

УДК 533.95, 621.373.826

СИММЕТРИЧНЫЕ КОНФИГУРАЦИИ ЛАЗЕРНЫХ ИСТОЧНИКОВ ДЛЯ ПРЯМОГО ОБЛУЧЕНИЯ МИШЕНИ. СИММЕТРИЯ ТЕТРАЭДРА

С. А. Бельков, С. В. Бондаренко, Л. В. Солнышкова
(ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области)

Описан метод построения симметричных систем лазерного облучения с повышенными характеристиками однородности освещенности термоядерной капсулы. Найдены оптимальные конфигурации лазерных источников для прямого облучения сферической мишени, обладающие симметриями вращения тетраэдра, и проанализированы их возможности с точки зрения достигаемых уровней однородности лазерного облучения термоядерной капсулы. Предложен критерий оценки эффективности конфигураций лазерных источников. Проведено сопоставление эффективности редукции низших мод в структуре лазерной засветки сферической капсулы в поясных конфигурациях лазерных источников, построенных на основе квадратурных формул Гаусса—Лежандра, и в конфигурациях, обладающих симметрией тетраэдра.

Ключевые слова: инерциальный термоядерный синтез, мишень прямого облучения, однородность облучения мишени, поясная и симметричная системы облучения, симметрия тетраэдра.

Введение

В направлении инерциального термоядерного синтеза одной из ключевых задач является обеспечение высокой однородности воздействия излучения на лазерную мишень, которая позволяет осуществить глубокое объемное сжатие термоядерного топлива, необходимое для достижения условий термоядерного горения.

В схеме прямого (лазерного) облучения мишени можно выделить два способа достижения высокой однородности.

В работе [1] сформулирован метод построения осесимметричной системы лазерного облучения (также будем называть такую систему поясной, поскольку источники в ней распределены по поясам) мишени с расположением лазерных источников, определяемым нулями полиномов Лежандра $P_n(\theta)$. Эффективность этого метода обусловлена высокой алгебраической точностью квадратурных формул¹ Гаусса—Лежандра, за счет чего достигается существенная редукция осесимметричных сферических гармоник (в современной англоязычной научной литературе называемых *модами*) низших порядков в распределении интенсивности поля лазерного излучения на поверхности сферической капсулы.

Любая система лазерного облучения мишени, вследствие конечности числа лазерных источников, неизбежно порождает азимутальную зависимость в распределении лазерной освещенности капсулы. Устранение низших азимутальных мод в работе [1] достигается путем создания поясов лазерных источников достаточной кратности. Видно, что эффективность редукции азимутальных мод заметно ниже.

¹Напомним, что под алгебраической точностью понимается максимальная степень многочлена, для которой результат интегрирования по квадратурным формулам является точным.

Второй подход заключается в использовании свойств симметрии правильных многогранников, поскольку наложение условий симметрии само по себе ведет к значительной редукции числа возможных мод. Так, при симметрии тетраэдра запрещенными оказываются моды порядков $l = 1, 2, 5$. Всюду далее будем использовать термин *симметричная конфигурация* для обозначения конфигурации лазерных источников, обладающей вращательными симметриями одного из правильных многогранников (тел Платона).

Симметрия наиболее высокого порядка — симметрия икосаэдра-додекаэдра — заложена в конструкции 60-пучковой системы прямого (лазерного) облучения мишени на установке OMEGA (США) [2]. Американские исследователи предложили использовать возможности установки OMEGA для проведения экспериментов по непрямоу (рентгеновскому) облучению термоядерной капсулы, создавая совокупную симметрию тетраэдра для 60 лазерных источников и 4 отверстий для ввода излучения в сферический бокс-конвертор [3]. Возможность такого построения обусловлена тем, что симметрии тетраэдра являются подгруппой группы симметрий икосаэдра.

Проведенные позднее на установке OMEGA эксперименты с тетраэдральным хольраумом [4, 5] продемонстрировали возможность использования одной и той же симметричной конфигурации лазерных источников как для прямого, так и непрямого облучения термоядерной мишени. Напомним, что попытки реализовать прямое облучение криогенной капсулы на зажигание на мегаджоульной установке NIF (США) сталкиваются с большими проблемами в отношении симметрии облучения мишени [6, 7], поскольку поясная система облучения установки NIF не позволяет создать однородную лазерную засветку экваториальных областей сферической капсулы.

Для решения задач численной оптимизации облучения мишени в работе [3] были найдены моды 3-го, 4-го и 6-го порядков, разрешенные условиями симметрии тетраэдра. Для анализа условий однородности облучения рентгеновской капсулы этого достаточно, поскольку в схеме непрямого облучения, как известно, происходит эффективное сглаживание мелкомасштабных неоднородностей при переносе квазитеплового излучения со стенок бокса-конвертора на поверхность капсулы. В этом заключается преимущество метода непрямого воздействия на мишень.

В случае прямого облучения сферической капсулы с термоядерным горючим моды высокого порядка также являются значимыми. Здесь полагаются на хорошее качество лазерного пятна (отсутствие спеклов и т. д.), понимая под этим монотонное падение амплитуд мод, создаваемых одним пятном, с ростом их порядка. Заметим, что для излучения лазерного драйвера получение "хороших" пятен лазерной засветки на мишени представляет собой непростую задачу, требующую применения специальных методов сглаживания возникающих когерентных структур. Это, однако, является отдельной проблемой, неразрешимой с помощью оптимизации геометрии лазерных источников. Поэтому в данном анализе будем считать все лазерные пятна на мишени "хорошими" и, более того, идентичными.

Использованный в работе [3] метод установления вида допускаемых симметрией тетраэдра мод заключался в нахождении симметричных полиномов от декартовых координат x, y, z (поскольку, как известно, сферические гармоники являются многочленами степени, соответствующей их порядку). Этот метод нагляден в отношении низших мод и в этом случае быстро приводит к результату. Установление вида симметричной моды требует перебора всех возможных симметричных произведений декартовых координат, что с ростом порядка моды становится все более трудной задачей.

В настоящей работе предлагается метод нахождения симметричных мод с помощью численного решения линейных систем уравнений совместности для матриц преобразования сферических гармоник при поворотах группы симметрий вращения правильных многогранников (тел Платона). Изложению этого подхода посвящен разд. 1.

