

УДК 519.6

## СРАВНЕНИЕ WPH И DISPH МЕТОДОВ ЧАСТИЦ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ УДАРНЫХ ВОЛН

Ф. А. Сапожников, В. С. Рыкованов  
(ФГУП "РФЯЦ-ВНИИТФ им. академ. Е. И. Забабахина",  
г. Снежинск Челябинской области)

Изложены теоретические основы метода гидродинамики сглаженных частиц (SPH). Рассматриваются две его разновидности — WPH и DISPH. Приводятся тестовые расчеты для определения применимости методов при моделировании ударных волн. Рассматриваются следующие тесты: задача Сода, задача Ноха и задача Вудварда—Колеллы в одномерной постановке, а также седовский взрыв в трехмерной постановке. При сравнении WPH и DISPH учитываются ошибка в норме  $L_1$  и астрономическое время, затраченное на проведение расчета. Для трехмерных тестов проводится оценка асимметрии решения. Во всех тестах, рассчитанных по методу WPH, получается меньшая ошибка и счет выполняется от 1,5 до 2 раз быстрее, чем по DISPH. Делается вывод о целесообразности применения метода WPH при моделировании задач с ударными волнами.

*Ключевые слова:* гидродинамика сглаженных частиц, SPH, программа "Молох", ударные волны, задача Сода, задача Ноха, задача Вудварда—Колеллы, седовский взрыв.

### Введение

Метод гидродинамики сглаженных частиц SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics), или просто *метод сглаженных частиц*, в настоящее время широко известен и в силу своей лагранжевости и бессеточной дискретизации наиболее часто применяется для расчетов движений сплошных сред с большими деформациями. На протяжении 45 лет своего развития [1, 2] для него было предложено большое количество различных формулировок, приспособленных для определенных задач.

В качестве наиболее удачных подходов для расчетов ударных волн и неустойчивостей можно выделить подходы, реализованные в методах DISPH (Density-Independent SPH) [3] и WPH (Weighted SPH) [4], совместное исследование которых проведено в работе [5]. В настоящей работе проводится сравнение этих методов между собой на задачах с ударными волнами.

Далее используются общепринятые обозначения физических величин, описывающих состояние определенных частей жидкости или газа:  $\rho$  — плотность;  $V$  — объем;  $m = \rho V$  — масса;  $\mathbf{v}$  — скорость;  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$  — импульс;  $E$  и  $U$  — полная и внутренняя энергии,  $e = E/m$  и  $u = U/m$  — их удельные аналоги;  $P$  — давление;  $c$  — скорость звука;  $\mathbf{r}$  — вектор, состоящий из  $d$  компонент — декартовых координат, любые индексы которых будут обозначаться как  $\alpha$  или  $\beta^1$ ;  $t$  — время.

В методе SPH используются следующие обозначения:  $i, j$  — уникальные номера SPH-частиц;  $W(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|, h_i) \equiv W(r_{ij}, h_i) \equiv W_{ij}(h_i)$  — так называемая сглаживающая функция ядра, зависящая от расстояния  $r_{ij}$  между парой частиц  $i, j$  и радиуса  $h_i$  влияния ядра  $i$ -й частицы.

Система уравнений идеальной гидродинамики, состоящая из трех уравнений (законов сохранения массы, импульса и энергии), в SPH-дискретизации представима в виде

<sup>1</sup>При этом  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \equiv \sum_{\alpha=1}^d a_{\alpha} b_{\alpha} \equiv a_{\alpha} b_{\alpha}$  для любых векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ .

$$\begin{aligned}\rho_i &= \frac{m_i}{V_i} \equiv \frac{m_i}{X_i} \sum_j X_j W_{ij}(h_i); \\ \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} &= -V_i \sum_j V_j \left( \frac{\Phi_j}{\Phi_i} P_j \nabla_i W_{ij}(h_i) + \frac{\Phi_i}{\Phi_j} P_i \nabla_i W_{ij}(h_j) \right); \\ \frac{dU_i}{dt} &= V_i \sum_j V_j \frac{\Phi_i}{\Phi_j} P_i (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) \nabla_i W_{ij}(h_i).\end{aligned}$$

Полная энергия запишется в виде

$$\frac{dE_i}{dt} = \frac{dU_i}{dt} + \mathbf{v}_i \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = V_i \sum_j V_j \left( -\frac{\Phi_j}{\Phi_i} P_j \mathbf{v}_i \nabla_i W_{ij}(h_i) - \frac{\Phi_i}{\Phi_j} P_i \mathbf{v}_j \nabla_i W_{ij}(h_j) \right).$$

В силу антисимметрии  $\nabla_i W_{ij}(h) = -\nabla_j W_{ij}(h)$  уравнения для  $\frac{d\mathbf{p}}{dt}$  и  $\frac{dE}{dt}$  являются консервативными<sup>2</sup>. В качестве  $\Phi$  может быть выбрана любая функция от физических величин, связанных с частицами. При выборе  $\Phi = 1/\rho$  вид уравнений оказывается согласован с видом, полученным из лагранжиана системы [6]. В качестве  $X$  обычно выбирают любую простую экстенсивную величину<sup>3</sup>, характеризующую частицы (например,  $m$ ,  $U$ ,  $1$ ,  $V$ , ...).

Для повышения порядка точности дифференцирования в SPH можно использовать следующие представления, получаемые с помощью разложения в ряд Тейлора:

$$\begin{aligned}f_j &= f_i + \nabla_\alpha f_i (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)_\alpha + \dots; \\ \sum_j f_j V_j G_{i,\beta} W_{ij}(h) &= f_i \sum_j V_j G_{i,\beta} W_{ij}(h) + \nabla_\alpha f_i \sum_j V_j (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)_\alpha G_{i,\beta} W_{ij}(h) + \dots,\end{aligned}$$

где

$$\mathbf{G}_i \equiv \begin{cases} \nabla_i & \text{для подходов CSPM [7], MSPH [8];} \\ \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i & \text{для SSPH [9], IAD}_0 \text{ [10], KGF-SPH [11];} \\ \frac{1}{V_j} (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) & \text{для MLS [12].} \end{cases}$$

Отсюда могут быть получены выражения для  $\nabla f_i$ :

$$\nabla_\alpha f_i \approx \left( \sum_j (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)_\alpha V_j G_{i,\beta} W_{ij}(h) \right)^{-1} \sum_j (f_j - f_i) V_j G_{i,\beta} W_{ij}(h).$$

Для добавления в уравнения вязкости, необходимой для правильного описания ударных волн, существуют два пути: введение искусственной вязкости или использование решения задачи о распаде разрыва (метод Годунова).

В обоих случаях взаимодействующую пару частиц  $i, j$  можно рассмотреть как две среды, разделенные общей границей (в простейшем случае она проходит через  $\mathbf{r}^* = (\mathbf{r}_i + \mathbf{r}_j)/2$  перпендикулярно  $\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i$ ). Вязкость необходима только для сближающихся частиц,  $(\mathbf{v}_i^* - \mathbf{v}_j^*)(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) < 0$ , где  $\mathbf{v}^*$  можно получать способом с любым порядком восстановления скоростей из центров частиц на грани:

<sup>2</sup>В силу связи  $\rho_i = \frac{m_i}{X_i} \sum_j X_j W_{ij}(h_i)$  и  $\frac{d\rho_i}{dt} = \rho_i \sum_j \frac{\Phi_j}{\Phi_i} (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) V_j \nabla_i W_{ij}(h_i)$ , где  $\Phi = X/V$ , рассматриваемая система уравнений является полностью консервативной по Самарскому, но используемая численная схема вида *предиктор—корректор* либо нарушает соответствие  $\frac{dU}{dt} = -P \frac{dV}{dt}$  при сохранении  $E$ , либо выполняет первое ценой потери сохранения  $E$ .

<sup>3</sup>Экстенсивная величина изменяется пропорционально изменению количества одинаковых частей вещества (например, масса двух частей вещества равна удвоенной массе одной части такого же вещества), а интенсивная величина остается неизменной. Простая экстенсивная величина не может представлять собой произведение экстенсивной и интенсивной величин. Физическим смыслом значения 1 является единичное количество частиц, "находящееся в ней самой" (т. е. сама частица в количестве 1, так как в процессе моделирования она считается сохраняющей свою целостность и не объединяющейся с другими частицами).

$v_\alpha^* = v_\alpha + \nabla_\beta v_\alpha (\mathbf{r}^* - \mathbf{r})_\beta + \dots$ . Дополнительно к этому допустимо использование ограничителей наклона (например, ограничитель ван-Лири).

В методе Годунова необходим решатель задачи о распаде произвольного разрыва. В качестве такового наиболее часто используется приближенный решатель семейства HLL (HLLC, HLLD) [13]. В случае существования для простых уравнений состояния (УРСов) используются точные решения задачи о распаде разрыва. Для нахождения исходных величин ( $\rho$ ,  $P$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $u$ ,  $c$ ) слева и справа от разрыва с координатой  $\mathbf{r}^*$  используется такой же способ восстановления из центров частиц на грань разрыва, что и для определения скоростей сближения в вязкости.

Физическая вязкость рассматривается в квадратично-линейном виде [14] с использованием подстройки коэффициента в соответствии с [15].

В итоге особенности выбранных схем можно свести в таблицу.

### Особенности сравниваемых видов метода SPH

Метод	$X$	Вязкость	Повышение порядка точности
DISPH	$U$	Искусственная [15]	Нет
WPH	1	Метод Годунова, HLLC	MLS

### Результаты расчетов

В программном комплексе "Молох" [16] реализован трехмерный (3D) метод частиц, т. е. используется 3D (сферическое) ядро, а именно Wendland C4 [17]. Поэтому для счета задач в одномерной (1D) и двумерной (2D) постановках необходимо использовать 3D образцы, правда, можно уменьшить их линейные размеры по "второстепенным" направлениям. Везде, где не определено иное, используются периодические граничные условия.

Исследование влияния способа расстановки частиц на точность описания среды и нахождение оптимального способа приведены в работе [18], где показано, что частицы, расставленные в узлах гранецентрированной кубической (ГЦК) решетки, дают наименьшую ошибку. Поэтому в тестах начальная расстановка частиц происходит с использованием шаблона ГЦК решетки.

**Задача о распаде разрыва (задача Сода) в 1D постановке (задача 1).** Этот тест моделирует распад разрыва с образованием ударной волны. В качестве эталона здесь используется решение, приведенное в [19]. Одномерная равномерная сетка при получении эталонного решения содержала 20 000 ячеек.

В левой половине образца давление равно 1 Па, плотность — 1 кг/м<sup>3</sup>. В правой половине образца давление равно 10<sup>-1</sup> Па, плотность — 0,125 кг/м<sup>3</sup>. УРС — для идеального газа с  $\gamma = 1,4$ . Граничные условия: по направлению  $x$  — жесткие стенки, по  $y$  и  $z$  — периодические. Ядро содержит 180 соседей. Задача считалась до момента времени 0,25 с.

Для определения порядка сходимости было проведено пять расчетов:

- 1) количество частиц  $128 \times 32 \times 32$ ; размер образца  $1 \text{ м} \times 1/4 \text{ м} \times 1/4 \text{ м}$ ;
- 2) количество частиц  $256 \times 32 \times 32$ ; размер образца  $1 \text{ м} \times 1/8 \text{ м} \times 1/8 \text{ м}$ ;
- 3) количество частиц  $512 \times 32 \times 32$ ; размер образца  $1 \text{ м} \times 1/16 \text{ м} \times 1/16 \text{ м}$ ;
- 4) количество частиц  $1024 \times 32 \times 32$ ; размер образца  $1 \text{ м} \times 1/32 \text{ м} \times 1/32 \text{ м}$ ;
- 5) количество частиц  $2048 \times 32 \times 32$ ; размер образца  $1 \text{ м} \times 1/64 \text{ м} \times 1/64 \text{ м}$ .

На рис. 1 показано начальное расположение частиц. Частицы в образце имеют равную массу, а так как плотность образца слева в 8 раз больше, то и концентрация частиц слева в 8 раз больше (в 2 раза по каждому направлению). Изображения сфер взаимодействия частиц соответствуют наименьшему и наибольшему среди всех частиц радиусам взаимодействия, в обеих сферах находятся  $\approx 180$  "взвешенных соседей" — область влияния частицы.

На рис. 2—5 приведены профили плотности, давления,  $x$ -составляющей скорости, удельной энергии на момент времени  $t = 0,25$  с, полученные по WPH-методу при увеличивающемся количестве частиц, а на рис. 6—9 — то же самое по DISPH-методу. Оба метода показали хорошие результаты. Наблюдается сходимость к эталонному решению.

