблица 1

Значения  $C_{AV}^{min}$  в тестовой задаче с поступательной УВ, рассчитываемой на параллелограммной сетке

Соотношение сторон ячейки / Сетка	$h_y/h_x = 1$	$h_y/h_x = 1/2$	$h_y/h_x = 1/4$	$h_y/h_x = 1/8$
HR-minmod	0,05	0,10	0,15	0,15
HR-vanLeer	0,20(0,05)	0,15(0,11)	0,22(0,19)	0,27(0,17)
HR-MC	> 1(0,05)	0,13(0,12)	0,28(0,25)	0,45(0,38)
RK2-MC	> 1(0,07)	0,30(0,22)	0,37(0,30)	0,47(0,43)
RK3-WENO5	0,35(0,07)	0,20(0,15)	0,25(0,25)	0,30(0,25)

Примечание: величины в скобках соответствуют случаю использования предложения 2 (переключение на реконструкцию minmod).

На рис. 6,а показаны зависимости  $\epsilon_1(x_s)$  в расчетах по схеме HR-MC на сетке с  $h_y/h_x = 1$ . Видно, что с ростом  $C_{AV}$  наклон кривых падает очень медленно, так что критерий устойчивости  $\epsilon_1 < 10^{-3}$  при умеренных значениях  $C_{AV}$  оказывается недостижим. То есть в данном случае добавления искусственной вязкости недостаточно для подавления ударно-волновой неустойчивости, поэтому необходимо усовершенствование самого расчетного метода.

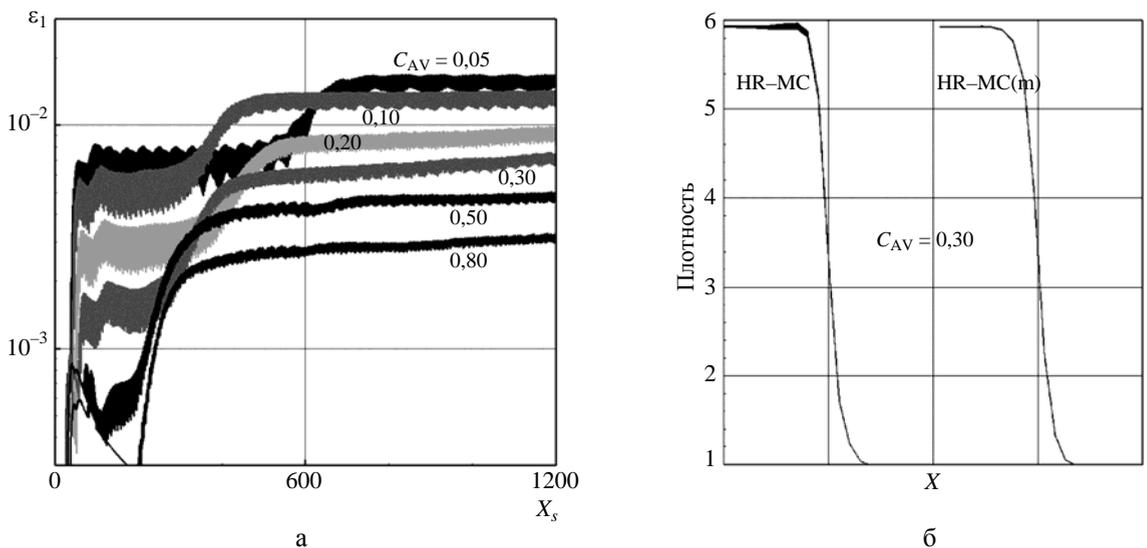


Рис. 6. Расчет поступательной УВ на параллелограммной сетке по схеме HR-MC ( $h_y/h_x = 1$ ,  $M_S = 20$ ): а – развитие неустойчивости по  $\epsilon_1$ -критерию ( $C_{AV}$  варьируется); б – профили УВ, полученные по стандартной и модифицированной схемам ( $C_{AV} = 0,30$ )

Реконструкция *minmod* обладает наибольшей диссипацией среди рассматриваемых реконструкций, но в сочетании с искусственной вязкостью она наиболее эффективно подавляет ударно-волновую неустойчивость. С практической точки зрения применение более точных реконструкций предпочтительно в гладких областях решения и вблизи контактных поверхностей. Однако в расчетных точках, расположенных внутри размытого фронта сильной УВ, точность реконструкции отступает на второй план, более важной становится способность расчетных алгоритмов предотвращать появление осцилляций в решении. Это соображение позволяет сформулировать следующее предложение по усовершенствованию процедуры реконструкции данных.

**Предложение 2 (переключение на реконструкцию *minmod*).** При проведении реконструкции в ячейке  $(i, j)$  по одному из сеточных направлений (например, вдоль  $i$ -го направления) проверяется условие нахождения ячейки и ее соседей (ячеек  $(i - 1, j)$  и  $(i + 1, j)$ ) внутри фронта УВ; признаком нахождения ячейки внутри фронта считается условие  $\mu_{AV} \neq 0$ . В случае выполнения этого условия осуществляется переход на представление о линейном распределении данных внутри ячейки и используется реконструкция *minmod*. Обозначим такой метод добавлением символа «*m*» к базовой реконструкции, например: MC(*m*).

На рис. 6,б сравниваются профили УВ, полученные по схемам HR–MC (базовый вариант) и HR–MC(*m*) (вариант с переключением на реконструкцию *minmod*) при  $C_{AV} = 0,30$ . Видно, что на гребне УВ базовый вариант демонстрирует нарушение одномерности течения и ощутимый заброс в плотности ( $\sim 0,7\%$ ). Использование предложения 2 (модифицированный вариант схемы) приводит к существенному улучшению решения: восстанавливается одномерность течения, а забросы плотности снижаются на порядок. При этом важно, что переход на модифицированный вариант не сопровождается заметным уширением фронта УВ.

Из табл. 1 видно, что использование предложения 2 позволяет существенно улучшить результаты: теперь значение коэффициента  $C_{AV} = 0,43$  обеспечивает подавление неустойчивости во всех случаях. А если не рассматривать варианты с сильно вытянутыми ячейками ( $h_y/h_x = 1/8$ ), то достаточным оказывается значение  $C_{AV} = 0,30$ .

## 2.5. Стационарная ударная волна: прямоугольная сетка

Эта тестовая задача рассчитывалась при следующих соотношениях сторон ячейки:  $h_y/h_x = 1/4, 1/2, 1, 2$ . Первоначально количество ячеек в расчетной области составляло  $I \times J = 400 \times 100$ .

На рис. 7 представлены результаты расчета задачи по схеме HR–*minmod* на сетке с  $h_y/h_x = 1/2$ . Показано развитие неустойчивости по  $\epsilon_0$ -критерию и пространственное распределение локальных ошибок при двух значениях  $C_{AV}$ . Видно, что на начальной стадии счета ( $t < 60$ , рис. 7,а) значение коэффициента  $C_{AV} = 0,25$  обеспечивает подавление ударно-волновой неустойчивости, однако продолжение расчета при этом значении  $C_{AV}$  обнаруживает неустойчивость с образованием за фронтом УВ крупномасштабных структур (рис. 7,б). Такое отсроченное проявление неустойчивости объясняется следующим образом.

В работе [19] показано, что при моделировании стационарной УВ появление «карбункул»-неустойчивости может зависеть от расположения фронта УВ относительно расчетной сетки. В данном случае начальное распределение параметров соответствует расположению фронта УВ строго на сеточной линии  $i = i_0$ . В начале счета под действием искусственной вязкости происхо-

дит уширение УВ, что порождает возмущение потока, которое распространяется вниз по течению. Это возмущение достигает правой границы расчетной области, частично отражается от нее и возвращается к УВ за время  $t = -x_0/(u_x - a) + x_0/(u_x + a) \approx 87$  (здесь  $x_0 = 390$ ,  $u_x \approx -4$ ,  $a \approx 10,5$ ). В результате фронт УВ немного смещается, что оказывается критичным для появления неустойчивости при данном значении  $C_{AV}$ .