Установление вида симметричных мод позволило математически сформулировать задачу их дальнейшей редукции как задачу минимизации квадратичной по этим модам формы невязки. Результаты многопараметрической минимизации для случая симметрии тетраэдра излагаются в разд. 2. Авторами был найден новый класс симметричных систем лазерного облучения с повышенными характеристиками однородности освещенности термоядерной капсулы. Здесь же приводятся результаты непосредственной численной верификации достигаемых в оптимизированных симметричных конфигурациях лазерных источников однородностей облучения мишени.

В разд. 3, воспользовавшись оригинальным подходом для эффективной редукции низших мод, предложенным в работе [1], авторы представляют усовершенствованную осесимметричную систему с целью установления минимального числа лазерных источников, необходимых для устранения всех низших мод вплоть до некоторого порядка. Это позволило в разд. 4 провести сравнение эффективности редукции низших мод в поясных системах облучения и предложенных авторских конфигурациях, обладающих симметрией тетраэдра.

1. Моды, обладающие симметрией тетраэдра

Для количественного анализа распределения лазерной освещенности на поверхности сферической мишени будем пользоваться системой нормированных сферических функций, определяемых в сферической системе координат в виде

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos\theta) e^{im\varphi}, \quad m \geq 0, \quad (1)$$

где $P_l^m(\cos\theta)$ — присоединенный полином Лежандра степени l и порядка m [8]; θ — полярный угол, отсчитываемый от оси OZ декартовой системы координат; φ — азимутальный угол, отсчитываемый от плоскости XOZ . Для $m < 0$

$$Y_{l,-m}(\theta, \varphi) = (-1)^m Y_{l,m}^*(\theta, \varphi).$$

Функции $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ позволяют математически проанализировать структуру освещенности сферической мишени, а именно определить вклад в неоднородность различных пространственных масштабов, которые теперь оказываются связанными с амплитудами разложения распределения интенсивности по сферическим гармоникам (1).

Генераторами группы трехмерных вращений в квантовой механике являются матрицы оператора момента \hat{L} [9]. При поворотах системы координат гармоники одинакового порядка преобразуются друг в друга.

Преобразование сферических гармоник при произвольном повороте на угол φ вокруг оси, ориентированной по вектору \vec{n} , представляется оператором

$$\hat{M}(\vec{n}, \varphi) = \exp\left(-i\hat{L}\vec{n}\varphi\right). \quad (2)$$

Функции (2) в квантовой механике называются функциями Вигнера [9].

Симметричная комбинация мод порядка l , которая при повороте вокруг любой из осей симметрии $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3, \vec{n}_4$ переводится сама в себя, представляется суммой

$$\Psi_l^{sym} = \sum_m \alpha_m Y_{lm}. \quad (3)$$

То есть должно выполняться соотношение

$$M_l(\vec{n}_k, \varphi) \Psi_l^{sym} = \Psi_l^{sym}, \quad k = \overline{1,4}, \quad (4)$$

где $M_l(\vec{n}_k, \varphi)$ — матрица представления оператора поворота $\hat{M}(\vec{n}_k, \varphi)$.

Система (4) позволяет численно определить вид симметричных мод Ψ_l^{sym} . Если такое решение существует, значит, существует мода порядка l , удовлетворяющая наложенным условиям симметрии. Симметричная мода может быть не единственной. Если система (4) не имеет решения, значит, симметричной моды данного порядка l не существует.

Наличие вращательной симметрии позволяет построить симметричное семейство источников. Если задано направление $\vec{\Omega}_1 = (\sin\theta_1 \cos\varphi_1, \sin\theta_1 \sin\varphi_1, \cos\theta_1)$ одного источника, то применение к $\vec{\Omega}_1$ группы симметрий вращения тетраэдра порождает семейство из 12 источников, переходящих друг

в друга при таких вращениях. При этом углы θ_1, φ_1 являются свободными параметрами, которые задают базовый источник и могут быть использованы для численной оптимизации.

Отметим еще раз, что численное решение системы (4) дает моды, обладающие симметриями вращения тетраэдра. В полной группе симметрий тетраэдра, включающей зеркальные отражения, часть мод отсутствует. Наложение условий полной симметрии тетраэдра приводит к дополнительным ограничениям, уменьшая число параметров, доступных для оптимизации. Можно сказать по-другому: найденные в результате численной оптимизации конфигурации источников (см. разд. 2) не отображаются друг в друга при зеркальном отражении относительно плоскости симметрии тетраэдра. Применение зеркальной симметрии переводит условно правые конфигурации в условно левые и наоборот. Число симметричных мод при этом уменьшается, что, конечно, означает некоторое улучшение однородности. Однако достигаемое при этом улучшение однородности меньше, чем в случае применения дополнительных источников для поэтапной численной оптимизации по предлагаемому сценарию. Опыт авторов свидетельствует об этом.

Полученные с помощью разработанного метода симметричные моды $\Psi_3^{tetr}, \Psi_4^{tetr}, \Psi_{6a}^{tetr}, \Psi_{6b}^{tetr}$ ² совпадают с модами, найденными в работе [3] (после выполнения простых координатных и алгебраических преобразований). Американские авторы находили симметричные моды перебором симметричных комбинаций из произведений декартовых координат. Этот метод, легко и быстро приводящий к результату для низших мод (при $l = 3, 4, 6$), становится все более громоздким с ростом порядка моды l .

Предлагаемый подход нахождения симметричных мод результативен и для мод высоких порядков. Для процедуры минимизации потребуются значения коэффициентов α_m в (3), которые могут быть найдены в результате численного решения системы уравнений (4). Другое дело, что численная оптимизация систем с большим числом параметров может представлять проблему.

Авторами были найдены симметричные конфигурации из 36, 48 и 60 лазерных источников с помощью вполне стандартных алгоритмов численной оптимизации. Достигаемые характеристики однородности освещенности сферической капсулы, как будет показано далее, вполне достаточны для целей термоядерного синтеза.

2. Симметричные конфигурации лазерных источников

В этом разделе приводятся найденные в результате численной оптимизации конфигурации лазерных источников. Для минимальной системы из 12 источников расчет приводит к их локализации в 12 вершинах икосаэдра (лежащих на пересечении нулевых изолиний симметричных мод Ψ_3^{tetr} и Ψ_4^{tetr}).