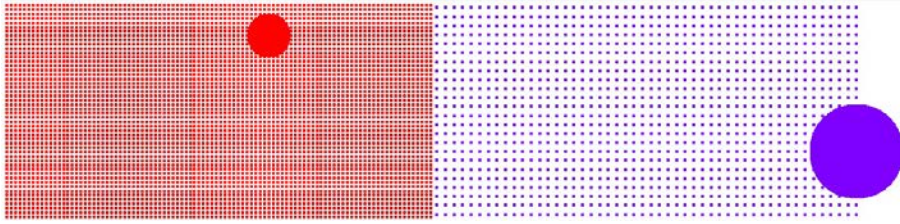


Рис. 1. Задача 1. Начальная расстановка частиц с раскраской по плотности

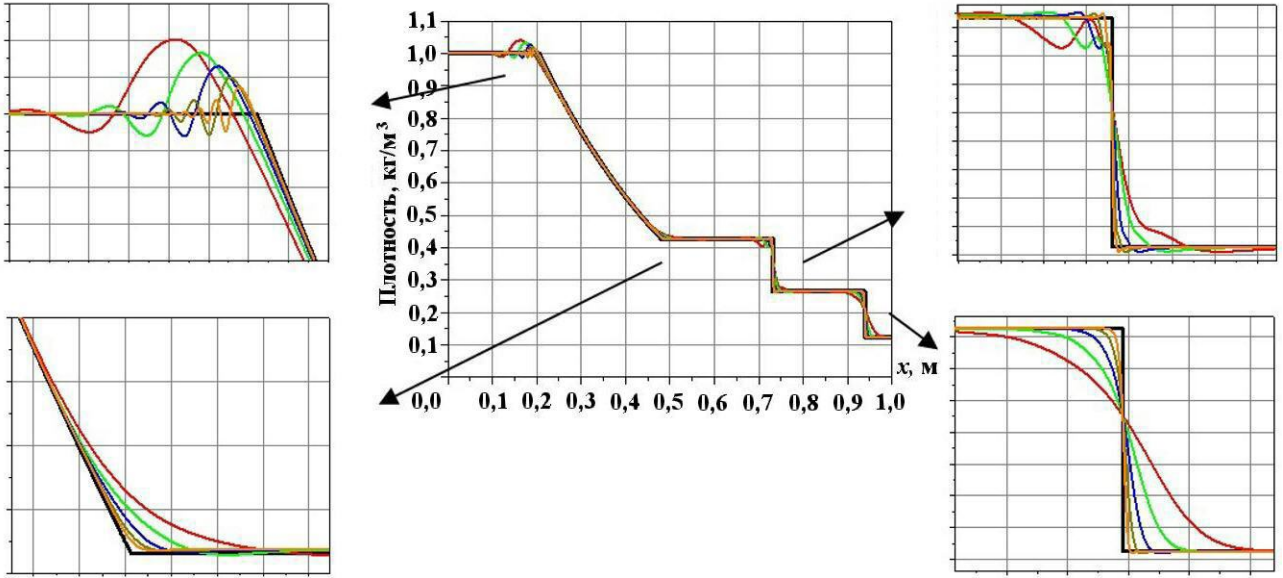


Рис. 2. Задача 1. Профили плотности для WPH,  $t = 0,25$  с: — эталон; — 128 частиц; — 256 частиц; — 512 частиц; — 1024 частицы; — 2048 частиц

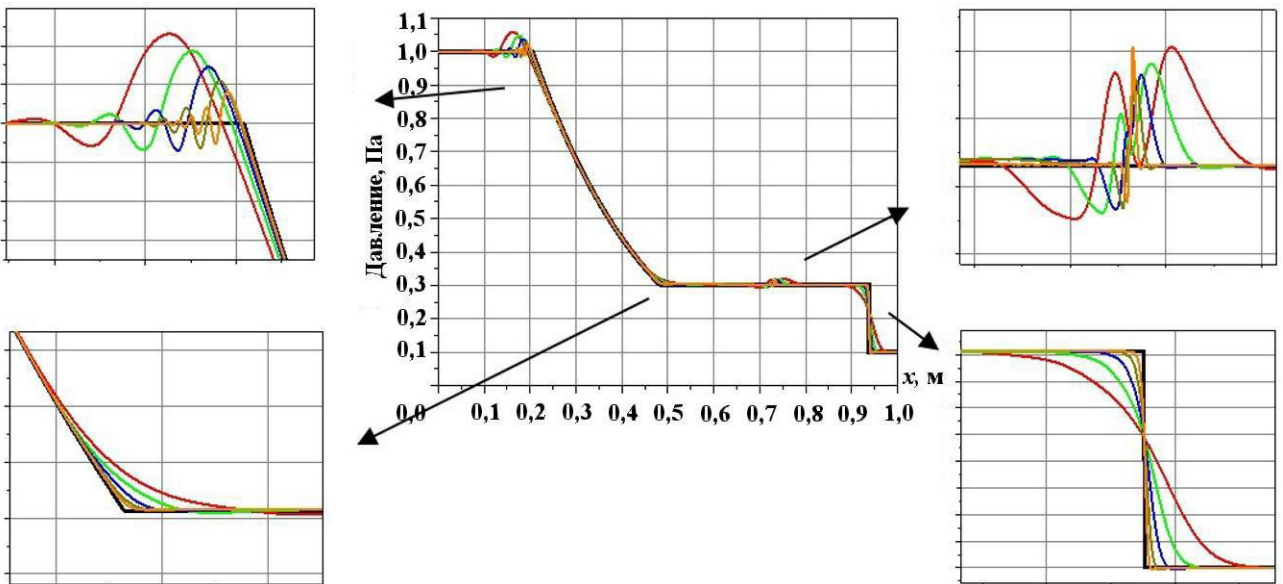


Рис. 3. Задача 1. Профили давления для WPH,  $t = 0,25$  с: — эталон; — 128 частиц; — 256 частиц; — 512 частиц; — 1024 частицы; — 2048 частиц

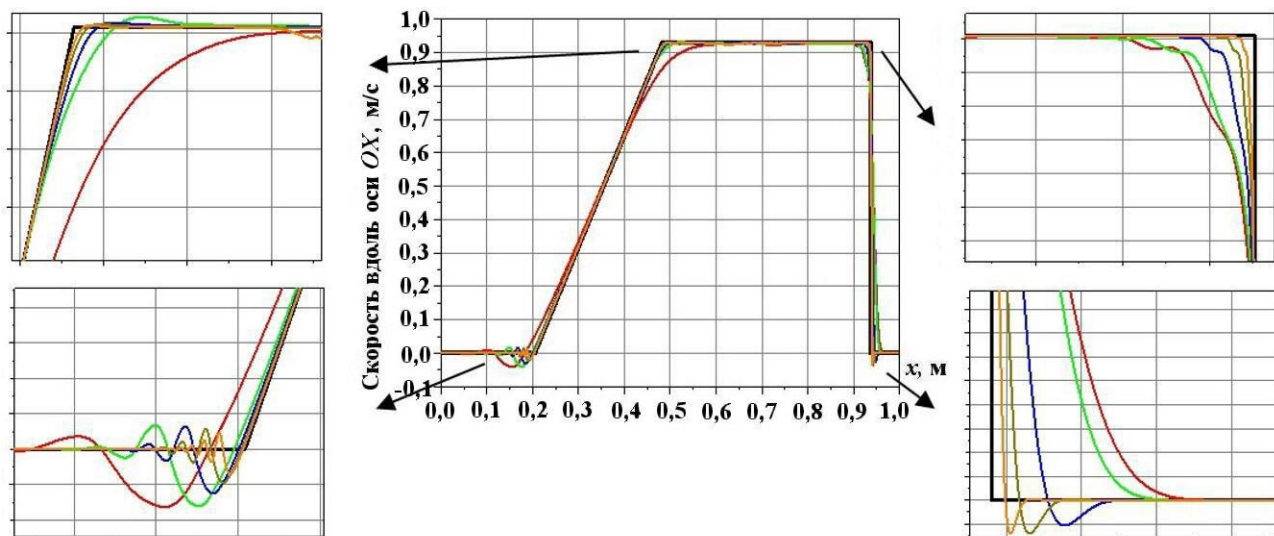


Рис. 4. Задача 1. Профили  $x$ -составляющей скорости для WPH,  $t = 0,25$  с: — эталон; — 128 частиц; — 256 частиц; — 512 частиц; — 1024 частицы; — 2048 частиц

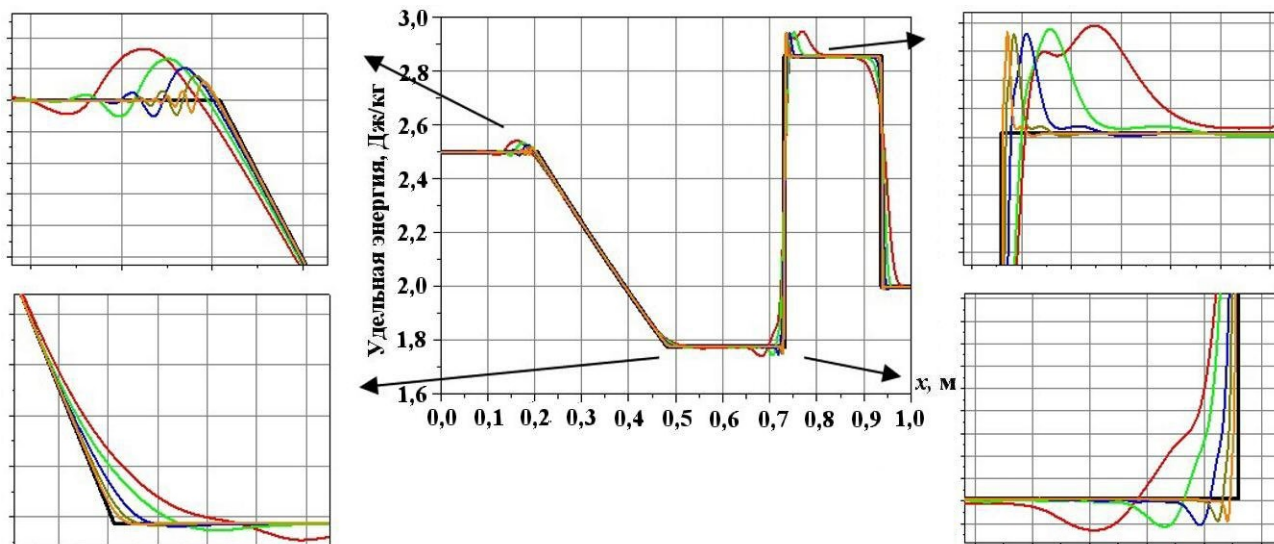


Рис. 5. Задача 1. Профили удельной энергии для WPH,  $t = 0,25$  с: — эталон; — 128 частиц; — 256 частиц; — 512 частиц; — 1024 частицы; — 2048 частиц

На рис. 10, 11 показаны профили плотности, давления,  $x$ -составляющей скорости, удельной энергии на момент времени  $t = 0,25$  с для двух методов при наибольшем количестве частиц. По обоим методам получены близкие решения, однако есть и различия:

- хотя для обоих методов в плотности при  $x = 0,2$  м присутствуют нефизичные осцилляции, для DISPН наблюдается нефизичное возмущение при  $x = 0,5$  м, тогда как для WPH — гладкое решение;
- для давления повторяется аналогичная ситуация, однако при  $x = 0,73$  м (на границе двух "веществ") при использовании метода WPH наблюдается нефизичный скачок, который в 4 раза больше, чем при DISPН;
- для скорости, полученной по DISPН, при  $x = 0,5$  м наблюдается сильный шум, а по WPH — гладкое решение;
- для удельной энергии повторяется ситуация, как для скорости.

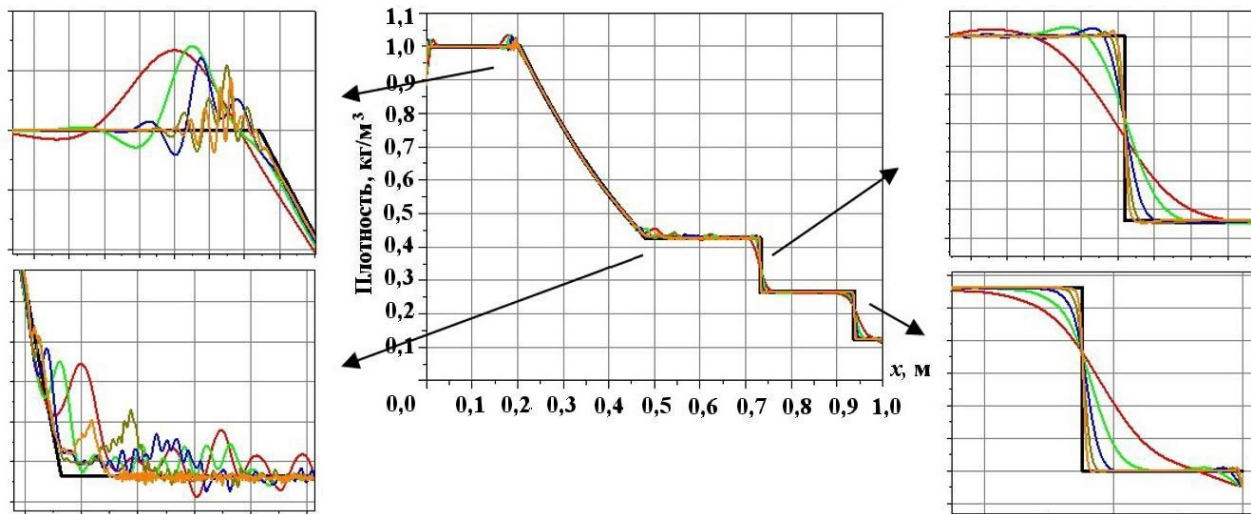


Рис. 6. Задача 1. Профили плотности для DISPH,  $t = 0,25$  с: — эталон; — 128 частиц; — 256 частиц; — 512 частиц; — 1024 частицы; — 2048 частиц

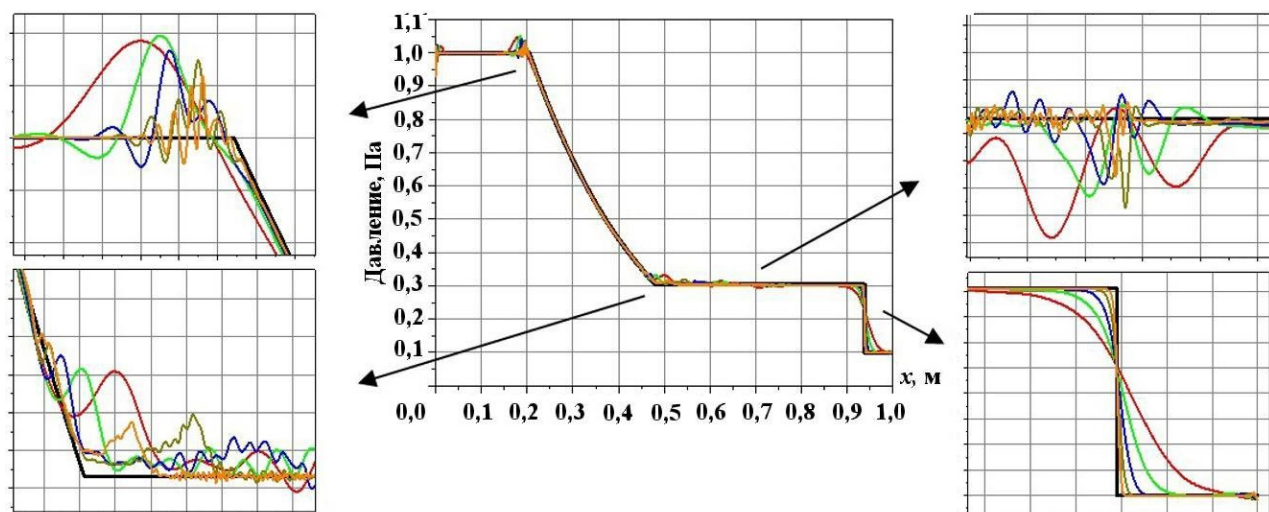


Рис. 7. Задача 1. Профили давления для DISPH,  $t = 0,25$  с: — эталон; — 128 частиц; — 256 частиц; — 512 частиц; — 1024 частицы; — 2048 частиц

