

ISSN 2414-0171

ВОПРОСЫ
АТОМНОЙ
НАУКИ И
ТЕХНИКИ

Российский
федеральный
ядерный
центр –
ВНИИЭФ

СЕРИЯ

**Математическое моделирование
физических процессов**

2023

ВЫПУСК 3

Главный редактор
Шагалиев Р. М.

Заместители главного редактора:
Алексеев А. В., Тишкин В. Ф.

Ответственный секретарь:
Соколовская Е. В.

Члены редколлегии:

Бартенев Ю. Г., Бетелин В. Б., Бочков А. И., Вронский М. А.,
Дрёмов В. В., Залялов Н. Н., Кибзун А. И., Козелков А. С.,
Козманов М. Ю., Куркин А. А., Мартынов А. П., Петров И. Б.,
Прилуцкий М. Х., Смирнов Н. Н., Соколов С. С., Старостин Н. В.,
Степаненко С. А., Храмченков М. Г., Четверушкин Б. Н.,
Шестаков А. А., Янилкин Ю. В.

Адрес редакции и издателя: 607188,
г. Саров Нижегородской обл., пр. Мира, 37
тел.: (83130)28406, *e-mail*: sokol@vniief.ru.
Адрес сайта журнала: <http://vant.vniief.ru/>

ВОПРОСЫ АТОМНОЙ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СЕРИЯ

Математическое моделирование физических процессов

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ СБОРНИК

ВЫПУСК 3

Саров — 2023

Издается с 1978 г.

18+

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Шестаков А. А.</i> Точные решения стационарной системы уравнений переноса излучения и энергии в многомерном случае	3
<i>Мжачих С. В., Колобянина Н. В., Лапшина Ю. Н.</i> Аппроксимация данных гистограммы методом условной минимизации длины кубического сплайна класса C^1 , обладающего свойствами неотрицательности и локальной монотонности. Часть 2	17
<i>Сапожников Ф. А., Рыкованов В. С.</i> Сравнение WPH и DISPH методов частиц при моделировании ударных волн	34
<i>Саразов А. В.</i> Особенности вычисления конвективных потоков для задач аэродинамики при использовании сеток с подвижными узлами	55
<i>Бельков С. А., Бондаренко С. В., Солнышкова Л. В.</i> Симметричные конфигурации лазерных источников для прямого облучения мишени. Симметрия тетраэдра	67
<i>Чекмарев Д. Т., Абу Даввас Яссер.</i> Моментный конечный элемент для решения трехмерных динамических задач теории упругости и пластичности	80
Сведения об авторах	91

C O N T E N T S

<i>Shestakov A. A.</i> Exact solutions to the stationary system of radiation and energy transport equations in multidimensional case	3
<i>Mzhachikh S. V., Kolobyanina N. V., Lapshina Yu. N.</i> The histogram data approximation with the conditional minimization method for the length of the cubic C^1 class spline with the non-negativeness and local monotonicity properties. Part 2	17
<i>Sapozhnikov F. A., Rykovanov V. S.</i> Comparison between WPH and DISPH methods of particles in simulation of shock waves	34
<i>Sarazov A. V.</i> The specifics of calculating convective flows in aerodynamics problems using meshes with moving nodes	55
<i>Belkov S. A., Bondarenko S. V., Solnyshkova L. V.</i> Symmetric configurations of laser sources for direct-drive target. Tetrahedral symmetry	67
<i>Chekmarev D. T., Abu Dawwas Yasser.</i> Momentary finite element for solving 3D dynamic elasticity and plasticity problems	80
Information about authors	92

Ответственный за выпуск Е. В. Соколовская

Редактор Е. Н. Старченко

Корректоры Т. А. Меркушева
Е. А. Окатьева
А. В. Федоренко

Дата выхода в свет 25.09.2023

Формат 60×84/8

Усл. печ. л. ~ 11,4

Уч.-изд. л. ~ 14

Тираж 1000 экз.

Зак. тип. 1548-2023

6 статей

Учредитель: ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ"

Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-29789 от 04 октября 2007 г.
выдано Роскомнадзором

Оригинал-макет подготовлен
в Математическом отделении ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ"
Отпечатано в ИПЦ ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ"
607188, г. Саров Нижегородской обл., ул. Силкина, 23

© ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", 2023

УДК 517.958:536.2

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ СТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ И ЭНЕРГИИ В МНОГОМЕРНОМ СЛУЧАЕ

А. А. Шестаков
(ФГУП "РФЯЦ-ВНИИТФ им. академ. Е. И. Забабахина",
г. Снежинск Челябинской области)

На основе разложения резольвенты оператора переноса в ряд Неймана получены аналитические формулы для определения параметров теплового излучения в многомерной геометрии. Эти формулы позволяют при известной равновесной интенсивности, которая определяется только распределением температуры, и при заданных коэффициентах поглощения и рассеяния найти в явном виде аналитические выражения основных спектральных величин: интенсивности, плотности и потока излучения. Приведены решения в сером и спектральном приближениях для одномерной, двумерной и трехмерной геометрий.

Ключевые слова: точные решения, система уравнений переноса теплового излучения.

Введение

Для каждой программы существует проблема тестирования. При тестировании программ в качестве модельных задач желателен выбирать задачи, которые имеют аналитические решения. Хотя определенный прогресс в построении аналитических решений для уравнения переноса теплового излучения достигнут [1–4], этих решений не всегда достаточно для разных классов задач переноса.

Для получения аналитических решений в оптически плотных средах можно использовать разложение резольвенты оператора переноса в ряд Неймана. Получение решений одномерных задач переноса теплового излучения через разложение в ряд Неймана использовалось ранее в работах [5–8]. Разложение резольвенты оператора переноса в ряд Неймана позволяет по известному температурному распределению получать спектрально-угловые характеристики поля излучения. После представления интенсивности через ряд Неймана в уравнении энергии приходится решать две задачи: интегрирование операторов разложения в пространстве направлений полета фотонов и интегрирование спектральных величин по энергии излучения. Вычислению этих интегралов помогает использование ряда упрощений.

Интегрирование в пространстве направлений упрощается, если использовать известные соотношения для скалярных произведений векторов направлений на градиенты функций, независимых от пространства направлений. Интегрирование по энергии излучения упрощается, если использовать специально выбранные формулы коэффициентов поглощения и рассеяния. Особенно упрощается вычисление ряда Неймана для оптически плотных сред, так как члены ряда обратно пропорциональны коэффициенту поглощения и быстро убывают с ростом оптической толщины. В этом случае бесконечно малыми членами ряда можно пренебречь.