Конфигурации *Tetr-36* и *Tetr-36-dis*. Нетривиальный результат получается для системы из 36 лазерных источников (порождаемых тремя базовыми). Составленная форма невязки [10] в этом случае выглядит следующим образом:

$$\ell_{36}^{tetr}(\theta_1, \varphi_1, \theta_2, \varphi_2, \theta_3, \varphi_3) = \sum_{i=3,4,6a,6b,7,8} (\Psi_i^{tetr}(\theta_1, \varphi_1) + \Psi_i^{tetr}(\theta_2, \varphi_2) + \Psi_i^{tetr}(\theta_3, \varphi_3))^2.$$

Для 36 источников можно задействовать еще два параметра для численной оптимизации — взаимную разноэнергетичность симметричных семейств из 12 пучков. Тогда форма невязки примет вид³

$$\ell_{36}^{tetr}(\theta_1, \varphi_1, \theta_2, \varphi_2, \theta_3, \varphi_3, p_2, p_3) = \sum_{i=3,4,6a,6b,7,8,9a,9b} (\Psi_i^{tetr}(\theta_1, \varphi_1) + p_2 \Psi_i^{tetr}(\theta_2, \varphi_2) + p_3 \Psi_i^{tetr}(\theta_3, \varphi_3))^2.$$

Задача минимизации позволила определить координаты $\theta_1, \varphi_1, \theta_2, \varphi_2, \theta_3, \varphi_3$ трех базовых источников. Положения остальных источников определяются применением вращательных симметрий тетраэдра (4).

² Ψ_{6a}^{tetr} и Ψ_{6b}^{tetr} — две симметричные моды, полученные в результате решения системы (4) при $l = 6$.

³ p_2, p_3 — параметры минимизации невязки за счет относительной разноэнергетичности симметричных семейств лазерных источников ($p_1 = 1$).

На рис. 1 показано положение осей лазерных источников (и приведены координаты базовых источников) в конфигурациях *Tetr-36* и *Tetr-36-dis*, удовлетворяющих условиям $\ell_{36}^{tetr}(\theta_1, \varphi_1, \theta_2, \varphi_2, \theta_3, \varphi_3) = 0$ и $\ell_{36-dis}^{tetr}(\theta_1, \varphi_1, \theta_2, \varphi_2, \theta_3, \varphi_3, p_2, p_3) = 0$ соответственно. Полярный угол θ отсчитывался от оси трехкратной симметрии вращения тетраэдра, а азимутальный угол φ — от плоскости, проходящий через две вершины тетраэдра. Видно, что геометрические различия между двумя полученными конфигурациями минимальны.

Численные расчеты освещенности сферической капсулы в найденных симметричных конфигурациях источников позволили определить уровни однородности облучения для различных значений оптической толщины Δ_{IB} относительно процесса обратно-тормозного (столкновительного) поглощения лазерного излучения [11] в плазменной короне мишени в простейшем предположении равномерного по углам распределения падающего на мишень лазерного излучения. Ослабление рассеянного мишенью лазерного излучения на изотермической волне разрежения разгружающейся плазмы происходило по закону

$$R(\mu) = \exp(-\Delta_{IB}\mu^3), \quad (5)$$

где μ — косинус угла падения излучения на мишень; значение оптической толщины Δ_{IB} в расчетах варьировалось. При этом какими-либо эффектами когерентного наложения лазерных пучков пренебрегалось в предположении, что на мишени лазерные интенсивности просто суммируются.

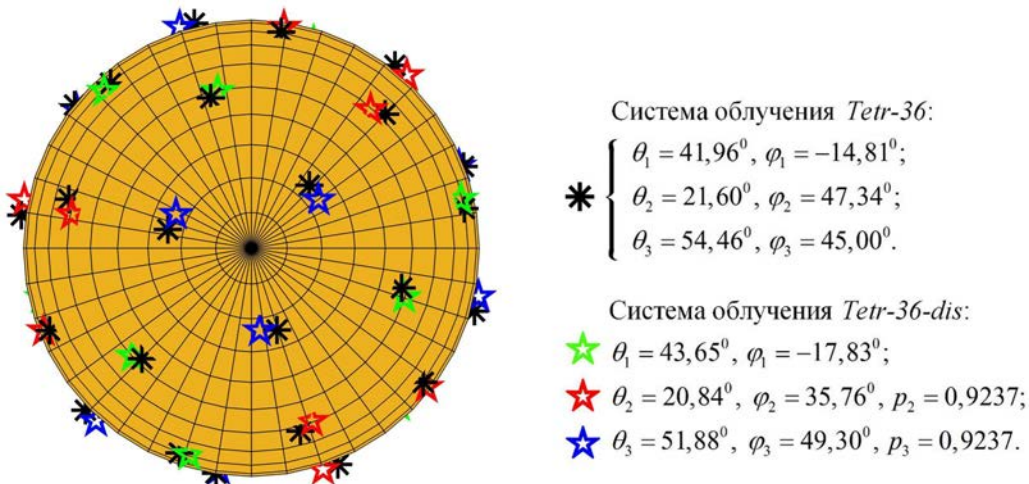
Вычисления Δ_{IB} в модели стационарной лазерной абляции [11] для аблятора капсулы из пластика (СН) дают следующий скейлинг оптической толщины лазерной короны:

$$\Delta_{IB}^{(CH)} = \frac{0,26 t}{I_{abs}^{2/3} \lambda_L^{10/3}}, \quad (6)$$

где время t измеряется в нс, поглощенная интенсивность I_{abs} — в 10^{15} Вт/см², а длина волны λ_L — в микронах.

Отметим, что высокие уровни однородности лазерной засветки капсулы потребовали модификации алгоритмов расчета лазерной засветки мишени. Целью таких расчетов является подтверждение редукции низших мод, достигаемой в предлагаемых конфигурациях лазерных источников. Демонстрация в расчетах редукции таких мод требует достижения точности вычислений распределения лазерного поглощения на мишени не ниже 10^{-4} .

Авторами специально была разработана монте-карловская методика расчета лазерной освещенности сферической мишени системой большого числа произвольно ориентированных лазерных источников. Для убыстрения сходимости интегральных сумм в монте-карловских расчетах использовались псевдослучайные числа *LP* τ -последовательности [12], так как другими методами требуемой



точности расчетов достичь не удалось. Эти числа имеются, в частности, в интерактивной среде математических вычислений Matlab, в которой они называются числами Соболя.