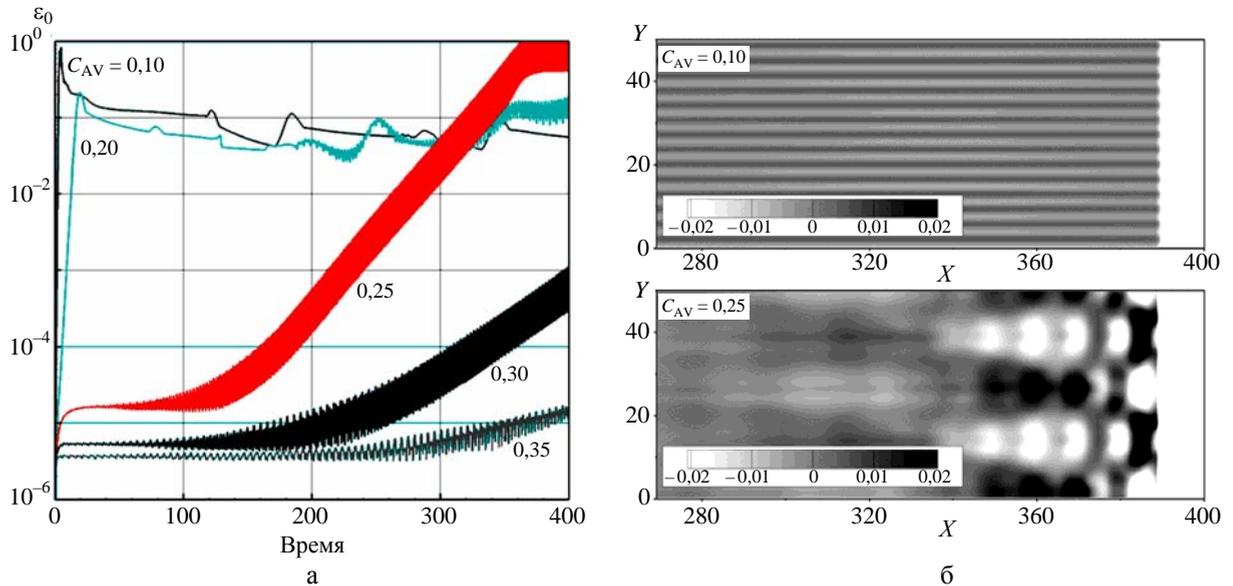


Рис. 7. Расчет стационарной УВ по схеме HR–MC ( $h_y/h_x = 1/2$ ,  $M_S = 20$ ): а – развитие неустойчивости по  $\epsilon_0$ -критерию (варьируется  $C_{AV}$ ); б – распределение локальной погрешности плотности  $\epsilon$  при двух значениях  $C_{AV}$

Чтобы учесть возможную зависимость неустойчивости от сеточного расположения УВ, тестовая задача была определенным образом скорректирована. К первоначальной постановке задачи добавляется малая величина 0,002 к продольной компоненте скорости во всей расчетной области и на ее границах. В этом случае фронт УВ медленно дрейфует по сетке, проходя расстояние в одну ячейку за  $\Delta t = 500$ , что требует 30000–80000 шагов по времени в зависимости от расчетного варианта. Возмущение сетки увеличивается до уровня  $\delta = 10^{-3}$ , что облегчает обнаружение неустойчивости в случае ее появления на каком-либо этапе счета. Размер расчетной области сокращается до  $I \times J = 100 \times 100$ .

На рис. 8 показано развитие неустойчивости по  $\epsilon_1$ -критерию в скорректированной тестовой задаче (квазистационарная УВ) для тех же расчетов, что и на рис. 7. Нетрудно заметить, что при  $C_{AV} > 0,2$  зависимость  $\epsilon_1(t)$  имеет строгую цикличность с периодом  $\Delta t = 500$  и значение коэффициента  $C_{AV} = 0,35$  обеспечивает выполнение критерия  $\epsilon_1 < 10^{-3}$  в любой момент времени, т. е. при любом расположении УВ относительно расчетной сетки. Таким образом, для данного тестового случая можно принять  $C_{AV}^{\min} \approx 0,35$ .

Аналогично тестовая задача о стационарной УВ рассчитывалась с использованием других схем и соотношений сторон ячейки. При этом рассматривались как базовые варианты схем, так

и их модификации с использованием предложения 2. В табл. 2 представлены результаты расчетов. Видно, что в данной тестовой задаче для подавления неустойчивости (по  $\varepsilon_1$ -критерию) крайне необходимо использовать предложение 2. В базовом варианте только схема HR–vanLeer демонстрирует относительную эффективность, тогда как использование переключения на реконструкцию minmod в любой из рассматриваемых схем позволяет подавлять неустойчивость при умеренном значении свободного коэффициента  $C_{AV} = 0,35$ .

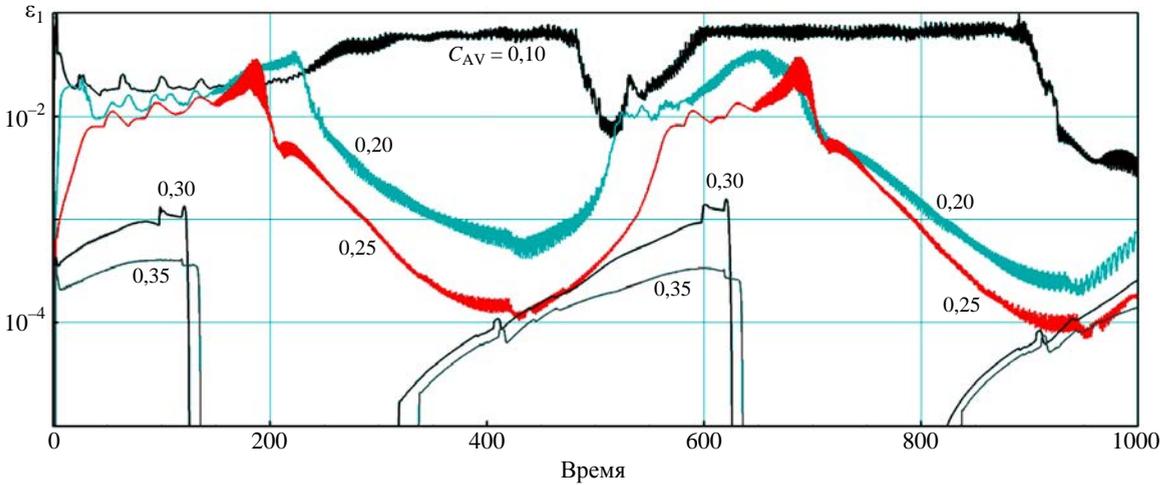


Рис. 8. Развитие неустойчивости по  $\varepsilon_1$ -критерию в модифицированной задаче Кёрка (квазистационарная УВ,  $M_S = 20$ ). Расчеты по схеме HR–minmod на сетке с  $h_y/h_x = 1/2$

Таблица 2

Значения  $C_{AV}^{min}$  в тестовой задаче со стационарной УВ, рассчитываемой на прямоугольной сетке

Соотношение сторон ячейки	$h_y/h_x = 1/4$	$h_y/h_x = 1/2$	$h_y/h_x = 1$	$h_y/h_x = 2$
Сетка				
HR–minmod	0,35	0,35	0,30	0,25
HR–vanLeer	0,50(0,35)	0,50(0,35)	0,30(0,30)	0,25(0,25)
HR–MC	> 1(0,35)	> 1(0,35)	> 1(0,30)	~1(0,25)
RK2–MC	> 1(0,35)	> 1(0,35)	> 1(0,35)	> 1(0,25)
RK3–WENO5	~1(0,35)	0,70(0,35)	0,40(0,35)	0,25(0,25)

Примечание: величины в скобках соответствуют случаю использования предложения 2 (переключение на реконструкцию minmod).

### 2.6. Стационарная ударная волна: параллелограммная сетка

Стационарная УВ рассчитывается на параллелограммной сетке с  $N_{shift} = 2$  (верхняя граница расчетной области сдвинута относительно нижней границы на 2 ячейки) и  $h_y/h_x = 1/4, 1/2, 1, 2$ ; расчетная сетка состоит из  $I \times J = 200 \times 200$  ячеек. Сеточные линии  $i = const$  слегка отклонены от фронта УВ, поэтому в расчете одновременно присутствует весь спектр положений фронта отно-

сительно сетки. Заметим, что в задачах такого типа часто наблюдаются значительные искажения потока за УВ, что представляет собой серьезную вычислительную проблему.

На рис. 9 представлены результаты расчета задачи по схеме HR–minmod на сетке с  $h_y/h_x = 1/2$ . Видно, что по мере роста  $C_{AV}$  до значения  $\approx 0,3$  ошибки в плотности существенно уменьшаются (рис. 9,а), однако последующее увеличение  $C_{AV}$  дает незначительный эффект. При малых значениях  $C_{AV}$  картина течения в верхней части расчетной области ( $50 < y < 100$ , см. рис. 9,б) заметно отличается от картины течения в ее нижней части ( $0 < y < 50$ ), что указывает на неустойчивость течения (восприимчивость к малым возмущениям сетки). При  $C_{AV} \geq 0,25$  верхняя и нижняя картины течения практически дублируют друг друга (максимальное отличие плотности не превышает 0,1 %), что говорит об устойчивости течения. Таким образом, в данном тестовом случае для подавления «карбункул»-неустойчивости достаточно использовать  $C_{AV} = 0,25$ , однако забросы плотности за УВ остаются выше уровня  $\varepsilon_1 = 10^{-3}$  при любых умеренных значениях  $C_{AV}$ .