В теории переноса теплового излучения по аналогии с температурой вещества вводят радиационную температуру, или температуру излучения, которая может существенно отличаться от температуры вещества [9–11]. Это отличие называется *отрывом* температур.

Целями данной работы являются:

- 1) получение аналитических решений стационарной системы уравнений переноса излучения и энергии в многомерном случае;
- 2) получение аналитических решений с отрывом температур.

1. Система уравнений переноса спектрального излучения и энергии

Рассмотрим систему уравнений переноса спектрального излучения и энергии для многомерной геометрии [12]:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} + \vec{\Omega} \cdot \nabla I_\nu + (\kappa_\nu + \chi_\nu) I_\nu = \kappa_\nu I_{p\nu} + \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega'} \beta_\nu(t, \vec{r}, \vec{\Omega}, \vec{\Omega}') I_\nu(t, \vec{r}, \vec{\Omega}') d\vec{\Omega}';$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \int_0^\infty \kappa_\nu \int_{\Omega} (I_\nu - I_{p\nu}) d\vec{\Omega} d\nu + Q.$$

Здесь t — время; \vec{r} — радиус-вектор; c — скорость света; $\vec{\Omega}'$ и $\vec{\Omega}$ — единичные векторы в направлении движения фотонов до и после рассеяния соответственно; ν — частота; κ_ν — коэффициент поглощения фотонов, $\kappa_\nu > 0$; χ_ν — коэффициент рассеяния фотонов, $\chi_\nu = \frac{1}{16\pi^2} \int_{\Omega} \int_{\Omega'} \beta_\nu(t, \vec{r}, \vec{\Omega}, \vec{\Omega}') d\vec{\Omega}' d\vec{\Omega} \geq 0$; $\beta_\nu(t, \vec{r}, \vec{\Omega}, \vec{\Omega}')$ — индикатриса рассеяния фотонов, $\beta_\nu \geq 0$; $I_\nu(t, \vec{r}, \vec{\Omega})$ — спектральная интенсивность излучения; $I_{p\nu} = \frac{1}{4\pi} B_\nu$ — спектральная интенсивность равновесного излучения; $B_\nu = \frac{8\pi h}{c^2} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/KT} - 1} = \frac{p_0 \varepsilon^3}{e^{\varepsilon/KT} - 1}$ — спектральная плотность равновесного излучения, умноженная на скорость света (функция Планка с множителем $p_0 = \frac{8\pi}{c^2 h^2}$), где $\varepsilon = h\nu$ — энергия фотона, $h = 6,625 \cdot 10^{-16}$ эрг · с — постоянная Планка, $K = 1,38 \cdot 10^{-16}$ эрг/град — постоянная Больцмана, T — температура вещества; E — внутренняя энергия; Q — тепловой источник.

При использовании формулы для B_ν будем пользоваться системой единиц, в которой $K = 1$. Для краткости функцию B_ν будем называть функцией Планка, а функцию $U_\nu = \int_{\Omega} I_\nu(t, \vec{r}, \vec{\Omega}) d\vec{\Omega}$ будем называть плотностью излучения.

В стационарном случае получаем систему

$$\vec{\Omega} \cdot \nabla I_\nu + (\kappa_\nu + \chi_\nu) I_\nu = \kappa_\nu I_{p\nu} + \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega'} \beta_\nu(\vec{r}, \vec{\Omega}, \vec{\Omega}') I_\nu(t, \vec{r}, \vec{\Omega}') d\vec{\Omega}'; \quad (1)$$

$$\int_0^\infty \kappa_\nu \int_{\Omega} (I_\nu - I_{p\nu}) d\vec{\Omega} d\nu = -Q.$$

Уравнение энергии можно упростить, если записать его через поток и вспомогательную функцию F :

$$\int_0^\infty \kappa_\nu \int_{\Omega} (I_\nu - I_{p\nu}) d\vec{\Omega} d\nu = F - \int_0^\infty \int_{\Omega} (\vec{\Omega} \cdot \nabla I_\nu) d\vec{\Omega} d\nu = F - \int_0^\infty \text{div} \vec{S}_\nu d\nu = F - \text{div} \vec{S} = -Q, \quad (2)$$

где $\vec{S}_\nu = \int_{\Omega} \vec{\Omega} I_\nu d\vec{\Omega}$ — спектральный поток излучения; $\vec{S} = \int_0^\infty \vec{S}_\nu d\nu$ — полный поток излучения; $F = \int_0^\infty \left(\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \int_{\Omega'} \beta_\nu I_\nu d\vec{\Omega}' d\vec{\Omega} - \chi_\nu U_\nu \right) d\nu$.

2. Решение системы уравнений переноса и энергии в стационарном случае без рассеяния

Для начала рассмотрим решение уравнения (1) без рассеяния при $\beta_\nu = 0$, т. е. $F = 0$:

$$\vec{\Omega} \cdot \nabla I_\nu + \kappa_\nu I_\nu = \kappa_\nu I_{p\nu}. \quad (3)$$

Запишем уравнение (3) в операторном виде $LI_\nu = I_{p\nu}$, где $L = E + \vec{\Omega} \cdot \kappa_\nu^{-1} \nabla$, $EI_\nu = I_\nu$. Тогда точное значение интенсивности можно записать в виде $I_\nu = L^{-1}I_{p\nu}$.

Следуя работе [1], разложим в ряд Неймана резольвенту оператора $\vec{\Omega} \cdot \kappa_\nu^{-1} \nabla$:

$$\left(E + \vec{\Omega} \cdot \kappa_\nu^{-1} \nabla\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\vec{\Omega} \cdot \kappa_\nu^{-1} \nabla\right)^n = E - \vec{\Omega} \cdot \kappa_\nu^{-1} \nabla + \left(\vec{\Omega} \cdot \kappa_\nu^{-1} \nabla\right)^2 - \dots$$

Отсюда можно получить точное значение интенсивности в виде бесконечного ряда от равновесной интенсивности:

$$I_\nu = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\vec{\Omega} \cdot \kappa_\nu^{-1} \nabla\right)^n I_{p\nu} = I_{p\nu} - \vec{\Omega} \cdot \kappa_\nu^{-1} \nabla I_{p\nu} + \left(\vec{\Omega} \cdot \kappa_\nu^{-1} \nabla\right)^2 I_{p\nu} - \dots \quad (4)$$

Разложение интенсивности в ряд Неймана позволяет после интегрирования по направлениям записать точные значения плотности и потока излучения в виде бесконечного ряда от функции Планка. Обоснование применения ряда Неймана для решения уравнения переноса приведено в работах Ларсена [1, 2].