При проведении численного моделирования предполагалось, что каждый лазерный пучок является однородным и засвечивает обращенную к нему полусферу мишени. Лазерное энерговыделение на поверхности мишени происходит в соответствии с законом (5) ослабления интенсивности света. Помимо непосредственной численной верификации достигаемой редукции мод, выполненные расчеты позволили также проследить изменение во времени вклада в неоднородность симметричных мод различных порядков при изменении оптической толщины Δ_{IB} мишенной плазмы согласно (6).

Несмотря на минимальные геометрические различия между двумя полученными конфигурациями *Tetr-36* и *Tetr-36-dis*, различия в амплитудах симметричных мод в них оказываются вполне ощутимыми, как можно видеть из рис. 2, где приведены значения *парциальных* неоднородностей ε_l для различных значений оптической толщины Δ_{IB} мишенной плазмы.

Следовательно, дополнительная взаимная компенсация мод в конфигурации *Tetr-36-dis* достигается, главным образом, за счет введения небольших различий в значения энергий между симметричными семействами лазерных источников. Снижение полной лазерной энергии на мишени в конфигурации *Tetr-36-dis* составляет при этом всего 5 %.

Амплитуды симметричных мод меняют знаки и, как видно из рис. 2, обращаются в нуль на рассмотренном интервале значений Δ_{IB} . Отметим, что обеднение в результате численной оптимизации спектра мод в конфигурации *Tetr-36-dis* не дает существенного суммарного уменьшения полной неоднородности по сравнению с конфигурацией *Tetr-36*.

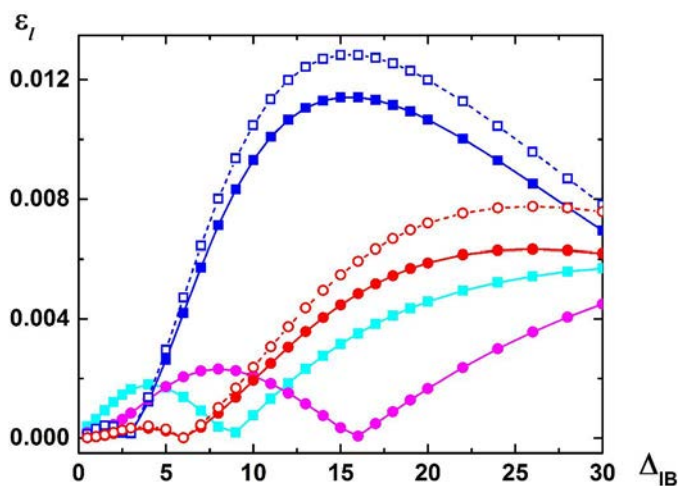


Рис. 2. Амплитуды парциальных неоднородностей в конфигурациях *Tetr-36* (—■— ε_9 ; —■— ε_{10} ; —●— ε_{11} ; —●— ε_{12}) и *Tetr-36-dis* (- - □ - - ε_{10} ; - - ○ - - ε_{12})

Конфигурации *Tetr-48* и *Tetr-48-dis*. Были найдены парные зеркально-симметричные конфигурации из 48 лазерных источников. С точностью до зеркальной симметрии в результате численной оптимизации получены одна конфигурация для случая лазерных пучков с равной энергией (*Tetr-48*) и одна конфигурация с несколько различающейся энергией в четырех симметричных семействах лазерных источников (*Tetr-48-dis*). Найденные конфигурации обнуляют соответствующие составленные формы невязок $\ell_{48}^{tetr}(\theta_1, \varphi_1, \theta_2, \varphi_2, \theta_3, \varphi_3, \theta_4, \varphi_4)$ и $\ell_{48-dis}^{tetr}(\theta_1, \varphi_1, \theta_2, \varphi_2, \theta_3, \varphi_3, \theta_4, \varphi_4, p_2, p_3, p_4)$. Расположение источников показано на рис. 3.

Формы невязок ℓ_{48}^{tetr} , ℓ_{48-dis}^{tetr} составлены аналогично предыдущим конфигурациям. Различия заключаются лишь в количестве параметров минимизации и соответственно числе устраняемых мод. В конфигурации *Tetr-48* устраняются все моды вплоть до 9-го порядка включительно, а в конфигурации *Tetr-48-dis* — все моды, включая моду 11-го порядка. Снижение суммарной энергии в конфигурации *Tetr-48-dis* составляет примерно 5,2 %.

Видно, что, хотя различия в положении осей лазерных пучков невелики, характеристики однородности облучения мишени различаются заметным образом, что видно по парциальным неоднородностям, показанным на рис. 4.

Конфигурация *Tetr-60-dis*. Для случая 60 источников в результате 14-параметрической оптимизации была найдена конфигурация с пятью разноэнергетическими симметричными семействами источников, обладающая лучшими характеристиками однородности (*Tetr-60-dis*). Она показана на рис. 5.

Видно, что удалось получить достаточно равномерное по телесному углу распределение лазерных источников. В структуре освещенности остаются симметричные моды высокого порядка, соответ-

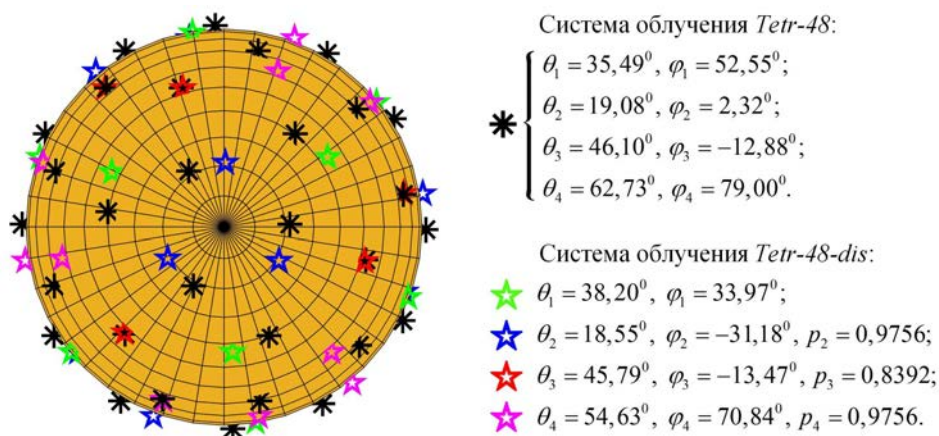


Рис. 3. Расположение лазерных источников в конфигурациях *Tetr-48* и *Tetr-48-dis*