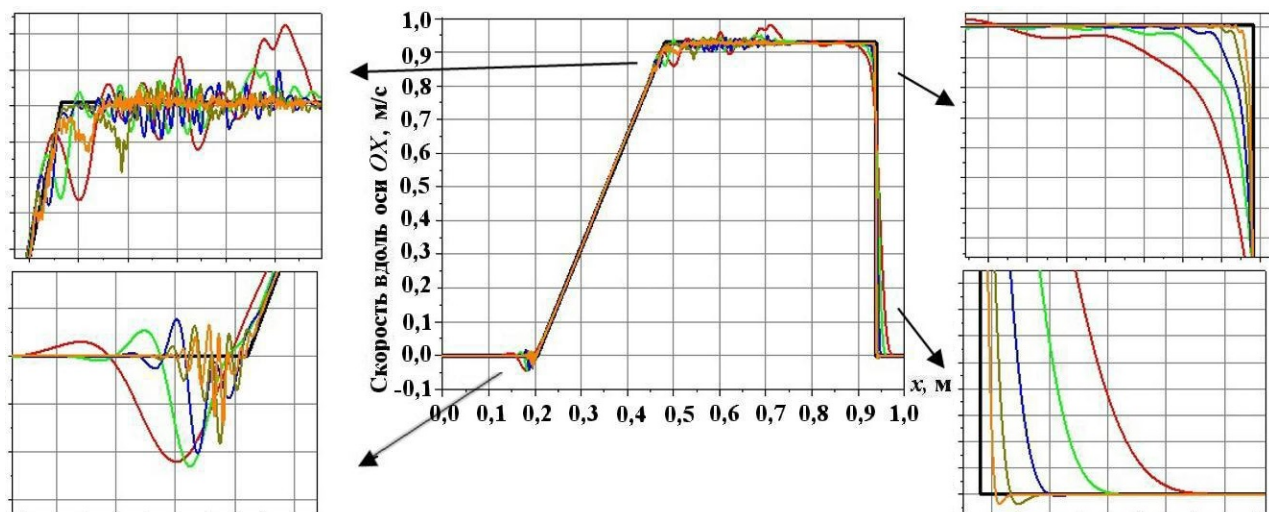


Рис. 8. Задача 1. Профили  $x$ -составляющей скорости для DISPH,  $t = 0,25$  с: — эталон; — 128 частиц; — 256 частиц; — 512 частиц; — 1024 частицы; — 2048 частиц

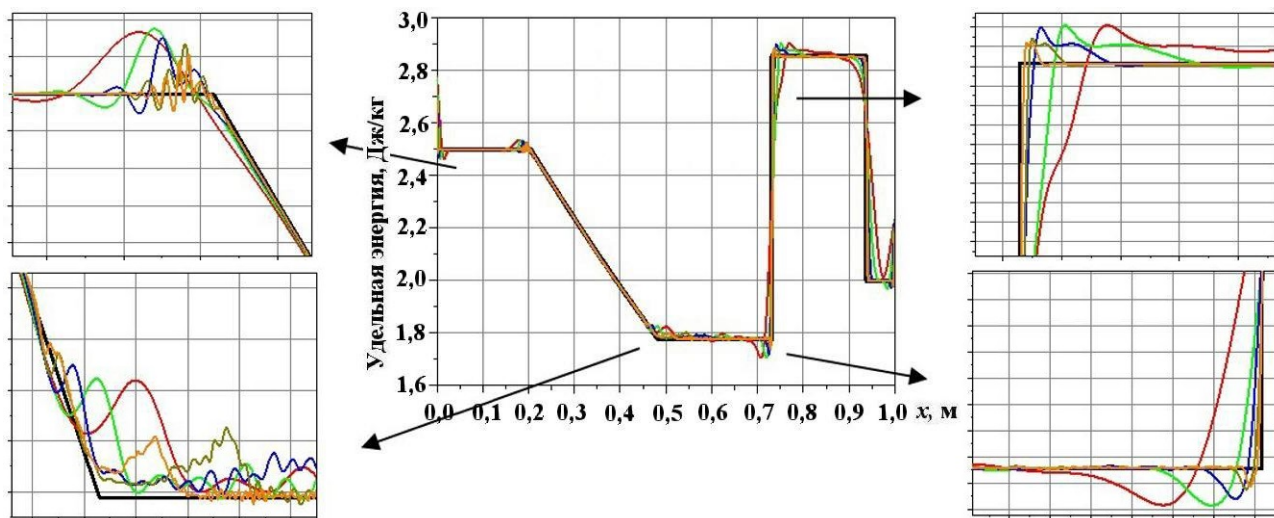


Рис. 9. Задача 1. Профили удельной энергии для DISPH,  $t = 0,25$  с: — эталон; — 128 частиц; — 256 частиц; — 512 частиц; — 1024 частиц; — 2048 частиц

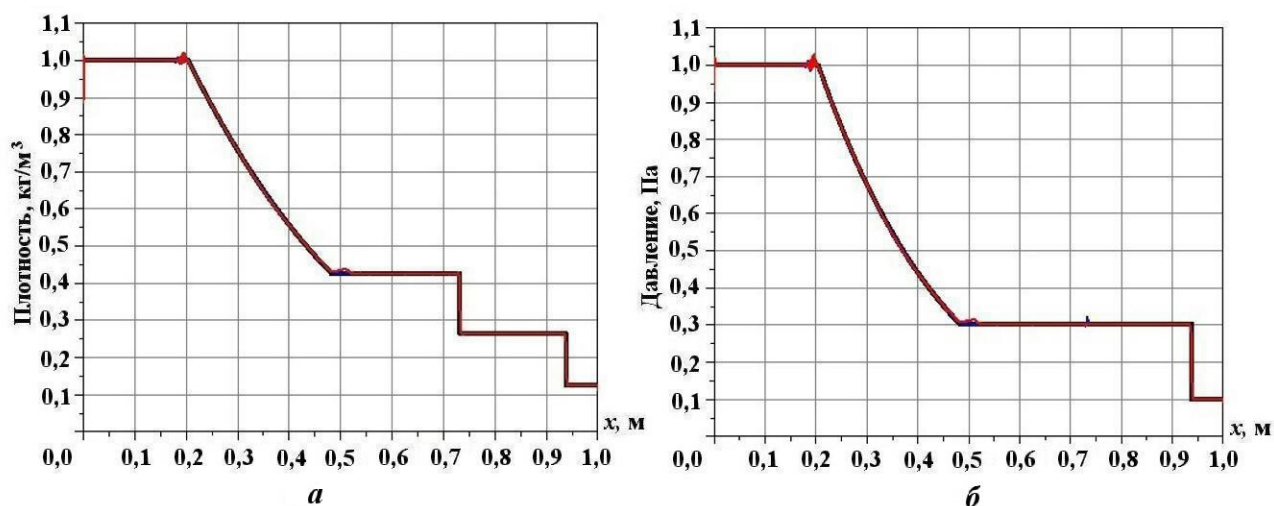


Рис. 10. Задача 1. Профили плотности (а) и давления (б) при числе частиц 2048,  $t = 0,25$  с: — эталон; — WPH; — DISPH

Сохранение исходной ГЦК решетки не влияет на гладкость решения. При использовании DISPH-метода решетка разрушается там, где при WPH она еще сохранена. На рис. 12 приведены частицы, имеющие координату  $0,44 \text{ м} < x < 0,76 \text{ м}$ . По DISPH-методу получается шум в скорости как на идеальной решетке, так и на разрушенной.

Оценим ошибки в нормах  $L_1$  и  $L_2$  и найдем порядок сходимости. На рис. 13 показаны зависимости ошибок плотности и давления от числа частиц в  $x$ -направлении для обоих методов<sup>4</sup>.

Повышенную точность метода WPH можно проиллюстрировать на примере нормы  $L_1$ : как для плотности, так и давления в подробных расчетах с WPH получается меньшая ошибка и более высокий порядок сходимости 0,8, чем с DISPH — 0,55 (рис. 14). В данном тесте решение WPH было менее "шумным" и более точным для высоких разрешений. По WPH-методу посчитано в 1,5 раза быстрее, чем по DISPH, при этом при использовании WPH сделано 3 804 шага, а при DISPH — 4 797.

<sup>4</sup>На рис. 13 и далее на рисунках  $n/n_0$  — отношение текущего числа частиц в направлении вдоль  $x$  к их наименьшему числу ( $n_0 = 128$ ) в этом направлении.

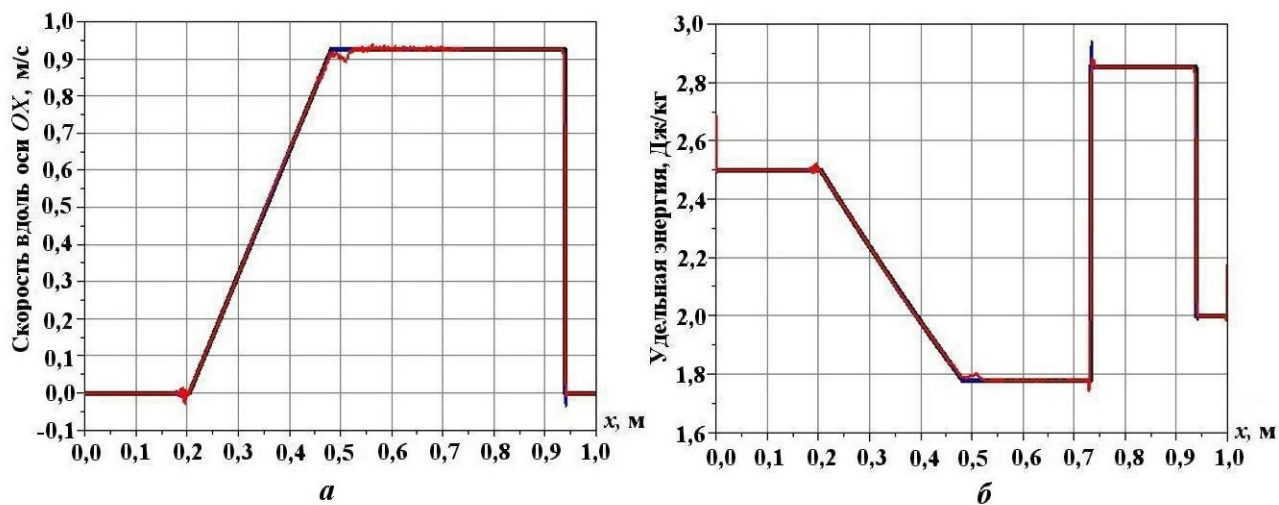


Рис. 11. Задача 1. Профили  $x$ -составляющей скорости (а) и удельной энергии (б) при числе частиц 2048,  $t = 0,25$  с: — эталон; — WPH; — DISPH

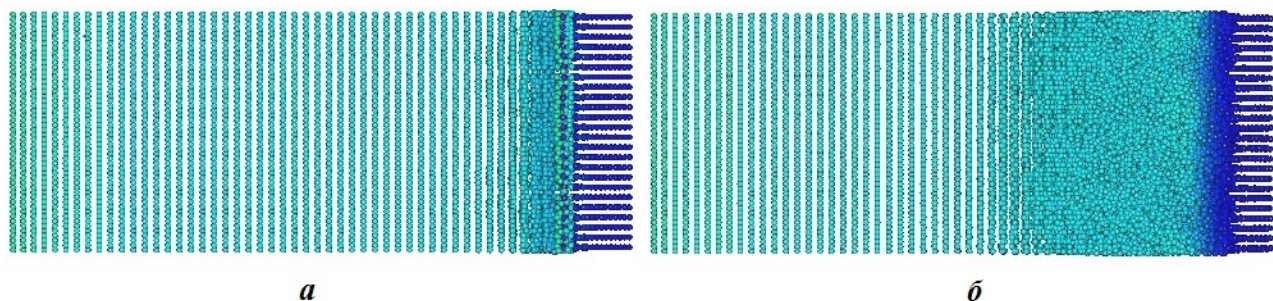


Рис. 12. Задача 1. Частицы, окрашенные по плотности, для  $0,44\text{ м} < x < 0,76\text{ м}$ ,  $t = 0,25$  с: а — WPH; б — DISPH

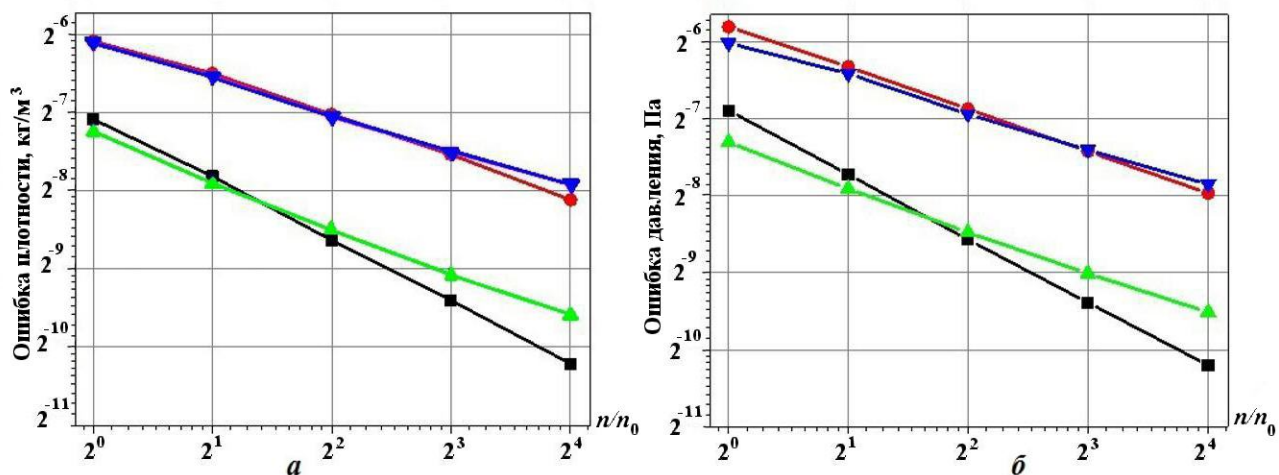


Рис. 13. Задача 1. Зависимости ошибок в нормах  $L_1$  и  $L_2$  от числа частиц в  $x$ -направлении для плотности (а) и давления (б): —■— WPH, в норме  $L_1$ ; —●— WPH, в норме  $L_2$ ; —▲— DISPH, в норме  $L_1$ ; —▼— DISPH, в норме  $L_2$