Запишем уравнение (4) в операторном виде с выделением первых четырех слагаемых:

$$\begin{aligned} I_\nu &= I_{p\nu} - \kappa_\nu^{-1} L_1 + \kappa_\nu^{-1} L_2 - \kappa_\nu^{-1} L_3 + \dots, \\ L_1 &= \kappa_\nu \left(\vec{\Omega} \cdot \kappa_\nu^{-1} \nabla\right) I_{p\nu} = \vec{\Omega} \cdot \nabla I_{p\nu}, \\ L_2 &= \kappa_\nu \left(\vec{\Omega} \cdot \kappa_\nu^{-1} \nabla\right)^2 I_{p\nu} = \kappa_\nu \left[\vec{\Omega} \cdot \kappa_\nu^{-1} \nabla \left(\vec{\Omega} \cdot \kappa_\nu^{-1} \nabla\right)\right] I_{p\nu} = \vec{\Omega} \cdot \nabla \kappa_\nu^{-1} L_1, \\ L_3 &= \kappa_\nu \left(\vec{\Omega} \cdot \kappa_\nu^{-1} \nabla\right)^3 I_{p\nu} = \kappa_\nu \left\{\vec{\Omega} \cdot \kappa_\nu^{-1} \nabla \left[\vec{\Omega} \cdot \kappa_\nu^{-1} \nabla \left(\vec{\Omega} \cdot \kappa_\nu^{-1} \nabla\right)\right]\right\} I_{p\nu} = \vec{\Omega} \cdot \nabla \kappa_\nu^{-1} L_2 \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

Интегрирование по Ω можно упростить, используя известные соотношения [1]:

$$\int_{\Omega} \left(\vec{\Omega} \cdot \kappa_\nu^{-1} \nabla\right)^n d\vec{\Omega} = \begin{cases} 0, & n = 1, 3, 5, \dots; \\ \frac{4\pi}{n+1} (\kappa_\nu^{-1} \nabla)^n, & n = 0, 2, 4, \dots, \end{cases} \quad (5)$$

где второе выражение выполняется для четных значений κ_ν , независимых от пространства \vec{r} (зависимость от частоты остается). В общем случае оно выполняется только для первых двух значений $n = 0, 2$:

$$\int_{\Omega} d\vec{\Omega} = 4\pi; \quad \int_{\Omega} \left(\vec{\Omega} \cdot \kappa_\nu^{-1} \nabla\right)^2 d\vec{\Omega} = \frac{4\pi}{3} (\kappa_\nu^{-1} \nabla)^2 = \frac{4\pi}{3} \kappa_\nu^{-1} \operatorname{div} (\kappa_\nu^{-1} \nabla).$$

Из соотношений (5) получаем:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} L_1 d\vec{\Omega} &= 0; \quad \int_{\Omega} L_2 d\vec{\Omega} = \int_{\Omega} \left[\vec{\Omega} \cdot \nabla \kappa_\nu^{-1} \left(\vec{\Omega} \cdot \nabla I_{p\nu}\right)\right] d\vec{\Omega} = \frac{4\pi}{3} \operatorname{div} (\kappa_\nu^{-1} \nabla I_{p\nu}); \\ \int_{\Omega} L_3 d\vec{\Omega} &= \int_{\Omega} \left\{\vec{\Omega} \cdot \nabla \kappa_\nu^{-1} \left[\vec{\Omega} \cdot \nabla \kappa_\nu^{-1} \left(\vec{\Omega} \cdot \nabla I_{p\nu}\right)\right]\right\} d\vec{\Omega} = 0. \end{aligned}$$

Используя соотношения (5), можно записать точные значения плотности и спектрального потока излучения в виде бесконечного ряда от функции Планка:

$$\begin{aligned} U_\nu &= \int_{\Omega} I_{p\nu} d\vec{\Omega} - \kappa_\nu^{-1} \int_{\Omega} L_1 d\vec{\Omega} + \kappa_\nu^{-1} \int_{\Omega} L_2 d\vec{\Omega} - \kappa_\nu^{-1} \int_{\Omega} L_3 d\vec{\Omega} + \dots = B_\nu + \frac{1}{3} \kappa_\nu^{-1} \operatorname{div} (\kappa_\nu^{-1} \nabla B_\nu) + \dots; \\ \vec{S}_\nu &= \int_{\Omega} \vec{\Omega} I_\nu d\vec{\Omega} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_{\Omega} \vec{\Omega} \left(\vec{\Omega} \cdot \kappa_\nu^{-1} \nabla\right)^n I_{p\nu} d\vec{\Omega} = -\frac{1}{3} \kappa_\nu^{-1} \nabla B_\nu + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \int_{\Omega} \vec{\Omega} \left(\vec{\Omega} \cdot \kappa_\nu^{-1} \nabla\right)^n I_{p\nu} d\vec{\Omega}. \end{aligned} \quad (6)$$

Для этих выражений должно выполняться уравнение баланса частиц $\text{div}\vec{S}_\nu + \kappa_\nu U_\nu = \kappa_\nu B_\nu$, т. е., если при приближенном вычислении потока брать несколько членов ряда, то плотность излучения необходимо вычислять не по формуле из (6), а через поток и функцию Планка по формуле $U_\nu = B_\nu - \kappa_\nu^{-1} \text{div}\vec{S}_\nu$, чтобы не нарушать условие сохранения частиц в системе.

