УДК 517.958:536.2

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ СТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ И ЭНЕРГИИ В МНОГОМЕРНОМ СЛУЧАЕ

А. А. Шестаков
(ФГУП "РФЯЦ-ВНИИТФ им. академ. Е. И. Забабахина",
г. Снежинск Челябинской области)

На основе разложения резольвенты оператора переноса в ряд Неймана получены аналитические формулы для определения параметров теплового излучения в многомерной геометрии. Эти формулы позволяют при известной равновесной интенсивности, которая определяется только распределением температуры, и при заданных коэффициентах поглощения и рассеяния найти в явном виде аналитические выражения основных спектральных величин: интенсивности, плотности и потока излучения. Приведены решения в *сером* и спектральном приближениях для одномерной, двумерной и трехмерной геометрий.

Ключевые слова: точные решения, система уравнений переноса теплового излучения.

Введение

Для каждой программы существует проблема тестирования. При тестировании программ в качестве модельных задач желательно выбирать задачи, которые имеют аналитические решения. Хотя определенный прогресс в построении аналитических решений для уравнения переноса теплового излучения достигнут [1—4], этих решений не всегда достаточно для разных классов задач переноса.

Для получения аналитических решений в оптически плотных средах можно использовать разложение резольвенты оператора переноса в ряд Неймана. Получение решений одномерных задач переноса теплового излучения через разложение в ряд Неймана использовалось ранее в работах [5—8]. Разложение резольвенты оператора переноса в ряд Неймана позволяет по известному температурному распределению получать спектрально-угловые характеристики поля излучения. После представления интенсивности через ряд Неймана в уравнении энергии приходится решать две задачи: интегрирование операторов разложения в пространстве направлений полета фотонов и интегрирование спектральных величин по энергии излучения. Вычислению этих интегралов помогает использование ряда упрощений.

Интегрирование в пространстве направлений упрощается, если использовать известные соотношения для скалярных произведений векторов направлений на градиенты функций, независимых от пространства направлений. Интегрирование по энергии излучения упрощается, если использовать специально выбранные формулы коэффициентов поглощения и рассеяния. Особенно упрощается вычисление ряда Неймана для оптически плотных сред, так как члены ряда обратно пропорциональны коэффициенту поглощения и быстро убывают с ростом оптической толщины. В этом случае бесконечно малыми членами ряда можно пренебречь.

В теории переноса теплового излучения по аналогии с температурой вещества вводят радиационную температуру, или температуру излучения, которая может существенно отличаться от температуры вещества [9—11]. Это отличие называется *отрывом* температур.

Целями данной работы являются:

1) получение аналитических решений стационарной системы уравнений переноса излучения и энергии в многомерном случае;
2) получение аналитических решений с отрывом температур.

1. Система уравнений переноса спектрального излучения и энергии

Рассмотрим систему уравнений переноса спектрального излучения и энергии для многомерной геометрии [12]:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial I_\nu}{\partial t}+\vec{\Omega}\cdot\nabla I_\nu+(\kappa_\nu+\chi_\nu)I_\nu=\kappa_\nu I_{p\nu}+\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Omega'}\beta_\nu\left(t,\vec{r},\vec{\Omega},\vec{\Omega}'\right)I_\nu(t,\vec{r},\vec{\Omega}')d\vec{\Omega}';$$

$$\frac{\partial E}{\partial t}=\int\limits_0^\infty\kappa_\nu\int\limits_\Omega(I_\nu-I_{\nu p})d\vec{\Omega}d\nu+Q.$$

Здесь t — время; $\vec{r}$ — радиус-вектор; c — скорость света; $\vec{\Omega}'$ и $\vec{\Omega}$ — единичные векторы в направлении движения фотонов до и после рассеяния соответственно; ν — частота; κ_ν — коэффициент поглощения фотонов, $\kappa_\nu>0$; χ_ν — коэффициент рассеяния фотонов, $\chi_\nu=\dfrac{1}{16\pi^2}\int\limits_\Omega\int\limits_{\Omega'}\beta_\nu\big(t,\vec{r},\vec{\Omega},\vec{\Omega}'\big)d\vec{\Omega}'d\vec{\Omega}\geq$ ≥ 0; $\beta_\nu\big(t,\vec{r},\vec{\Omega},\vec{\Omega}'\big)$ — индикатриса рассеяния фотонов, $\beta_\nu\geq 0$; $I_\nu(t,\vec{r},\vec{\Omega})$ — спектральная интенсивность излучения; $I_{p\nu}=\dfrac{1}{4\pi}B_\nu$ — спектральная интенсивность равновесного излучения; $B_\nu=$ $=\dfrac{8\pi h}{c^2}\dfrac{\nu^3}{e^{h\nu/KT}-1}=\dfrac{p_0\varepsilon^3}{e^{\varepsilon/KT}-1}$ — спектральная плотность равновесного излучения, умноженная на скорость света (функция Планка с множителем $p_0=\dfrac{8\pi}{c^2h^2}$), где $\varepsilon=h\nu$ — энергия фотона, $h=$ $=6{,}625\cdot10^{-16}$ эрг · с — постоянная Планка, $K=1{,}38\cdot10^{-16}$ эрг/град — постоянная Больцмана, T — температура вещества; E — внутренняя энергия; Q — тепловой источник.

При использовании формулы для B_ν будем пользоваться системой единиц, в которой $K=1$. Для краткости функцию B_ν будем называть функцией Планка, а функцию $U_\nu=\int\limits_\Omega I_\nu(t,\vec{r},\vec{\Omega})d\vec{\Omega}$ будем называть плотностью излучения.

В стационарном случае получаем систему

$$\vec{\Omega}\cdot\nabla I_\nu+(\kappa_\nu+\chi_\nu)I_\nu=\kappa_\nu I_{p\nu}+\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Omega'}\beta_\nu\left(\vec{r},\vec{\Omega},\vec{\Omega}'\right)I_\nu(t,\vec{r},\vec{\Omega}')d\vec{\Omega}';\tag{1}$$

$$\int\limits_0^\infty\kappa_\nu\int\limits_\Omega(I_\nu-I_{p\nu})d\vec{\Omega}d\nu=-Q.$$

Уравнение энергии можно упростить, если записать его через поток и вспомогательную функцию F:

$$\int\limits_0^\infty\kappa_\nu\int\limits_\Omega(I_\nu-I_{p\nu})d\vec{\Omega}d\nu=F-\int\limits_0^\infty\int\limits_\Omega\left(\vec{\Omega}\cdot\nabla I_\nu\right)d\vec{\Omega}d\nu=F-\int\limits_0^\infty\mathrm{div}\vec{S}_\nu d\nu=F-\mathrm{div}\vec{S}=-Q,\tag{2}$$

где $\vec{S}_\nu=\int\limits_\Omega\vec{\Omega}I_\nu d\vec{\Omega}$ — спектральный поток излучения; $\vec{S}=\int\limits_0^\infty\vec{S}_\nu d\nu$ — полный поток излучения; $F=$ $=\displaystyle\int\limits_0^\infty\left(\frac{1}{4\pi}\int\limits_\Omega\int\limits_{\Omega'}\beta_\nu I_\nu d\vec{\Omega}'d\vec{\Omega}-\chi_\nu U_\nu\right)d\nu.$

2. Решение системы уравнений переноса и энергии в стационарном случае без рассеяния

Для начала рассмотрим решение уравнения (1) без рассеяния при $\beta_\nu=0$, т. е. $F=0$:

$$\vec{\Omega}\cdot\nabla I_\nu+\kappa_\nu I_\nu=\kappa_\nu I_{p\nu}.\tag{3}$$

Запишем уравнение (3) в операторном виде $LI_\nu = I_{p\nu}$, где $L = E + \vec{\Omega}\cdot\kappa_\nu^{-1}\nabla$, $EI_\nu = I_\nu$. Тогда точное значение интенсивности можно записать в виде $I_\nu = L^{-1}I_{p\nu}$.