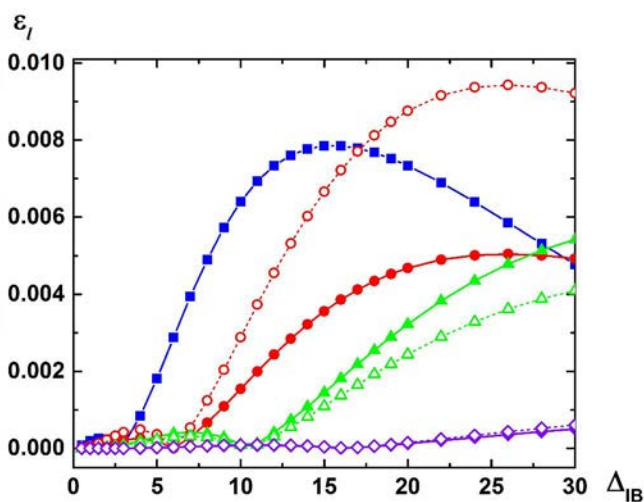


Рис. 4. Амплитуды парциальных неоднородностей в конфигурации *Tetr-48* (—■— ϵ_{10} ; —●— ϵ_{12} ; —▲— ϵ_{14} , —◆— ϵ_{16}) и *Tetr-48-dis* (---○--- ϵ_{12} ; ---△--- ϵ_{14} ; ---◇--- ϵ_{16})

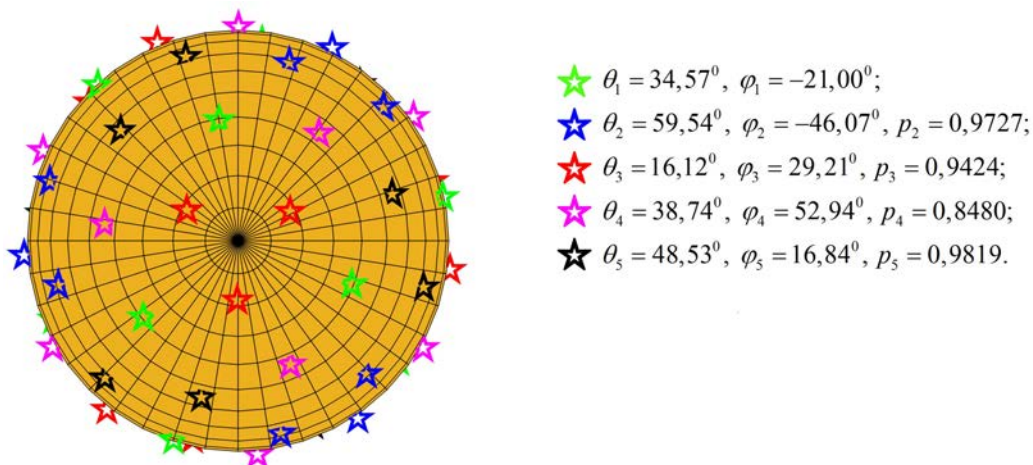


Рис. 5. Расположение лазерных источников в конфигурации *Tetr-60-dis*

ствующие мелкомасштабной структуре неоднородности, что можно видеть из данных, приведенных на рис. 6. Снижение суммарной энергии вследствие разноэнергетичности пяти симметричных семейств источников составляет примерно 5 %.

На рис. 7 показаны среднеквадратичные неоднородности ε лазерной освещенности капсулы для найденных конфигураций лазерных источников, обладающих симметрией тетраэдра. Видно, что предложенная стратегия оптимизации с ростом числа источников приводит к неуклонному улучшению однородности лазерного воздействия на термоядерную капсулу.

Напомним, что среднеквадратичная неоднородность ε и парциальные неоднородности ε_l связаны простым соотношением

$$\varepsilon = \sqrt{\sum_{l=1}^{\infty} \varepsilon_l^2},$$

что определяет возможность использования последних для характеристики модового состава излучения на поверхности сферической мишени.

Для характерной длительности ≈ 3 нс лазерного импульса на зажигание [13, 14] при максимальной интенсивности из скейлинга (6) получаем актуальный диапазон изменения оптической толщины мишенной плазмы до значений:

- $\Delta_{IB} \approx 7,5$ для излучения второй гармоники неодимового лазера ($\lambda_L = 0,53$ мкм);
- $\Delta_{IB} \approx 30$ для излучения третьей гармоники неодимового лазера ($\lambda_L = 0,35$ мкм).

Как видно из рис. 7, конфигурация облучения мишени *Tetr-48-dis* для условий облучения на второй гармонике решает все задачи по однородности освещения термоядерной мишени в основной части лазерного импульса.

Парциальные неоднородности ε_l по определению всегда неотрицательны. Между тем ε_l на рис. 2, 4, 6 обращаются в нуль при некоторых значениях параметра Δ_{IB} , что означает смену знака в этих точках амплитуды симметричной моды порядка l . Следовательно, с ростом во времени оптической толщины Δ_{IB} (согласно скейлингу (6)) неоднородность воздействия на капсулу в пространственном масштабе, соответствующем моде порядка l , будет носить знакопеременный характер.