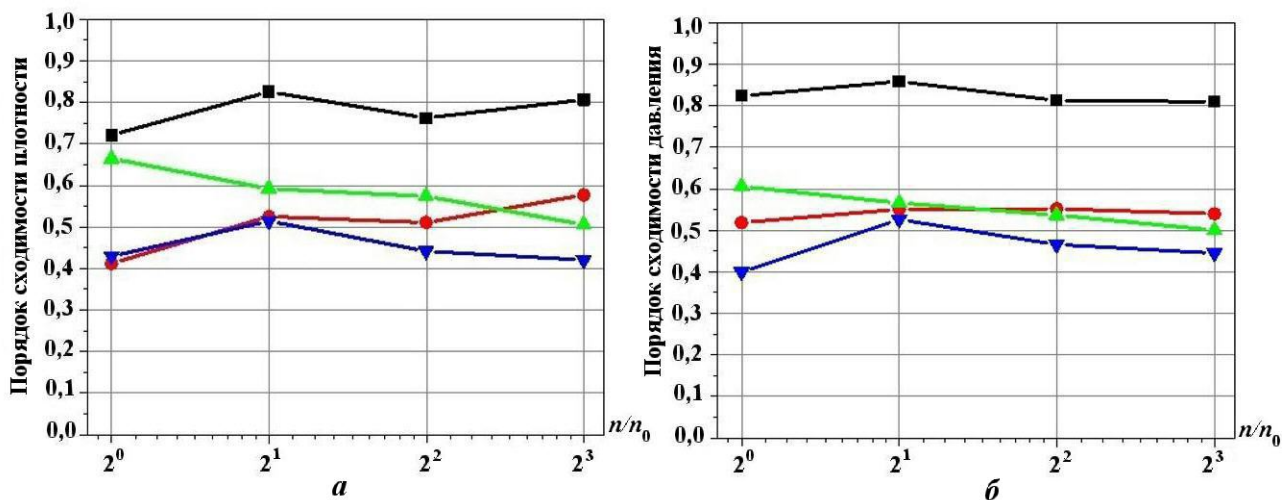


Рис. 14. Задача 1. Зависимости порядка сходимости в нормах  $L_1$  и  $L_2$  от числа частиц в  $x$ -направлении для плотности (а) и давления (б):  $\blacksquare$  — WPH, в норме  $L_1$ ;  $\bullet$  — WPH, в норме  $L_2$ ;  $\blacktriangle$  — DISPH, в норме  $L_1$ ;  $\blacktriangledown$  — DISPH, в норме  $L_2$

**Задача Ноха в 1D постановке (задача 2).** Этот тест моделирует столкновение двух слоев газа, движущихся с одинаковой скоростью навстречу друг другу. В качестве эталона используется решение, приведенное в [20]. Одномерная равномерная сетка, на которой получено аналитическое решение, содержала 20 000 ячеек.

Скорость в левой половине образца  $v_x = 1$  м/с, в правой половине образца  $v_x = -1$  м/с; давление равно  $10^{-6}$  Па; плотность —  $1$  кг/м<sup>3</sup>. УРС — для идеального газа с  $\gamma = 5/3$ . Граничные условия: по направлению  $x$  — свободная поверхность, по  $y$  и  $z$  — периодические. Ядро содержит 180 соседей. Время счета — 0,6 с.

Для определения порядка сходимости было проведено пять расчетов:

- 1) количество частиц  $128 \times 32 \times 32$ ; размер образца  $3 \text{ м} \times 1/4 \text{ м} \times 1/4 \text{ м}$ ;
- 2) количество частиц  $256 \times 32 \times 32$ ; размер образца  $3 \text{ м} \times 1/8 \text{ м} \times 1/8 \text{ м}$ ;
- 3) количество частиц  $512 \times 32 \times 32$ ; размер образца  $3 \text{ м} \times 1/16 \text{ м} \times 1/16 \text{ м}$ ;
- 4) количество частиц  $1024 \times 32 \times 32$ ; размер образца  $3 \text{ м} \times 1/32 \text{ м} \times 1/32 \text{ м}$ ;
- 5) количество частиц  $2048 \times 32 \times 32$ ; размер образца  $3 \text{ м} \times 1/64 \text{ м} \times 1/64 \text{ м}$ .

На рис. 15 изображено начальное расположение частиц. Они имеют равные массы, отличается только  $x$ -составляющая скорости.

На рис. 16–19 приведены профили плотности, давления,  $x$ -составляющей скорости, удельной энергии на момент времени  $t = 0,6$  с, полученные по WPH-методу при увеличивающемся количестве частиц, а на рис. 20–23 — то же самое по DISPH-методу. Оба метода показали хороший результат. Наблюдается сходимость к эталонному решению.

На рис. 24 приведены профили плотности, давления,  $x$ -составляющей скорости, удельной энергии на момент времени  $t = 0,6$  с для двух методов при наибольшем количестве частиц. Оба метода

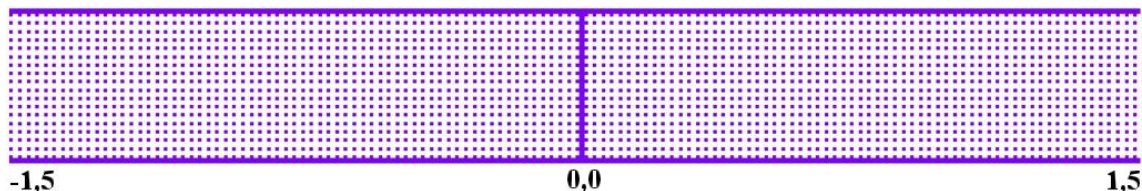


Рис. 15. Задача 2. Начальная расстановка частиц

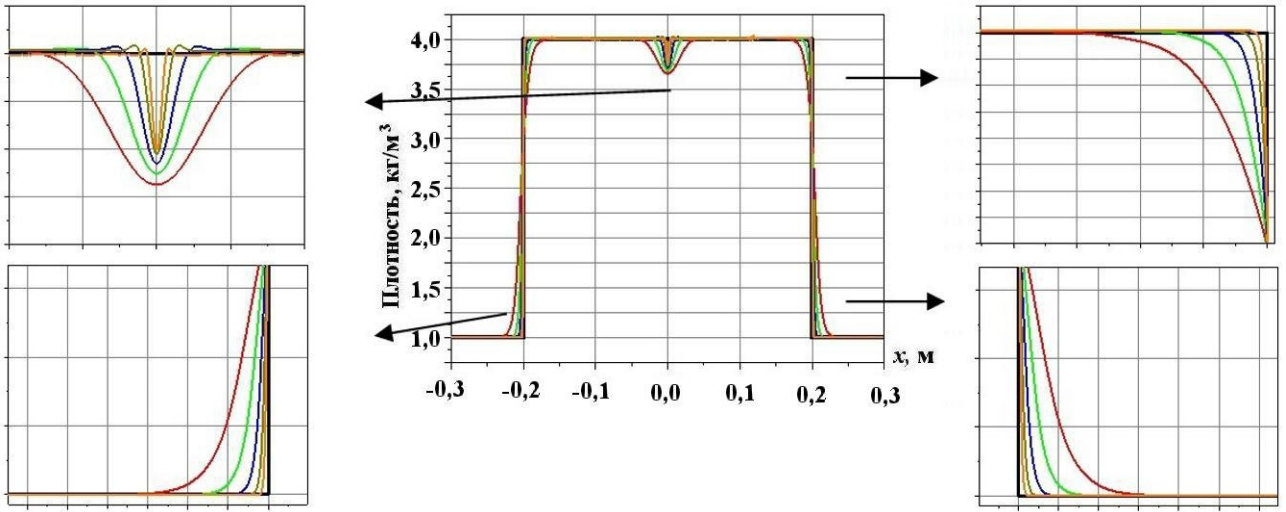


Рис. 16. Задача 2. Профили плотности для WPH,  $t = 0,6$  с: — эталон; — 128 частиц; — 256 частиц; — 512 частиц; — 1024 частицы; — 2048 частиц

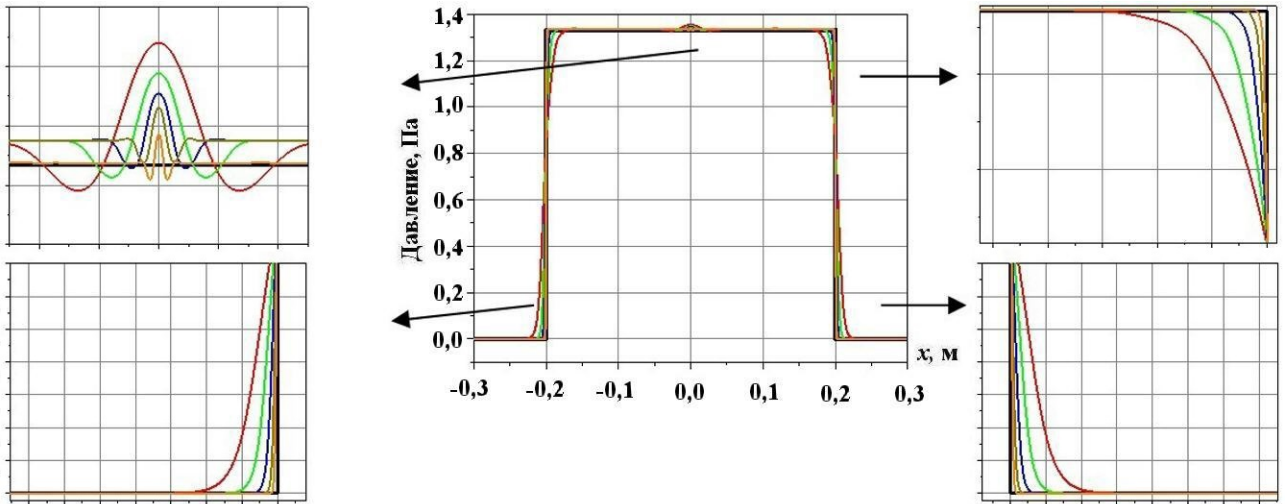


Рис. 17. Задача 2. Профили давления для WPH,  $t = 0,6$  с: — эталон; — 128 частиц; — 256 частиц; — 512 частиц; — 1024 частицы; — 2048 частиц

показали близкие решения, однако есть и различия. Энтропийный след на границе двух газов ( $x = 0$ ), которого вообще не должно быть, для WPH-метода по амплитуде в 2,5 раза меньше, чем для DISPH, и с увеличением количества частиц по направлению уменьшился в 1,5 раза, тогда как для DISPH-метода остался практически таким же (только стал уже). Для давления и удельной энергии повторяется ситуация, как для плотности.

Из рис. 25, а можно заметить, что давление, полученное по WPH-методу, сходится не к аналитическому решению (1,33335 Па), а немного более завышенному значению (1,33738 Па), но для 2048 частиц вдоль  $x$  решение становится близким к точному. Это можно объяснить тем, что после прохождения ударной волны по образцу частицы, изначально расставленные в узлах ГЦК решетки, начали уходить со своих позиций, создавая новую нерегулярную структуру, которая сначала была несрелаксированной, а по прошествии совсем небольшого времени стала равновесной (срелаксированной). Такое поведение решения еще раз подтверждает важность начального расположения частиц.

Оценим ошибки в нормах  $L_1$  и  $L_2$  и найдем порядок сходимости. На рис. 26 приведены зависимости ошибок плотности и давления от числа частиц в  $x$ -направлении для обоих методов.

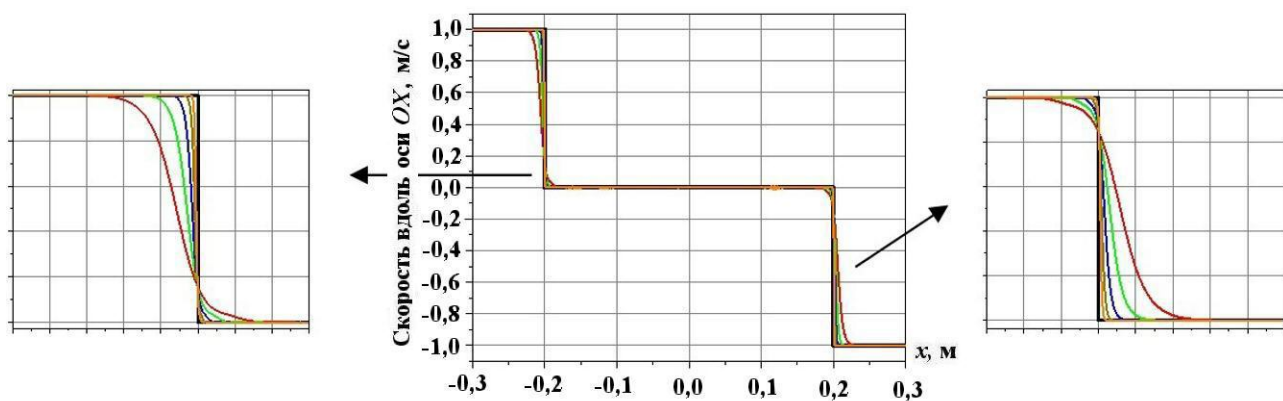


Рис. 18. Задача 2. Профили  $x$ -составляющей скорости для WPH,  $t = 0,6$  с: — эталон; — 128 частиц; — 256 частиц; — 512 частиц; — 1024 частицы; — 2048 частиц