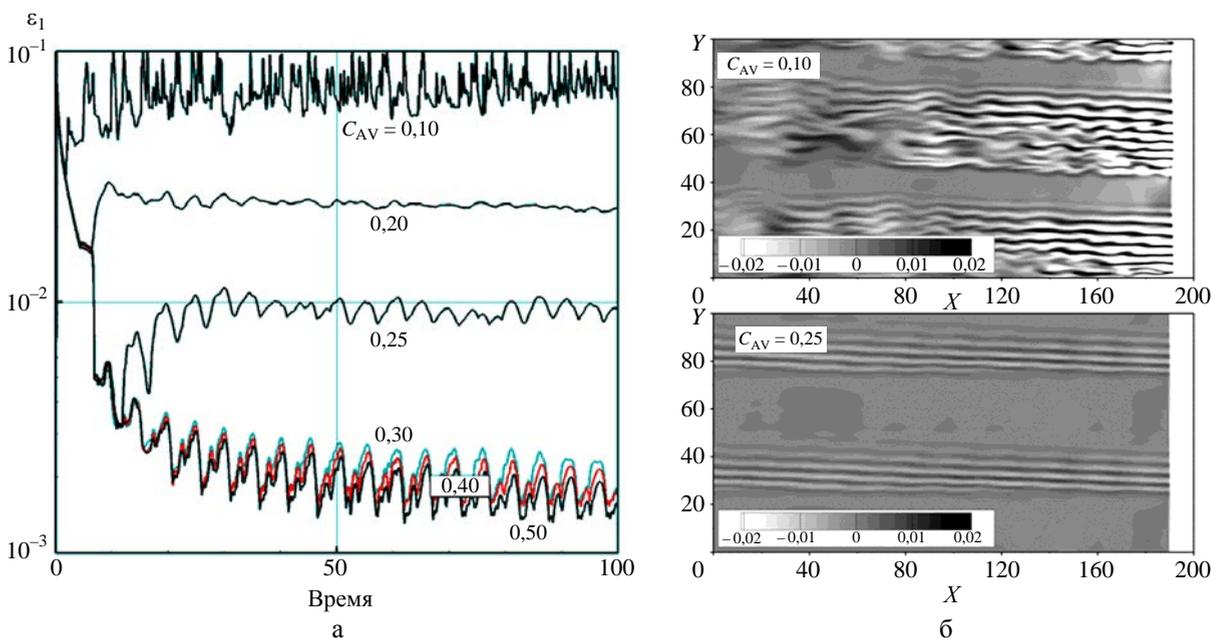


Рис. 9. Расчет стационарной УВ по схеме HR–minmod на параллелограммной сетке ( $h_y/h_x = 1/2$ ,  $M_S = 20$ ): а – эволюция максимальной погрешности плотности  $\varepsilon_1$ ; б – пространственное распределение погрешности  $\varepsilon$  при двух значениях  $C_{AV}$  на момент времени  $t = 100$

Аналогично проведены расчеты стационарной УВ на параллелограммной сетке с использованием других схем и соотношений сторон ячейки. Оказалось, что значение  $C_{AV} = 0,30$  обеспечивает подавление «карбункул»-неустойчивости при использовании любой из рассматриваемых схем, за исключением схемы RK2–MC; однако применение в этой схеме предложения 2 (переключение на реконструкцию minmod) делает устойчивой и ее.

В табл. 3 приводятся значения максимальной погрешности плотности при  $C_{AV} = 0,5$  (рекомендуемое значение) для различных схем и соотношений сторон ячейки. Видно, что во всех слу-

чаях ошибка в плотности за УВ не превышает 1 % и использование предложения 2 приводит к заметному улучшению решения (в некоторых случаях наблюдается двукратное снижение ошибки). Из табл. 3 также видно, что уровень искажения потока существенно выше при  $h_y/h_x \ll 1$ , когда ячейки сильно вытянуты по направлению нормали к фронту УВ. Однако при  $h_y/h_x \gg 1$  (ячейки сильно вытянуты вдоль фронта УВ) существует другой недостаток: искусственная вязкость, необходимая для подавления «карбункул»-неустойчивости, может приводить к излишнему размыванию УВ, поскольку в этом случае  $\mu_{AV} \sim h_y^2$ . Таким образом, в окрестности УВ желательно не использовать сетку с сильно вытянутыми ячейками.

Таблица 3

Максимальная погрешность плотности  $\varepsilon_1 \cdot 10^2$  в тестовой задаче со стационарной УВ, рассчитываемой на параллелограммной сетке

Соотношение сторон ячейки / Сетка	$h_y/h_x = 1/4$	$h_y/h_x = 1/2$	$h_y/h_x = 1$	$h_y/h_x = 2$
HR–minmod	0,30	0,20	0,14	0,08
HR–vanLeer	0,48(0,36)	0,28(0,24)	0,22(0,25)	0,12(0,10)
HR–MC	0,70(0,38)	0,44(0,26)	0,28(0,18)	0,20(0,10)
RK2–MC	0,85(0,40)	0,58(0,26)	0,40(0,20)	0,22(0,10)
RK3–WENO5	0,78(0,40)	0,48(0,32)	0,30(0,22)	0,12(0,10)

Примечание: величины в скобках соответствуют случаю использования предложения 2 (переключение на реконструкцию minmod).

## 2.7. Влияние показателя адиабаты

Рассмотрим влияние показателя адиабаты газа.

В табл. 4 приведены данные, полученные по схеме HR–minmod для двух характерных тестовых случаев при различных значениях  $\gamma$ .

Таблица 4

Значения  $C_{AV}^{\min}$ , полученные по схеме HR–minmod при различных значениях  $\gamma$

Показатель адиабаты газа $\gamma$	Случай 1	Случай 2
1,15	0,25	0,35
1,25	0,22	0,35
1,4	0,19	0,35
1,6667	0,15	0,35
2,0	0,12	0,35

Примечание: случай 1: тестовая задача с поступательной УВ при  $h_y/h_x = 1$ ; случай 2: тестовая задача с квазистационарной УВ при  $h_y/h_x = 1/2$ .

В работе [3] было показано, что в случае расчета поступательной УВ по схеме Годунова (схеме первого порядка точности) наблюдается сильная зависимость  $C_{AV}^{\min}$  от  $\gamma$ . Как видно из

табл. 4 (случай 1), с переходом на схему второго порядка точности зависимость  $C_{AV}^{\min}(\gamma)$  ослабляется, причем значения  $C_{AV}^{\min}$  не превышают 0,25 в рассмотренном диапазоне  $1,15 \leq \gamma \leq 2$ . Для квазистационарной УВ (случай 2) зависимость  $C_{AV}^{\min}(\gamma)$  крайне слабая:  $C_{AV}^{\min} \approx 0,35$  (в пределах погрешности 0,05). То есть рекомендованное значение  $C_{AV} = 0,5$  может быть использовано в широком диапазоне значений  $\gamma$ .

### 2.8. Трехмерный случай

Для настройки рассматриваемого метода на случай моделирования трехмерных задач были проведены дополнительные тестовые расчеты. Рассчитывались поступательная и квазистационарная ударные волны на кубической сетке ( $h_x = h_y = h_z$ ) по схеме HR–minmod с добавлением искусственной вязкости при различных значениях  $C_{AV}$ . Сравнение результатов дополнительных расчетов с двумерным случаем показало их близкое сходство. Так, при расчете поступательной УВ минимальное значение  $C_{AV}$  для подавления неустойчивости составляет  $C_{AV}^{\min} \approx 0,19$  в двумерном и трехмерном случаях. При расчете квазистационарной УВ значение  $C_{AV}^{\min}$  также оказалось близким полученному для двумерного случая:  $C_{AV}^{\min} \approx 0,30$ . Таким образом, в схемах повышенного порядка точности рекомендованное значение  $C_{AV} = 0,5$  может быть использовано при расчете задач любой размерности.

## 3. Численные примеры

В данном разделе на примере использования схем HR–minmod, HR–vanLeer, HR–MC, RK2–MC и RK3–WENO5 для решения нескольких тестовых задач демонстрируется эффективность предложенного метода подавления возмущений за фронтом УВ, в том числе вызванных «карбункул»-неустойчивостью. Наряду с отобранными схемами применяются различные решатели задачи Римана: точный решатель (решатель Годунова), Roe и HLLC. В дальнейшем предполагается, что все процедуры реконструкции данных базируются на использовании характеристических переменных (предложение 1), если не указано иное, и модель искусственной вязкости применяется с базовым коэффициентом  $C_{AV} = 0,5$  и с переключением на реконструкцию minmod в окрестности УВ (предложение 2). Число Куранта обычно принималось равным  $C_{cfl} = 0,6$  для схемы RK3–WENO5 и  $C_{cfl} = 0,8$  для остальных схем. Однако при моделировании стационарных проблем без добавления искусственной вязкости стандартное значение  $C_{cfl}$  уменьшалось вдвое или вчетверо (при использовании решателя Roe). Это позволяло снизить интенсивность нестационарных процессов на финальной стадии счета.

