

УДК 519.6:539.3

## МОМЕНТНЫЙ КОНЕЧНЫЙ ЭЛЕМЕНТ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И ПЛАСТИЧНОСТИ

Д. Т. Чекмарев, Абу Даввас Яссер  
(ННГУ им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород)

Приводится описание нового восьмиузлового конечного элемента для решения трехмерных динамических задач теории упругости и пластичности. Восьмиузловой конечный элемент в виде гексаэдра обладает следующими особенностями: 1) напряжения, а также их моменты (три изгибающих и один крутящий) считаются постоянными в пределах элемента; 2) элемент имеет одну точку интегрирования; 3) элемент имеет четыре параметра, настраивая которые можно регулировать сходимость численных решений. Метод построения данного конечного элемента основан на комбинации двух идей: применения ажурной схемы конечного элемента в виде симплекса, вписанного в  $n$ -мерный куб, и проецирования сеточной задачи высокой размерности на сетку пространства более низкой размерности. Описана реализация методики численного решения трехмерных нестационарных задач теории упругости и пластичности на базе данного конечного элемента. Приводятся результаты решения ряда тестовых задач теории упругости и пластичности и сравнение с решениями на основе других численных схем.

*Ключевые слова:* метод конечных элементов, ажурная схема, неустойчивость *песочные часы*, трехмерная задача, нестационарная задача теории упругости.

### Введение

Проблема построения эффективных методик численного решения задач механики деформируемого твердого тела остается актуальной. В работе предлагается описание нового конечного элемента для решения трехмерных задач теории упругости и пластичности. Его отличают простота реализации и высокая эффективность по сравнению с традиционными конечными элементами, а также наличие регулируемых параметров. Другие достоинства данного конечного элемента будут описаны далее.

Подход к построению рассматриваемого моментного конечного элемента описан в работе [1]. В его основе лежит применение ажурных схем метода конечного элемента (МКЭ) [2–4] к решению динамических задач теории упругости и пластичности. Данные схемы были подробно исследованы теоретически и практически на решении большого количества модельных задач, они показали высокую эффективность и точность по сравнению с традиционными схемами МКЭ [5, 6]. Их особенностью является отсутствие эффекта неустойчивости типа *песочные часы* [7, 8], присущего схеме Уилкинса [9], а также эффекта завышенной сдвиговой жесткости, свойственного классическому четырехузловому элементу в виде тетраэдра. В трехмерных ажурных схемах МКЭ четырехузловые элементы в виде тетраэдров заполняют расчетную область с регулярными промежутками при сохранении связности сетки. Фактически в каждой ячейке конечно-разностной сетки из гексаэдров располагается один четырехузловой конечный элемент (тетраэдр). Иначе ажурные схемы можно интерпретировать как схемы на базе четырехузлового конечного элемента, полученного из гексаэдра. В итоге получается эффективная численная схема МКЭ, обладающая указанными выше достоинствами.

Отметим, что ажурные схемы обладают удачными свойствами не для любой размерности задач. Так, в двумерном случае ажурная схема из треугольных элементов обладает очевидной асимметрией (центр четырехугольника не совпадает с центром вписанного в него треугольника), что понижает порядок аппроксимации численной схемы. Трехмерный случай является удачным, так как есть возможность симметрично вписать тетраэдр в куб или параллелепипед. С учетом достоинств ажурных схем в работе [10] была предложена идея для задач "неудачной размерности": строить для них численные схемы путем проецирования ажурных схем "удачной размерности" на сетку пространства меньшей размерности. Так, проецируя трехмерную ажурную схему МКЭ на двумерную сетку, можно получить двумерную схему; при этом есть основания полагать, что ее положительные свойства сохраняются. Таким же образом можно получать и новые схемы (конечные элементы) для задач удачной размерности, например, проецируя семимерную удачную ажурную схему на трехмерное пространство. Построенный таким образом конечный элемент обладает рядом новых возможностей. В работе [1] дается обоснование базирующегося на этой идее метода построения трехмерного конечного элемента. В данной работе описана реализация этой схемы.

### Ажурная схема МКЭ

Приведем краткое описание ажурной схемы, основанной на традиционной схеме с четырехузловым конечным элементом и явной схеме интегрирования по времени *крест* [3]. Она строится на базе ажурной сетки, в которой элементы заполняют расчетную область с регулярными промежутками.

Пусть рассматриваемое тело имеет объем  $V$ , на границах  $\partial V = S_u \cup S_p$  имеются краевые условия на перемещения  $S_u$  и напряжения  $S_p$ . Полагаем, что известны поля внешних массовых ( $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ ) и поверхностных ( $\mathbf{P} = (P_1, P_2, P_3)$ ) сил. Заданы начальные условия при  $t = 0$ : распределения перемещений  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$  и скоростей  $\dot{\mathbf{u}}$ . Общее уравнение динамики (вариационный принцип Даламбера—Лагранжа) имеет следующий вид:

$$\int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV = \int_V \rho (F_i - \ddot{u}_i) \delta u_i dV + \int_{S_p} P_i \delta u_i dS, \quad i = \overline{1, 3}, \quad j = \overline{1, 3}.$$

Рассматриваемая область покрывается гексаэдрической сеткой, расчетные элементы (тетраэдры) располагаются в центрах гексаэдров (рис. 1). Все экстенсивные характеристики (масса, объем и пр.) боковых тетраэдров присоединяются к центральному.