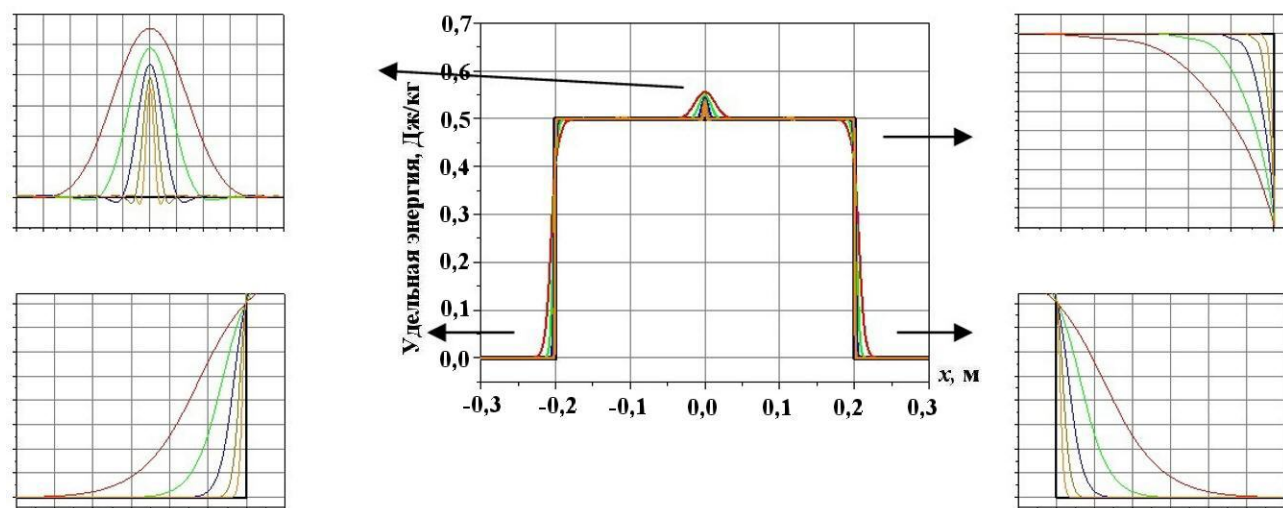


Рис. 19. Задача 2. Профили удельной энергии для WPH,  $t = 0,6$  с: — эталон; — 128 частиц; — 256 частиц; — 512 частиц; — 1024 частицы; — 2048 частиц

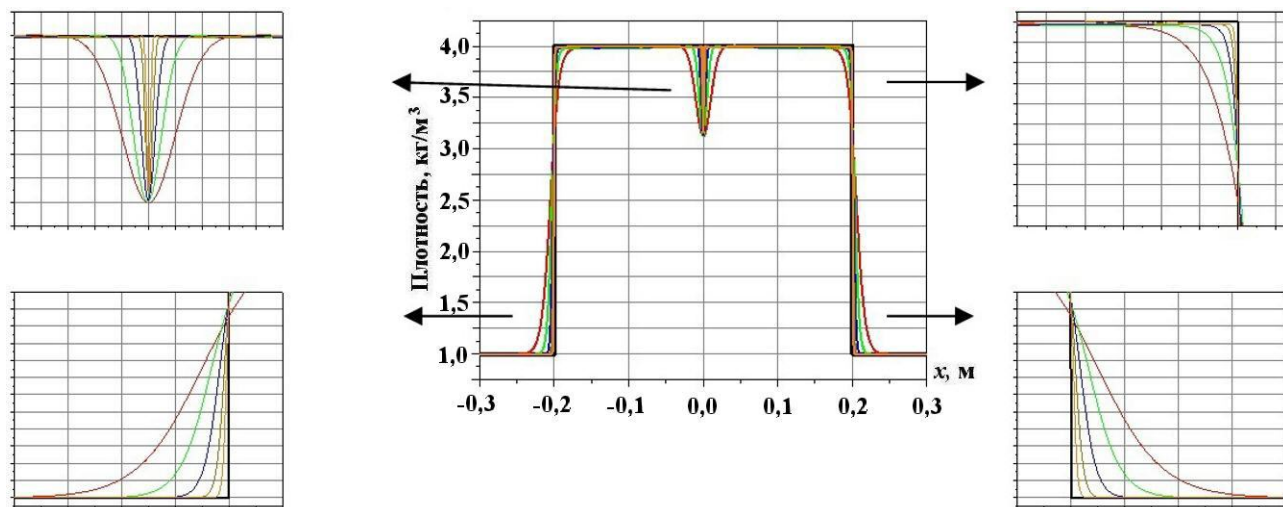


Рис. 20. Задача 2. Профили плотности для DISPH,  $t = 0,6$  с: — эталон; — 128 частиц; — 256 частиц; — 512 частиц; — 1024 частицы; — 2048 частиц

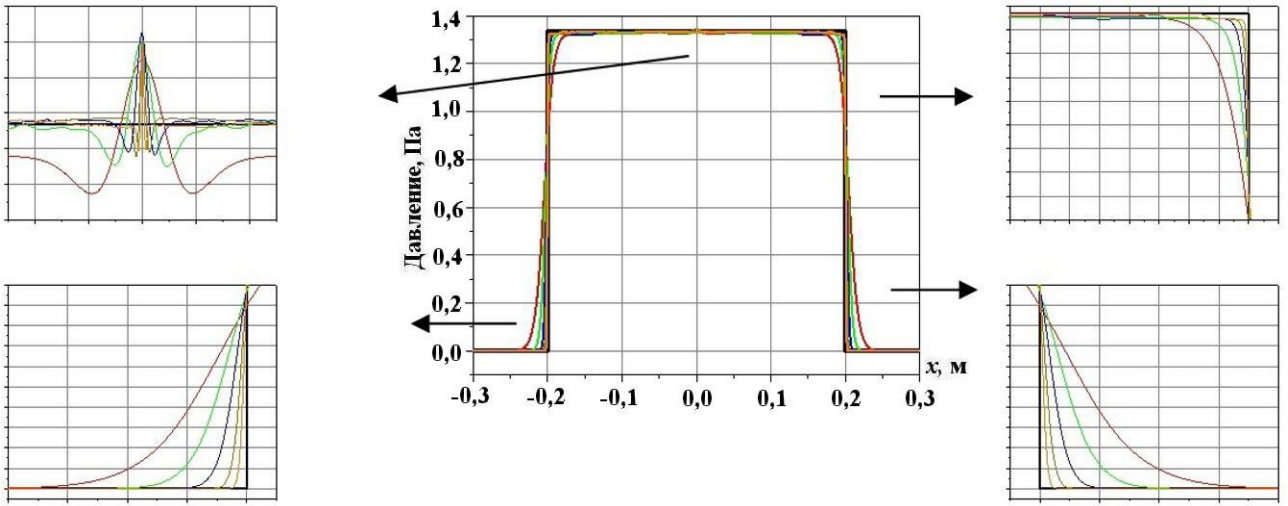


Рис. 21. Задача 2. Профили давления для DISPH,  $t = 0,6$  с: — эталон; — 128 частиц; — 256 частиц; — 512 частиц; — 1024 частицы; — 2048 частиц

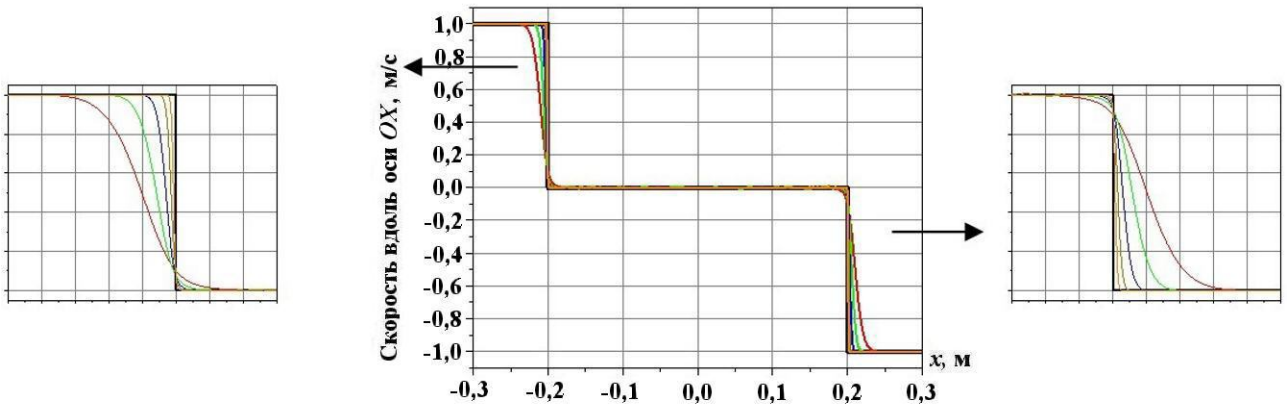


Рис. 22. Задача 2. Профили  $x$ -составляющей скорости для DISPH,  $t = 0,6$  с: — эталон; — 128 частиц; — 256 частиц; — 512 частиц; — 1024 частицы; — 2048 частиц

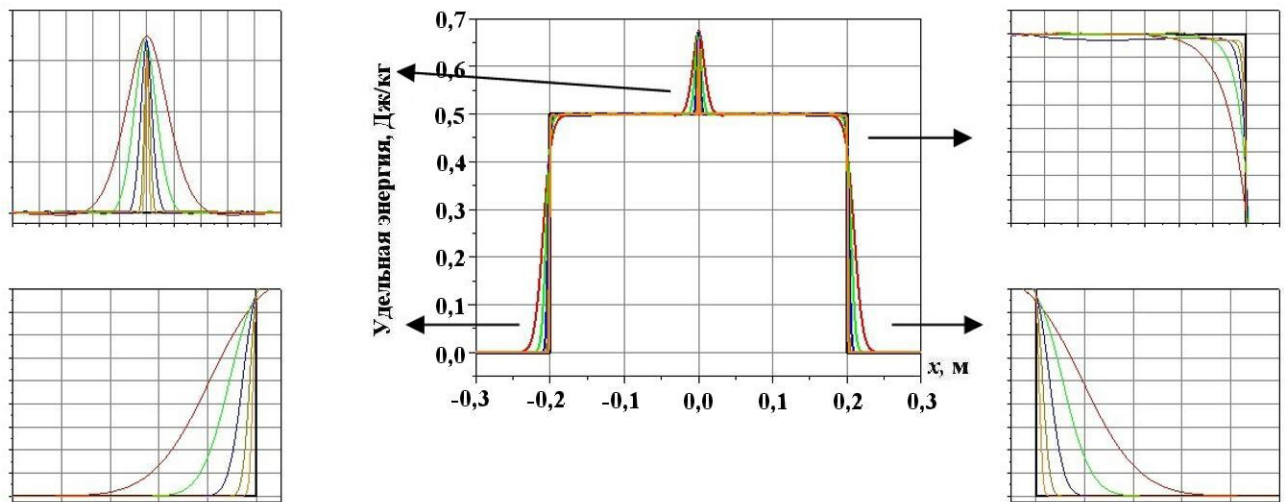


Рис. 23. Задача 2. Профили удельной энергии для DISPH,  $t = 0,6$  с: — эталон; — 128 частиц; — 256 частиц; — 512 частиц; — 1024 частицы; — 2048 частиц

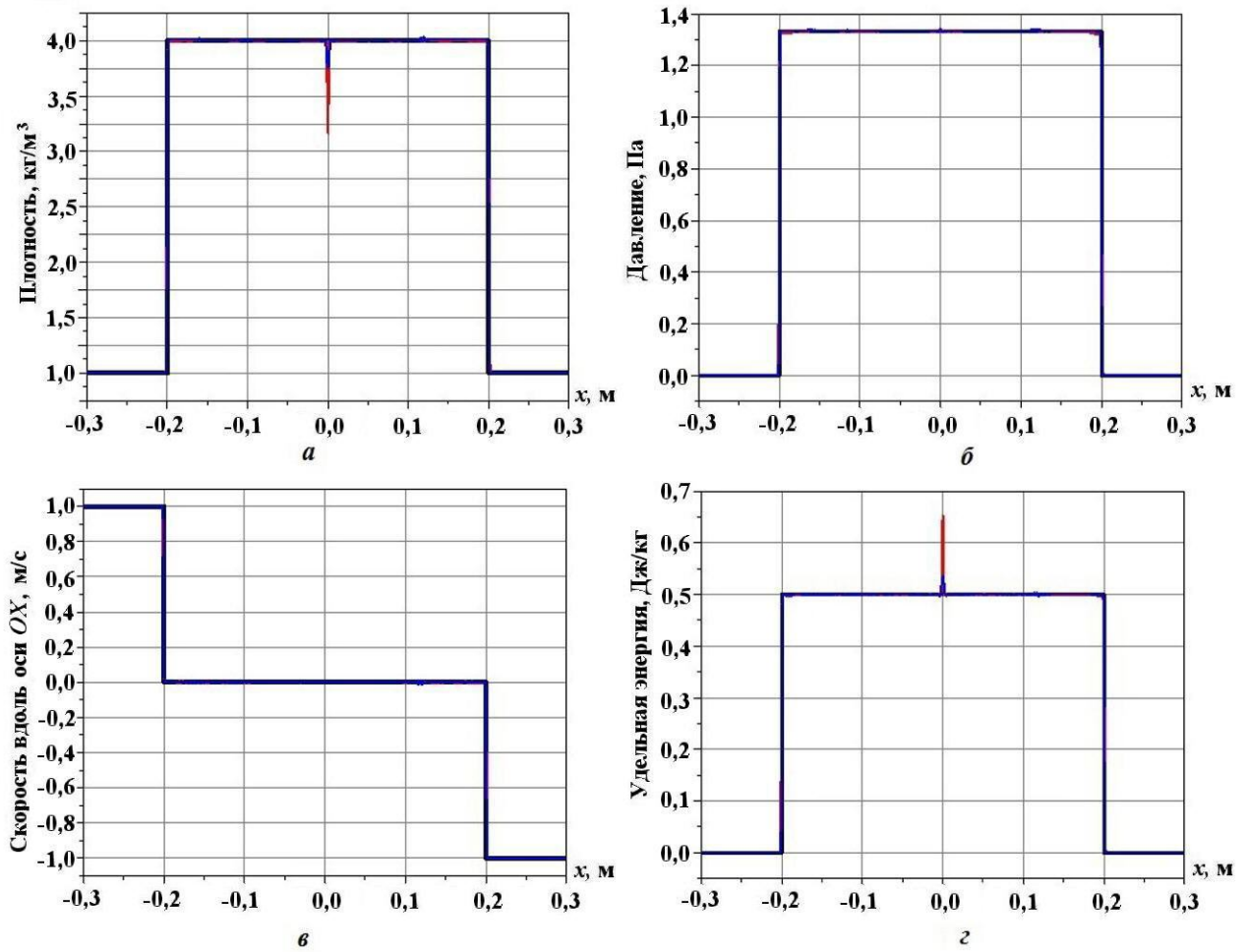


Рис. 24. Задача 2. Профили плотности (а), давления (б),  $x$ -составляющей скорости (в), удельной энергии (г) при числе частиц 2048,  $t = 0,6$  с: — эталон; — WPH; — DISPH