### 3.1. Задача о двойном маховском отражении (дополнительные материалы)

В разд. 2.1 (см. рис. 1,2) приведены результаты, полученные по различным версиям схемы HR–MC, практически неотличимые полученных по разработанной позже версии этой схемы HR–MC(m)+AV.

На рис. 10 приведены результаты расчетов задачи с использованием схемы RK3-WENO5 в сочетании с решателями типа HLL на сетке с разрешением  $h = 1/330$ . (Заметим, что эта схема в данных условиях расходует примерно вдвое больше процессорного времени, чем схема HR-МС на сетке с  $h = 1/480$ .) Видно, что при использовании решателя HLLC без искусственной вязкости (рис. 10,а) численное решение сильно искажено «карбункул»-неустойчивостью и осцилляциями за УВ. Добавление искусственной вязкости (рис. 10,б) позволяет полностью устранить все дефекты решения. С другой стороны, применение решателя HLL позволяет получить решение, свободное от «карбункул»-неустойчивости, без привлечения искусственной вязкости (рис. 10,в). Однако в этом случае осцилляции за УВ остаются на высоком уровне и контактный разрыв, исходящий из тройной точки и сворачивающийся в крупный вихрь, оказывается более размытым (ср. с рис. 10,б).

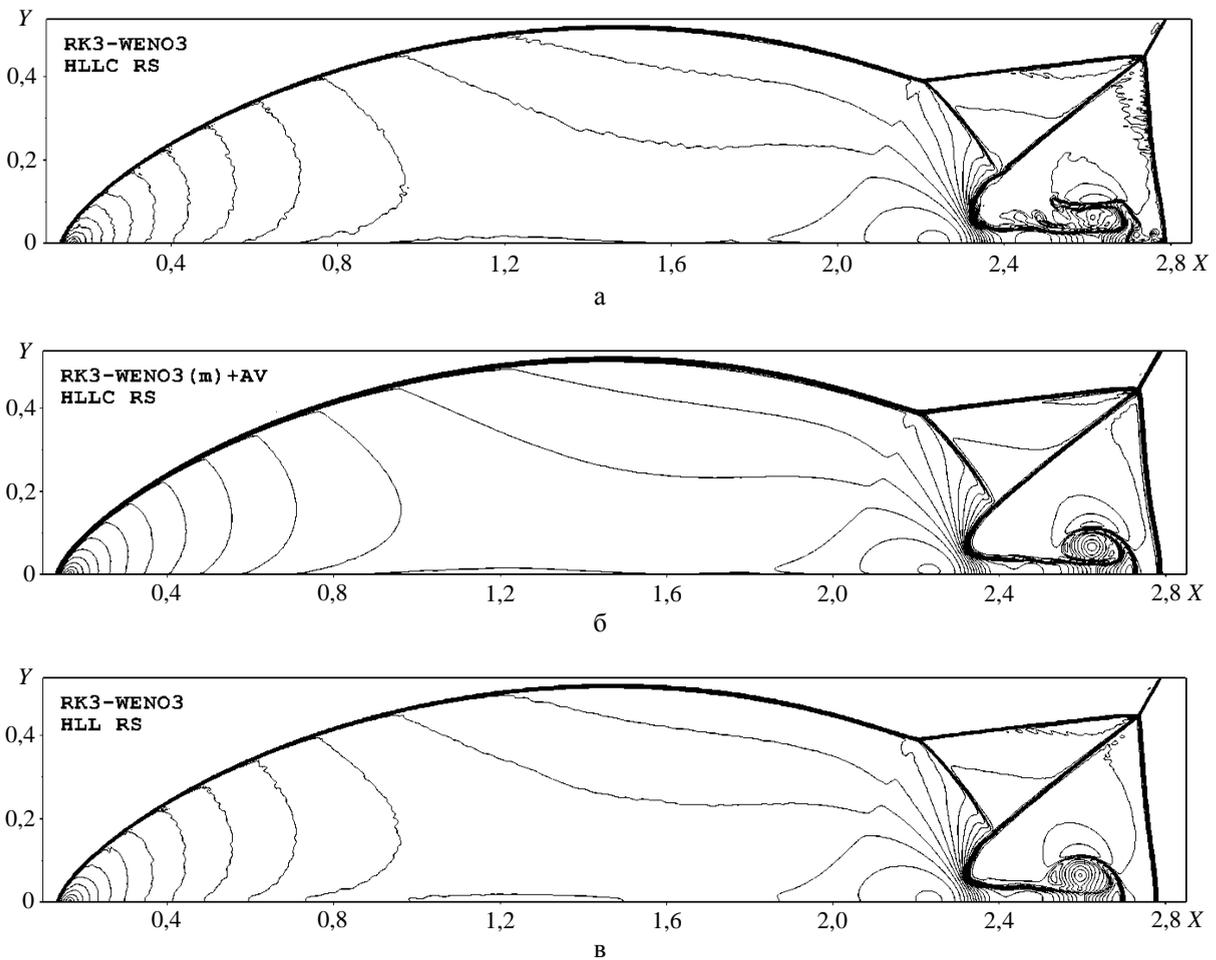


Рис. 10. Изолинии плотности в тестовой задаче о двойном маховском отражении. Расчеты по схеме RK3-WENO5 на сетке с  $h = 1/330$ : а, б – с использованием решателя HLLC; б – с искусственной вязкостью и использованием предложения 2; в – с использованием решателя HLL

### 3.2. Сверх- и гиперзвуковое обтекание цилиндра (двумерный случай)

В задаче расчетная область  $[1, 3] \times [-75^\circ, 75^\circ]$  в полярных координатах  $(r, \varphi)$  покрывается регулярной сеткой с количеством ячеек  $J \times I = 90 \times 160$ . На границе  $j = 0$  (поверхность цилиндра) задается непроницаемая стенка, а на границе  $j = J$  – втекающий поток с параметрами  $(u_x, u_y, \rho, P) = (\sqrt{\gamma} M_\infty, 0, 1, 1)$ . На нижней и верхней границах расчетной области ( $i = 0, i = I$ ) задается условие свободного вытекания.

Результаты расчетов задачи при  $\gamma = 1,4$  и двух значениях числа Маха набегающего потока  $M_\infty = 3$  и  $20$  представлены на рис. 11 и 12. Для моделирования этих случаев применялись все отобранные схемы в сочетании с различными решателями задачи Римана. Видно, что все оригинальные схемы (т. е. без искусственной вязкости) в обоих случаях страдают от ударно-волновой неустойчивости. Добавление искусственной вязкости приводит к исправлению решений, причем все схемы демонстрируют близкие результаты.