Для более ясного изложения идеи метода приведем конечно-разностное представление рассматриваемой схемы на равномерной сетке [3]. Явная ажурная схема на равномерной ортогональной сетке  $x_i^1 = x_0^1 + h_1 i$ ,  $x_j^2 = x_0^2 + h_2 j$ ,  $x_k^3 = x_0^3 + h_3 k$  может быть записана в следующем конечно-разностном виде (см. [3]):

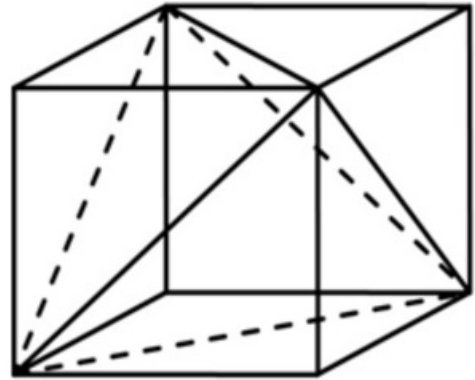


Рис. 1. Ячейка ажурной сетки

$$(\lambda + \mu) \begin{pmatrix} D_{11}u_1 + D_{12}u_2 + D_{13}u_3 \\ D_{21}u_1 + D_{22}u_2 + D_{23}u_3 \\ D_{31}u_1 + D_{32}u_2 + D_{33}u_3 \end{pmatrix} + \mu D \Delta \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = \rho D t t \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

аналогичном по форме системе уравнений Ламе

$$(\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu \Delta \mathbf{u} + \rho \mathbf{F} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}. \quad (2)$$

Здесь  $\lambda, \mu$  — параметры Ламе;  $\rho$  — плотность среды;  $D_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ),  $D_{\Delta}$  — сеточные операторы, аппроксимирующие соответственно вторые частные производные и оператор Лапласа;  $D_{tt}$  — сеточный оператор второй производной по времени.

Операторы строятся следующим образом. Базисные операторы, аппроксимирующие первые частные производные в элементе  $\left(d_m^+ \approx \frac{\partial}{\partial x^m}\right)$ , записываются в виде

$$\begin{aligned} (d_1^+ f)_{ijk} &= \frac{1}{2h_1} (f_{i+1,j+1,k+1} + f_{i+1,j,k} - f_{i,j+1,k} - f_{i,j,k+1}); \\ (d_2^+ f)_{ijk} &= \frac{1}{2h_2} (f_{i+1,j+1,k+1} + f_{i,j+1,k} - f_{i+1,j,k} - f_{i,j,k+1}); \\ (d_3^+ f)_{ijk} &= \frac{1}{2h_3} (f_{i+1,j+1,k+1} + f_{i,j,k+1} - f_{i,j+1,k} - f_{i+1,j,k}). \end{aligned} \quad (3)$$

Операторы

$$\begin{aligned} (d_1^- f)_{ijk} &= \frac{1}{2h_1} (-f_{i-1,j-1,k-1} - f_{i-1,j,k} + f_{i,j-1,k} + f_{i,j,k-1}); \\ (d_2^- f)_{ijk} &= \frac{1}{2h_2} (-f_{i-1,j-1,k-1} - f_{i,j-1,k} + f_{i-1,j,k} + f_{i,j,k-1}); \\ (d_3^- f)_{ijk} &= \frac{1}{2h_3} (-f_{i-1,j-1,k-1} - f_{i,j,k-1} + f_{i,j-1,k} + f_{i-1,j,k}) \end{aligned} \quad (4)$$

являются сопряженными к (3) (взятыми со знаком "-").

Операторы  $D_{ij}$ ,  $D_{\Delta}$  определим через суперпозиции операторов (3) и (4):

$$D_{ij} = \frac{1}{2} (d_i^+ d_j^- + d_j^+ d_i^-); \quad D_{\Delta} = D_{11} + D_{22} + D_{33}; \quad D_{tt} f = \frac{1}{\tau^2} (f^{l+1} - 2f^l + f^{l-1}).$$

### Построение двумерного моментного конечного элемента по трехмерной ажурной схеме

Численную схему решения двумерной задачи теории упругости (плоская деформация) [10] получим путем проецирования трехмерной задачи на плоскость  $X_1 O X_2$ . Полагая, что трехмерная расчетная область имеет вид  $\Omega \times [0, h_3]$ , где  $\Omega$  — область в  $\mathbb{R}^2$ , возьмем один ряд ячеек по координате  $x^3$  и наложим на решение ограничение  $u_3 = 0$ . При этом разностная схема (1) примет вид

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu) (D_{11} u_1 + D_{12} u_2) + \mu (D_{11} u_1 + D_{22} u_1 + D_{33} u_1) + \rho F_1 &= \rho D_{tt} u_1; \\ (\lambda + \mu) (D_{21} u_1 + D_{22} u_2) + \mu (D_{11} u_2 + D_{22} u_2 + D_{33} u_2) + \rho F_2 &= \rho D_{tt} u_2. \end{aligned} \quad (5)$$

В (5) операторы  $D_{ij}$  получаются проецированием рассмотренных выше операторов на двумерную сетку, при этом операторы

$$\begin{aligned} (d_3^+ f)_{ij} &= \frac{1}{2h_3} (f_{i+1,j+1} + f_{i,j} - f_{i,j+1} - f_{i+1,j}); \\ (d_3^- f)_{ij} &= \frac{1}{2h_3} (f_{i-1,j-1} + f_{i,j} - f_{i,j-1} - f_{i-1,j}) \end{aligned}$$

аппроксимируют с точностью до множителя оператор второй смешанной производной  $\frac{\partial^2}{\partial x^1 \partial x^2}$ .