Следуя работе [1], разложим в ряд Неймана резольвенту оператора $\vec{\Omega}\cdot\kappa_\nu^{-1}\nabla$:

$$\left(E + \vec{\Omega}\cdot\kappa_\nu^{-1}\nabla\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\vec{\Omega}\cdot\kappa_\nu^{-1}\nabla\right)^n = E - \vec{\Omega}\cdot\kappa_\nu^{-1}\nabla + \left(\vec{\Omega}\cdot\kappa_\nu^{-1}\nabla\right)^2 - \ldots.$$

Отсюда можно получить точное значение интенсивности в виде бесконечного ряда от равновесной интенсивности:

$$I_\nu = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\vec{\Omega}\cdot\kappa_\nu^{-1}\nabla\right)^n I_{p\nu} = I_{p\nu} - \vec{\Omega}\cdot\kappa_\nu^{-1}\nabla I_{p\nu} + \left(\vec{\Omega},\kappa_\nu^{-1}\nabla\right)^2 I_{p\nu} - \ldots. \tag{4}$$

Разложение интенсивности в ряд Неймана позволяет после интегрирования по направлениям записать точные значения плотности и потока излучения в виде бесконечного ряда от функции Планка. Обоснование применения ряда Неймана для решения уравнения переноса приведено в работах Ларсена [1, 2].

Запишем уравнение (4) в операторном виде с выделением первых четырех слагаемых:

$$\begin{aligned}
&I_\nu = I_{p\nu} - \kappa_\nu^{-1}L_1 + \kappa_\nu^{-1}L_2 - \kappa_\nu^{-1}L_3 + \ldots,\\
&L_1 = \kappa_\nu\left(\vec{\Omega}\cdot\kappa_\nu^{-1}\nabla\right)I_{p\nu} = \vec{\Omega}\cdot\nabla I_{p\nu},\\
&L_2 = \kappa_\nu\left(\vec{\Omega}\cdot\kappa_\nu^{-1}\nabla\right)^2 I_{p\nu} = \kappa_\nu\left[\vec{\Omega}\cdot\kappa_\nu^{-1}\nabla\left(\vec{\Omega}\cdot\kappa_\nu^{-1}\nabla\right)\right]I_{p\nu} = \vec{\Omega}\cdot\nabla\kappa_\nu^{-1}L_1,\\
&L_3 = \kappa_\nu\left(\vec{\Omega}\cdot\kappa_\nu^{-1}\nabla\right)^3 I_{p\nu} = \kappa_\nu\left\{\vec{\Omega}\cdot\kappa_\nu^{-1}\nabla\left[\vec{\Omega}\cdot\kappa_\nu^{-1}\nabla\left(\vec{\Omega}\cdot\kappa_\nu^{-1}\nabla\right)\right]\right\}I_{p\nu} = \vec{\Omega}\cdot\nabla\kappa_\nu^{-1}L_2 \text{ и т. д.}
\end{aligned}$$

Интегрирование по Ω можно упростить, используя известные соотношения [1]:

$$\int\limits_{\Omega}\left(\vec{\Omega}\cdot\kappa_\nu^{-1}\nabla\right)^n d\vec{\Omega} = \begin{cases} 0, & n = 1, 3, 5, \ldots;\\ \dfrac{4\pi}{n+1}\left(\kappa_\nu^{-1}\nabla\right)^n, & n = 0, 2, 4, \ldots, \end{cases} \tag{5}$$

где второе выражение выполняется для четных значений κ_ν, независимых от пространства $\vec{r}$ (зависимость от частоты остается). В общем случае оно выполняется только для первых двух значений $n = 0, 2$:

$$\int\limits_{\Omega} d\vec{\Omega} = 4\pi; \quad \int\limits_{\Omega}\left(\vec{\Omega}\cdot\kappa_\nu^{-1}\nabla\right)^2 d\vec{\Omega} = \frac{4\pi}{3}\left(\kappa_\nu^{-1}\nabla\right)^2 = \frac{4\pi}{3}\kappa_\nu^{-1}\mathrm{div}\left(\kappa_\nu^{-1}\nabla\right).$$

Из соотношений (5) получаем:

$$\int\limits_{\Omega} L_1 d\vec{\Omega} = 0; \quad \int\limits_{\Omega} L_2 d\vec{\Omega} = \int\limits_{\Omega}\left[\vec{\Omega}\cdot\nabla\kappa_\nu^{-1}\left(\vec{\Omega}\cdot\nabla I_{p\nu}\right)\right]d\vec{\Omega} = \frac{4\pi}{3}\mathrm{div}\left(\kappa_\nu^{-1}\nabla I_{p\nu}\right);$$

$$\int\limits_{\Omega} L_3 d\vec{\Omega} = \int\limits_{\Omega}\left\{\vec{\Omega}\cdot\nabla\kappa_\nu^{-1}\left[\vec{\Omega}\cdot\nabla\kappa_\nu^{-1}\left(\vec{\Omega}\cdot\nabla I_{p\nu}\right)\right]\right\}d\vec{\Omega} = 0.$$

Используя соотношения (5), можно записать точные значения плотности и спектрального потока излучения в виде бесконечного ряда от функции Планка:

$$\begin{aligned}
&U_\nu = \int\limits_{\Omega} I_{p\nu}d\vec{\Omega} - \kappa_\nu^{-1}\int\limits_{\Omega} L_1 d\vec{\Omega} + \kappa_\nu^{-1}\int\limits_{\Omega} L_2 d\vec{\Omega} - \kappa_\nu^{-1}\int\limits_{\Omega} L_3 d\vec{\Omega} + \ldots = B_\nu + \frac{1}{3}\kappa_\nu^{-1}\mathrm{div}\left(\kappa_\nu^{-1}\nabla B_\nu\right) + \ldots;\\
&\vec{S}_\nu = \int\limits_{\Omega}\vec{\Omega}I_\nu d\vec{\Omega} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int\limits_{\Omega}\vec{\Omega}\left(\vec{\Omega}\cdot\kappa_\nu^{-1}\nabla\right)^n I_{p\nu}d\vec{\Omega} = -\frac{1}{3}\kappa_\nu^{-1}\nabla B_\nu + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\int\limits_{\Omega}\vec{\Omega}\left(\vec{\Omega}\cdot\kappa_\nu^{-1}\nabla\right)^n I_{p\nu}d\vec{\Omega}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Для этих выражений должно выполняться уравнение баланса частиц $\mathrm{div}\vec{S}_\nu + \kappa_\nu U_\nu = \kappa_\nu B_\nu$, т. е., если при приближенном вычислении потока брать несколько членов ряда, то плотность излучения необходимо вычислять не по формуле из (6), а через поток и функцию Планка по формуле $U_\nu = B_\nu - \kappa_\nu^{-1}\mathrm{div}\vec{S}_\nu$, чтобы не нарушать условие сохранения частиц в системе.

Выражения (4), (6) позволяют при известной равновесной интенсивности $I_{p\nu}(T)$, которая определяется только распределением температуры, и заданных коэффициентах поглощения и рассеяния найти в явном виде аналитические выражения основных спектральных величин I_ν, U_ν, $\vec{S}_\nu$. После нахождения этих величин можно перейти к получению температуры из уравнения (2). Для нахождения температуры подставим выражение (4) в (2):

$$\int_0^\infty \kappa_\nu \int_\Omega \left[\sum_{n=1}^\infty (-1)^n \left(\vec{\Omega}\cdot\kappa_\nu^{-1}\nabla\right)^n I_{p\nu}\right] d\vec{\Omega}d\nu = -Q.$$

Если ввести оператор $M_n = \int\limits_\Omega \left(\vec{\Omega}\cdot\kappa_\nu^{-1}\nabla\right)^n d\vec{\Omega}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, то остается суммирование только по четным значениям M_{2n} и уравнение для нахождения температуры принимает вид

$$\int_0^\infty \kappa_\nu \left(\sum_{n=1}^\infty M_{2n} I_{p\nu}\right) d\nu = -Q. \tag{7}$$

Первые четыре значения оператора M_n имеют простой вид: $M_0 = 4\pi$; $M_1 = 0$; $M_2 I_{p\nu} = \frac{4\pi}{3}\kappa_\nu^{-1}\times$ $\times\mathrm{div}\left(\kappa_\nu^{-1}\nabla I_{p\nu}\right)$; $M_3 = 0$. Освободиться от интеграла по направлениям в операторе M_4 в общем случае не удается.

В самом простом случае, при постоянном коэффициенте поглощения $\kappa_\nu = \kappa = \mathrm{const}$, оператор M_n можно записать в виде

$$M_n = \left[1 + (-1)^n\right] \frac{2\pi}{n+1} \left(\kappa^{-1}\nabla\right)^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

При этом уравнение для нахождения температуры (7) принимает вид

$$\frac{1}{3\kappa}\nabla^2 T^4 + \frac{1}{5\kappa^3}\nabla^4 T^4 + \frac{1}{7\kappa^5}\nabla^6 T^4 + \ldots = -Q. \tag{8}$$

Общее решение уравнения (8) даже в простейшем, одномерном случае получить не удается. Но частными решениями уравнения (8) при $Q = \mathrm{const}$ будут все решения дифференциального уравнения второго порядка $\nabla^2 T^4 = \nabla\cdot\nabla T^4 = \Delta T^4 = -3\kappa Q$. То есть для получения решения можно рассматривать не все члены бесконечного ряда (8), а только первое слагаемое.