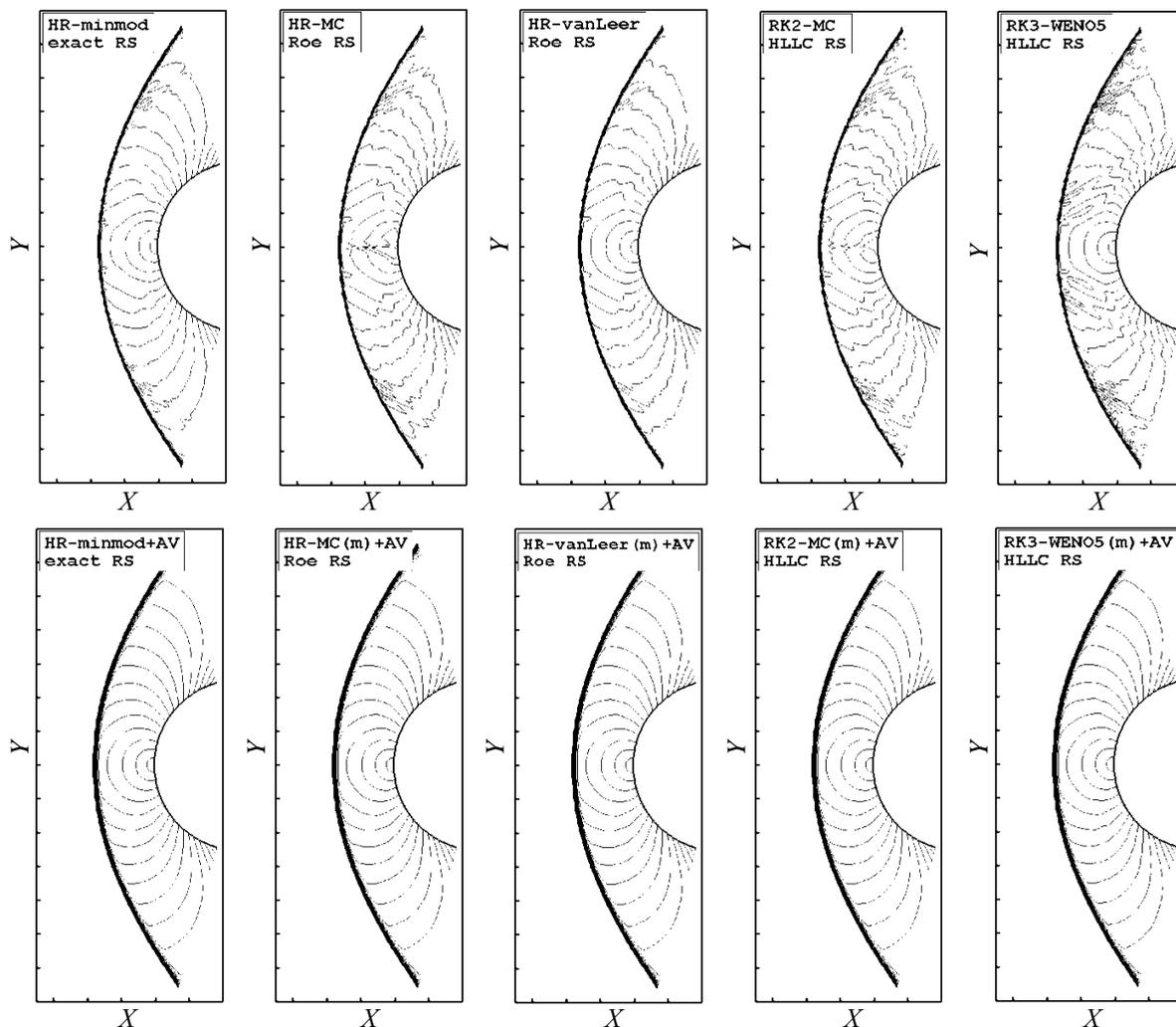


Рис. 11. Сверхзвуковое обтекание цилиндра при  $M_\infty = 3$ . Верхний ряд – оригинальные схемы, нижний ряд – те же схемы с добавлением искусственной вязкости

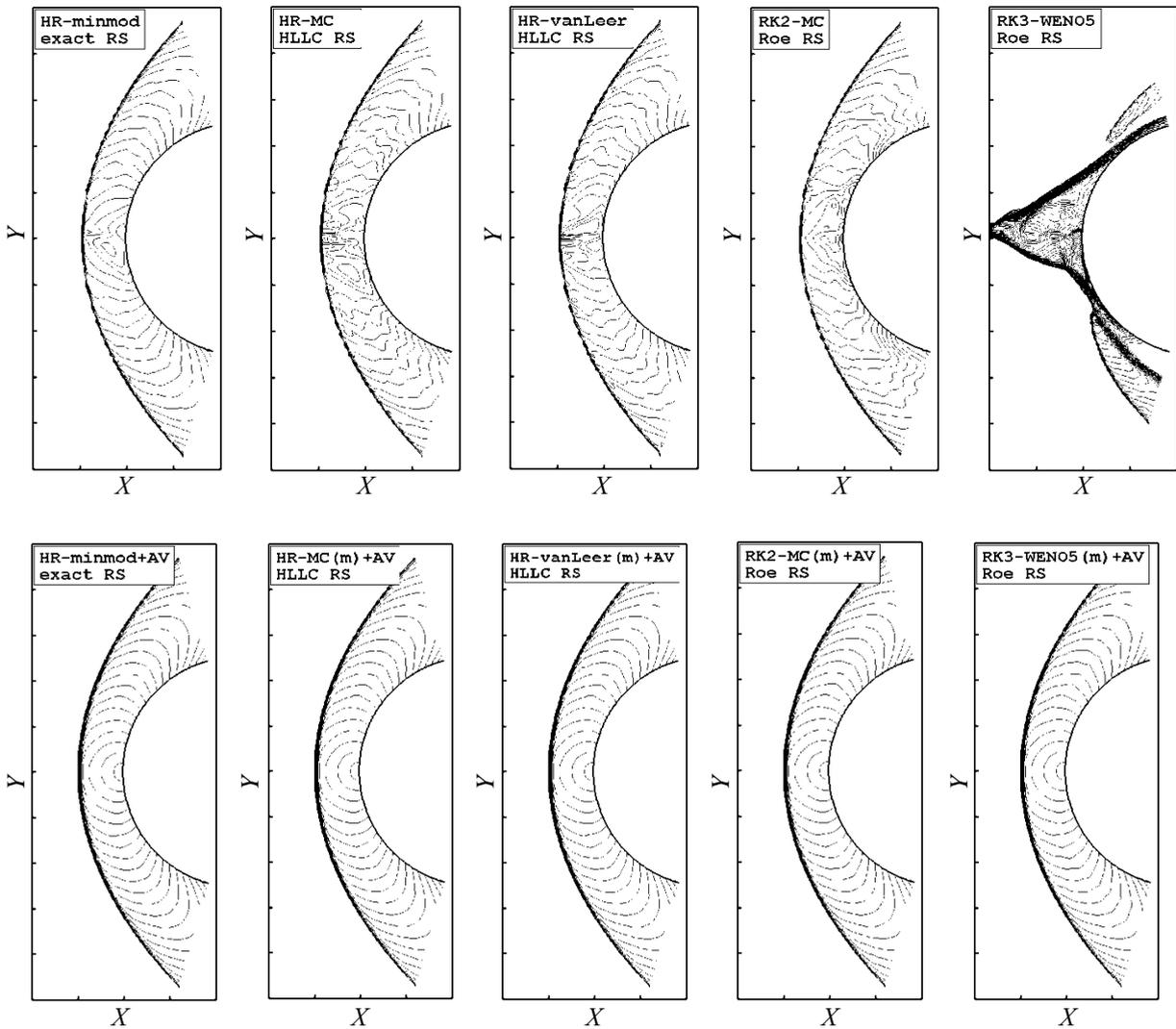


Рис. 12. Гиперзвуковое обтекание цилиндра при  $M_\infty = 20$ . Верхний ряд – оригинальные схемы, нижний ряд – те же схемы с добавлением искусственной вязкости

### 3.3. Проблема нагрева (двумерный и трехмерный случаи)

Проблема нагрева возникает при моделировании *вязкого* гиперзвукового обтекания цилиндра. С целью ее устранения решим уравнения Навье – Стокса в двумерной и трехмерной постановках. Начальные данные задачи возьмем из работы [20]:  $M_\infty = 8,1$ , давление набегающего потока  $P_\infty = 370,6$  Па, температура набегающего потока  $T_\infty = 63,73$  К, радиус цилиндра  $r = 0,02$  м, число Рейнольдса  $Re = 1,31 \cdot 10^5$ , температура стенки  $T_w = 300$  К. Рабочий газ – воздух в приближении идеального газа с  $\gamma = 1,4$ , коэффициент молекулярной вязкости вычисляется по формуле Сазерленда, число Прандтля  $Pr = 0,72$ .

В двумерном случае используется расчетная сетка с количеством ячеек  $J \times I = 150 \times 160$ , равномерная в направлении окружности и неравномерная, с использованием геометрической про-

грессии, в радиальном направлении:  $h_{j+1}/h_j = 1,05$ ,  $h_1 = 5 \cdot 10^{-5} r$  (рис. 13). В трехмерном случае сетка приобретает  $K = 45$  равномерных интервалов в координатном направлении  $z$ ; в этом направлении расчетная область представляет собой сегмент  $0 \leq z \leq r$  с условием периодичности на концах.