Размер элемента  $h_3$  по оси  $Ox^3$  в построенной численной схеме превращается в регулируемый параметр схемы. Таким образом, в результате проецирования трехмерной ажурной схемы на двумерное пространство получено однопараметрическое семейство численных схем МКЭ решения плоской задачи теории упругости, близких к схеме билинейного конечного элемента. Настраивая параметр  $h_3$ , можно изменять влияние моментной составляющей в элементе и тем самым регулировать сходимость численных решений.

**Построение трехмерного моментного конечного элемента по семимерной ажурной схеме**

Обобщая данный подход, построим семейство восьмиузловых схем МКЭ решения трехмерных задач теории упругости, близких к схеме на базе восьмиузлового полилинейного конечного элемента. Отметим, что следующим удачным для построения ажурных схем является пространство размерности  $n = 7$ . При  $n = 7$  в куб, содержащий 128 вершин, можно вписать правильный симплекс с 8 вершинами исходного куба таким образом, что центры куба и симплекса совпадут. Примером является следующий набор вершин симплекса, вписанного в единичный семимерный куб:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Все ребра данного симплекса имеют одинаковую длину. Отметим, что наборы из первых трех координат данной системы векторов образуют множество вершин единичного трехмерного куба. Отметим также, что при  $n = 4, 5, 6$  подобное построение невозможно.

Для построения семимерной задачи рассмотрим гипотетическую задачу теории упругости в семимерном пространстве. Определим семимерный тензор деформаций через обобщение соотношений Коши:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad i, j = 1, \dots, 7.$$

Связь напряжений и деформаций установим на основе закона Гука:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, 7.$$

В результате семимерные уравнения движения теории упругости в перемещениях запишутся в виде (2), где градиент, дивергенция и оператор Лапласа определены соответственно в семимерном пространстве. Ажурная схема МКЭ на основе линейного конечного элемента на равномерной ортогональной сетке  $x_{i_1}^1 = x_0^1 + h_1 i_1, \dots, x_{i_7}^7 = x_0^7 + h_7 i_7$  примет вид, аналогичный (1):

$$(\lambda + \mu) \begin{pmatrix} D_{11}u_1 + \dots + D_{17}u_7 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \\ D_{71}u_1 + \dots + D_{77}u_7 \end{pmatrix} + \mu D_{\Delta} \begin{pmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_7 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} F_1 \\ \dots \\ F_7 \end{pmatrix} = \rho D_{tt} \begin{pmatrix} F_1 \\ \dots \\ F_7 \end{pmatrix}.$$

Для построения трехмерной схемы поступим аналогично рассмотренному выше случаю двумерной схемы. Полагая во всех узлах  $u_4 = u_5 = u_6 = u_7 = 0$ , получаем после проецирования на трехмерное пространство схему МКЭ в виде

$$\begin{aligned}
 & (\lambda + \mu) \begin{pmatrix} D_{11}u_1 + D_{12}u_2 + D_{13}u_3 \\ D_{21}u_1 + D_{22}u_2 + D_{23}u_3 \\ D_{31}u_1 + D_{32}u_2 + D_{33}u_3 \end{pmatrix} + \mu D_{\Delta} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \\
 & + \mu (D_{44} + D_{55} + D_{66} + D_{77}) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = \rho D_{tt} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}. \quad (6)
 \end{aligned}$$

В (6) операторы  $D_{ij} = \frac{1}{2} (d_i^+ d_j^- + d_j^+ d_i^-)$ ,  $D_{\Delta} = D_{11} + D_{22} + D_{33}$  выражаются через базисные операторы  $d_1^+$ ,  $d_2^+$ ,  $d_3^+$ ,  $d_4^+$ ,  $d_5^+$ ,  $d_6^+$ ,  $d_7^+$  и сопряженные к ним (взятые со знаком "-")  $d_1^-$ ,  $d_2^-$ ,  $d_3^-$ ,  $d_4^-$ ,  $d_5^-$ ,  $d_6^-$ ,  $d_7^-$ , определенные на восьмиузловых шаблонах. При этом операторы  $d_1^+$ ,  $d_2^+$ ,  $d_3^+$  и  $d_1^-$ ,  $d_2^-$ ,  $d_3^-$  аппроксимируют первые производные по соответствующим координатам, а операторы  $d_4^+$ ,  $d_5^+$ ,  $d_6^+$ ,  $d_7^+$  и  $d_4^-$ ,  $d_5^-$ ,  $d_6^-$ ,  $d_7^-$  аппроксимируют с точностью до множителя операторы старших производных, соответственно  $\frac{\partial^2}{\partial x^1 \partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2}{\partial x^1 \partial x^3}$ ,  $\frac{\partial^2}{\partial x^2 \partial x^3}$ ,  $\frac{\partial^3}{\partial x^1 \partial x^2 \partial x^3}$ . Подобные аппроксимации моментных составляющих имеют место и в традиционной схеме на базе полилинейного восьмиузлового конечного элемента (см., например, [11]).

Таким образом, в результате проецирования получено четырехпараметрическое семейство численных схем МКЭ решения трехмерной задачи теории упругости. Параметры  $h_4$ ,  $h_5$ ,  $h_6$ ,  $h_7$  можно настраивать, изменяя влияние моментных составляющих в элементе.