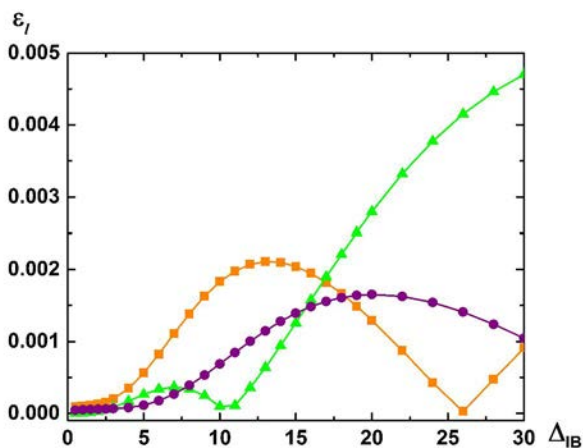


Рис. 6. Амплитуды парциальных неоднородностей в конфигурации *Tetr-60-dis*: —■— ε_{13} ; —▲— ε_{14} ; —●— ε_{15}

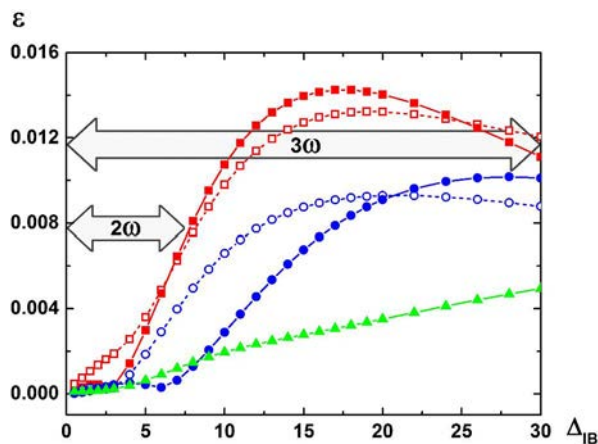


Рис. 7. Среднеквадратичные неоднородности облучения мишени в различных конфигурациях лазерных источников, обладающих симметрией тетраэдра: —□— *Tetr-36*; —■— *Tetr-36-dis*; —○— *Tetr-48*; —●— *Tetr-48-dis*; —▲— *Tetr-60-dis*

3. Поясные системы с максимальной редукцией

На основе работы [1] предлагается оригинальный подход для эффективной редукции низших мод с использованием квадратурной формулы Гаусса—Лежандра в поясных системах облучения. Ре-

зультат суммы вкладов системы произвольно расположенных источников описывается с помощью теоремы сложения [8], которая компактным образом формулируется с помощью нормированных гармоник (1). А именно, поворот источника от положения на оси симметрии к положению, определяемому угловыми координатами (θ_1, φ_1) , преобразует осесимметричную моду Y_{l0} следующим образом:

$$Y_{l0}(\cos \gamma) = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta_1, \varphi_1) Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (7)$$

где угол γ между направлением (θ_1, φ_1) и направлением (θ, φ) определяется соотношением $\cos \gamma = \cos \theta_1 \cos \theta + \sin \theta_1 \sin \theta \cos(\varphi - \varphi_1)$.

Соотношение (7) представляет вид функции Вигнера для частного случая осесимметричного объекта (каковым является, например, пятно лазерной засветки круглой формы). Если имеется система из N источников, ориентированных в направлениях (θ_n, φ_n) , $n = \overline{1, N}$, то из (7) следует, что их суммарный вклад в моду l -го порядка есть

$$\sum_{n=1}^N Y_{l0}(\cos \gamma_n) = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \sum_{m=-l}^l \left(\sum_{n=1}^N Y_{lm}^*(\theta_n, \varphi_n) \right) Y_{lm}(\theta, \varphi). \quad (8)$$

Если удастся обеспечить взаимную компенсацию вкладов источников в (8)

$$\sum_{n=1}^N Y_{lm}^*(\theta_n, \varphi_n) = 0, \quad (9)$$

то мода с индексами l и m будет, очевидно, редуцирована. При этом задачи взаимной компенсации низших азимутальных (т. е. мод, содержащих зависимость от азимутального угла φ) и осесимметричных мод решаются отдельно.

В каждом поясе предполагается равномерное расположение источников, следовательно, суммирование геометрической прогрессии в азимутальной части выражения (9) дает $\sum_{k=1}^{M_j} \exp(i\varphi_j m + i2\pi(k-1)m/M_j) = 0$, если m/M_j — нецелое число (M_j — число источников в поясе j ; φ_j — начальный угол j -го пояса источников).

Идея подхода, предложенного в работе [1], заключается в редукации осесимметричных слагаемых в правой части (7) с помощью квадратур Гаусса—Лежандра. При $m = 0$ в (9) получаем сумму вида $\sum_{n=1}^N w_n P_l^m(\cos \theta_n)$. Если угловые координаты θ_n поясов источников совпадают с узлами квадратурной формулы Гаусса, а коэффициенты w_n — со значениями весовых множителей в этой формуле, то указанная сумма обращается в нуль. Таким образом, число поясов L определяется числом узлов θ_n в квадратурной формуле Гаусса—Лежандра [8].

При этом в [1] не ставилась задача поиска системы с минимальным числом источников. Скорее, автор стремился выровнять энергию источников в различных поясах⁴.

Предлагаемые усовершенствования осесимметричной системы [1] касаются установления минимального числа лазерных источников, необходимых для устранения всех низших мод вплоть до некоторого порядка l . Минимальные осесимметричные конфигурации лазерных источников необходимы для последующего сопоставления эффективности редукации мод.

Проще всего пояснить суть дела, обратившись к самым простым геометриям.

⁴Значения весовых множителей в квадратурной формуле существенно отличаются друг от друга, и, следовательно, получается система лазерного облучения мишени с существенно разноэнергетическими источниками, что с практической точки зрения бессмысленно. Но здесь интересна сама принципиальная возможность эффективной редукации низших мод, и поэтому авторы оставляют за скобками вопросы практической целесообразности построения поясной системы с различной мощностью источников.

Наименьшей поясной системой является тетраэдр, две вершины которого располагаются в верхнем полупространстве, а две — в нижнем. В самом деле, вершины тетраэдра расположены как раз в точках, соответствующих нулям второго полинома Лежандра $P_2(\cos \theta)$ ($\theta \approx \pm 54,74^\circ$).

Геометрия тетраэдра обеспечивает отсутствие всех мод вплоть до порядка $l < 3$. На первый взгляд, пояса из двух источников в верхней полусфере и двух источников — в нижней для этого кажутся недостаточными. Но на самом деле, если расположить вершины тетраэдра попарно в верхней и нижней полусферах, то они окажутся повернуты друг относительно друга на угол $\pi/2$. Легко понять, что их вклады в моду Y_{22} оказываются разных знаков.