Если использовать первый член в разложении резольвенты в ряд Неймана (отсутствие зависимости интенсивности от Ω), то решение уравнения переноса принимает вид

$$I_\nu = I_{p\nu}; \quad U_\nu = B_\nu; \quad \vec{S}_\nu = \int_\Omega \vec{\Omega} I_{p\nu} d\vec{\Omega} = 0; \quad U = B = c\sigma T^4; \quad \vec{S} = 0, \tag{9}$$

где $B = \int\limits_0^\infty B_\nu d\nu = c\sigma T^4$ — полная плотность равновесного излучения, умноженная на скорость света; $\sigma = 4\sigma_0/c$, $\sigma_0 = 5{,}67\cdot 10^{-5}$эрг/(см$^2\cdot$ сек $\cdot$ град^4) — постоянная Стефана—Больцмана.

Из уравнения (2) в этом случае получаем $Q = 0$. Из уравнения (1) получаем $\vec{\Omega}\cdot\nabla I_{p\nu} = 0$, или, после интегрирования, $\nabla T = 0$, откуда следует тривиальное решение $T = T_f = \mathrm{const}$ ($T_f = \sqrt[4]{\frac{1}{c\sigma}\int\limits_0^\infty U_\nu d\nu}$ — температура излучения), описывающее локальное термодинамическое равновесие в среде.

Если рассматривать первые два члена в разложении резольвенты (линейную зависимость интенсивности в пространстве Ω), то решение уравнения переноса принимает вид

$$I_\nu = I_{p\nu} - \frac{1}{\kappa_\nu} L_1; \;\; U_\nu = B_\nu; \;\; \vec{S}_\nu = -\frac{1}{3\kappa_\nu}\nabla B_\nu; \;\; U = B = c\sigma T^4; \;\; \vec{S} = -\frac{1}{3}\left(\int\limits_0^\infty \kappa_\nu^{-1}\frac{\partial B_\nu}{\partial T}d\nu\right)\nabla T. \quad (10)$$

Система (10) отличается от (9) выражениями для интенсивности и потока излучения. В этом случае отрыва температур, как и в предыдущем случае, не происходит, т. е. $T = T_f$.

Для проверки полученного решения подставим выражение интенсивности из (10) в уравнение (3), записанное в виде равенства двух операторов $\vec{\Omega}\cdot\nabla I_\nu = \kappa_\nu\left(I_{p\nu} - I_\nu\right)$. После подстановки оператор переноса равен $\vec{\Omega}\cdot\nabla I_\nu = L_1 - L_2$, а оператор взаимодействия излучения с веществом равен $\kappa_\nu\left(I_{p\nu} - I_\nu\right) = L_1$. Операторы переноса и взаимодействия излучения с веществом в уравнении (1) совпадают с точностью до члена L_2, который при постоянном коэффициенте поглощения пропорционален κ^{-1} и становится малым в оптически плотных средах.

Если рассмотреть первые три члена в разложении резольвенты (квадратичную зависимость интенсивности в пространстве Ω), то решение уравнения переноса принимает вид

$$\begin{aligned} &I_\nu = I_{p\nu} - \kappa_\nu^{-1}\left(L_1 - L_2\right); \quad U_\nu = B_\nu - \kappa_\nu^{-1}\mathrm{div}\vec{S}_\nu; \quad \vec{S}_\nu = -\frac{1}{3}\kappa_\nu^{-1}\nabla B_\nu; \\ &U = c\sigma T^4 + \delta U, \quad \delta U = -\int\limits_0^\infty \kappa_\nu^{-1}\mathrm{div}\vec{S}_\nu d\nu; \quad \vec{S} = -\frac{1}{3}\left(\int\limits_0^\infty \kappa_\nu^{-1}\frac{\partial B_\nu}{\partial T}d\nu\right)\nabla T. \end{aligned} \quad (11)$$

Из уравнения энергии (2) получаем

$$\int\limits_0^\infty \kappa_\nu \int\limits_\Omega \left(I_\nu - I_{p\nu}\right)d\vec{\Omega}d\nu = \int\limits_0^\infty \kappa_\nu M_2 I_{p\nu} d\nu = \frac{1}{3}\int\limits_0^\infty \mathrm{div}\left(\kappa_\nu^{-1}\nabla \mathrm{B}_\nu\right)d\nu = -\mathrm{div}\vec{S} = -Q. \quad (12)$$

Система (11) отличается от (10) выражениями для интенсивности и плотности излучения и может давать решения с отрывом температур, т. е. $T_f \neq T$. Это возможно даже при условии $\mathrm{div}\vec{S} = 0$, если выполняется неравенство $\int\limits_0^\infty \kappa_\nu^{-1}\mathrm{div}\vec{S}_\nu d\nu \neq 0$ или $U_\nu \neq B_\nu$.

Точные аналитические решения системы (11), (12) должны удовлетворять трем условиям:

1) аналитическое вычисление интеграла $\int\limits_0^\infty \kappa_\nu^{-1}\frac{\partial B_\nu}{\partial T}d\nu$ для формулы полного потока;

2) аналитическое вычисление интеграла $\delta U = -\int\limits_0^\infty \kappa_\nu^{-1}\mathrm{div}\vec{S}_\nu d\nu$ для формулы полной плотности;

3) выполнение условия $L_3 = 0$ для того, чтобы решение удовлетворяло уравнению переноса (3).

Выполнение условия 1 и уравнение $\mathrm{div}\vec{S} = Q$ дают формулы нахождения температуры. Выполнение условия 2 и требование $\int\limits_0^\infty \kappa_\nu^{-1}\mathrm{div}\vec{S}_\nu d\nu \neq 0$ дают решения с отрывом температур.

Выполнение условия 3 требуется для получения аналитических решений уравнения переноса без рассеяния. При учете рассеяния оно видоизменяется. Для анализа условия 3 подставим интенсивность из системы (11) в уравнение (3). После подстановки оператор переноса имеет вид $\vec{\Omega}\cdot\nabla I_\nu = L_1 - L_2 + L_3$. Оператор взаимодействия излучения с веществом имеет вид $\kappa_\nu\left(I_{p\nu} - I_\nu\right) = L_1 - L_2$. Видно, что операторы переноса и взаимодействия совпадают с точностью до члена L_3. Для всех направлений в пространстве Ω условие $L_3 = 0$ выполняется, когда коэффициент поглощения пропорционален ∇B_ν, так как из равенства $\nabla\left(\vec{\Omega}\cdot\kappa_\nu^{-1}\nabla B_\nu\right) = 0$ следует условие

$L_3 = \dfrac{\kappa_\nu}{4\pi}\left\{\vec{\Omega}\cdot\kappa_\nu^{-1}\nabla\left[\vec{\Omega}\cdot\kappa_\nu^{-1}\nabla\left(\vec{\Omega}\cdot\kappa_\nu^{-1}\nabla\right)\right]\right\}B_\nu = 0$. Однако в этом случае отрыва температур не происходит, так как $\int\limits_0^\infty \kappa_\nu^{-1}\mathrm{div}\vec{S}_\nu d\nu = -\dfrac{1}{3}\int\limits_0^\infty \kappa_\nu^{-1}\nabla\left(\kappa_\nu^{-1}\nabla B_\nu\right)d\nu = 0$, т. е. не выполняется условие 2.

В *сером* приближении при $I_p = \dfrac{1}{4\pi}B\left(T\right)$ с постоянным коэффициентом поглощения решения системы (11), (12) с отрывом температур можно найти для функции $B(T)$ с квадратичной зависимостью от координат, так как для нее выполняется условие $L_3 = \dfrac{1}{4\pi\kappa^2}\left\{\vec{\Omega}\cdot\nabla\left[\vec{\Omega}\cdot\nabla\left(\vec{\Omega}\cdot\nabla\right)\right]\right\}B = 0$.