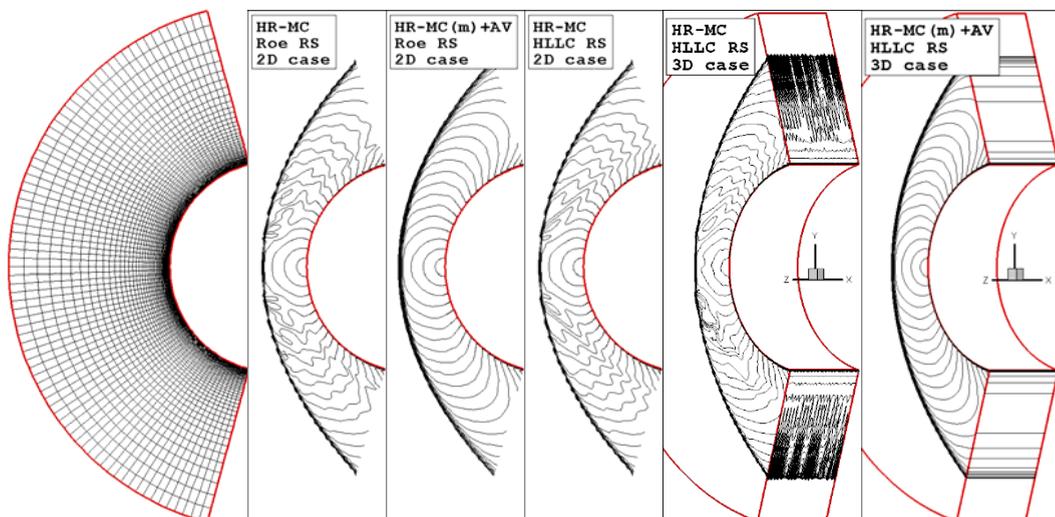


Рис. 13. Вязкое гиперзвуковое обтекание цилиндра (двумерный и трехмерный случаи)

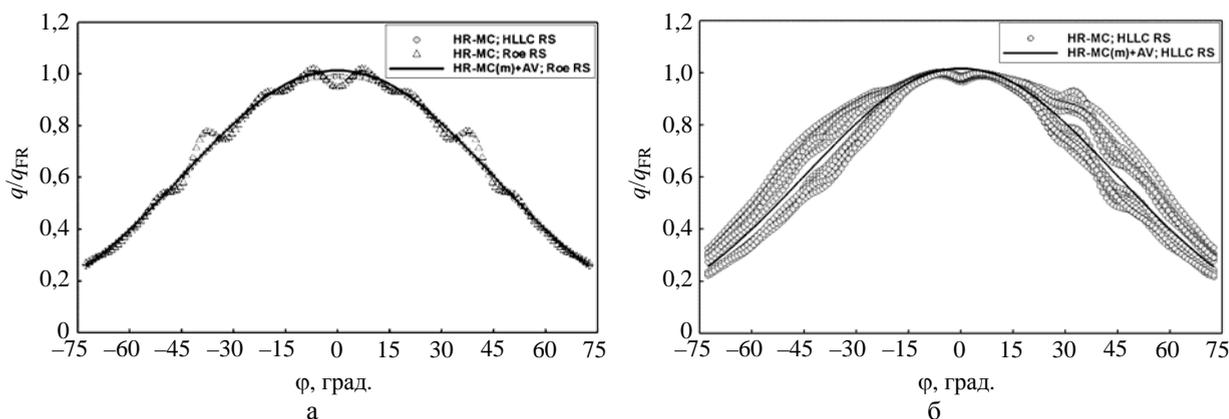


Рис. 14. Распределение теплового потока по поверхности цилиндра ( $M_\infty = 8,1$ ,  $Re = 1,31 \cdot 10^5$ ):  
а – двумерный случай, б – трехмерный случай

В данной задаче присутствуют физическая (молекулярная) и искусственная вязкости, которые суммируются в каждой расчетной ячейке. Однако для предотвращения появления искусственной вязкости внутри тонкого пограничного слоя здесь используется следующее условие: если ячейка сильно вытянута, т. е.  $\max(h_i, h_j, h_k) > 10 \cdot \min(h_i, h_j, h_k)$ , то  $\mu_{AV} = 0$ . Также в данной задаче стационарные уравнения интегрируются с использованием локального расчетного шага по времени.

На рис. 13 приведены изолинии числа Маха, полученные по схеме HR–MC с двумя решателями (Roe и HLLC) задачи Римана в двумерном и трехмерном случаях. Видны значительные ис-

кажения течения во всех расчетах без искусственной вязкости; применение же искусственной вязкости полностью устраняет искажения. Рис. 14 демонстрирует соответствующие профили тепловых потоков на поверхности цилиндра, нормированные к величине в точке торможения:  $q_{FR} = 17,5 \text{ Вт/м}^2$ . Явно видно влияние осцилляций за УВ на распределение теплового потока на стенке. Хотя профиль, полученный без искусственной вязкости с решателем HLLC, в двумерном случае искажен несильно, переход на трехмерный расчет приводит к значительному ухудшению решения. И вновь применение искусственной вязкости позволяет получать качественные решения во всех расчетных случаях.

### 3.4. Гиперзвуковое обтекание сферы (трехмерный случай)

Моделируется обтекание сферы при  $M_\infty = 10$  на сетке из  $I \times J \times K = 100 \times 100 \times 36$  ячеек. Координаты узлов сетки определяются следующим образом:

$$\mathbf{r}_{ijk} = \left( \frac{1}{2} + \frac{0,24k}{K} \right) \mathbf{n}_{ij}, \quad \mathbf{n}_{ij} = \frac{\mathbf{s}_{ij}}{|\mathbf{s}_{ij}|}, \quad \mathbf{s}_{ij} = (-1, \tan \alpha_j, \tan \alpha_i), \quad \alpha_j = \frac{5\pi}{12} \left( \frac{2j}{J} - 1 \right), \quad \alpha_i = \frac{5\pi}{12} \left( \frac{2i}{I} - 1 \right).$$

На границе  $k = 0$  (поверхность сферы) задается непроницаемая стенка, а на границе  $k = K$  задается втекающий поток с параметрами  $(u_x, u_y, \rho, P) = (\sqrt{\gamma} M_\infty, 0, 1, 1)$ . На остальных границах ( $i = 0, i = I, j = 0, j = J$ ) задается условие свободного вытекания.

На рис. 15 приведены результаты, полученные по схеме HR–MC с решателями Roe и HLLC. Можно видеть, что расчеты без искусственной вязкости (верхний ряд) демонстрируют значительное искажение решения, особенно вблизи плоскостей симметрии сетки ( $y = 0$  и  $z = 0$ ). С добавлением искусственной вязкости (нижний ряд) искажения устраняются и оба решения становятся визуально неразличимыми и цилиндрически симметричными.

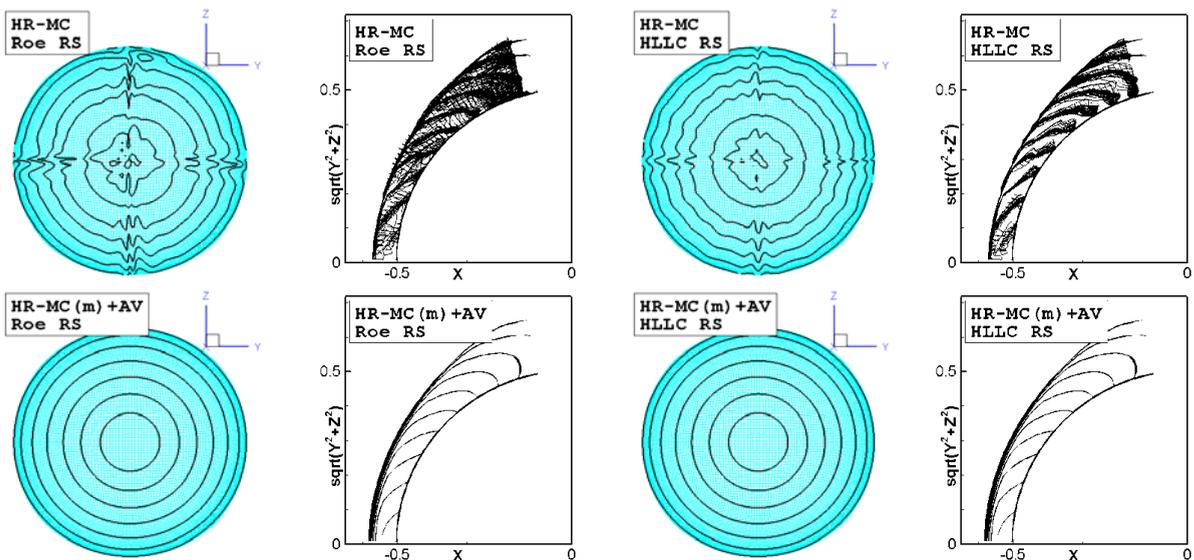


Рис. 15. Результаты расчетов обтекания сферы  $r = 0,55$  по схеме HR–MC с решателями Roe и HLLC. Верхний ряд – без искусственной вязкости, нижний ряд – с искусственной вязкостью. Слева – вид в плоскости  $yz$ , справа – вид в цилиндрических координатах

### 3.5. Задача о седовском взрыве (двумерный случай)

В данной задаче одномерный сферически-симметричный (седовский) взрыв рассчитывается в двумерной осесимметричной постановке. Расчетная область  $[0; 1,1] \times [0; 1,1]$  в координатах  $xr$  ( $x$  – ось симметрии) покрывается регулярной сеткой с  $J \times I = 220 \times 220$  ячейками. Начальное состояние идеального газа с  $\gamma = 1,4$  в расчетной области  $(u_x, u_r, \rho, P) = (0, 1, 10^{-6})$ ; исключение составляет лишь ячейка, примыкающая к началу координат, где давление равно  $4,334474 \cdot 10^5$  Па. На нижней и левой границах расчетной области задается условие симметричности течения, на верхней и правой границах – непроницаемая стенка. Такая постановка задачи соответствует полной энергии сферически-симметричного взрыва  $E_0 = 0,8510719$ , при которой фронт УВ достигает радиуса  $R_{\text{shock}} = 1$  на момент времени  $t = 1$ .