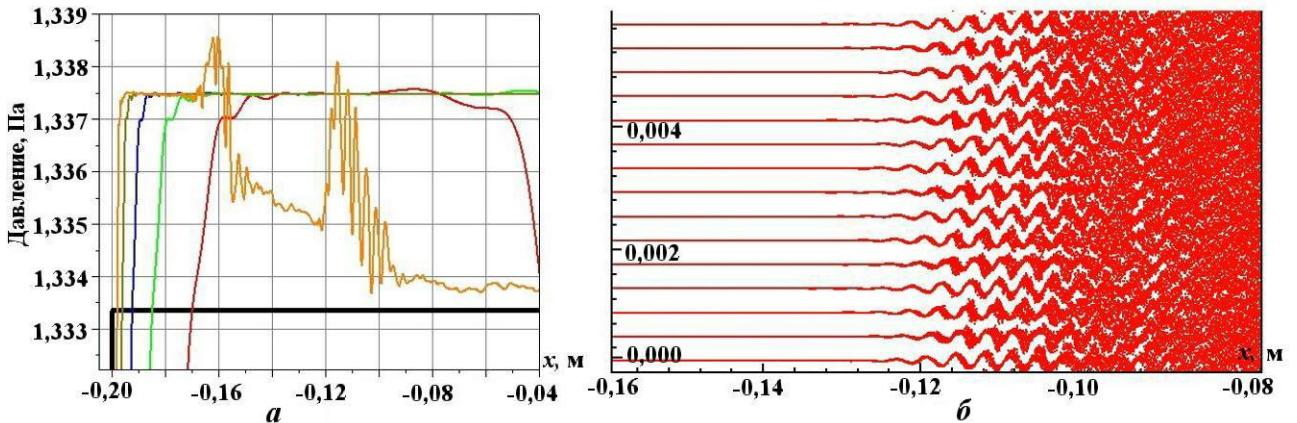


Рис. 25. Задача 2. Профиль давления (а) и частицы для  $-0,16\text{ м} < x < -0,08\text{ м}$  в методе WPH при  $t = 0,6$  с: — эталон; — 128 частиц; — 256 частиц; — 512 частиц; — 1024 частиц; — 2048 частиц

Качественную оценку можно провести на примере нормы  $L_1$ : как для плотности, так и давления в подробных расчетах с WPH получается меньшая ошибка и более высокий порядок сходимости 0,8, чем с DISPH — 0,55 (рис. 27). В данной задаче решение WPH было менее шумным и более точным для высоких разрешений, при этом по WPH-методу посчитано в 1,8 раза быстрее и сделано 9162 шага против 16832 в DISPH. Оба метода показали одинаковый порядок сходимости  $\approx 0,85$ .

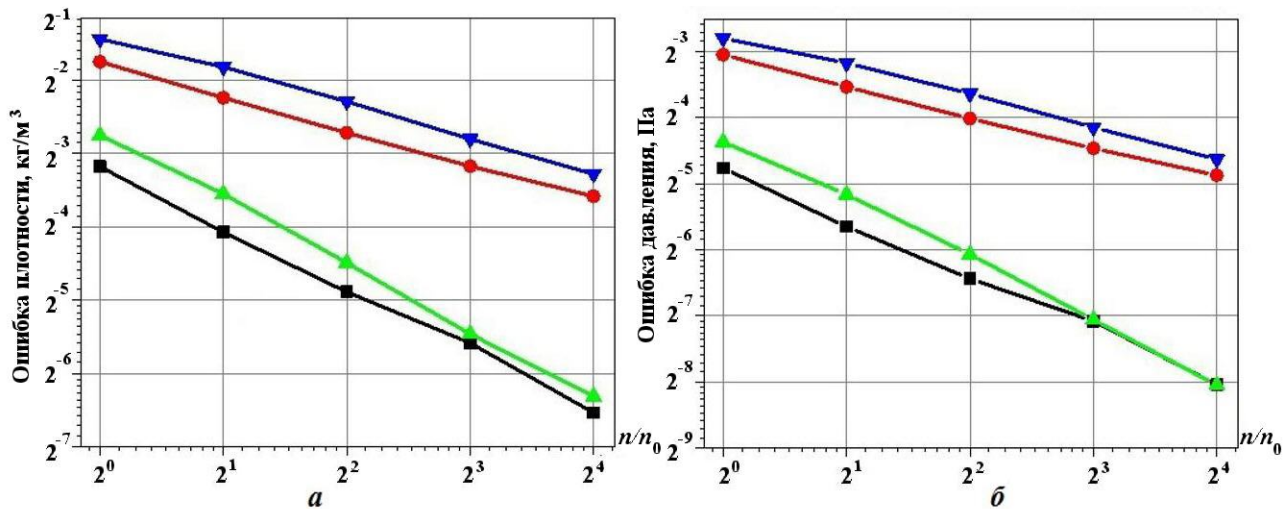


Рис. 26. Задача 2. Зависимости ошибок в нормах  $L_1$  и  $L_2$  от числа частиц в  $x$ -направлении для плотности (а) и давления (б):  $\blacksquare$  — WPH, в норме  $L_1$ ;  $\bullet$  — WPH, в норме  $L_2$ ;  $\blacktriangle$  — DISPH, в норме  $L_1$ ;  $\blacktriangledown$  — DISPH, в норме  $L_2$

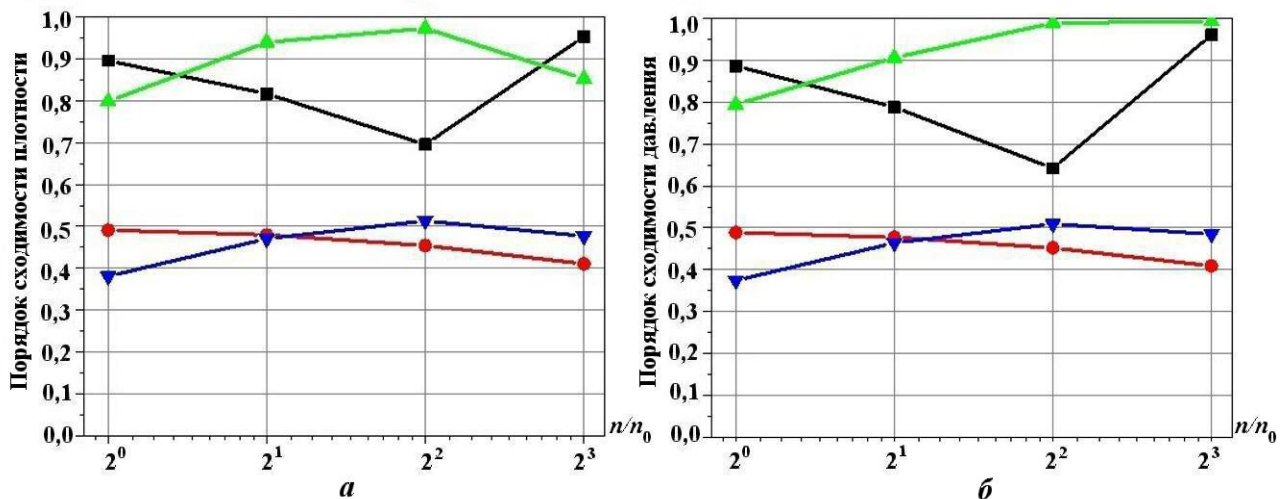


Рис. 27. Задача 2. Зависимости порядка сходимости в нормах  $L_1$  и  $L_2$  от числа частиц в  $x$ -направлении для плотности (а) и давления (б):  $\blacksquare$  — WPH, в норме  $L_1$ ;  $\bullet$  — WPH, в норме  $L_2$ ;  $\blacktriangle$  — DISPH, в норме  $L_1$ ;  $\blacktriangledown$  — DISPH, в норме  $L_2$

**Задача Вудварда—Колеллы в 1D постановке (задача 3).** Задача Вудварда—Колеллы [21] — задача о сложном нестационарном взаимодействии двух сильных ударных волн. В качестве эталона используется решение, полученное по программе "Волна" [22] (64 000 ячеек).

Давление в области 1 (рис. 28) равно  $10^3$  Па, в области 2 —  $10^{-1}$  Па, в области 3 —  $10^2$  Па; плотность равна  $1 \text{ кг/м}^3$ . УРС — для идеального газа с  $\gamma = 5/3$ . Граничные условия: по направлению  $x$  — жесткие стенки, по направлениям  $y$  и  $z$  — периодические. Ядро — 180 соседей. Время счета — 0,038 с.

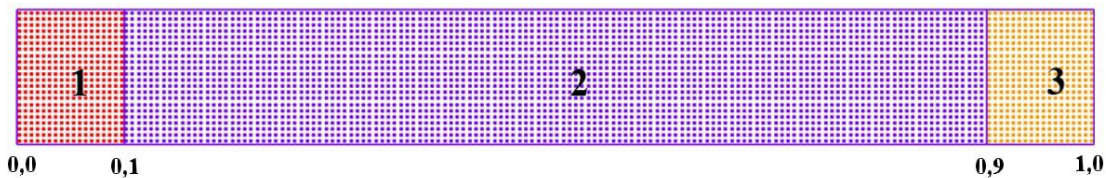


Рис. 28. Задача 3. Начальная расстановка частиц в областях

Для определения порядка сходимости было проведено пять расчетов:

- 1) количество частиц  $128 \times 32 \times 32$ ; размер образца  $1 \text{ м} \times 1/4 \text{ м} \times 1/4 \text{ м}$ ;
- 2) количество частиц  $256 \times 32 \times 32$ ; размер образца  $1 \text{ м} \times 1/8 \text{ м} \times 1/8 \text{ м}$ ;
- 3) количество частиц  $512 \times 32 \times 32$ ; размер образца  $1 \text{ м} \times 1/16 \text{ м} \times 1/16 \text{ м}$ ;
- 4) количество частиц  $1024 \times 32 \times 32$ ; размер образца  $1 \text{ м} \times 1/32 \text{ м} \times 1/32 \text{ м}$ ;
- 5) количество частиц  $2048 \times 32 \times 32$ ; размер образца  $1 \text{ м} \times 1/64 \text{ м} \times 1/64 \text{ м}$ .

На рис. 28 показано начальное расположение частиц. Они имеют примерно равные массы, чтобы достичь равномерной концентрации.

На рис. 29, 30 показаны профили плотности, давления,  $x$ -составляющей скорости, удельной энергии на момент времени  $t = 0,038 \text{ с}$ , полученные по WPH-методу при увеличивающемся количестве частиц, а на рис. 31, 32 — то же самое по DISPH-методу. Оба метода показали хорошие результаты. Наблюдается сходимость к эталонному решению.

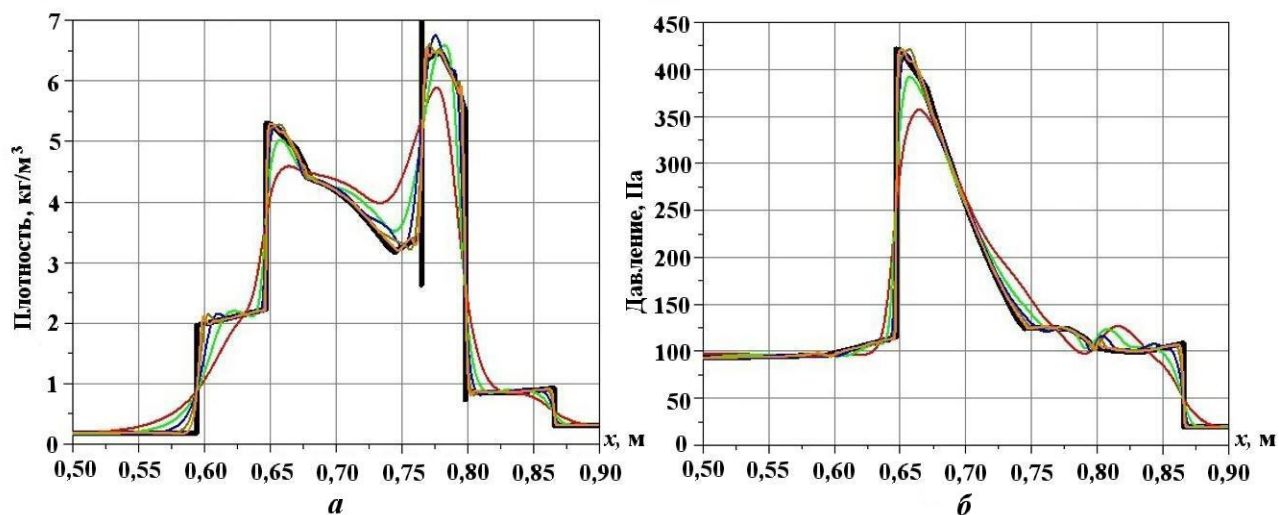


Рис. 29. Задача 3. Профили плотности (а) и давления (б) для WPH,  $t = 0,038 \text{ с}$ : — эталон; — 128 частиц; — 256 частиц; — 512 частиц; — 1024 частицы; — 2048 частиц

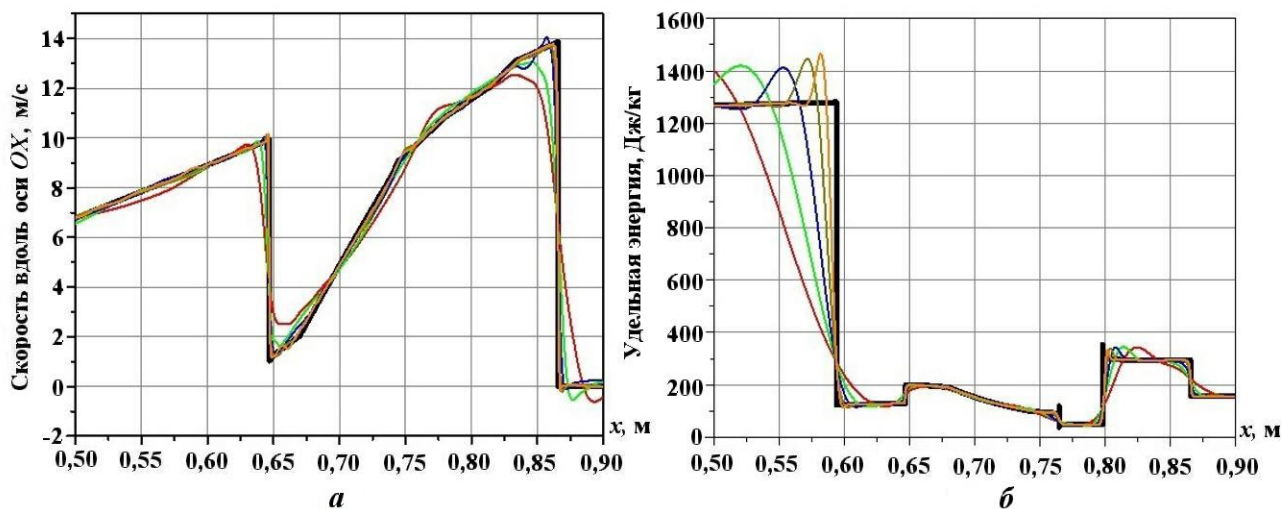


Рис. 30. Задача 3. Профили  $x$ -составляющей скорости (а) и удельной энергии (б) для WPH,  $t = 0,038 \text{ с}$ : — эталон; — 128 частиц; — 256 частиц; — 512 частиц; — 1024 частицы; — 2048 частиц