В этом случае решение имеет вид

$$I = \frac{1}{4\pi}\left\{B - \frac{1}{\kappa}\left(\vec{\Omega}\cdot\nabla B\right) + \frac{1}{\kappa^2}\left[\vec{\Omega}\cdot\nabla\left(\vec{\Omega}\cdot\nabla B\right)\right]\right\};\quad U = B + \delta U,\quad \delta U = -\frac{1}{\kappa}\mathrm{div}\vec{S} = -\frac{Q}{\kappa};$$
$$\vec{S} = -\frac{1}{3\kappa}\nabla B;\quad U = B = c\sigma T^4;\quad \Delta T^4 = -\frac{3\kappa}{c\sigma}Q;\quad \beta = \chi = 0.$$

Следует заметить, что для задач переноса излучения без источника как в сером, так и спектральном приближении аналитических решений с отрывом температур через разложение в ряд Неймана найти не удалось.

3. Решение системы уравнений переноса и энергии в стационарном случае с анизотропным рассеянием

Для получения решений в более общем случае при учете первых трех членов в разложении подставим выражения $I_\nu = I_{p\nu} - \kappa_\nu^{-1}\left(L_1 - L_2\right)$, $\vec{\Omega}\cdot\nabla I_\nu = L_1 - L_2 + L_3$ в систему (1), (2).

Из уравнения (1) получаем соотношение

$$L_3 + \chi_\nu\left[I_{p\nu} - \kappa_\nu^{-1}\left(L_1\left(\vec{\Omega}\right) - L_2\left(\vec{\Omega}\right)\right)\right] = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Omega'}\beta_\nu\left(\vec{r},\vec{\Omega},\vec{\Omega}'\right)\left[I_{p\nu} - \kappa_\nu^{-1}\left(L_1\left(\vec{\Omega}'\right) - L_2\left(\vec{\Omega}'\right)\right)\right]d\vec{\Omega}'. \quad (13)$$

Рассмотрим частный случай зависимости индикатрисы от координат и направлений после столкновения при $\beta_\nu\left(\vec{r},\vec{\Omega},\vec{\Omega}'\right) = \dfrac{1}{4\pi}\beta_\nu^1\left(\vec{r},\vec{\Omega}\right)$. Тогда правая часть уравнения (13) принимает вид

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Omega'}\beta_\nu\left(\vec{r},\vec{\Omega},\vec{\Omega}'\right)I_\nu(\vec{r},\vec{\Omega}')d\vec{\Omega}' = \frac{1}{16\pi^2}\beta_\nu^1\left(\vec{r},\vec{\Omega}\right)U_\nu(\vec{r}). \quad (14)$$

С учетом выражения (14) из уравнения (13) получаем

$$\beta_\nu\left(\vec{r},\vec{\Omega}\right) = 4\pi U_\nu^{-1}\left(\chi_\nu I_\nu + L_3\right) = 4\pi U_\nu^{-1}\left[\chi_\nu I_\nu + \kappa_\nu\left(\vec{\Omega}\cdot\kappa_\nu^{-1}\nabla\right)^3 I_{p\nu}\right]; \quad (15)$$
$$\beta_\nu^1 = 16\pi^2\left\{\chi_\nu\left[I_{p\nu} - \kappa_\nu^{-1}\left(L_1 - L_2\right)\right] + L_3\right\}U_\nu^{-1} = 4\pi\left(\chi_\nu B_\nu - \chi_\nu\kappa_\nu^{-1}B_{1\nu} + \chi_\nu\kappa_\nu^{-1}B_{2\nu} + B_{3\nu}\right)U_\nu^{-1},$$

где $B_{1\nu} = \vec{\Omega}\cdot\nabla B_\nu$; $B_{2\nu} = \vec{\Omega}\cdot\nabla\kappa_\nu^{-1}\left(\vec{\Omega}\cdot\nabla B_\nu\right)$; $B_{3\nu} = \vec{\Omega}\cdot\nabla\kappa_\nu^{-1}\left[\vec{\Omega}\cdot\nabla\kappa_\nu^{-1}\left(\vec{\Omega}\cdot\nabla B_\nu\right)\right] = 4\pi L_3$.

Полученное выражение для индикатрисы рассеяния удовлетворяет условию

$$\frac{1}{16\pi^2}\int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Omega'}\beta_\nu\left(\vec{r},\vec{\Omega},\vec{\Omega}'\right)d\vec{\Omega}'d\vec{\Omega} = \frac{1}{16\pi^2}\int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Omega'}\frac{1}{4\pi}\beta_\nu^1\left(\vec{r},\vec{\Omega}\right)d\vec{\Omega}'d\vec{\Omega} = \frac{1}{16\pi^2}\int\limits_{\Omega}\beta_\nu^1\left(\vec{r},\vec{\Omega}\right)d\vec{\Omega} =$$
$$= \frac{1}{4\pi}\frac{\int\limits_\Omega L_3 d\vec{\Omega} + \chi_\nu\left[\int\limits_\Omega I_{p\nu}d\vec{\Omega} - \kappa_\nu^{-1}\left(\int\limits_\Omega L_1 d\vec{\Omega} - \int\limits_\Omega L_2 d\vec{\Omega}\right)\right]}{U_\nu} = \frac{\chi_\nu\left[\mathrm{B}_\nu + \kappa_\nu^{-1}\dfrac{4\pi}{3}\mathrm{div}\left(\kappa_\nu^{-1}\nabla I_{p\nu}\right)\right]}{B_\nu + \dfrac{1}{3}\kappa_\nu^{-1}\mathrm{div}\left(\kappa_\nu^{-1}\nabla B_\nu\right)} = \chi_\nu\left(\vec{r}\right).$$

Неотрицательность индикатрисы рассеяния проверяется после нахождения формулы для температуры.

Используя соотношения

$$\int_{\Omega} L_1 d\vec{\Omega} = 0; \quad \int_{\Omega} L_3 d\vec{\Omega} = 0; \quad \vec{\Omega}\cdot\nabla I_\nu = L_1 - L_2 + L_3; \quad F = \int_0^\infty \left(\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \int_{\Omega'} \beta_\nu I_\nu d\vec{\Omega}' d\vec{\Omega} - \chi_\nu U_\nu \right) d\nu =$$

$$= \int_0^\infty \left(\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \beta_\nu d\vec{\Omega} - \chi_\nu \right) U_\nu d\nu = \int_0^\infty \left(\frac{1}{16\pi^2} \int_{\Omega} \beta_\nu^1 d\vec{\Omega} - \chi_\nu \right) U_\nu d\nu = 0,$$

из уравнения (2) получаем уравнение для нахождения температуры

$$\int_0^\infty \kappa_\nu \int_{\Omega} (I_\nu - I_{p\nu}) d\vec{\Omega} d\nu = -\int_0^\infty\int_{\Omega} \left(\vec{\Omega}\cdot\nabla I_\nu\right) d\vec{\Omega} d\nu = \int_0^\infty\int_{\Omega} (L_1 - L_2 + L_3) d\vec{\Omega} d\nu = \frac{1}{3}\int_0^\infty \operatorname{div}\left(\kappa_\nu^{-1}\nabla B_\nu\right) d\nu = -Q. \quad (16)$$

Следует заметить, что это выражение аналогично уравнению (12), полученному в случае без рассеяния.

Для примера рассмотрим решения системы (1), (2) с индикатрисой рассеяния вида (15) в одномерном плоском, двумерном осесимметричном и трехмерном декартовом случаях. Решения с отрывом температур будем искать в двух вариантах:

1) в сером приближении с постоянными коэффициентами рассеяния χ, поглощения κ и постоянным источником Q;
2) в спектральном приближении с коэффициентами рассеяния и поглощения, зависящими от температуры и спектра фотонов, где спектральный коэффициент поглощения определяется по формуле из работы Флека [13].

4. Одномерная плоская геометрия

Вариант 1. В сером приближении при постоянных коэффициентах рассеяния и поглощения получаем из соотношения (16) $\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial r}\left(\kappa^{-1}\frac{\partial B}{\partial r}\right) = -Q$ уравнение для температуры $\frac{\partial^2 T^4}{\partial r^2} = -\frac{3\kappa}{c\sigma}Q$. При $Q = \mathrm{const}$ это уравнение выполняется для квадратичных функций $B(r)$, или в виде $T^4 = a_0 r^2 + a_1 r + a_2$, где $a_0 = -\frac{3\kappa}{2c\sigma}Q$. Остальные константы выбираются из условий согласования с граничными и начальными условиями, а также неотрицательности функций I, U, T, σ.