Выражения (4), (6) позволяют при известной равновесной интенсивности $I_{p\nu}(T)$, которая определяется только распределением температуры, и заданных коэффициентах поглощения и рассеяния найти в явном виде аналитические выражения основных спектральных величин I_ν , U_ν , \vec{S}_ν . После нахождения этих величин можно перейти к получению температуры из уравнения (2). Для нахождения температуры подставим выражение (4) в (2):

$$\int_0^\infty \kappa_\nu \int_\Omega \left[\sum_{n=1}^\infty (-1)^n \left(\vec{\Omega} \cdot \kappa_\nu^{-1} \nabla \right)^n I_{p\nu} \right] d\vec{\Omega} d\nu = -Q.$$

Если ввести оператор $M_n = \int_\Omega \left(\vec{\Omega} \cdot \kappa_\nu^{-1} \nabla \right)^n d\vec{\Omega}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, то остается суммирование только по четным значениям M_{2n} и уравнение для нахождения температуры принимает вид

$$\int_0^\infty \kappa_\nu \left(\sum_{n=1}^\infty M_{2n} I_{p\nu} \right) d\nu = -Q. \quad (7)$$

Первые четыре значения оператора M_n имеют простой вид: $M_0 = 4\pi$; $M_1 = 0$; $M_2 I_{p\nu} = \frac{4\pi}{3} \kappa_\nu^{-1} \times \text{div}(\kappa_\nu^{-1} \nabla I_{p\nu})$; $M_3 = 0$. Освободиться от интеграла по направлениям в операторе M_4 в общем случае не удастся.

В самом простом случае, при постоянном коэффициенте поглощения $\kappa_\nu = \kappa = \text{const}$, оператор M_n можно записать в виде

$$M_n = [1 + (-1)^n] \frac{2\pi}{n+1} (\kappa^{-1} \nabla)^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

При этом уравнение для нахождения температуры (7) принимает вид

$$\frac{1}{3\kappa} \nabla^2 T^4 + \frac{1}{5\kappa^3} \nabla^4 T^4 + \frac{1}{7\kappa^5} \nabla^6 T^4 + \dots = -Q. \quad (8)$$

Общее решение уравнения (8) даже в простейшем, одномерном случае получить не удастся. Но частными решениями уравнения (8) при $Q = \text{const}$ будут все решения дифференциального уравнения второго порядка $\nabla^2 T^4 = \nabla \cdot \nabla T^4 = \Delta T^4 = -3\kappa Q$. То есть для получения решения можно рассматривать не все члены бесконечного ряда (8), а только первое слагаемое.

Если использовать первый член в разложении резольвенты в ряд Неймана (отсутствие зависимости интенсивности от Ω), то решение уравнения переноса принимает вид

$$I_\nu = I_{p\nu}; \quad U_\nu = B_\nu; \quad \vec{S}_\nu = \int_\Omega \vec{\Omega} I_{p\nu} d\vec{\Omega} = 0; \quad U = B = c\sigma T^4; \quad \vec{S} = 0, \quad (9)$$

где $B = \int_0^\infty B_\nu d\nu = c\sigma T^4$ — полная плотность равновесного излучения, умноженная на скорость света; $\sigma = 4\sigma_0/c$, $\sigma_0 = 5,67 \cdot 10^{-5} \text{ эрг}/(\text{см}^2 \cdot \text{сек} \cdot \text{град}^4)$ — постоянная Стефана–Больцмана.

Из уравнения (2) в этом случае получаем $Q = 0$. Из уравнения (1) получаем $\vec{\Omega} \cdot \nabla I_{p\nu} = 0$, или, после интегрирования, $\nabla T = 0$, откуда следует тривиальное решение $T = T_f = \text{const}$ ($T_f = \sqrt[4]{\frac{1}{c\sigma} \int_0^\infty U_\nu d\nu}$ — температура излучения), описывающее локальное термодинамическое равновесие в среде.

Если рассматривать первые два члена в разложении резольвенты (линейную зависимость интенсивности в пространстве Ω), то решение уравнения переноса принимает вид

$$I_\nu = I_{p\nu} - \frac{1}{\kappa_\nu} L_1; \quad U_\nu = B_\nu; \quad \vec{S}_\nu = -\frac{1}{3\kappa_\nu} \nabla B_\nu; \quad U = B = c\sigma T^4; \quad \vec{S} = -\frac{1}{3} \left(\int_0^\infty \kappa_\nu^{-1} \frac{\partial B_\nu}{\partial T} d\nu \right) \nabla T. \quad (10)$$

Система (10) отличается от (9) выражениями для интенсивности и потока излучения. В этом случае отрыва температур, как и в предыдущем случае, не происходит, т. е. $T = T_f$.

Для проверки полученного решения подставим выражение интенсивности из (10) в уравнение (3), записанное в виде равенства двух операторов $\vec{\Omega} \cdot \nabla I_\nu = \kappa_\nu (I_{p\nu} - I_\nu)$. После подстановки оператор переноса равен $\vec{\Omega} \cdot \nabla I_\nu = L_1 - L_2$, а оператор взаимодействия излучения с веществом равен $\kappa_\nu (I_{p\nu} - I_\nu) = L_1$. Операторы переноса и взаимодействия излучения с веществом в уравнении (1) совпадают с точностью до члена L_2 , который при постоянном коэффициенте поглощения пропорционален κ^{-1} и становится малым в оптически плотных средах.

Если рассмотреть первые три члена в разложении резольвенты (квадратичную зависимость интенсивности в пространстве Ω), то решение уравнения переноса принимает вид

$$I_\nu = I_{p\nu} - \kappa_\nu^{-1} (L_1 - L_2); \quad U_\nu = B_\nu - \kappa_\nu^{-1} \text{div} \vec{S}_\nu; \quad \vec{S}_\nu = -\frac{1}{3} \kappa_\nu^{-1} \nabla B_\nu; \\ U = c\sigma T^4 + \delta U, \quad \delta U = - \int_0^\infty \kappa_\nu^{-1} \text{div} \vec{S}_\nu d\nu; \quad \vec{S} = -\frac{1}{3} \left(\int_0^\infty \kappa_\nu^{-1} \frac{\partial B_\nu}{\partial T} d\nu \right) \nabla T. \quad (11)$$

Из уравнения энергии (2) получаем

$$\int_0^\infty \kappa_\nu \int_\Omega (I_\nu - I_{p\nu}) d\vec{\Omega} d\nu = \int_0^\infty \kappa_\nu M_2 I_{p\nu} d\nu = \frac{1}{3} \int_0^\infty \text{div} (\kappa_\nu^{-1} \nabla B_\nu) d\nu = -\text{div} \vec{S} = -Q. \quad (12)$$

Система (11) отличается от (10) выражениями для интенсивности и плотности излучения и может давать решения с отрывом температур, т. е. $T_f \neq T$. Это возможно даже при условии $\text{div} \vec{S} = 0$, если выполняется неравенство $\int_0^\infty \kappa_\nu^{-1} \text{div} \vec{S}_\nu d\nu \neq 0$ или $U_\nu \neq B_\nu$.