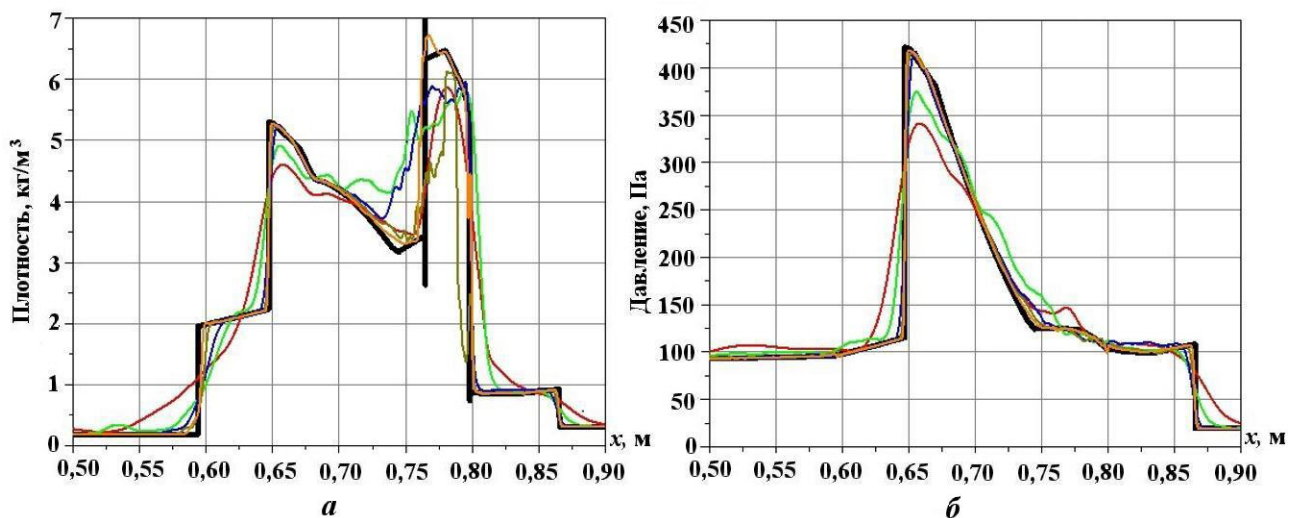


Рис. 31. Задача 3. Профили плотности (а) и давления (б) для DISPH,  $t = 0,038$  с: — эталон; — 128 частиц; — 256 частиц; — 512 частиц; — 1 024 частицы; — 2 048 частиц

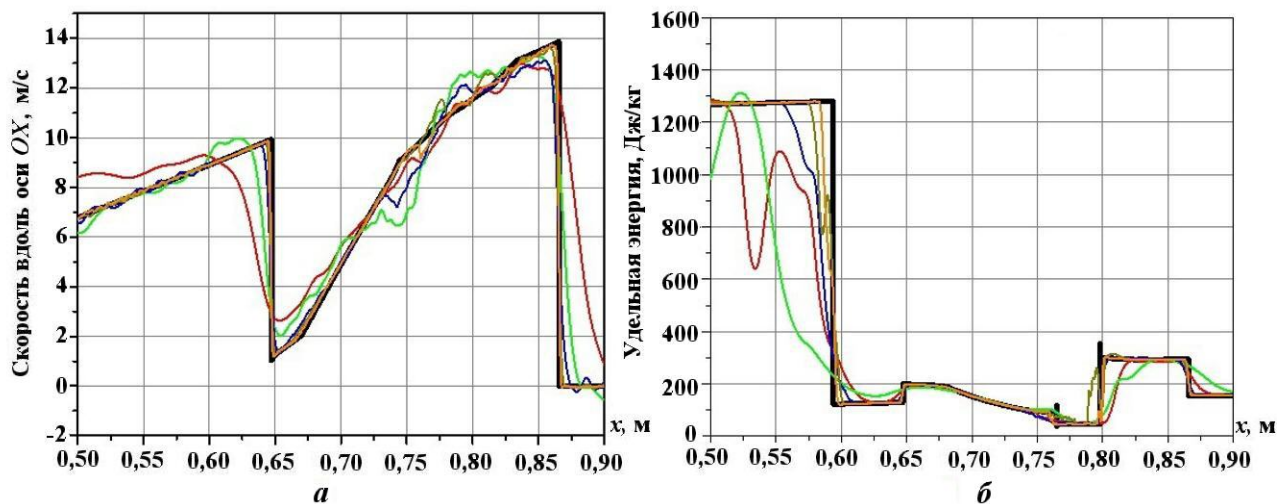


Рис. 32. Задача 3. Профили  $x$ -составляющей скорости (а) и удельной энергии (б) для DISPH,  $t = 0,038$  с: — эталон; — 128 частиц; — 256 частиц; — 512 частиц; — 1 024 частицы; — 2 048 частиц

На рис. 33 приведены профили плотности, давления,  $x$ -составляющей скорости, удельной энергии на момент времени  $t = 0,038$  с для двух методов при наибольшем количестве частиц. Оба метода показали близкие решения, однако есть и различия. У энергии, полученной по методу WPH, при  $x = 0,6$  м наблюдается нефизичный скачок, который с увеличением количества частиц по направлению уменьшает свою ширину, при этом немного увеличивая амплитуду. Поведение решения, полученного по DISPH-методу, в этой области соответствует поведению эталонного решения.

Оценим ошибки в нормах  $L_1$  и  $L_2$  и найдем порядок сходимости. На рис. 34 показаны зависимости ошибок плотности и давления от числа частиц в  $x$ -направлении для обоих методов.

Качественную оценку можно провести на примере нормы  $L_1$ : как для плотности, так и давления в подробных расчетах по методу WPH получается меньшая ошибка, порядок сходимости для WPH  $\approx 0,8$ , а для DISPH — от 0,6 у плотности, до 0,85 у давления (рис. 35). В данной задаче решение WPH было более точным и менее шумным, по WPH-методу посчитано в 1,6 раза быстрее, чем при использовании DISPH-метода. Сходимость присутствует у каждого из методов.



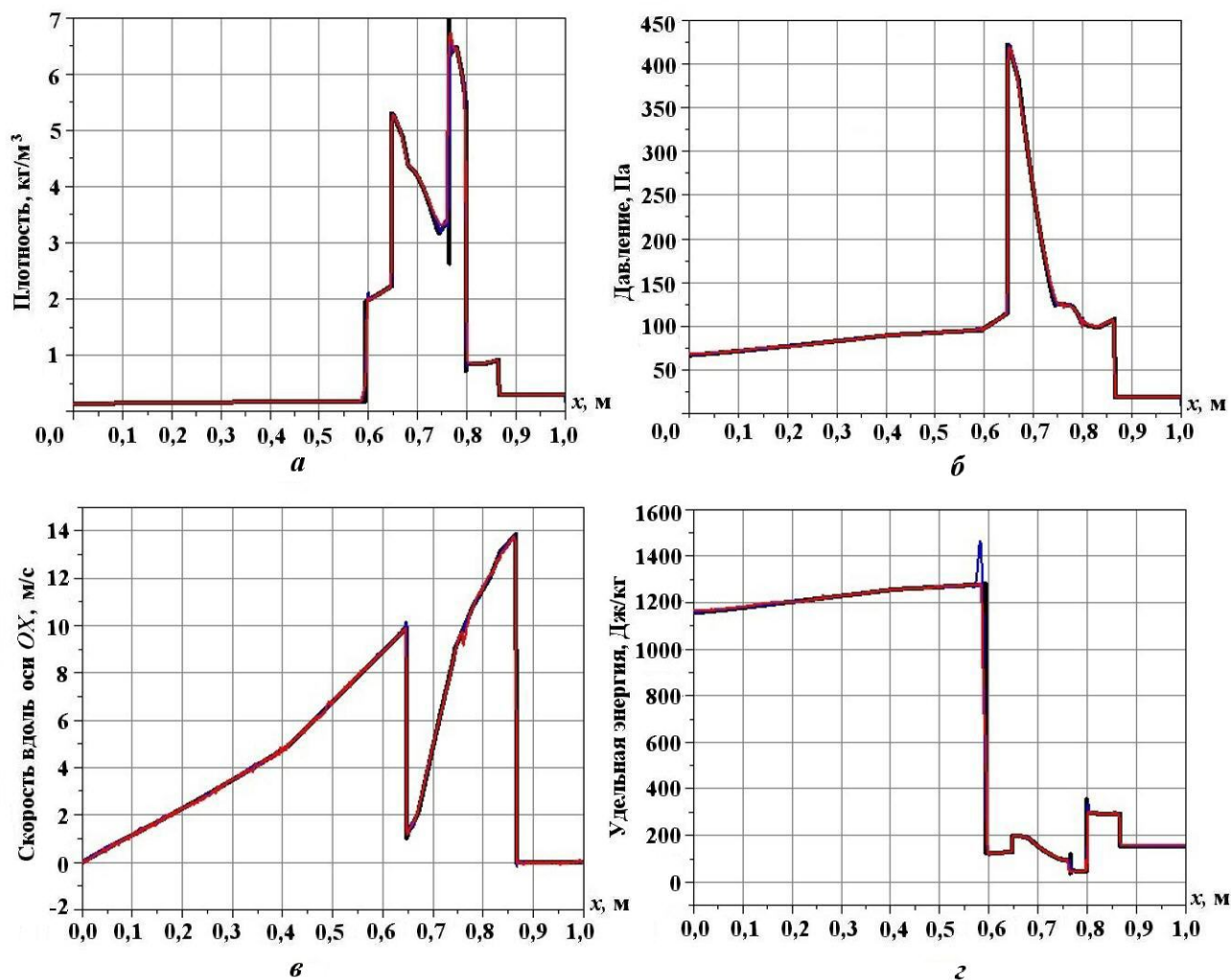


Рис. 33. Задача 3. Профили плотности (а), давления (б),  $x$ -составляющей скорости (в), удельной энергии (г) при числе частиц 2048,  $t = 0,038$  с: — эталон; — WPH; — DISPH

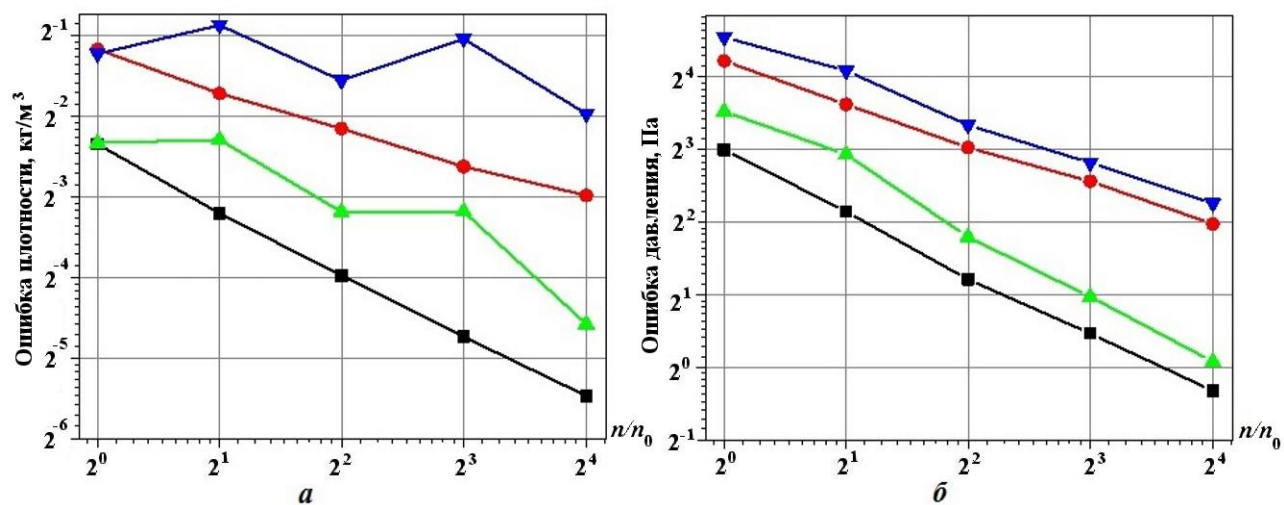


Рис. 34. Задача 3. Зависимости ошибок в нормах  $L_1$  и  $L_2$  от числа частиц в  $x$ -направлении для плотности (а) и давления (б): — WPH, в норме  $L_1$ ; — WPH, в норме  $L_2$ ; — DISPH, в норме  $L_1$ ; — DISPH, в норме  $L_2$

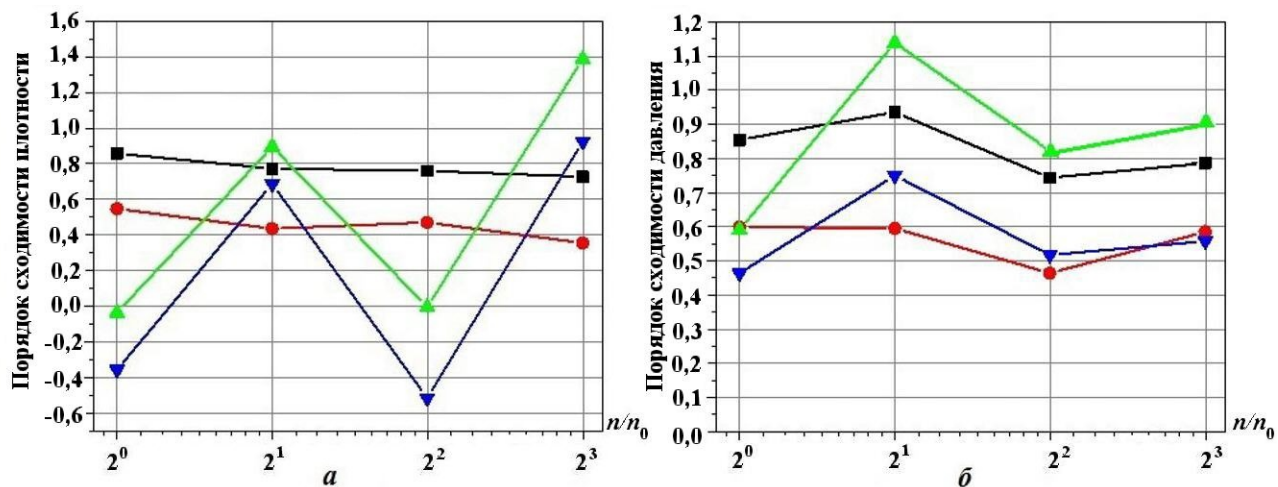


Рис. 35. Задача 3. Зависимости порядка сходимости в нормах  $L_1$  и  $L_2$  от числа частиц в  $x$ -направлении для плотности (а) и давления (б):  $\blacksquare$  — WPH, в норме  $L_1$ ;  $\bullet$  — WPH, в норме  $L_2$ ;  $\blacktriangle$  — DISPH, в норме  $L_1$ ;  $\blacktriangledown$  — DISPH, в норме  $L_2$

**Седовский взрыв в 3D постановке (задача 4).** В 3D постановке данный тест моделирует образование и распространение сильной сферической взрывной волны. Седовский взрыв особенно сложен для моделирования, так как в задаче присутствует значительный градиент энтропии. Для этого теста существует аналитическое решение [23].