Система (11) принимает вид

$$I = \frac{1}{4\pi}\left(B - \frac{\mu}{\kappa}\frac{\partial B}{\partial r} + \frac{\mu^2}{\kappa^2}\frac{\partial^2 B}{\partial r^2}\right); \quad U = B - \kappa^{-1}\frac{\partial S}{\partial r} = B - \frac{Q}{\kappa}; \quad S = -\frac{1}{3\kappa}\frac{\partial B}{\partial r} = -\frac{c\sigma}{3\kappa}\left(2a_0 r + a_1\right);$$

$$T^4 = -\frac{3\kappa Q}{2c\sigma}r^2 + a_1 r + a_2; \quad \beta\left(\mu, r, T\right) = 4\pi\chi\frac{I}{U} = \chi\frac{T^4 - \frac{\mu}{\kappa}\left(2a_0 r + a_1\right) + \frac{2a_0\mu^2}{\kappa^2}}{T^4 + \frac{2a_0}{3\kappa^2}},$$

где $U = \int_{\Omega} I d\vec{\Omega} = \int_{-1}^{1}\int_0^{2\pi} I d\mu d\varphi = 2\pi\int_{-1}^{1} I d\mu$.

Заметим, что в данном варианте получается решение с отрывом температур даже без учета рассеяния при $\beta = \chi = 0$.

Приведем конкретные примеры решения переноса теплового излучения в сером приближении с постоянными коэффициентами.

Пример 1. Решение без отрыва температур (с нулевым источником).
Пусть $0 \le r \le R$; $\kappa = \chi = 1$; $c\sigma = 4110$; $Q = 0$; $a_0 = 0$; $a_1 = -1$; $a_2 = R + 1$. Тогда
$I = \dfrac{c\sigma}{4\pi}(R + 1 - r + \mu) \ge 0$; $\quad S = \dfrac{c\sigma}{3}$; $\quad U = B = c\sigma T^4$; $\quad T^4 = R+1-r > 0$; $\quad \beta = \dfrac{R+1-r+\mu}{R+1-r} \ge 0.$

Пример 2. Решение с отрывом температур (с ненулевым источником).
Пусть $0 \le r \le R$; $\kappa = \chi = 1$; $c\sigma = 4110$; $Q = \dfrac{2c\sigma}{3}$; $a_0 = -1$; $a_1 = 0$; $a_2 = (R+1)^2 + 1$. Тогда
$I = \dfrac{c\sigma}{4\pi}\left[R^2 - r^2 + 2\left(R + r\mu + 1 - \mu^2\right)\right] \ge 0$; $\quad S = \dfrac{2c\sigma r}{3}$; $\quad U = c\sigma\left(R^2 - r^2 + 2R + \dfrac{4}{3}\right) > 0$;
$T = \sqrt[4]{R^2 - r^2 + 2(R+1)}$; $\quad T_f = \sqrt[4]{R^2 - r^2 + 2\left(R + \dfrac{2}{3}\right)}$; $\quad \beta = \dfrac{R^2 - r^2 + 2\left(R + \mu r + 1 - \mu^2\right)}{R^2 - r^2 + 2R + 4/3} \ge 0.$

Вариант 2. Найдем решение с отрывом температур в спектральном приближении. Из уравнения энергии (16) следует $\dfrac{\partial S}{\partial r} = -\dfrac{1}{3}\dfrac{\partial}{\partial r}\left[\left(\int\limits_0^\infty \dfrac{1}{\kappa_\nu}\dfrac{\partial B_\nu}{\partial T}d\nu\right)\dfrac{\partial T}{\partial r}\right] = Q$. Определим спектральный коэффициент поглощения по формуле Флека: $\kappa_\nu = \dfrac{\kappa_0 h^3(1 - e^{-h\nu/T})}{\nu^3 T^n} = \kappa_0 \dfrac{e^{\varepsilon/T} - 1}{\varepsilon^3 e^{\varepsilon/T} T^n}$, $n \ge 0$, $\kappa_0 > 0$. Замечательным свойством этой формулы является то, что она удовлетворяет условию 1 из разд. 2: $\int\limits_0^\infty \kappa_\nu^{-1}\dfrac{\partial B_\nu}{\partial T}d\nu = \dfrac{pT^{n+6}}{\kappa_0}\int\limits_0^\infty \dfrac{x^7 e^{2x}}{(e^x - 1)^3}dx = mT^{n+6}$, где $x = \dfrac{\varepsilon}{T}$, $m = \dfrac{pm_0}{\kappa_0}$, $p = \dfrac{15c\sigma}{\pi^4}$, константа $m_0 = \int\limits_0^\infty \dfrac{x^7 e^{2x}}{(e^x - 1)^3}dx = 2520\zeta(7) + \dfrac{8}{3}\pi^6 \approx 5103{,}9$ получается с использованием ζ-функции Римана $\zeta(p) = \sum\limits_{n=1}^\infty n^{-p}$: $\zeta(7) \approx 1{,}008$.

Для выполнения условия 2 из разд. 2 вычислим интеграл δU:

$$\delta U = \frac{pT^{n+4}}{3\kappa_0^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(T^{n+5}\frac{\partial T}{\partial r}\right)m_1 + T^{n+4}\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)^2(3m_3 - 2m_2 - 7m_1)\right], \tag{17}$$

где

$$m_1 = \int\limits_0^\infty \frac{e^{3x}x^{10}}{(e^x - 1)^4}dx = 1814400\,\zeta(9) + 64\pi^8 + \frac{1280}{99}\pi^{10} \approx 3636097{,}83;$$
$$m_2 = \int\limits_0^\infty \frac{e^{3x}x^{11}}{(e^x - 1)^4}dx = 6652800\,[\zeta(9) + 2\,\zeta(11)] + \frac{640}{3}\pi^{10} \approx 39956608{,}13;$$
$$m_3 = \int\limits_0^\infty \frac{e^{4x}x^{11}}{(e^x - 1)^5}dx = 9979200\,[\zeta(9) + \zeta(11)] + 176\pi^8 + \frac{1760}{9}\pi^{10} \approx 39966725{,}41.$$

В случае постоянного источника решением уравнения энергии $-\dfrac{m}{3(n+7)}\dfrac{\partial^2 T^{n+7}}{\partial r^2} = Q$ является функция $T^{n+7} = a_0 r^2 + a_1 r + a_2$ при $a_0 = -\dfrac{3(n+7)}{2m}Q$. Остальные константы выбираются из условий согласования с граничными и начальными условиями, а также неотрицательности функций I, U, T, σ.

Подставляя формулу для температуры в (17), получаем

$$\delta U = \frac{pT^{n+3}}{21\kappa_0^2}\left\{\frac{6}{n+6}\left[2a_0 - \frac{(2a_0 r + a_1)^2}{7T^7}\right]m_1 + T^n\frac{(2a_0 r + a_1)^2}{7T^7}(3m_3 - 2m_2 - 7m_1)\right\}.$$

Система (11) принимает вид

$$I_\nu = I_{p\nu} - \frac{\mu}{\kappa_\nu}\frac{\partial I_{p\nu}}{\partial r} + \frac{\mu^2}{\kappa_\nu}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{\kappa_\nu}\frac{\partial I_{p\nu}}{\partial r}\right); \quad U_\nu = B_\nu + \frac{1}{3\kappa_\nu}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{\kappa_\nu}\frac{\partial B_\nu}{\partial r}\right); \quad S_\nu = -\frac{1}{3\kappa_\nu}\frac{\partial B_\nu}{\partial r};$$

$$S = -\frac{m}{3(n+7)}\frac{\partial T^{n+7}}{\partial r}; \quad U = c\sigma T^4 + \delta U; \quad T^{n+7} = -\frac{3(n+7)}{2m}Qr^2 + a_1 r + a_2;$$

$$\beta_\nu(\mu, r, T) = 4\pi\frac{\chi_\nu I_\nu + L_3}{U_\nu} = \frac{\chi_\nu\left[B_\nu - \frac{\mu}{\kappa_\nu}\frac{\partial B_\nu}{\partial r} + \frac{\mu^2}{\kappa_\nu}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{\kappa_\nu}\frac{\partial B_\nu}{\partial r}\right)\right] + \mu^3\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{\kappa_\nu}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{\kappa_\nu}\frac{\partial B_\nu}{\partial r}\right)\right]}{B_\nu + \frac{1}{3\kappa_\nu}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{\kappa_\nu}\frac{\partial B_\nu}{\partial r}\right)}.$$

Хотя показать неотрицательность функций I, U, σ аналитически довольно сложно, это можно сделать численно на ЭВМ перебором всех параметров с увеличением κ_0 до тех пор, пока эти величины станут неотрицательными.

Приведем конкретный пример.