Точные аналитические решения системы (11), (12) должны удовлетворять трем условиям:

- 1) аналитическое вычисление интеграла $\int_0^\infty \kappa_\nu^{-1} \frac{\partial B_\nu}{\partial T} d\nu$ для формулы полного потока;
- 2) аналитическое вычисление интеграла $\delta U = - \int_0^\infty \kappa_\nu^{-1} \text{div} \vec{S}_\nu d\nu$ для формулы полной плотности;
- 3) выполнение условия $L_3 = 0$ для того, чтобы решение удовлетворяло уравнению переноса (3).

Выполнение условия 1 и уравнение $\text{div} \vec{S} = Q$ дают формулы нахождения температуры. Выполнение условия 2 и требование $\int_0^\infty \kappa_\nu^{-1} \text{div} \vec{S}_\nu d\nu \neq 0$ дают решения с отрывом температур.

Выполнение условия 3 требуется для получения аналитических решений уравнения переноса без рассеяния. При учете рассеяния оно видоизменяется. Для анализа условия 3 подставим интенсивность из системы (11) в уравнение (3). После подстановки оператор переноса имеет вид $\vec{\Omega} \cdot \nabla I_\nu = L_1 - L_2 + L_3$. Оператор взаимодействия излучения с веществом имеет вид $\kappa_\nu (I_{p\nu} - I_\nu) = L_1 - L_2$. Видно, что операторы переноса и взаимодействия совпадают с точностью до члена L_3 . Для всех направлений в пространстве Ω условие $L_3 = 0$ выполняется, когда коэффициент поглощения пропорционален ∇B_ν , так как из равенства $\nabla \left(\vec{\Omega} \cdot \kappa_\nu^{-1} \nabla B_\nu \right) = 0$ следует условие

$L_3 = \frac{\kappa_\nu}{4\pi} \left\{ \vec{\Omega} \cdot \kappa_\nu^{-1} \nabla \left[\vec{\Omega} \cdot \kappa_\nu^{-1} \nabla \left(\vec{\Omega} \cdot \kappa_\nu^{-1} \nabla \right) \right] \right\} B_\nu = 0$. Однако в этом случае отрыва температур не происходит, так как $\int_0^\infty \kappa_\nu^{-1} \operatorname{div} \vec{S}_\nu d\nu = -\frac{1}{3} \int_0^\infty \kappa_\nu^{-1} \nabla (\kappa_\nu^{-1} \nabla B_\nu) d\nu = 0$, т. е. не выполняется условие 2.

В сером приближении при $I_p = \frac{1}{4\pi} B(T)$ с постоянным коэффициентом поглощения решения системы (11), (12) с отрывом температур можно найти для функции $B(T)$ с квадратичной зависимостью от координат, так как для нее выполняется условие $L_3 = \frac{1}{4\pi\kappa^2} \left\{ \vec{\Omega} \cdot \nabla \left[\vec{\Omega} \cdot \nabla \left(\vec{\Omega} \cdot \nabla \right) \right] \right\} B = 0$.

В этом случае решение имеет вид

$$I = \frac{1}{4\pi} \left\{ B - \frac{1}{\kappa} (\vec{\Omega} \cdot \nabla B) + \frac{1}{\kappa^2} \left[\vec{\Omega} \cdot \nabla (\vec{\Omega} \cdot \nabla B) \right] \right\}; \quad U = B + \delta U, \quad \delta U = -\frac{1}{\kappa} \operatorname{div} \vec{S} = -\frac{Q}{\kappa};$$

$$\vec{S} = -\frac{1}{3\kappa} \nabla B; \quad U = B = c\sigma T^4; \quad \Delta T^4 = -\frac{3\kappa}{c\sigma} Q; \quad \beta = \chi = 0.$$

Следует заметить, что для задач переноса излучения без источника как в сером, так и спектральном приближении аналитических решений с отрывом температур через разложение в ряд Неймана найти не удалось.

3. Решение системы уравнений переноса и энергии в стационарном случае с анизотропным рассеянием

Для получения решений в более общем случае при учете первых трех членов в разложении подставим выражения $I_\nu = I_{p\nu} - \kappa_\nu^{-1} (L_1 - L_2)$, $\vec{\Omega} \cdot \nabla I_\nu = L_1 - L_2 + L_3$ в систему (1), (2).

Из уравнения (1) получаем соотношение

$$L_3 + \chi_\nu \left[I_{p\nu} - \kappa_\nu^{-1} (L_1(\vec{\Omega}) - L_2(\vec{\Omega})) \right] = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega'} \beta_\nu(\vec{r}, \vec{\Omega}, \vec{\Omega}') \left[I_{p\nu} - \kappa_\nu^{-1} (L_1(\vec{\Omega}') - L_2(\vec{\Omega}')) \right] d\vec{\Omega}'. \quad (13)$$

Рассмотрим частный случай зависимости индикатрисы от координат и направлений после столкновения при $\beta_\nu(\vec{r}, \vec{\Omega}, \vec{\Omega}') = \frac{1}{4\pi} \beta_\nu^1(\vec{r}, \vec{\Omega})$. Тогда правая часть уравнения (13) принимает вид

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega'} \beta_\nu(\vec{r}, \vec{\Omega}, \vec{\Omega}') I_\nu(\vec{r}, \vec{\Omega}') d\vec{\Omega}' = \frac{1}{16\pi^2} \beta_\nu^1(\vec{r}, \vec{\Omega}) U_\nu(\vec{r}). \quad (14)$$

С учетом выражения (14) из уравнения (13) получаем

$$\beta_\nu(\vec{r}, \vec{\Omega}) = 4\pi U_\nu^{-1} (\chi_\nu I_\nu + L_3) = 4\pi U_\nu^{-1} \left[\chi_\nu I_\nu + \kappa_\nu (\vec{\Omega} \cdot \kappa_\nu^{-1} \nabla)^3 I_{p\nu} \right]; \quad (15)$$

$$\beta_\nu^1 = 16\pi^2 \left\{ \chi_\nu [I_{p\nu} - \kappa_\nu^{-1} (L_1 - L_2)] + L_3 \right\} U_\nu^{-1} = 4\pi (\chi_\nu B_\nu - \chi_\nu \kappa_\nu^{-1} B_{1\nu} + \chi_\nu \kappa_\nu^{-1} B_{2\nu} + B_{3\nu}) U_\nu^{-1},$$

где $B_{1\nu} = \vec{\Omega} \cdot \nabla B_\nu$; $B_{2\nu} = \vec{\Omega} \cdot \nabla \kappa_\nu^{-1} (\vec{\Omega} \cdot \nabla B_\nu)$; $B_{3\nu} = \vec{\Omega} \cdot \nabla \kappa_\nu^{-1} \left[\vec{\Omega} \cdot \nabla \kappa_\nu^{-1} (\vec{\Omega} \cdot \nabla B_\nu) \right] = 4\pi L_3$.