На рис. 16 представлены результаты расчета задачи с использованием схем HR–MC и RK3–WENO5 в сочетании с решателем Roe RS. Как можно видеть, данные, полученные по оригинальным схемам (рис. 16,а,б), искажены карбункулоподобными изъянами вблизи обеих осей симметрии. Однако добавление искусственной вязкости в каждую из расчетных схем (рис. 16,в,г) полностью устраняет искажения.

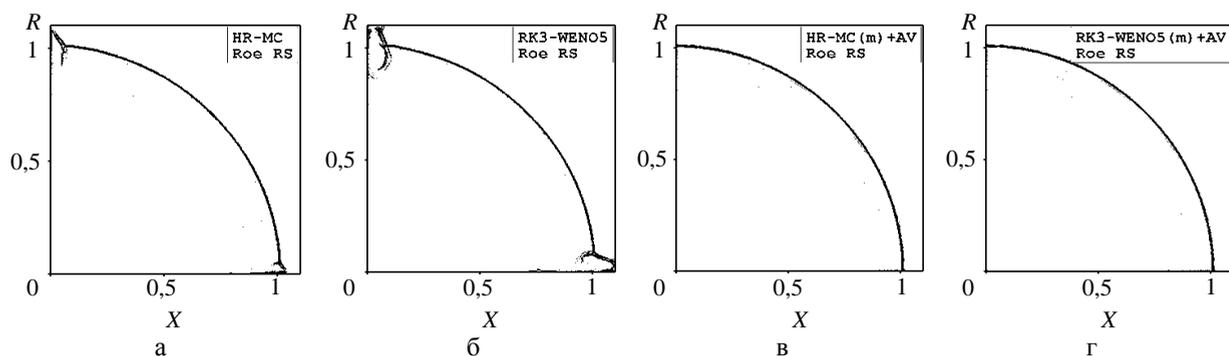


Рис. 16. Задача о седовском взрыве

### 3.6. Задача Ноха (двумерный случай)

Обратимся к решению тестовой задачи Ноха [21] в двумерной постановке, описанному в работе [22]. Начальное состояние идеального газа с  $\gamma = 5/3$  в плоскости  $xu$ :  $\rho = 1, P = 0$  (в расчетах заменяется на  $10^{-6}$ ), в каждой точке вектор скорости газа имеет единичную длину и направлен к началу координат. Точное решение задачи представляет собой УВ, отраженную от начала координат и имеющую круговую форму: скорость УВ равна  $1/3$ ; за УВ  $\rho = 16, P = 16/3$  и  $u = 0$ ; перед УВ  $\rho = (1 + t/\sqrt{x^2 + y^2})$ , тогда как скорость и давление остаются неизменными.

Расчетная область на плоскости представляет собой квадрат  $[0, 1] \times [0, 1]$ . На нижней и левой границах расчетной области задается условие симметричности течения; на верхней и правой границах задаются параметры точного решения, зависящие от времени и радиуса.

Результаты расчета задачи Ноха на сетке, состоящей из  $J \times I = 200 \times 200$  ячеек, показаны на рис. 17. Видно, что схема HR–minmod с решателем HLLC (рис. 17,а,б) дает сильную ударно-

волновую неустойчивость. С добавлением искусственной вязкости (рис. 17,в,з) возмущения за УВ практически исчезают, однако можно заметить небольшое занижение плотности непосредственно перед УВ (указано стрелками). Это происходит из-за уникальной особенности данной задачи: течение перед УВ является сходящимся и гиперзвуковым. В этом случае использование примитивных переменных (рис. 17,д,е) в процедуре реконструкции данных оказывается более предпочтительным, чем использование характеристических переменных.

На основании этих результатов можно сформулировать альтернативную версию предложения 2: одновременно с переключением на реконструкцию minmod в окрестности УВ возможен переход к использованию примитивных переменных. В других тестовых задачах эта версия работает почти так же хорошо, как и основная, но в данной задаче она демонстрирует ощутимое преимущество.

Последний пример на рис. 17,ж,з относится к схеме RK3-WENO5 с решателем Роу; здесь используется искусственная вязкость и альтернативная версия предложения 2.

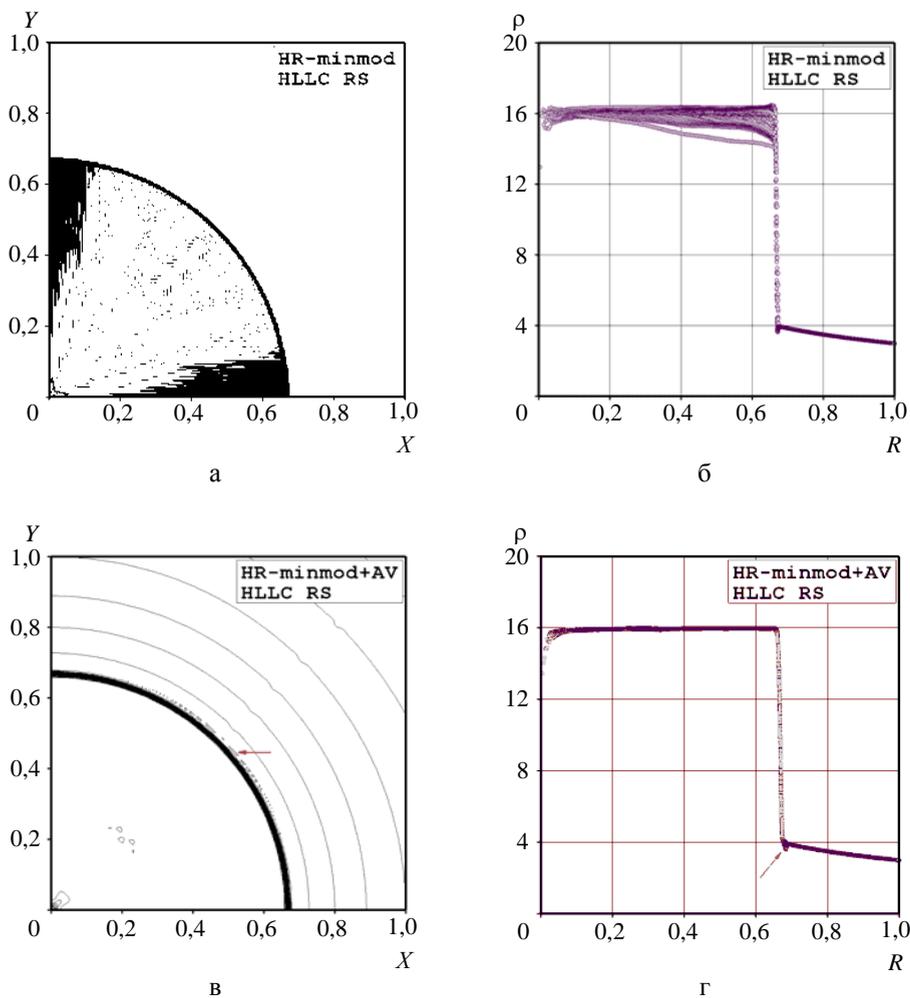


Рис. 17. Результаты расчета задачи Ноха ( $t = 2$ ) по различным схемам: изолинии плотности в расчетной области и график рассеяния плотности в зависимости от радиуса (см. также с. 164)