Пусть $0 \le r \le R$; $\chi_\nu = 1$; $Q = \dfrac{2m}{21}$; $m = \dfrac{15c\sigma}{\pi^4}\dfrac{m_0}{\kappa_0} \approx \dfrac{3230310}{\kappa_0}$; $a_0 = -1$; $a_1 = 0$; $a_2 = (R+1)^2 + 1$; $\kappa_\nu = \kappa_0\dfrac{e^{\varepsilon/T} - 1}{\varepsilon^3 e^{\varepsilon/T}}$; $\kappa_0 = 10^3$; $n = 0$.

Тогда $I_\nu = \dfrac{1}{4\pi}\left[B_\nu - \dfrac{\mu}{\kappa_\nu}\dfrac{\partial B_\nu}{\partial r} + \dfrac{\mu^2}{\kappa_\nu}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{1}{\kappa_\nu}\dfrac{\partial B_\nu}{\partial r}\right)\right]$; $U_\nu = B_\nu + \dfrac{1}{3\kappa_\nu}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{1}{\kappa_\nu}\dfrac{\partial B_\nu}{\partial r}\right)$; $S_\nu = -\dfrac{1}{3\kappa_\nu}\dfrac{\partial B_\nu}{\partial r}$; $S = Qr = \dfrac{2m}{21}r$; $U = B + \delta U$; $T = \sqrt[7]{R^2 - r^2 + 2(R+1)} > 0$; $\delta U = \dfrac{30c\sigma T^3}{21\kappa_0^2\pi^4}\left(\dfrac{2r^2}{7T^7}m_4 - m_1\right)$; $m_1 \approx 3636097{,}83$; $m_4 = 3m_3 - 2m_2 - 8m_1 \approx 10898177$; остальные коэффициенты введены ранее;

$$\beta_\nu(\mu, r, T) = \frac{B_\nu - \frac{\mu}{\kappa_\nu}\frac{\partial B_\nu}{\partial r} + \frac{\mu^2}{\kappa_\nu}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{\kappa_\nu}\frac{\partial B_\nu}{\partial r}\right) + \mu^3\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{\kappa_\nu}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{\kappa_\nu}\frac{\partial B_\nu}{\partial r}\right)\right]}{B_\nu + \frac{1}{3\kappa_\nu}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{\kappa_\nu}\frac{\partial B_\nu}{\partial r}\right)}.$$

С индикатрисой рассеяния вида (15) можно построить более сложные решения в случае переменного источника $Q(T)$. Например, при $Q(T) = T^{n+7}$ решением уравнения энергии $-\dfrac{m}{3(n+7)}\dfrac{\partial^2 T^{n+7}}{\partial r^2} = T^{n+7}$ является функция $T^{n+7} = \sin a_0 r$ при $a_0 = \sqrt{\dfrac{3(n+7)}{m}}$, $0 \le a_0 r \le \pi$. Но в данной работе такие решения не рассматриваются.

5. Двумерная осесимметричная геометрия

Для двумерного примера рассмотрим решения системы (1), (2) с индикатрисой рассеяния вида (15) в осесимметричном случае.

В двумерной осесимметричной геометрии оператор переноса в дивергентной форме имеет вид

$$\vec{\Omega}\cdot\nabla I_\nu = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\xi I_\nu) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial z}(r\mu I_\nu) - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \phi}(\eta I_\nu),$$

где $\vec{\Omega} = \left(\xi = \sqrt{1-\mu^2}\cos\phi, \mu = \cos\theta, \eta = \sqrt{1-\mu^2}\sin\phi\right)$ — единичный вектор в направлении полета фотона; θ — угол между $\vec{\Omega}$ и осью симметрии OZ; ϕ — угол между проекцией $\vec{r}$ и проекцией $\vec{\Omega}$ на плоскость, перпендикулярную оси.

Решение будем искать для недивергентной формы оператора переноса, в которой он имеет более простой вид

$$\vec{\Omega}\cdot\nabla I_\nu = \xi\frac{\partial I_\nu}{\partial r} + \mu\frac{\partial I_\nu}{\partial z} - \frac{\eta}{r}\frac{\partial I_\nu}{\partial \phi}.$$

После разложения резольвенты в ряд Неймана в операторе переноса для равновесной интенсивности $\vec{\Omega}\cdot\nabla I_{p\nu}$ третье слагаемое $\dfrac{\partial I_{p\nu}}{\partial\phi}=0$, так как $I_{p\nu}$ не зависит от переменных в пространстве направлений. Интенсивность, плотность, поток и дивергенция потока излучения принимают вид

$$I_\nu = I_{p\nu} - \frac{1}{\kappa_\nu}\left(\xi\frac{\partial I_{p\nu}}{\partial r}+\mu\frac{\partial I_{p\nu}}{\partial z}\right)+\frac{1}{\kappa_\nu}\left\{\xi^2\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial I_{p\nu}}{\kappa_\nu\partial r}\right)+\xi\mu\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial I_{p\nu}}{\kappa_\nu\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial I_{p\nu}}{\kappa_\nu\partial r}\right)\right]+\right.$$
$$\left.+\mu^2\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial I_{p\nu}}{\kappa_\nu\partial z}\right)\right\}-\ldots;$$

$$U_\nu = B_\nu+\frac{1}{3\kappa_\nu}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r}{\kappa_\nu}\frac{\partial B_\nu}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\kappa_\nu}\frac{\partial B_\nu}{\partial z}\right)\right]+\ldots = B_\nu-\frac{1}{\kappa_\nu}\mathrm{div}\vec{S}_\nu;$$

$$\vec{S}_\nu = -\frac{1}{3\kappa_\nu}\left(\frac{\partial B_\nu}{\partial r},\frac{\partial B_\nu}{\partial z}\right)-\ldots;$$

$$\mathrm{div}\vec{S}_\nu = \frac{1}{r}\frac{\partial rS_{r,\nu}}{\partial r}+\frac{\partial S_{z,\nu}}{\partial z} = -\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r}{3\kappa_\nu}\frac{\partial B_\nu}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{3\kappa_\nu}\frac{\partial B_\nu}{\partial z}\right)\right]-\ldots.$$

Если уравнение для интенсивности записать в операторном виде $I_\nu = I_{p\nu}-\kappa_\nu^{-1}L_1+\kappa_\nu^{-1}L_2-\kappa_\nu^{-1}L_3+$ $+\ldots$, то первые три оператора приобретут вид

$$L_1 = \vec{\Omega}\cdot\nabla I_{p\nu} = \xi\frac{\partial I_{p\nu}}{\partial r}+\mu\frac{\partial I_{p\nu}}{\partial z};$$

$$L_2 = \xi\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{\kappa_\nu}\left(\xi\frac{\partial I_{p\nu}}{\partial r}+\mu\frac{\partial I_{p\nu}}{\partial z}\right)\right]+\mu\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{\kappa_\nu}\left(\xi\frac{\partial I_{p\nu}}{\partial r}+\mu\frac{\partial I_{p\nu}}{\partial z}\right)\right];$$

$$L_3 = \xi\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{1}{\kappa_\nu}\left\{\xi^2\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial I_{p\nu}}{\kappa_\nu\partial r}\right)+\xi\mu\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial I_{p\nu}}{\kappa_\nu\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial I_{p\nu}}{\kappa_\nu\partial r}\right)\right]+\mu^2\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial I_{p\nu}}{\kappa_\nu\partial z}\right)\right\}\right\}+$$
$$+\mu\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{1}{\kappa_\nu}\left\{\xi^2\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial I_{p\nu}}{\kappa_\nu\partial r}\right)+\xi\mu\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial I_{p\nu}}{\kappa_\nu\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial I_{p\nu}}{\kappa_\nu\partial r}\right)\right]+\mu^2\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial I_{p\nu}}{\kappa_\nu\partial z}\right)\right\}\right\}.$$

Для того чтобы решение удовлетворяло уравнению переноса при учете первых трех членов в разложении, необходимо выполнение условия $L_3=0$. Оно имеет место для всех направлений в пространстве Ω, когда третьи производные в пространстве (r,z) обращаются в нуль, т. е.

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{\kappa_\nu}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{\kappa_\nu}\frac{\partial B_\nu}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial r}\right)\right]=\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{\kappa_\nu}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{\kappa_\nu}\frac{\partial B_\nu}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial z}\right)\right]=\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{\kappa_\nu}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\kappa_\nu}\frac{\partial B_\nu}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial r}\right)\right]=$$
$$=\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{\kappa_\nu}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\kappa_\nu}\frac{\partial B_\nu}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial z}\right)\right]=\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{\kappa_\nu}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{\kappa_\nu}\frac{\partial B_\nu}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial r}\right)\right]=\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{\kappa_\nu}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{\kappa_\nu}\frac{\partial B_\nu}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial z}\right)\right]=$$
$$=\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{\kappa_\nu}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\kappa_\nu}\frac{\partial B_\nu}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial r}\right)\right]=\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{\kappa_\nu}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\kappa_\nu}\frac{\partial B_\nu}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial z}\right)\right]=0.$$

Эти условия, в частности, выполняются для линейных функций $T=a_0r+a_1z+a_2$ с коэффициентом поглощения, пропорциональным $\dfrac{\partial B_\nu}{\partial T}$, но при этом отрыва температур не происходит.