Полученное выражение для индикатрисы рассеяния удовлетворяет условию

$$\frac{1}{16\pi^2} \int_{\Omega} \int_{\Omega'} \beta_\nu(\vec{r}, \vec{\Omega}, \vec{\Omega}') d\vec{\Omega}' d\vec{\Omega} = \frac{1}{16\pi^2} \int_{\Omega} \int_{\Omega'} \frac{1}{4\pi} \beta_\nu^1(\vec{r}, \vec{\Omega}) d\vec{\Omega}' d\vec{\Omega} = \frac{1}{16\pi^2} \int_{\Omega} \beta_\nu^1(\vec{r}, \vec{\Omega}) d\vec{\Omega} =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \frac{\int_{\Omega} L_3 d\vec{\Omega} + \chi_\nu \left[\int_{\Omega} I_{p\nu} d\vec{\Omega} - \kappa_\nu^{-1} \left(\int_{\Omega} L_1 d\vec{\Omega} - \int_{\Omega} L_2 d\vec{\Omega} \right) \right]}{U_\nu} = \frac{\chi_\nu \left[B_\nu + \kappa_\nu^{-1} \frac{4\pi}{3} \operatorname{div} (\kappa_\nu^{-1} \nabla I_{p\nu}) \right]}{B_\nu + \frac{1}{3} \kappa_\nu^{-1} \operatorname{div} (\kappa_\nu^{-1} \nabla B_\nu)} = \chi_\nu(\vec{r}).$$

Неотрицательность индикатрисы рассеяния проверяется после нахождения формулы для температуры.

Используя соотношения

$$\int_{\Omega} L_1 d\vec{\Omega} = 0; \quad \int_{\Omega} L_3 d\vec{\Omega} = 0; \quad \vec{\Omega} \cdot \nabla I_{\nu} = L_1 - L_2 + L_3; \quad F = \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \int_{\Omega'} \beta_{\nu} I_{\nu} d\vec{\Omega}' d\vec{\Omega} - \chi_{\nu} U_{\nu} \right) d\nu =$$

$$= \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \beta_{\nu} d\vec{\Omega} - \chi_{\nu} \right) U_{\nu} d\nu = \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{16\pi^2} \int_{\Omega} \beta_{\nu}^1 d\vec{\Omega} - \chi_{\nu} \right) U_{\nu} d\nu = 0,$$

из уравнения (2) получаем уравнение для нахождения температуры

$$\int_0^{\infty} \kappa_{\nu} \int_{\Omega} (I_{\nu} - I_{p\nu}) d\vec{\Omega} d\nu = - \int_0^{\infty} \int_{\Omega} (\vec{\Omega} \cdot \nabla I_{\nu}) d\vec{\Omega} d\nu = \int_0^{\infty} \int_{\Omega} (L_1 - L_2 + L_3) d\vec{\Omega} d\nu = \frac{1}{3} \int_0^{\infty} \operatorname{div} (\kappa_{\nu}^{-1} \nabla B_{\nu}) d\nu = -Q. \quad (16)$$

Следует заметить, что это выражение аналогично уравнению (12), полученному в случае без рассеяния.

Для примера рассмотрим решения системы (1), (2) с индикатрисой рассеяния вида (15) в одномерном плоском, двумерном осесимметричном и трехмерном декартовом случаях. Решения с отрывом температур будем искать в двух вариантах:

- 1) в сером приближении с постоянными коэффициентами рассеяния χ , поглощения κ и постоянным источником Q ;
- 2) в спектральном приближении с коэффициентами рассеяния и поглощения, зависящими от температуры и спектра фотонов, где спектральный коэффициент поглощения определяется по формуле из работы Флека [13].

4. Одномерная плоская геометрия

Вариант 1. В сером приближении при постоянных коэффициентах рассеяния и поглощения получаем из соотношения (16) $\frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial r} \left(\kappa^{-1} \frac{\partial B}{\partial r} \right) = -Q$ уравнение для температуры $\frac{\partial^2 T^4}{\partial r^2} = -\frac{3\kappa}{c\sigma} Q$. При $Q = \text{const}$ это уравнение выполняется для квадратичных функций $B(r)$, или в виде $T^4 = a_0 r^2 + a_1 r + a_2$, где $a_0 = -\frac{3\kappa}{2c\sigma} Q$. Остальные константы выбираются из условий согласования с граничными и начальными условиями, а также неотрицательности функций I, U, T, σ .

Система (11) принимает вид

$$I = \frac{1}{4\pi} \left(B - \frac{\mu}{\kappa} \frac{\partial B}{\partial r} + \frac{\mu^2}{\kappa^2} \frac{\partial^2 B}{\partial r^2} \right); \quad U = B - \kappa^{-1} \frac{\partial S}{\partial r} = B - \frac{Q}{\kappa}; \quad S = -\frac{1}{3\kappa} \frac{\partial B}{\partial r} = -\frac{c\sigma}{3\kappa} (2a_0 r + a_1);$$

$$T^4 = -\frac{3\kappa Q}{2c\sigma} r^2 + a_1 r + a_2; \quad \beta(\mu, r, T) = 4\pi \chi \frac{I}{U} = \chi \frac{T^4 - \frac{\mu}{\kappa} (2a_0 r + a_1) + \frac{2a_0 \mu^2}{\kappa^2}}{T^4 + \frac{2a_0}{3\kappa^2}},$$

где $U = \int_{\Omega} I d\vec{\Omega} = \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} I d\mu d\varphi = 2\pi \int_{-1}^1 I d\mu$.