Ориентированный таким образом тетраэдр вместе с тетраэдром, повернутым на угол $\pi/2$, образует куб (8 источников). Такая система редуцирует моду третьего порядка. Эта конфигурация не является минимальной. В самом деле, 6 источников, расположенных в центрах граней куба, также обладают симметрией куба и, следовательно, в сумме компенсируют моду третьего порядка. Такая конфигурация одновременно является осесимметричной. Так, при совмещении оси OZ с диагональю куба получается поясная конфигурация, в которой источники располагаются в точках нулей второго полинома Лежандра $P_2(\cos \theta)$, а пояса повернуты друг относительно друга на угол $\pi/3$. Аналогичные рассуждения приводят к тому, что вклады в моду $Y_{3\pm 2}$ трех источников в верхней полусфере и трех источников (угол между которыми составляет $\pi/3$) в нижней полусфере взаимно компенсируют друг друга.

Так как для системы из трех поясов весовые множители являются рациональными числами, то можно построить конфигурацию из 18 источников равной энергии, редуцирующую все моды порядка $l \leq 5$. Минимальной при этом окажется конфигурация из 16 источников.

При удачном соотношении иррациональных весовых множителей можно построить четырехпоясную осесимметричную систему из 48 источников почти равной энергии, позволяющую редуцировать все моды порядка $l \leq 7$. Минимальной при этом будет система из $4 \times 7 = 28$ источников.

Таким образом, указан способ построения минимальных осесимметричных конфигураций лазерных источников, обеспечивающих редукцию всех низших мод вплоть до некоторого порядка l_{\min} . Результаты проведенного анализа сведены в табл. 1.

Как было показано, в минимальных конфигурациях (4 источника в вершинах тетраэдра и 6 источников в центрах граней куба) поясные и симметричные конфигурации совпадают. Однако затем (с ростом числа поясов и источников и соответственно увеличением порядка редуцируемых мод) эти системы расходятся. При этом эффективность редукции низших мод в симметричных системах оказывается выше. Так, для 12 источников, расположенных в вершинах икосаэдра, минимальный порядок остающейся моды l_{\min} равен 6, в то время как в поясной системе для этого необходимо 16 источников.

Таблица 1

Минимальные поясные конфигурации

Число поясов	N	l_{\min}
2	4	3
2	6	4
3	16	6
4	28	8
5	46	10
6	66	12

4. Эффективность редукции мод в поясных системах и конфигурациях, обладающих симметрией тетраэдра

В этом разделе сопоставим поясные [1] и симметричные конфигурации с точки зрения эффективности редукции низших мод. Для этого сопоставим количество низших мод, которые надо редуцировать, и число степеней свободы системы из N источников.

Полное число мод до l -го порядка включительно составляет $(l + 1)^2$. Задача достижения однородности лазерного воздействия заключается в устранении всех мод, кроме моды $l = 0$. Полное число геометрических степеней свободы системы из N источников составляет $3(N - 1)$ (три степени свободы характеризуют положение системы как целого, соответствуя, например, выбору некоторого направления, в котором ориентирована система, и угла поворота относительно нее). Приравнявая

оба эти числа, получаем выражение для порядка редукции l^* (характеризуемого, вообще говоря, нецелым числом):

$$l^* = \sqrt{3}(N - 1)^{1/2} - 1. \quad (10)$$

Допущение разное энергетичности источников дает еще $N - 1$ степеней свободы. Порядок редукции в этом случае равен

$$l_d^* = 2(N - 1)^{1/2} - 1. \quad (11)$$

В табл. 2 сопоставляются показатели минимальных (по числу источников N) поясных систем облучения мишени (L — количество поясов источников в осесимметричных конфигурациях *Axis*) и найденных оптимальных конфигураций источников в симметрии тетраэдра. Конфигурации с равной энергией источников характеризуются порядком редукции l^* (10), для оценки эффективности редукции конфигураций с источниками неравной мощности используется порядок l_d^* (11). Значения l^* и l_d^* служат ориентиром достижимой редукции мод исходя из числа имеющихся степеней свободы, в то время как значение l_{min} отражает действительную глубину редукции, реализуемой данной геометрией лазерных источников.

Видно, что высокая эффективная редукция в осесимметричных конфигурациях имеет место в трехпоясных системах. Так, для системы *Axis* $L = 3$ глубина редукции $l_{min} = 6$ сопоставима с порядком редукции $l^* = 6,1$, найденным согласно (10) из подсчета числа доступных степеней свободы. При возрастании числа лазерных источников, как видно из табл. 2, симметричные конфигурации предоставляют бóльшие возможности редукции (достигаются бóльшие значения l_{min} при меньшем числе лазерных источников N). Так, сопоставление поясной конфигурации *Axis* $L = 5$ и симметричной конфигурации *Tetr-48-dis* (с примерно равным числом источников 46 и 48) явно свидетельствует в пользу последней. Отметим также, что с увеличением числа источников эффективность редукции снижается как в поясных, так и симметричных конфигурациях.

Заметим, что ситуация $l_{min} \geq l^*$ имеет место только для геометрий с размещением источников в вершинах тетраэдра, октаэдра и икосаэдра (они приведены для сравнения в трех нижних строках табл. 2). Однако небольшое число вершин в этих правильных многогранниках не позволяет строить на их основе системы лазерного облучения мишени с требуемым высоким уровнем однородности.

Таблица 2

Сравнение эффективности редукции мод для различных конфигураций лазерных источников

Система облучения	N	l_{min}	$l^*(N)$	$l_d^*(N)$
<i>Axis</i> $L = 3$	16	6	—	6,7
<i>Axis</i> $L = 3$	18	6	6,1	—
<i>Axis</i> $L = 4$	28	8	—	9,4
<i>Axis</i> $L = 5$	46	10	—	12,4
<i>Axis</i> $L = 6$	66	12	—	15,1
<i>Tetr-36</i>	36	9	9,3	—
<i>Tetr-36-dis</i>	36	10	—	10,8
<i>Tetr-48</i>	48	10	10,9	—
<i>Tetr-48-dis</i>	48	12	—	12,7
<i>Tetr-60-dis</i>	60	13	—	14,4
Тетраэдр	4	3	2,0	—
Октаэдр	6	4	2,9	—
Икосаэдр	12	6	4,7	—

Заключение

На основе численного анализа условий вращательной симметрии тетраэдра определен вид допустимых этой симметрией мод, присутствующих в распределении лазерной интенсивности на поверхности сферической капсулы с термоядерным топливом.

Установление вида симметричных мод позволило найти симметричные конфигурации лазерных источников, обеспечивающие достижение высоких уровней однородности лазерного облучения термоядерной мишени.