Одномерная равномерная сетка, на которой получено аналитическое решение, содержит 5000 ячеек вдоль радиуса.

Количество частиц:  $256 \times 256 \times 256$  (всего — 16 777 216). Размер образца:  $20 \text{ м} \times 20 \text{ м} \times 20 \text{ м}$ . Плотность равна  $1 \text{ кг/м}^3$ . УРС — для идеального газа с  $\gamma = 5/3$ . Ядро содержит 90 соседей. Время счета — 0,2 с. Давление полагается равным  $P = 10^6 \text{ Па}$  при  $r \leq 1 \text{ м}$ ,  $P = 10^{-6} \text{ Па}$  при  $r > 1 \text{ м}$ .

При такой постановке для данной концентрации частиц в сферу единичного радиуса попало 1128 частиц. Полная энергия системы для метода WPH равна  $2,5545 \cdot 10^7 \text{ Дж}$ , а для DISPH —  $3,0135 \cdot 10^7 \text{ Дж}$ , что на 18% больше<sup>5</sup>. Такую разницу можно объяснить формулировкой метода, где объем — это отношение внутренней энергии к плотности внутренней энергии. В WPH внутренняя энергия переносится частицей, а в DISPH — усредняется по соседям, что приводит к ее изменению (размытию, усреднению). Найдем аналитические решения данной задачи для двух начальных энергий системы.

Профили плотности на момент времени  $t = 0,2 \text{ с}$  показаны на рис. 36, а, а плотность в частицах — на рис. 36, б. Наблюдается достаточно хорошее описание аналитического решения обоими методами, хотя DISPH-метод дает менее сферически-симметричное решение. Ошибка в норме  $L_1$  для WPH равна  $0,25 \text{ кг/м}^3$ , а для DISPH —  $0,51 \text{ кг/м}^3$ . Сферичность оценим из ошибки в норме  $L_2$  значений плотности в частицах:  $0,003 \text{ кг/м}^3$  для WPH и  $0,05 \text{ кг/м}^3$  для DISPH.

Пространственное распределение плотности, показанное на рис. 37, а, б, демонстрирует высокую степень симметрии для обоих методов.

Данная задача по WPH посчитана в 1,6 раза быстрее, чем по DISPH, при этом по WPH сделано 979 шагов против 1488 по DISPH. Это решение в два раза более точное и приблизительно в 16 раз сферичнее. В неприведенном здесь расчете с точечным (в центральной частице) энерговыделением наблюдалась низкая чувствительность WPH к начальной расстановке частиц, тогда как для DISPH это вызывало потерю сферичности.

<sup>5</sup> Аналитические решения данной задачи для двух начальных энергий системы различаются.

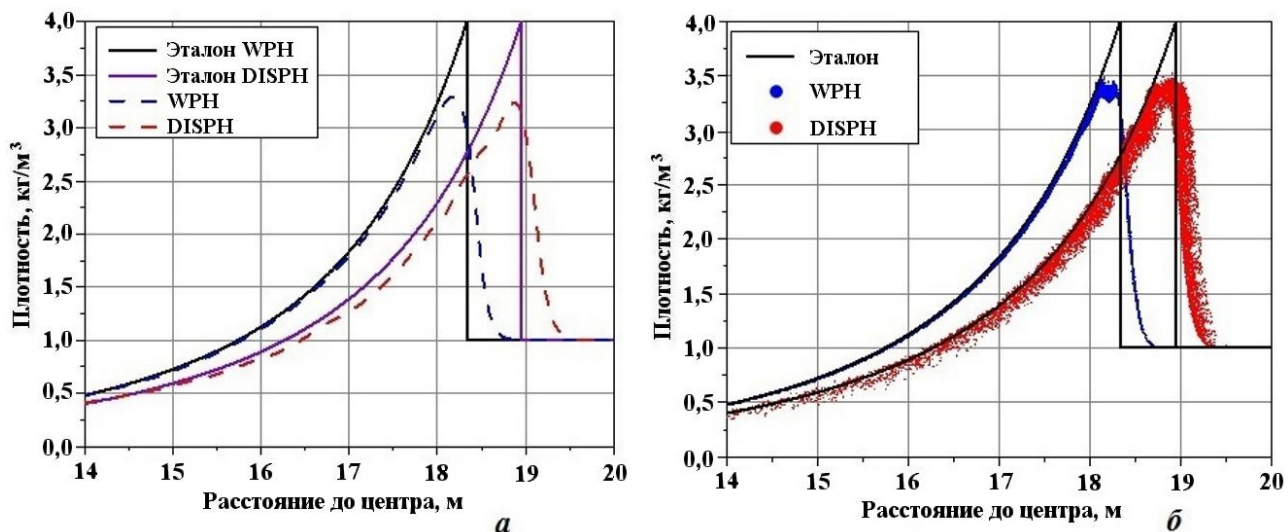


Рис. 36. Задача 4. Профили плотности (а) и плотность в частицах (б),  $t = 0,2$  с

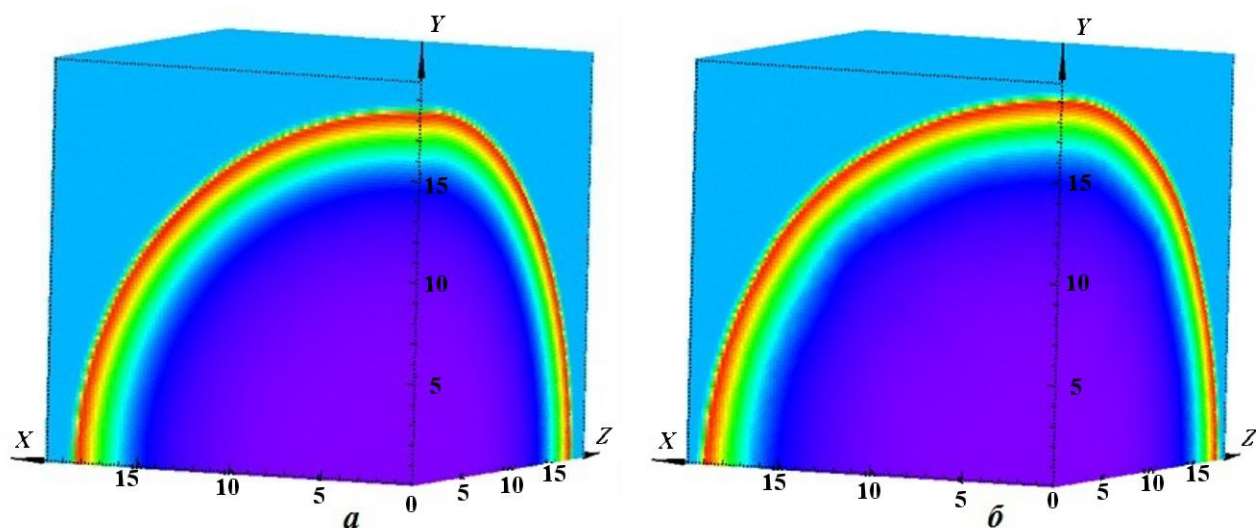


Рис. 37. Задача 4. Пространственные распределения плотности,  $t = 0,2$  с: а — WPH; б — DISPH

### Заключение

Были проведены расчеты для определения применимости методов DISPH и WPH при моделировании ударных волн на тестовых 1D задачах Сода, Ноха, Вудварда—Колеллы и 3D задаче о седовском взрыве. На этих задачах была показана сходимость численного решения к эталонному и определен порядок сходимости  $\approx 0,8$ .

При сравнении двух подходов учитывались ошибка в норме  $L_1$  и астрономическое время, затраченное на проведение расчета. Для тестов в 3D постановке была проведена оценка сферической симметрии решения. Было показано, что во всех тестах при использовании метода WPH получена меньшая ошибка, счет выполнен от 1,5 до 2 раз быстрее. Сделан вывод о целесообразности его использования при моделировании задач с ударными волнами.

### Список литературы

1. *Gingold R. A., Monaghan J. J.* Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society.* 1977. Vol. 181. P. 375—389.

2. *Lucy L. B.* A numerical approach to the testing of the fission hypothesis // *The Astronomical Journal*. 1977. Vol. 82, No 12. P. 1013–1024.
3. *Saitoh T. R., Makino J.* A density-independent formulation of smoothed particle hydrodynamics // *Ibid.* 2013. Vol. 768. P. 44–67.
4. *Hosono N., Saitoh T. R., Makino J.* A comparison of SPH artificial viscosities and their impact on the Keplerian disk // *The Astrophysical Journal Supplement Series*. 2016. Vol. 224. P. 32–50.
5. *Hopkins P. F.* A new class of accurate, mesh-free hydrodynamic simulation methods // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2015. Vol. 450. P. 53–110.
6. *Springel V., Hernquist L.* Cosmological smoothed particle hydrodynamics simulations: the entropy equation // *Ibid.* 2002. Vol. 333. P. 649–664.
7. *Chen J. K., Beraun J. E., Jih C. J.* An improvement for tensile instability in smoothed particle hydrodynamics // *Computational Mechanics*. 1999. Vol. 23. P. 279–287.
8. *Zhang G. M., Batra R. C.* Modified smoothed particle hydrodynamics method and its application to transient problems // *Ibid.* 2004. Vol. 34. P. 137–146.
9. *Zhang G. M., Batra R. C.* Symmetric smoothed particle hydrodynamics (SSPH) method and its application to elastic problems // *Ibid.* 2009. Vol. 43. P. 321–340.
10. *García-Senz D., Cabezón R. M., Escartín J. A.* Improving smoothed particle hydrodynamics with an integral approach to calculating gradients // *Astronomy & Astrophysics*. 2012. Vol. 538. A9.
11. *Huang C., Lei J. M., Liu M. B., Peng X. Y.* A kernel gradient free (KGF) SPH method // *Int. J. Numerical Methods Fluids*. 2015. Vol. 78. P. 691–707.
12. *Dilts G. A.* Moving-least-squares-particle hydrodynamics—I. Consistency and stability // *Ibid.* 1999. Vol. 44. P. 1115–1155.
13. *Toro E. F.* *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics: A Practical Introduction*. Springer, 2009.
14. *Monaghan J. J., Gingold R. A.* Shock Simulation by the Particle Method SPH // *J. Comp. Phys*. 1983. Vol. 52. P. 374–389.
15. *Cullen L., Dehnen W.* Inviscid smoothed particle hydrodynamics // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2010. Vol. 408. P. 669–683.
16. *Сапожников Ф. А., Ионов Г. В., Дрёмов В. В.* Программный комплекс "Молох" для молекулярно-динамического моделирования процессов в конденсированных материалах // *Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов*. 2011. Вып. 4. С. 50–57.  
*Sapozhnikov F. A., Ionov G. V., Dremov V. V.* Programmnyy kompleks kompleks "Molokh" dlya molekulyarno-dinamicheskogo modelirovaniya protsessov v kondensirovannykh materialakh // *Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov*. 2011. Vyp. 4. S. 50–57.
17. *Dehnen W., Aly H.* Improving convergence in smoothed particle hydrodynamics simulations without pairing instability // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2012. Vol. 425. P. 1068–1082.
18. *Diehl S., Rockefeller G., Fryer C. L., Riethmiller D., Statler T. S.* Generating optimal initial conditions for smoothed particle hydrodynamics simulations // *Ibid.* 2015. Vol. 32. P. 1–18.
19. *Sod G. A.* A survey of several finite difference methods for systems of nonlinear hyperbolic conservation laws // *J. Comp. Phys*. 1978. Vol. 27. P. 1–31.
20. *Noh W. F.* Errors for calculation of strong shocks using an artificial viscosity and an artificial heat flux // *Ibid.* 1987. Vol. 72. P. 78–120.
21. *Woodward P., Colella P.* The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 1984. Vol. 54. P. 115–173.

22. Куропатенко В. Ф., Коваленко Г. В., Кузнецов В. И., Михайлова Г. И., Потапкин В. К., Сапожникова Г. Н. Комплекс программ "Волна" и неоднородный разностный метод для расчета неустановившихся движений сжимаемых сплошных сред. Часть 1. Неоднородный разностный метод // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1989. Вып. 2. С. 9—18.  
*Kuropatenko V. F., Kovalenko G. V., Kuznetsov V. I., Mikhaylova G. I., Potapkin V. K., Sapozhnikova G. N. Kompleks program "Volna" i neodnorodnyy raznostnyy metod dlya raschyeta neustanovivshikhsya dvizheniy szhimaemykh sploshnykh sred. Chast 1. Neodnorodnyy raznostnyy metod // Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov. 1989. Vyp. 2. S. 9—18.*
23. Sedov L. I. Similarity and dimensial methods in mechanics // Academic Press Inc. 1959. Vol. 11. P. 210.

Статья поступила в редакцию 13.02.23.

---