Заметим, что в данном варианте получается решение с отрывом температур даже без учета рассеяния при $\beta = \chi = 0$.

Приведем конкретные примеры решения переноса теплового излучения в сером приближении с постоянными коэффициентами.

Пример 1. Решение без отрыва температур (с нулевым источником).

Пусть $0 \leq r \leq R$; $\kappa = \chi = 1$; $c\sigma = 4110$; $Q = 0$; $a_0 = 0$; $a_1 = -1$; $a_2 = R + 1$. Тогда

$$I = \frac{c\sigma}{4\pi} (R + 1 - r + \mu) \geq 0; \quad S = \frac{c\sigma}{3}; \quad U = B = c\sigma T^4; \quad T^4 = R + 1 - r > 0; \quad \beta = \frac{R + 1 - r + \mu}{R + 1 - r} \geq 0.$$

Пример 2. Решение с отрывом температур (с ненулевым источником).

Пусть $0 \leq r \leq R$; $\kappa = \chi = 1$; $c\sigma = 4110$; $Q = \frac{2c\sigma}{3}$; $a_0 = -1$; $a_1 = 0$; $a_2 = (R + 1)^2 + 1$. Тогда

$$I = \frac{c\sigma}{4\pi} [R^2 - r^2 + 2(R + r\mu + 1 - \mu^2)] \geq 0; \quad S = \frac{2c\sigma r}{3}; \quad U = c\sigma \left(R^2 - r^2 + 2R + \frac{4}{3} \right) > 0;$$

$$T = \sqrt[4]{R^2 - r^2 + 2(R + 1)}; \quad T_f = \sqrt[4]{R^2 - r^2 + 2\left(R + \frac{2}{3}\right)}; \quad \beta = \frac{R^2 - r^2 + 2(R + \mu r + 1 - \mu^2)}{R^2 - r^2 + 2R + 4/3} \geq 0.$$

Вариант 2. Найдем решение с отрывом температур в спектральном приближении. Из уравнения энергии (16) следует $\frac{\partial S}{\partial r} = -\frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial r} \left[\left(\int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu} \frac{\partial B_\nu}{\partial T} d\nu \right) \frac{\partial T}{\partial r} \right] = Q$. Определим спектральный ко-

эффициент поглощения по формуле Флека: $\kappa_\nu = \frac{\kappa_0 h^3 (1 - e^{-h\nu/T})}{\nu^3 T^n} = \kappa_0 \frac{e^{\varepsilon/T} - 1}{\varepsilon^3 e^{\varepsilon/T} T^n}$, $n \geq 0$, $\kappa_0 > 0$. Замечательным свойством этой формулы является то, что она удовлетворяет условию 1 из разд. 2:

$$\int_0^\infty \kappa_\nu^{-1} \frac{\partial B_\nu}{\partial T} d\nu = \frac{pT^{n+6}}{\kappa_0} \int_0^\infty \frac{x^7 e^{2x}}{(e^x - 1)^3} dx = mT^{n+6}, \quad \text{где } x = \frac{\varepsilon}{T}, \quad m = \frac{pm_0}{\kappa_0}, \quad p = \frac{15c\sigma}{\pi^4}, \quad \text{константа } m_0 =$$

$$= \int_0^\infty \frac{x^7 e^{2x}}{(e^x - 1)^3} dx = 2520\zeta(7) + \frac{8}{3}\pi^6 \approx 5103,9 \quad \text{получается с использованием } \zeta\text{-функции Римана } \zeta(p) =$$

$$= \sum_{n=1}^\infty n^{-p}; \quad \zeta(7) \approx 1,008.$$

Для выполнения условия 2 из разд. 2 вычислим интеграл δU :

$$\delta U = \frac{pT^{n+4}}{3\kappa_0^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(T^{n+5} \frac{\partial T}{\partial r} \right) m_1 + T^{n+4} \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)^2 (3m_3 - 2m_2 - 7m_1) \right], \quad (17)$$

где

$$m_1 = \int_0^\infty \frac{e^{3x} x^{10}}{(e^x - 1)^4} dx = 1814400 \zeta(9) + 64\pi^8 + \frac{1280}{99} \pi^{10} \approx 3636097,83;$$

$$m_2 = \int_0^\infty \frac{e^{3x} x^{11}}{(e^x - 1)^4} dx = 6652800 [\zeta(9) + 2\zeta(11)] + \frac{640}{3} \pi^{10} \approx 39956608,13;$$

$$m_3 = \int_0^\infty \frac{e^{4x} x^{11}}{(e^x - 1)^5} dx = 9979200 [\zeta(9) + \zeta(11)] + 176\pi^8 + \frac{1760}{9} \pi^{10} \approx 39966725,41.$$

В случае постоянного источника решением уравнения энергии $-\frac{m}{3(n+7)} \frac{\partial^2 T^{n+7}}{\partial r^2} = Q$ является функция $T^{n+7} = a_0 r^2 + a_1 r + a_2$ при $a_0 = -\frac{3(n+7)}{2m} Q$. Остальные константы выбираются из условий согласования с граничными и начальными условиями, а также неотрицательности функций I , U , T , σ .

Подставляя формулу для температуры в (17), получаем

$$\delta U = \frac{pT^{n+3}}{21\kappa_0^2} \left\{ \frac{6}{n+6} \left[2a_0 - \frac{(2a_0 r + a_1)^2}{7T^7} \right] m_1 + T^n \frac{(2a_0 r + a_1)^2}{7T^7} (3m_3 - 2m_2 - 7m_1) \right\}.$$

Система (11) принимает вид

$$I_\nu = I_{p\nu} - \frac{\mu}{\kappa_\nu} \frac{\partial I_{p\nu}}{\partial r} + \frac{\mu^2}{\kappa_\nu} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\kappa_\nu} \frac{\partial I_{p\nu}}{\partial r} \right); \quad U_\nu = B_\nu + \frac{1}{3\kappa_\nu} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\kappa_\nu} \frac{\partial B_\nu}{\partial r} \right); \quad S_\nu = -\frac{1}{3\kappa_\nu} \frac{\partial B_\nu}{\partial r};$$

$$S = -\frac{m}{3(n+7)} \frac{\partial T^{n+7}}{\partial r}; \quad U = c\sigma T^4 + \delta U; \quad T^{n+7} = -\frac{3(n+7)}{2m} Qr^2 + a_1 r + a_2;$$

$$\beta_\nu(\mu, r, T) = 4\pi \frac{\chi_\nu I_\nu + L_3}{U_\nu} = \frac{\chi_\nu \left[B_\nu - \frac{\mu}{\kappa_\nu} \frac{\partial B_\nu}{\partial r} + \frac{\mu^2}{\kappa_\nu} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\kappa_\nu} \frac{\partial B_\nu}{\partial r} \right) \right] + \mu^3 \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{\kappa_\nu} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\kappa_\nu} \frac{\partial B_\nu}{\partial r} \right) \right]}{B_\nu + \frac{1}{3\kappa_\nu} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\kappa_\nu} \frac{\partial B_\nu}{\partial r} \right)}.$$

Хотя показать неотрицательность функций I , U , σ аналитически довольно сложно, это можно сделать численно на ЭВМ перебором всех параметров с увеличением κ_0 до тех пор, пока эти величины станут неотрицательными.