Вариант 1. В сером приближении с постоянным коэффициентом поглощения и $\beta=\chi=0$ условие $L_3=0$ выполняется для квадратичных функций вида $T^4=a_0r^2+a_1z^2+a_2r+a_3z+a_4$, так как

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial T^4}{\partial r}\right)\right]=\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial T^4}{\partial z}\right)\right]=\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial T^4}{\partial z}\right)\right]=\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial T^4}{\partial z}\right)\right]=0.$$

В этом случае решение системы (11), (12) имеет вид

$$I=\frac{B}{4\pi}-\frac{1}{4\pi\kappa}\left\{\xi\frac{\partial B}{\partial r}+\mu\frac{\partial B}{\partial z}-\frac{1}{\kappa}\left[\xi\frac{\partial}{\partial r}\left(\xi\frac{\partial B}{\partial r}+\mu\frac{\partial B}{\partial z}\right)+\mu\frac{\partial}{\partial z}\left(\xi\frac{\partial B}{\partial r}+\mu\frac{\partial B}{\partial z}\right)\right]\right\};\quad U=B-\frac{Q}{\kappa};$$

$$\vec{S}=-\frac{1}{3\kappa}\nabla B;\quad \Delta T^4=-\frac{3\kappa}{c\sigma}Q=-Q_1;\quad T=\sqrt[4]{a_0r^2-(2a_0+0{,}5Q_1)z^2+a_2r+a_3z+a_4}.$$

Вариант 2. Рассмотрим решение в спектральном случае с коэффициентом поглощения Флека. Из условия 1 (см. разд. 2) получаем $\int\limits_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu}\frac{\partial B_\nu}{\partial T}d\nu = mT^{n+6}$. С учетом этого выражения получаем уравнение для нахождения температуры

$$\mathrm{div}\vec{S} = -\frac{1}{3}\mathrm{div}\left[\left(\int\limits_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu}\frac{\partial B_\nu}{\partial T}d\nu\right)\nabla T\right] = -\frac{m}{3\,(n+7)}\mathrm{div}\left(\nabla T^{n+7}\right) = Q.$$

Из условия 2 получаем $\delta U = \frac{pT^{n+4}}{3\kappa_0^2}\left[\mathrm{div}\left(T^{n+5}\nabla T\right)m_1 + T^{n+4}\left(\nabla T\cdot\nabla T\right)\left(3m_3 - 2m_2 - 7m_1\right)\right]$.

В двумерной осесимметричной геометрии в случае постоянного источника решением уравнения Пуассона $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T^{n+7}}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 T^{n+7}}{\partial z^2} = -Q_1$, $Q_1 = Q\frac{3\,(n+7)}{m}$, является функция

$$T^{n+7} = T_0 r^2 + T_1 z^2 + T_2 z + T_3, \tag{18}$$

где T_0, T_1, T_2, T_3 — произвольные константы, которые выбираются из условий согласования с граничными и начальными условиями для уравнения переноса и условия $4T_0 + 2T_1 = -Q_1$.

С учетом формулы (18) вычислим интеграл δU, который принимает вид

$$\delta U = m_6 T^{n+3} + \frac{m_5}{T^{n+4}}\left(T_0^2 r^2 + T_1^2 z^2\right),$$

где $m_6 = \frac{2pm_1\,(2T_0 + T_1)}{3\kappa_0^2\,(n+7)}$; $m_5 = \frac{4pm_4}{3\kappa_0^2\,(n+7)^2}$; $m_4 \approx 10898177$; $m_1 \approx 3636097{,}83$. Для задач Флека решение системы (11) будет иметь вид

$$I_\nu = I_{p\nu} - \kappa_\nu^{-1}\left(L_1 - L_2\right);\quad U_\nu = B_\nu - \kappa_\nu^{-1}\mathrm{div}\vec{S}_\nu;\quad \vec{S}_\nu = -\frac{1}{3\kappa_\nu}\nabla B_\nu;$$

$$U = c\sigma T^4 + \delta U,\quad \delta U = m_6 T^{n+3} + \frac{m_5}{T^{n+4}}\left[T_0^2 r^2 + \left(2T_0 + 0{,}5Q_1\right)^2 z^2\right];\quad \vec{S} = -\frac{m}{3\,(n+7)}\nabla T^{n+7};$$

$$\beta_\nu\left(\vec{r},\vec{\Omega},T\right) = \left(\chi_\nu B_\nu - \chi_\nu\kappa_\nu^{-1}B_{1\nu} + \chi_\nu\kappa_\nu^{-1}B_{2\nu} + B_{3\nu}\right)U_\nu^{-1};\ T^{n+7} = T_0 r^2 - \left(2T_0 + 0{,}5Q_1\right)z^2 + T_2 z + T_3,$$

где $B_{1\nu} = \vec{\Omega}\cdot\nabla B_\nu$; $B_{2\nu} = \vec{\Omega}\cdot\nabla\kappa_\nu^{-1}\left(\vec{\Omega}\cdot\nabla B_\nu\right)$; $B_{3\nu} = \vec{\Omega}\cdot\nabla\kappa_\nu^{-1}\left[\vec{\Omega}\cdot\nabla\kappa_\nu^{-1}\left(\vec{\Omega}\cdot\nabla B_\nu\right)\right]$.

6. Трехмерная геометрия

В трехмерной декартовой прямоугольной системе координат оператор переноса имеет вид

$$\vec{\Omega}\cdot\nabla I_\nu = \Omega_1\frac{\partial I_\nu}{\partial x_1} + \Omega_2\frac{\partial I_\nu}{\partial x_2} + \Omega_3\frac{\partial I_\nu}{\partial x_3},$$

где x_1, x_2, x_3 — координаты вектора $\vec{r}$; Ω_1, Ω_2, Ω_3 — координаты вектора $\vec{\Omega}$.

Вариант 1. Если рассмотреть первые три члена в ряде Неймана при $\kappa = \mathrm{const}$, $\chi = \mathrm{const}$, $\beta = 4\pi U^{-1}\left(L_3 + \chi I\right)$, $Q = \mathrm{const}$, то система (11) примет вид

$$I = I_p - \kappa^{-1}\left(L_1 - L_2\right);\quad U = c\sigma T^4 - \frac{Q}{\kappa},\quad \vec{S} = -\frac{c\sigma}{3\kappa}\nabla T^4,$$

где $L_1 = \frac{1}{4\pi}\left(\Omega_1\frac{\partial B}{\partial x_1} + \Omega_2\frac{\partial B}{\partial x_2} + \Omega_3\frac{\partial B}{\partial x_3}\right)$; $L_2 = \frac{1}{4\pi\kappa}\left(\vec{\Omega}\cdot\nabla\left(\Omega_1\frac{\partial B}{\partial x_1} + \Omega_2\frac{\partial B}{\partial x_2} + \Omega_3\frac{\partial B}{\partial x_3}\right)\right)$;
$L_3 = \frac{1}{4\pi\kappa^2}\left\{\vec{\Omega}\cdot\nabla\left[\vec{\Omega}\cdot\nabla\left(\vec{\Omega}\cdot\nabla B\right)\right]\right\}$.

Из уравнения энергии (12) получаем уравнение для нахождения температуры $\Delta T^4 = \dfrac{\partial^2 T^4}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 T^4}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial^2 T^4}{\partial x_3^2} = -\dfrac{3\kappa}{c\sigma}Q$. Это уравнение выполняется для функции вида $T^4 = a_0x_1^2 + a_1x_1 + a_2 + b_0x_2^2 + b_1x_2 + b_2 + c_0x_3^2 + c_1x_3 + c_2$, где a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, c_0, c_1, c_2 — произвольные константы, удовлетворяющие условию $a_0 + b_0 + c_0 = -\dfrac{3\kappa}{2c\sigma}Q$. Остальные константы выбираются из условий согласования с граничными и начальными условиями, а также неотрицательности функций I, U, T, σ.

Вариант 2. Найдем решение в спектральном случае с коэффициентом поглощения Флека.