### Реализация численной схемы на основе моментного конечного элемента

Реализация численной схемы может быть выполнена в традиционной технике МКЭ с использованием векторной и матричной форм записи. Но поскольку в исходном конечном элементе (семи-мерном) используется линейная аппроксимация неизвестных функций, то и матрица жесткости, и якобиан отображения на стандартный элемент являются постоянными в пределах элемента. Поэтому более удобно и экономично выполнить реализацию в форме, аналогичной схеме Уилкинса [9].

Тензор деформаций в элементе имеет вид

$$(\varepsilon)_{\substack{i=1,2,3 \\ j=1,\dots,7}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} & \varepsilon_{14} & \varepsilon_{15} & \varepsilon_{16} & \varepsilon_{17} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{24} & \varepsilon_{25} & \varepsilon_{26} & \varepsilon_{27} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} & \varepsilon_{34} & \varepsilon_{35} & \varepsilon_{36} & \varepsilon_{37} \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{2} (d_i^+ u_j + d_j^+ u_i), & j \leq 3; \\ \frac{1}{2} d_j^+ u_i, & j > 3, \end{cases}$$

а тензор напряжений —

$$(\sigma)_{\substack{i=1,2,3 \\ j=1,\dots,7}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} & \sigma_{14} & \sigma_{15} & \sigma_{16} & \sigma_{17} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} & \sigma_{24} & \sigma_{25} & \sigma_{26} & \sigma_{27} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} & \sigma_{34} & \sigma_{35} & \sigma_{36} & \sigma_{37} \end{pmatrix}.$$

Последние четыре столбца соответствуют трем изгибающим и одному крутящему моментам конечного элемента. Далее интегралы от компонент тензора напряжений определяют силы, приложенные к узлам элемента, в результате чего формируются уравнения движения узлов.

Вычисление производных в произвольном гексаэдрическом элементе выполняется по формуле

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} \approx d_i^+ f = \frac{\det V_i}{\det V}, \quad (7)$$

где матрица  $V$  имеет вид

$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_1^1 & x_1^2 & x_1^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_2^1 & x_2^2 & x_2^3 & 0 & h_5 & h_6 & h_7 \\ 1 & x_3^1 & x_3^2 & x_3^3 & h_4 & 0 & h_6 & h_7 \\ 1 & x_4^1 & x_4^2 & x_4^3 & h_4 & h_5 & 0 & 0 \\ 1 & x_5^1 & x_5^2 & x_5^3 & h_4 & h_5 & 0 & h_7 \\ 1 & x_6^1 & x_6^2 & x_6^3 & h_4 & 0 & h_6 & 0 \\ 1 & x_7^1 & x_7^2 & x_7^3 & 0 & h_5 & h_6 & 0 \\ 1 & x_8^1 & x_8^2 & x_8^3 & 0 & 0 & 0 & h_7 \end{pmatrix},$$

а матрицы  $V_i$  получаются из матрицы  $V$  заменой столбца  $i$ -й координаты на столбец значений функций в узлах элемента, например,

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 & f_1 & x_1^2 & x_1^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & f_2 & x_2^2 & x_2^3 & 0 & h_5 & h_6 & h_7 \\ 1 & f_3 & x_3^2 & x_3^3 & h_4 & 0 & h_6 & h_7 \\ 1 & f_4 & x_4^2 & x_4^3 & h_4 & h_5 & 0 & 0 \\ 1 & f_5 & x_5^2 & x_5^3 & h_4 & h_5 & 0 & h_7 \\ 1 & f_6 & x_6^2 & x_6^3 & h_4 & 0 & h_6 & 0 \\ 1 & f_7 & x_7^2 & x_7^3 & 0 & h_5 & h_6 & 0 \\ 1 & f_8 & x_8^2 & x_8^3 & 0 & 0 & 0 & h_7 \end{pmatrix}; \quad V_2 = \begin{pmatrix} 1 & x_1^1 & f_1 & x_1^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_2^1 & f_2 & x_2^3 & 0 & h_5 & h_6 & h_7 \\ 1 & x_3^1 & f_3 & x_3^3 & h_4 & 0 & h_6 & h_7 \\ 1 & x_4^1 & f_4 & x_4^3 & h_4 & h_5 & 0 & 0 \\ 1 & x_5^1 & f_5 & x_5^3 & h_4 & h_5 & 0 & h_7 \\ 1 & x_6^1 & f_6 & x_6^3 & h_4 & 0 & h_6 & 0 \\ 1 & x_7^1 & f_7 & x_7^3 & 0 & h_5 & h_6 & 0 \\ 1 & x_8^1 & f_8 & x_8^3 & 0 & 0 & 0 & h_7 \end{pmatrix}$$

и т. д. Операторы (7) могут быть представлены в виде линейных комбинаций значений функций в узлах элемента:

$$d_i^+ f = \sum_{j=1}^8 \beta_j^i f_j.$$

После вычисления деформаций и напряжений в элементах осуществляется процедура сборки уравнений движения узлов сетки, как в схеме Уилкинса [9]: формируются и суммируются силы, действующие от элементов к узлам, масса каждого узла принимается равной  $1/8$  суммы масс инцидентных ему элементов, далее из второго закона Ньютона определяются ускорения узлов. Построенная система обыкновенных дифференциальных уравнений интегрируется по времени с использованием явной схемы *крест*.