В работе [1] был фактически предложен критерий оценки эффективности конфигураций лазерных источников для прямого облучения мишени, заключающийся в достигаемой глубине редукции мод низших порядков в структуре лазерной засветки сферической капсулы. Проведенное по этому критерию сопоставление эффективности редукции низших мод, достигаемой в поясных конфигурациях лазерных источников, построенных на основе квадратурных формул Гаусса—Лежандра [1], и редукции, достигаемой в конфигурациях, обладающих симметрией тетраэдра, показывает предпочтительность последних.

Непосредственная проведенная верификация оптимальности найденных симметричных конфигураций в численных расчетах освещенности сферической капсулы демонстрирует неуклонное улучшение однородности с увеличением числа источников (подтверждая, таким образом, и справедливость используемого критерия). Достигается облучение мишени, отличающееся от однородного меньше чем на 1%.

Отметим, что работы американских исследователей на лазерной установке OMEGA [3–5] обозначили интересную возможность применения симметричных систем лазерного облучения как для прямого (лазерного), так и непрямого (рентгеновского) воздействия на термоядерные мишени.

Список литературы

1. *Mark J. W. K.* Near spherical illumination of ion-beam and laser targets // *Physics Letters*. 1986. Vol. 114A, No 8-9. P. 458.
2. *Boehly T. R., Brown D. L., Craxton R. S., Keck R. L., Knauer J. P., Kelly J. H., Kessler T. J., Kumpan S. A., Loucks S. J., Letzring S. A., Marshall F. J., McCrory R. L., Morse S. F. B., Seka W., Soures J. M., Verdon C. P.* Initial performance results of the OMEGA laser system // *Optics Communication*. 1997. Vol. 133. P. 495–506.
3. *Phillion D. W., Pollaine S. M.* Dynamical compensation of irradiation nonuniformities in a spherical hohlraum illuminated with tetrahedral symmetry by laser beams // *Physics of Plasmas*. 1994. Vol. 1, No 9. Paper 2963.
4. *Schnittman J. D., Craxton R. S.* Three-dimensional modeling of capsule implosions in OMEGA tetrahedral hohlraums // *Ibid.* 2000. Vol. 7, No 7. Paper 2964.
5. *Bennett G. R., Wallace J. M., Murphy T. J., Chiren R. E., Delamater N. D., Gobby P. L., Hauer A. A., Klare K. A., Oertel J. A., Watt R. G., Wilson D. C., Varnum W. S., Craxton R. S., Glebov V. Yu., Schnittman J. D., Stoeckl C., Pollaine S. M., Turner R. E.* Moderate-convergence inertial confinement fusion implosions in tetrahedral hohlraums at Omega // *Ibid.* No 6. Paper 2594.
6. *Collins T. J. B., Marozas J. A., Anderson K. S., Betti R., Craxton R. S.* A polar-drive-ignition design for the National Ignition Facility // *Ibid.* 2012. Vol. 19. Paper 056308.
7. *Radha P. B., Hohenberger M., Edgell D. H., Marozas J. A., Marshall F. J., Michel D. T., Rosenberg M. J., Seka W., Shvydky A., Boehly T. R., Collins T. J. B., Campbell E. M., Craxton R. S., Delettrez J. A., Dixit S. N., Frenje J. A., Froula D. H., Goncharov V. N., Hu S. X., Knauer J. P., McCrory R. L., McKenty P. W., Meyerhofer D. D., Moody J., Myatt J. F., Petrasso R. D., Regan S. P., Sangster T. C., Sio H., Skupsky S., Zylstra A.* Direct drive: simulations and results from the National Ignition Facility // *Ibid.* 2016. Vol. 23. Paper 056305.
8. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1979.
9. *Korn G., Korn T.* Spravochnik po matematike dlya nauchnykh rabotnikov i inzhenerov. М.: Nauka, 1979.
10. *Давыдов А. С.* Квантовая механика. М.: Физматгиз, 1966.
11. *Davydov A. S.* Kvantovaya mekhanika. М.: Fizmatgiz, 1966.

10. *Тихонов А. Н., Арсенин В. А.* Методы решения некорректных задач. Москва: Наука, 1979.
Tikhonov A. N., Arsenin V. A. Metody resheniya nekorrektnykh zadach. Moskva: Nauka, 1979.
11. *Atzeni S., Meyer-Ter-Vehn J.* The Physics of Inertial Fusion. Oxford: Clarendon Press, 2004.
12. *Соболь И. М.* Численные методы Монте-Карло. М.: Наука, 1973.
Sobol I. M. Chislennye metody Monte-Karlo. M.: Nauka, 1973.
13. *Craxton R. S., Anderson K. S., Boehly T. R., Goncharov V. N., Harding D. R., Knauer J. P., McCrory R. L., McKenty P. W., Meyerhofer D. D., Myatt J. F., Schmitt A. J., Sethian J. D., Short R. W., Skupsky S., Theobald W., Kruer W. L., Tanaka K., Betti R., Collins T. J. B., Delettrez J. A., Hu S. X., Marozas J. A., Maximov A. V., Michel D. T., Radha P. B., Regan S. P., Sangster T. C., Seka W., Solodov A. A., Soures J. M., Stoeckl C., Zuegel J. D.* Direct-drive inertial confinement fusion: areview // Physics of Plasmas. 2015. Vol. 22. Paper 110501.
14. *Бельков С. А., Бондаренко С. В., Вергунова Г. А., Гаранин С. Г., Гуськов С. Ю., Демченко Н. Н., Доскоч И. Я., Кучугов П. А., Змитренко Н. В., Розанов В. Б., Степанов Р. В., Яхин Р. А.* Термоядерные мишени прямого облучения лазерным импульсом мегаджоульного уровня // ЖЭТФ. 2015. Т. 148. Вып. 4(10). С. 784–798.
Belkov S. A., Bondarenko S. V., Vergunova G. A., Garanin S. G., Guskov S. Yu., Demchenko N. N., Doskoch I. Ya., Kuchugov P. A., Zmitrenko N. V., Rozanov V. B., Stepanov R. V., Yakhin R. A. Termoyadernye misheni pryamogo oblucheniya lasernym impulsom megadzhoul'nogo urovnya // ZhETF. 2015. T. 148. Vyp. 4(10). S. 784–798.

Статья поступила в редакцию 22.06.22.