Из условия 1 (см. разд. 2) получаем $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu}\frac{\partial B_\nu}{\partial T}d\nu = mT^{n+6}$. С учетом этого выражения получаем уравнение для нахождения температуры: $\mathrm{div}\vec{S} = -\dfrac{m}{3(n+7)}\mathrm{div}\left(\nabla T^{n+7}\right) = Q$.

Из условия 2 получаем

$$\delta U = m_7T^{n+3} + \frac{m_8}{T^{n+4}}\left[(2a_0x_1 + a_1)^2 + (2b_0x_1 + b_1)^2 + (2c_0x_1 + c_1)^2\right],$$

где $m_7 = -\dfrac{pQ}{\kappa_0^2}\dfrac{m_1}{m}$; $m_8 = \dfrac{p(3m_3 - 2m_2 - 8m_1)}{3\kappa_0^2(n+7)^2}$; остальные коэффициенты введены ранее. Для задач Флека решение системы (11) будет иметь вид

$$I_\nu = I_{p\nu} - \kappa_\nu^{-1}(L_1 - L_2); \quad U_\nu = B_\nu - \kappa_\nu^{-1}\mathrm{div}\vec{S}_\nu; \quad \vec{S}_\nu = -\frac{1}{3\kappa_\nu}\nabla B_\nu; \quad \vec{S} = -\frac{m}{3(n+7)}\nabla T^{n+7};$$

$$U = c\sigma T^4 + \delta U, \quad \delta U = m_7T^{n+3} + \frac{m_8}{T^{n+4}}\left[(2a_0x_1 + a_1)^2 + (2b_0x_1 + b_1)^2 + (2c_0x_1 + c_1)^2\right];$$

$$\beta_\nu\left(\vec{r}, \vec{\Omega}, T\right) = \left(\chi_\nu B_\nu - \chi_\nu\kappa_\nu^{-1}B_{1\nu} + \chi_\nu\kappa_\nu^{-1}B_{2\nu} + B_{3\nu}\right)U_\nu^{-1};$$

$$T^{n+7} = a_0x_1^2 + a_1x_1 + a_2 + b_0x_2^2 + b_1x_2 + b_2 + c_0x_3^2 + c_1x_3 + c_2, \quad a_0 + b_0 + c_0 = -\frac{3(n+7)}{2m}Q.$$

Остальные константы выбираются из условий согласования с граничными и начальными условиями, а также неотрицательности функций I, U, T, σ.

Заключение

В данной работе на основе разложения резольвенты оператора переноса в ряд Неймана получены аналитические формулы для определения параметров теплового излучения в многомерной геометрии. Эти формулы позволяют при известной равновесной интенсивности, которая определяется только распределением температуры, и при заданных коэффициентах поглощения и рассеяния найти в явном виде аналитические выражения основных спектральных величин: интенсивности, плотности и потока излучения. Приведены решения в сером и спектральном приближениях для одномерной, двумерной и трехмерной геометрий.

По проведенным исследованиям можно сделать следующие выводы:

1. Решение системы (11), (12) с нулевым источником не дает отрыва температур.
2. Решение системы (11), (12) с нулевой индикатрисой рассеяния дает точные решения в сером приближении с постоянными коэффициентами поглощения.

Исходя из этого можно дать следующие рекомендации.

Для получения точных решений стационарной системы уравнений переноса излучения и энергии с отрывом температур через разложение в ряд Неймана достаточно:

1) использовать три члена в разложении в ряд Неймана;
2) рассматривать уравнение энергии с ненулевым источником;
3) выбирать индикатрису рассеяния по формуле (15).

В случае без рассеяния решение с отрывом температур получается только в сером приближении с постоянными коэффициентами поглощения.

Несмотря на то, что решения получены в стационарном случае, их можно использовать для построения численных тестов в нестационарных задачах переноса теплового излучения, так как любая нестационарная задача при задании стационарных граничных условий должна выходить с течением времени на стационарное решение. А близость приближенных численных решений к точным будет характеризовать корректность численных алгоритмов. При построении таких тестов граничные условия надо задавать из точных стационарных решений.

Список литературы

1. *Думкина Г. В., Козманов М. Ю.* Точное решение нелинейной системы уравнений энергии и нестационарного переноса излучения // Журнал вычислит. мат. и мат. физ. 1979. Т. 19. Вып. 4. С. 1061—1063.
   Dumkina G. V., Kozmanov M. Yu. Tochnoe reshenie nelineynoy sistemy uravneniy energii i nestatsionarnogo perenosa izlucheniya // Zhurnal vychilit. mat. i mat. fiz. 1979. T. 19. Vyp. 4. S. 1061—1063.

2. *Гусев В. Ю., Козманов М. Ю.* О некоторых точных решениях системы уравнений энергии и переноса излучения с учетом рассеяния // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Методики и программы численного решения задач математической физики. 1986. Вып. 3. С. 20—21.
   Gusev V. Yu., Kozmanov M. Yu. O nekotorykh tochnykh resheniyakh sistemy uravneniy energii i perenosa izlucheniya s uchyetom rasseyaniya // Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Metodiki i programmy chislennogo resheniya zadach matematicheskoy fiziki. 1986. Vyp. 3. S. 20—21.

3. *Тихомиров Б. П.* Об одном классе точных решений системы уравнений радиационного теплопереноса // Там же. Вып. 2. С. 3—8.
   Tikhomirov B. P. Ob odnom klasse tochnykh resheniy sistemy uravneniy radiatsionnogo teploperenosa // Tam zhe. Vyp. 2. S. 3—8.

4. *Шестаков А. А.* Точные решения системы уравнений энергии и переноса излучения с учетом анизотропного рассеяния в многомерном случае // Там же. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1991. Вып. 3. С. 12—14.
   Shestakov A. A. Tochnye resheniya sistemy uravneniy energii i perenosa izlucheniya s uchyetom anizotropnogo rasseyaniya v mnogomernom sluchae // Tam zhe. Ser. Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov. 1991. Vyp. 3. S. 12—14.

5. *Larsen E. W., Thommes G., Klar A., Sead M., Gotz T.* Simplified P_N approximations to the equations of radiative heat transfer and applications // J. Comp. Phys. 2002. Vol. 183. P. 652—675.

6. *Larsen E. W., Morel J. E., McGhee J. M.* Asymptotic derivation of the multigroup P_1 and simplified P_N equations with anisotropic scattering // Nucl. Sci. Eng. 1996. Vol. 123. P. 328—342.

7. *Brantley P. S., Larsen E. W.* The simplified P_3 approximation // Ibid. 2000. Vol. 134. P. 1—21.

8. *Завьялов В. В., Шестаков А. А.* Упрощенные решения задачи Флека // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2005. Вып. 3. С. 26—36.
   Zavyalov V. V., Shestakov A. A. Uproshchyennye resheniya zadachi Fleka // Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov. 2005. Vyp. 3. S. 26—36.

9. *Ахромеева Т. С., Волосевич П. П., Леванов Е. И., Маслянкин В. И.* К расчету задач трехтемпературной гидродинамики: Препринт № 28. М.: ИПМ АН СССР, 1980.
Akhromeeva T. S., Volosevich P. P., Levanov E. I., Maslyankin V. I. K raschyetu zadach tryekhtemperaturnoy gidrodinamiki: Preprint № 28. M.: IPM AN SSSR, 1980.

10. *Зуев А. И., Карлыханов Н. Г., Лыков В. А., Черняков В. Е.* О роли быстрых электронов и ограничении теплопроводности в экспериментах с газонаполненными оболочками: Препринт № 37. М.: ИПМ АН СССР, 1980.
Zuev A. I., Karlykhanov N. G., Lykov V. A., Chernyakov V. E. O roly bystrykh elektronov i ogranichenii teploprovodnosti v eksperimentakh s gazonapolnennymi obolochkami: Preprint № 37. M.: IPM AN SSSR, 1980.

11. *Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П.* Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука, 1966.
Zeldovich ya. B., Rayzer Yu. P. Fizika udarnykh voln I vysokotemperaturnykh gidrodinamicheskikh yavleniy. M.: Nauka, 1966.

12. *Бай Ши-и.* Динамика излучающего газа. М.: Мир, 1968.
Bay Shi-i. Dinamika izluchayushchego gaza. M.: Mir, 1968.

13. *Fleck J. A., Cummings J. D.* An implicit Monte Carlo scheme for calculating time and frequency dependent nonlinear radiation transport // J. Comp. Phys. 1971. Vol. 8. P. 313—342.

Статья поступила в редакцию 05.12.22.