### Численные результаты

Для иллюстрации работоспособности методики на основе нового моментного конечного элемента рассмотрим результаты решения трех динамических задач теории упругости и пластичности. Одна *упругая* задача — на равномерной сетке, вторая — на неравномерной сетке, третья — *упруго-пластическая* задача в геометрически и физически нелинейной постановке.

**Колебания бруса с квадратным сечением.** Рассматривается геометрически и физически линейная задача о колебаниях бруса с квадратным сечением под действием мгновенно приложенной по центру нагрузки. Приводятся решения с использованием схемы Уилкинса, а также ажурной и моментной схем.

Брус длиной  $L = 10$  см с квадратным сечением  $H_1 = H_2 = 1$  см (рис. 2) заземлен на торцах. Давление  $P = 0,17$  ГПа равномерно распределено на участке поверхности  $4 < x < 6$  (заштрихованном). Механические свойства материала:  $\rho = 7,8$  г/см<sup>3</sup>;  $E = 210$  ГПа; коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$ . Внешнее давление постоянно по пространству и времени.

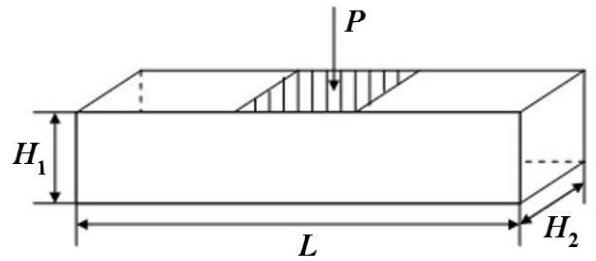


Рис. 2. Постановка задачи о колебании бруса

Задача решалась на двух сетках:  $40 \times 4 \times 4$  ячейки и  $80 \times 8 \times 8$  ячеек. Значения параметров моментной схемы  $h_4 = h_5 = h_6 = h_7$  принимались равными 0,5 для первой сетки и 0,25 для второй сетки.

На рис. 3 показаны полученные в результате решения этих задач зависимости скорости от времени  $v_3(t)$  в центре грани, противоположной нагруженной. Для нахождения численного решения были использованы четыре различные схемы: моментная, ажурная, Уилкинса и классическая схема на базе линейного четырехузлового конечного элемента в форме тетраэдра.

Из приведенных результатов видно, что наихудшую сходимость демонстрирует традиционная схема на тетраэдрах, что объясняется эффектом завышенной сдвиговой жесткости, присущим данной схеме. Схема Уилкинса, ажурная и моментная схемы показали примерно одинаковую сходимость.