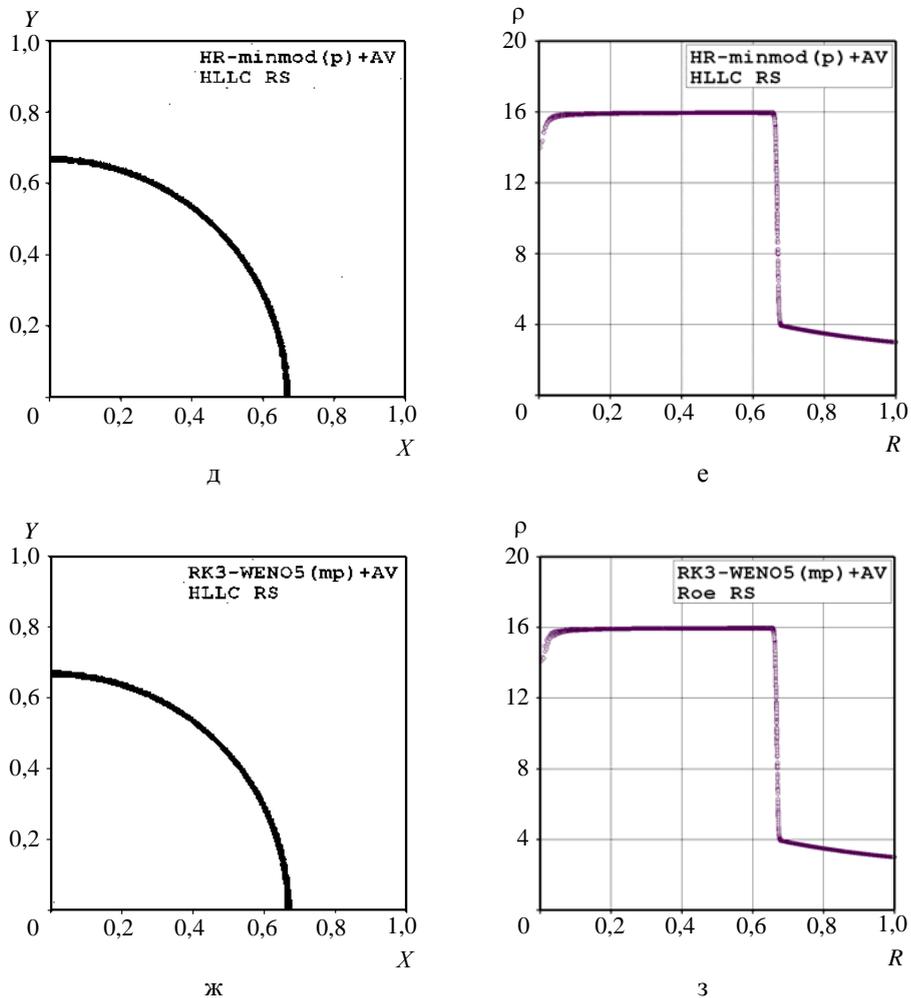


Рис. 17. Окончание

## Заключение

Методика борьбы с неустойчивостью типа «карбункул», базирующаяся на модели искусственной вязкости, апробирована на схемах типа Годунова повышенного порядка точности. Тестирование проводилось с помощью схем HR-minmod, HR-vanLeer, HR-MC, RK2-MC и RK3-WENO5 на задачах типа задачи Кёрка и других популярных тестах.

В ходе исследования методика продемонстрировала свою эффективность в схемах повышенного порядка точности. В качестве безразмерного базового коэффициента в модели искусственной вязкости было выбрано значение  $C_{AV} = 0,5$ , обеспечивающее подавление «карбункул»-неустойчивости для любой из рассмотренных схем (при выполнении двух предложений, перечисленных ниже). Это значение можно считать универсальным, поскольку оно подходит для моделирования течений любой размерности в широком диапазоне значений показателя адиабаты газа.

Первое предложение относится к процедуре реконструкции данных внутри ячейки; здесь следует переходить на использование характеристических переменных. Использование примитивных переменных обычно приводит к заметным осцилляциям за ударной волной. Исключение составляет лишь реконструкция *minmod*, для которой возможно использование как характеристических, так и примитивных переменных.

Второе предложение касается реконструкции данных внутри ячеек, расположенных внутри фронта УВ. В таких ячейках рекомендуется переходить на представление о линейном распределении данных и использовать реконструкцию *minmod*. При этом реконструкцию можно проводить как с использованием характеристических переменных (основной вариант), так и с использованием примитивных переменных (альтернативный вариант). В большинстве тестовых задач оба варианта показали близкие результаты, однако в задаче Ноха альтернативный вариант продемонстрировал определенное преимущество.

Применение рассматриваемой методики в сочетании с предложениями 1 и 2 позволяет не только подавлять численную неустойчивость типа «карбункул», но и существенно снижает уровень осцилляций параметров потока за фронтом УВ. Одним из практически важных результатов применения предлагаемой методики является решение проблемы нагрева, которая возникает при моделировании вязкого гиперзвукового обтекания затупленного тела.

Исследование показало, что применение неполных приближенных решателей задачи Римана, считающихся свободными от «карбункул»-неустойчивости, в схемах повышенного порядка точности не всегда обеспечивает полное подавление ударно-волновой неустойчивости. Такая ситуация возникает, например, при использовании решателя HLL в расчетах задачи Кёрка на прямоугольной сетке со сгущением ячеек в поперечном направлении.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 15-01-06224.

## *Список литературы*

1. Peery K. M., Imlay S. T. Blunt body flow simulations // AIAA Paper. 1988. N 88-2924.
2. Quirk J. J. A contribution to the great Riemann solver debate // Int. J. Numer. Meth. Fluids. 1994. Vol. 18. P. 555–574.
3. Rodionov A. V. Artificial viscosity in Godunov-type schemes to cure the carbuncle phenomenon // J. Comput. Phys. 2017. Vol. 345. P. 308–329.
4. Rodionov A. V. Artificial viscosity to cure the carbuncle phenomenon: the three-dimensional case // Ibid. 2018. Vol. 361. P. 50–55.
5. LeVeque R. J. Finite volume methods for hyperbolic problems. – Cambridge University Press, 2002.
6. Jiang G.-S., Shu C.-W. Efficient implementation of weighted ENO schemes // J. Comput. Phys. 1996. Vol. 126. P. 202–228.
7. Suresh A., Huynh H. T. Accurate monotonicity-preserving schemes with Runge-Kutta time stepping // Ibid. 1997. Vol. 136. P. 83–99.

8. Shu C.-W., Osher S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes // *J. Comput. Phys.* 1988. Vol. 77. P. 439–471.
9. Родионов А. В. Монотонная схема второго порядка аппроксимации для сквозного расчета неравновесных течений // *Журнал вычисл. матем. и матем. физики.* 1987. Т. 27, № 4. С. 585–593.
10. Родионов А. В. Повышение порядка аппроксимации схемы Годунова // *Журнал вычисл. матем. и матем. физики.* 1987. Т. 27, № 12. С. 1853–1860.
11. Albada van G. D., Leer van B., Roberts W. W. A comparative study of computational methods in cosmic gas dynamics // *Astron. Astrophysics.* 1982. Vol. 108. P. 76–84.
12. Leer van B. On the relation between the upwind-differencing schemes of Godunov, Engquist-Osher and Roe // *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* 1984. Vol. 5(1). P. 1–20.
13. Godunov S. K. Finite difference method for numerical computation of discontinuous solutions of the equations of fluid dynamics // *Mat. Sb.* 1959. Vol. 47. P. 271–306.
14. Roe P. L. Approximate Riemann solvers // *J. Comput. Phys.* 1981. Vol. 43. P. 357–372.
15. Toro E. F., Spruce M., Speares W. Restoration of the contact surface in the HLL-Riemann solver // *Shock Waves.* 1994. Vol. 4. P. 25–34.
16. Woodward P. R., Colella P. The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks // *J. Comput. Phys.* 1984. Vol. 54. P. 115–173.
17. Leer van B. Upwind and high-resolution methods for compressible flow: from donor cell to residual-distribution schemes // *Commun. Comput. Phys.* 2006. Vol. 1(2). P. 192–206.
18. Harten A., Lax P. D., Leer van B. On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws // *SIAM Rev.* 1983. Vol. 25(1). P. 35–61.
19. Kitamura K., Roe P., Ismail F. An evaluation of Euler fluxes for hypersonic flow computations // *AIAA Journal.* 2009. Vol. 47(1). P. 44–53.
20. Kitamura K., Shima E. Towards shock-stable and accurate hypersonic heating computations: a new pressure flux for AUSM-family schemes // *J. Comput. Phys.* 2013. Vol. 245. P. 62–83.
21. Noh W. F. Errors for calculations of strong shocks using an artificial viscosity and an artificial heat flux // *Ibid.* 1987. Vol. 72. P. 78–120.
22. Liska R., Wendroff B. Comparison of several difference schemes on 1D and 2D test problems for the Euler equations // *SIAM J. Sci. Comput.* 2003. Vol. 25(3). P. 995–1017.

## **Artificial Viscosity to Cure the Shock Instability in High-Order Godunov-Type Schemes**

A. V. Rodionov

*The artificial viscosity approach for curing the carbuncle phenomenon (a numerical problem, also known as the shock instability) in shock-capturing methods has been recently presented and successfully tested on the first-order schemes in two- and three-dimensional simulations. The present study extends the proposed approach to the case of using high-order Godunov-type schemes. Several implementations of well-known schemes were selected for the study. They involve the MUSCL and WENO data reconstructions in space along with the Runge-Kutta and Hancock-type time stepping techniques. Numerous computations of the Quirk-type test problems and other popular tests were performed to examine and tune the artificial viscosity approach as applied to the selected schemes. As a result of this study the principal coefficient in the artificial viscosity model was adjusted and some methodological suggestions for substantial weakening of the post-shock oscillations were stated.*