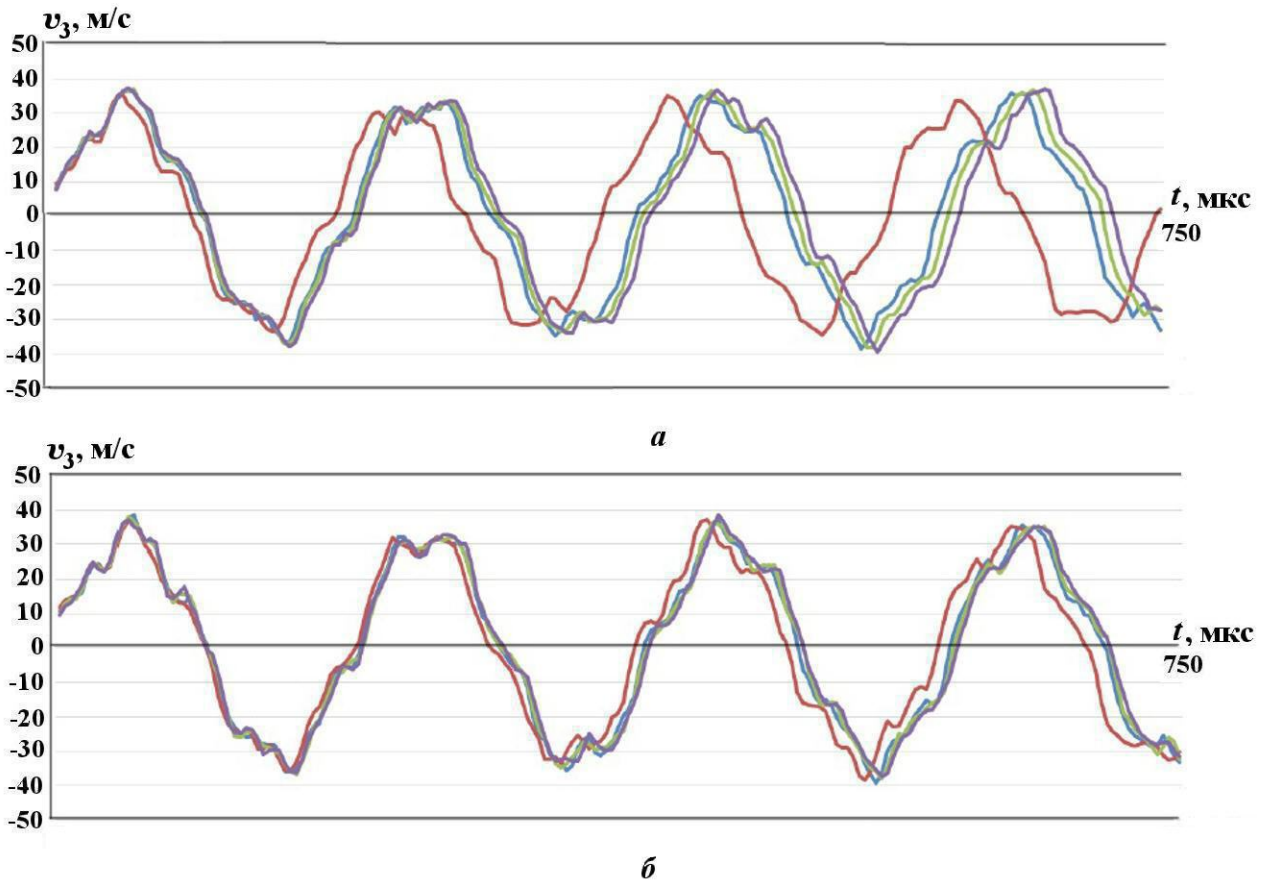


Рис. 3. Задача о колебании бруса. Скорости в центре грани в зависимости от времени: *a* — сетка  $40 \times 4 \times 4$ ; *б* — сетка  $80 \times 8 \times 8$ ; — ажурная схема; — классическая схема на базе тетраэдров; — моментная схема; — схема Уилкинса

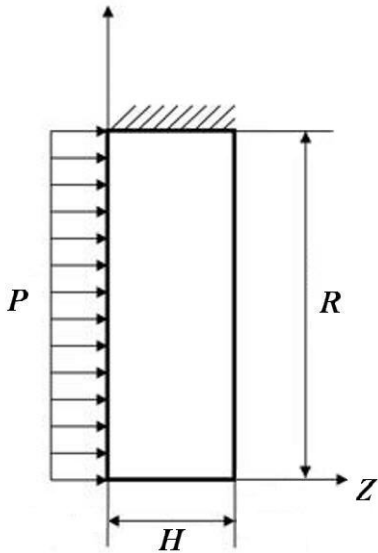


Рис. 4. Постановка задачи о деформировании диска

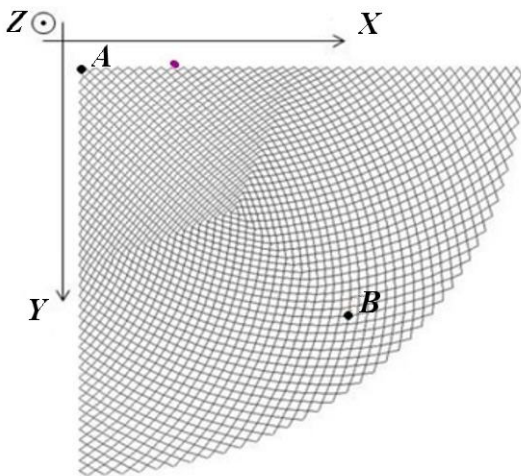


Рис. 5. Ажурная сетка на поверхности диска

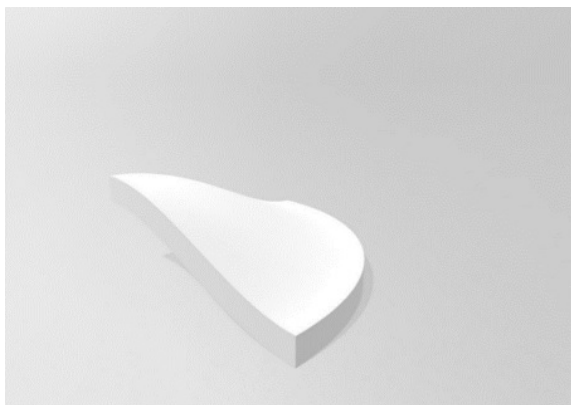


Рис. 6. Деформированный диск при максимальном прогибе

**Деформирование диска под действием внешнего давления.** Задача решалась в геометрически и физически линейной постановке. К круглому диску, закрепленному по контуру, приложено постоянное равномерно распределенное по поверхности давление. Постановка задачи показана на рис. 4. Здесь  $H = 1,5$  см;  $R = 14,85$  см. Свойства материала:  $\rho = 7,8$  г/см<sup>3</sup>;  $E = 210$  ГПа; коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$ . Граничные условия: жесткое закрепление контура диска, на одной свободной поверхности задавалось давление  $P = 0,17$  ГПа.

Расчетная область (четверть диска) покрывалась нерегулярной сеткой из трех блоков. Задача решалась на сетке из 80 ячеек вдоль радиуса и 16 ячеек по толщине пластины. Каждый из блоков покрывался сеткой  $40 \times 40$  четырехугольных ячеек. По толщине диска сетка равномерная. Значения параметров моментной схемы  $h_4 = h_5 = h_6 = h_7$  принимались равными 0,5. Вид ажурной сетки на поверхности диска показан на рис. 5.

На рис. 6 показан деформированный диск при максимальном прогибе.

На рис. 7 изображена зависимость скорости в центре грани, противоположной нагруженной, от времени, полученная с использованием схемы Уилкинса, ажурной и моментной схем. Результаты получились близкими, поскольку расчетная сетка была достаточно мелкой.

**Динамический изгиб круглой пластины под действием импульсной нагрузки.** Круглая пластина радиусом  $R = 76,24$  мм и толщиной  $h = 1,59$  мм нагружена импульсом давления, моделируемым начальной скоростью, заданной на центральной части пластины (рис. 8). Пластина жестко заделана по торцевой поверхности. Физико-механические характеристики материала пластины: модуль Юнга  $E = 71,8$  ГПа; коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$ ; плотность  $\rho = 2,6697$  г/см<sup>3</sup>; предел текучести  $\sigma_T = 280$  МПа; модуль упрочнения  $G = 140$  МПа. Область нагружения начальной скоростью  $v = 188,72$  м/с имеет радиус, равный  $R/3$ .

Расчетная сетка для 1/4 пластины строилась аналогично предыдущей задаче с разбиением на 100 элементов вдоль радиуса и 4 элемента по толщине (всего 38 255 узлов, 30 000 элементов). Значения параметров моментной схемы  $h_4 = h_5 = h_6 = h_7$  принимались равными 0,5.

Учет геометрической нелинейности осуществлялся в начальной конфигурации с использова-



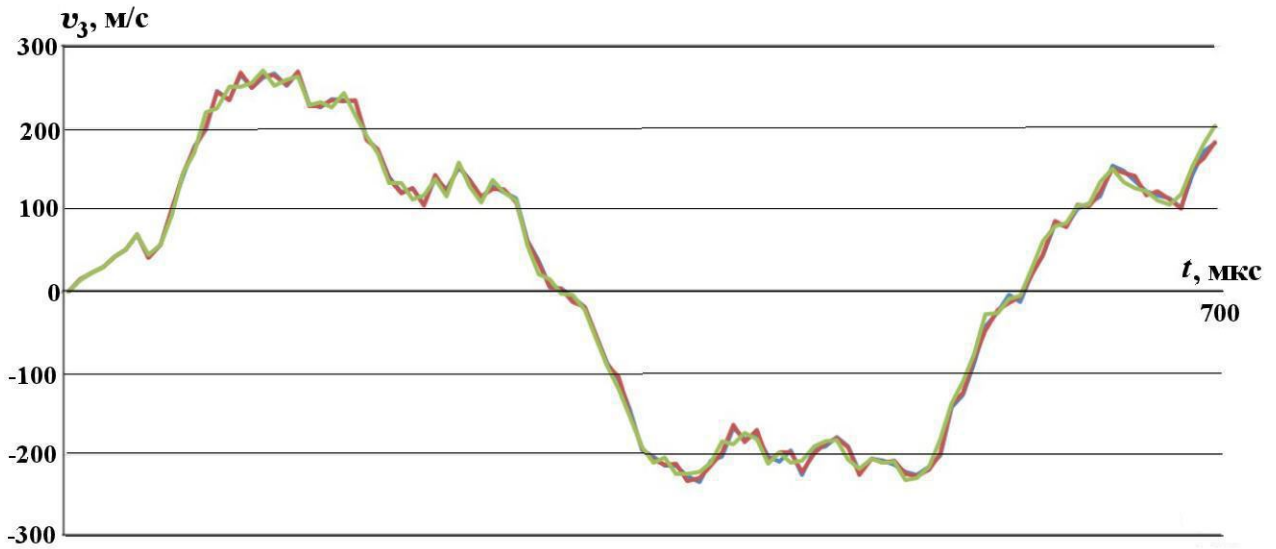


Рис. 7. Задача о деформировании диска. Скорости в центре грани в зависимости от времени: — ажурная схема; — моментная схема; — схема Уилкинса

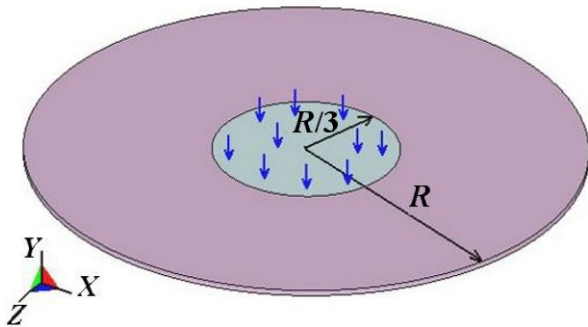


Рис. 8. Постановка задачи об изгибе круглой пластины

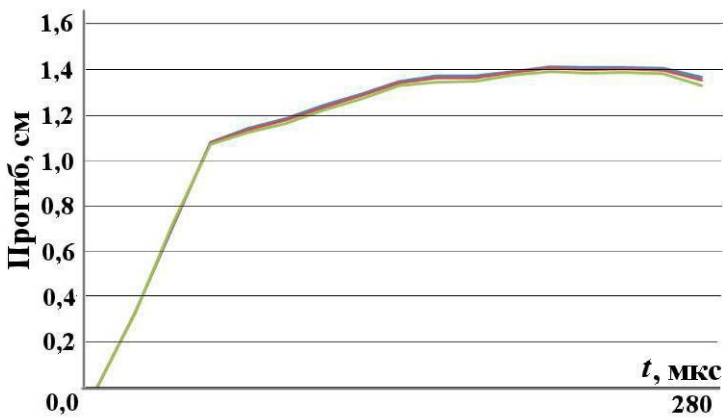


Рис. 9. Задача об изгибе круглой пластины. Временные зависимости смещения центральной точки пластины: — ажурная схема; — моментная схема; — схема Уилкинса

нием квадратичного варианта нелинейного тензора деформаций. Для учета физической нелинейности применялась теория пластичности с линейным кинематическим упрочнением.

На рис. 9 приведены графики временной зависимости смещения центральной точки пластины. Все три схемы на данной задаче показали близкие результаты.

Таким образом, результаты тестирования методики на базе нового моментного конечного элемента показали хорошее совпадение с численными результатами, полученными с использованием других численных схем, что свидетельствует о высоком качестве нового конечного элемента.

### Заключение

Рассмотрена методика численного решения трехмерных динамических задач теории упругости и пластичности на базе нового моментного конечного элемента. Особенности данного конечного элемента являются отсутствие эффекта завышенной сдвиговой жесткости, присущего классическому четырехузловому конечному элементу в виде тетраэдра [11] и неустойчивости типа *песочные часы*, свойственной схеме Уилкинса, а также одна точка интегриро-

вания в элементе и наличие регулируемых параметров численной схемы. Вопрос оптимального подбора параметров схемы  $h_4, h_5, h_6, h_7$  требует дополнительного изучения. Отметим, что каждый из данных параметров должен быть больше, чем характерный размер минимальной ячейки трехмерной сетки, чтобы не создавать дополнительных ограничений на устойчивость явной разностной схемы.

Отмеченные особенности моментного конечного элемента и результаты тестирования показывают перспективность данного подхода к построению эффективных методик численного решения задач теории упругости и пластичности, а также других задач механики сплошных сред и математической физики. Отметим также возможность построения на основе данного подхода методов решения задач с размерностью больше трех.

### Список литературы

1. *Чекмарев Д. Т.* Об одном способе построения двумерных 4-узловых и трехмерных 8-узловых конечных элементов для решения задач теории упругости // Ученые записки Казанского университета. Сер. Физико-математические науки. 2013. Т. 155, № 3. С. 150—158.  
*Chekmarev D. T.* Ob odnom sposobe postroeniya dvumernykh 4-uzlovykh i tryekhmernykh 8-uzlovykh konechnykh elementov dlya resheniya zadach teorii uprugosti // Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta. Ser. Fiziko-matematicheskie nauki. 2013. T. 155, № 3. S. 150—158.
2. *Чекмарев Д. Т.* Численные схемы метода конечного элемента на "ажурных" сетках // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2009. Вып. 2. С. 49—54.  
*Chekmarev D. T.* Chislennye skhemy metoda konechnogo elementa na "azhurnykh" setkakh // Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov. 2009. Vyp. 2. S. 49—54.
3. *Жидков А. В., Зефирова С. В., Кастальская К. А., Спиринов С. В., Чекмарев Д. Т.* Ажурная схема численного решения трехмерных динамических задач теории упругости и пластичности // Вестник ННГУ. 2011. № 4, ч. 4. С. 1480—1482.  
*Zhidkov A. V., Zefirov S. V., Kastalskaya K. A., Spirin S. V., Chekmarev D. T.* Azhurnaya schema chislennogo resheniya tryekhmernykh dinamicheskikh zadach teorii uprugosti i plastichnosti // Vestnik NNGU. 2011. № 4, ch. 4. S. 1480—1482.
4. *Spirin S. V., Chekmarev D. T., Zhidkov A. V.* Solving the 3D elasticity problems by rare mesh FEM scheme // Lect. Notes in Comput Science. 2015. Vol. 9045. P. 379—384.
5. *Крутова К. А.* Численное решение трехмерных динамических задач теории упругости и пластичности на основе ажурной вариационно-разностной схемы: Дис. канд. физ.-мат. наук. ННГУ, 2015.  
*Krutova K. A.* Chislennoe reshenie tryekhmernykh dinamicheskikh zadach teorii uprugosti i plastichnosti na osnove azhurnoy variatsionno-raznostnoy skhemy: Dis. kand. fiz.-mat. nauk. NNGU, 2015.
6. *Жидков А. В., Крутова К. А., Миронов А. А., Чекмарев Д. Т.* Численное решение трехмерных динамических упругопластических задач с использованием ажурной схемы метода конечных элементов // Проблемы прочности и пластичности. 2017. Т. 79, № 3. С. 327—337.  
*Zhidkov A. V., Krutova K. A., Mironov A. A., Chekmarev D. T.* Chislennoe reshenie tryekhmernykh dinamicheskikh uprugoplasticheskikh zadach s ispolzovaniem azhurnoy skhemy metoda konechnykh elementov // Problemy prochnosti i plastichnosti. 2017. T. 79, № 3. S. 327—337.
7. *Ohya Y., Youshida N.* FEM model of Biot's equations free from volume locking and hourglass instability // The 14<sup>th</sup> World Conf. on Earthquake Engineering. October 12—17, 2008. Beijing, China.
8. *Chekmarev D. T., Dawwas Ya. A.* Solving the hourglass instability problem using rare mesh variation-difference schemes // J. Phys., Conf. Ser. 2021. Vol. 2099. Paper 012003.

9. *Уилкинс М. Л.* Расчет упругопластических течений // Вычислительные методы в гидродинамике. М.: Мир, 1967. С. 212–263.  
*Uilkins M. L.* Raschyet uprugoplasticheskikh techeniy // Vychislitelnye metody v gidrodinamike. М.: Mir, 1967. S. 212–263.
10. *Чекмарев Д. Т., Гладильщикова К. М.* Об одном классе двумерных схем МКЭ // Проблемы прочности и пластичности. 2006. Вып. 68. С. 236–242.  
*Chekmarev D. T., Gladilshchikova K. M.* Ob odnom klasse dvumernykh skhem MKE // Problemy prochnosti i plastichnosti. 2006. Vyp. 68. S. 236–242.
11. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975.  
*Zenkevich O.* Metod konechnykh elementov v tekhnike. М.: Mir, 1975.

Статья поступила в редакцию 23.11.22.

---