Приведем конкретный пример.

Пусть $0 \leq r \leq R$; $\chi_\nu = 1$; $Q = \frac{2m}{21}$; $m = \frac{15c\sigma m_0}{\pi^4 \kappa_0} \approx \frac{3230310}{\kappa_0}$; $a_0 = -1$; $a_1 = 0$; $a_2 = (R+1)^2 + 1$;

$$\kappa_\nu = \kappa_0 \frac{e^{\varepsilon/T} - 1}{\varepsilon^3 e^{\varepsilon/T}}; \quad \kappa_0 = 10^3; \quad n = 0.$$

Тогда $I_\nu = \frac{1}{4\pi} \left[B_\nu - \frac{\mu}{\kappa_\nu} \frac{\partial B_\nu}{\partial r} + \frac{\mu^2}{\kappa_\nu} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\kappa_\nu} \frac{\partial B_\nu}{\partial r} \right) \right]$; $U_\nu = B_\nu + \frac{1}{3\kappa_\nu} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\kappa_\nu} \frac{\partial B_\nu}{\partial r} \right)$; $S_\nu = -\frac{1}{3\kappa_\nu} \frac{\partial B_\nu}{\partial r}$;

$$S = Qr = \frac{2m}{21} r; \quad U = B + \delta U; \quad T = \sqrt[7]{R^2 - r^2 + 2(R+1)} > 0; \quad \delta U = \frac{30c\sigma T^3}{21\kappa_0^2 \pi^4} \left(\frac{2r^2}{7T^7} m_4 - m_1 \right);$$

$m_1 \approx 3636097,83$; $m_4 = 3m_3 - 2m_2 - 8m_1 \approx 10898177$; остальные коэффициенты введены ранее;

$$\beta_\nu(\mu, r, T) = \frac{B_\nu - \frac{\mu}{\kappa_\nu} \frac{\partial B_\nu}{\partial r} + \frac{\mu^2}{\kappa_\nu} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\kappa_\nu} \frac{\partial B_\nu}{\partial r} \right) + \mu^3 \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{\kappa_\nu} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\kappa_\nu} \frac{\partial B_\nu}{\partial r} \right) \right]}{B_\nu + \frac{1}{3\kappa_\nu} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\kappa_\nu} \frac{\partial B_\nu}{\partial r} \right)}.$$

С индикатрисой рассеяния вида (15) можно построить более сложные решения в случае переменного источника $Q(T)$. Например, при $Q(T) = T^{n+7}$ решением уравнения энергии $-\frac{m}{3(n+7)} \frac{\partial^2 T^{n+7}}{\partial r^2} = T^{n+7}$ является функция $T^{n+7} = \sin a_0 r$ при $a_0 = \sqrt{\frac{3(n+7)}{m}}$, $0 \leq a_0 r \leq \pi$. Но в данной работе такие решения не рассматриваются.

5. Двумерная осесимметричная геометрия

Для двумерного примера рассмотрим решения системы (1), (2) с индикатрисой рассеяния вида (15) в осесимметричном случае.

В двумерной осесимметричной геометрии оператор переноса в дивергентной форме имеет вид

$$\vec{\Omega} \cdot \nabla I_\nu = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\xi I_\nu) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} (r\mu I_\nu) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} (\eta I_\nu),$$

где $\vec{\Omega} = (\xi = \sqrt{1 - \mu^2} \cos \phi, \mu = \cos \theta, \eta = \sqrt{1 - \mu^2} \sin \phi)$ — единичный вектор в направлении полета фотона; θ — угол между $\vec{\Omega}$ и осью симметрии OZ ; ϕ — угол между проекцией \vec{r} и проекцией $\vec{\Omega}$ на плоскость, перпендикулярную оси.

Решение будем искать для недивергентной формы оператора переноса, в которой он имеет более простой вид

$$\vec{\Omega} \cdot \nabla I_\nu = \xi \frac{\partial I_\nu}{\partial r} + \mu \frac{\partial I_\nu}{\partial z} - \frac{\eta}{r} \frac{\partial I_\nu}{\partial \phi}.$$

После разложения резольвенты в ряд Неймана в операторе переноса для равновесной интенсивности $\vec{\Omega} \cdot \nabla I_{p\nu}$ третье слагаемое $\frac{\partial I_{p\nu}}{\partial \phi} = 0$, так как $I_{p\nu}$ не зависит от переменных в пространстве направлений. Интенсивность, плотность, поток и дивергенция потока излучения принимают вид

$$I_\nu = I_{p\nu} - \frac{1}{\kappa_\nu} \left(\xi \frac{\partial I_{p\nu}}{\partial r} + \mu \frac{\partial I_{p\nu}}{\partial z} \right) + \frac{1}{\kappa_\nu} \left\{ \xi^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial I_{p\nu}}{\kappa_\nu \partial r} \right) + \xi \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial I_{p\nu}}{\kappa_\nu \partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial I_{p\nu}}{\kappa_\nu \partial r} \right) \right] + \mu^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial I_{p\nu}}{\kappa_\nu \partial z} \right) \right\} - \dots;$$

$$U_\nu = B_\nu + \frac{1}{3\kappa_\nu} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r}{\kappa_\nu} \frac{\partial B_\nu}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\kappa_\nu} \frac{\partial B_\nu}{\partial z} \right) \right] + \dots = B_\nu - \frac{1}{\kappa_\nu} \operatorname{div} \vec{S}_\nu;$$

$$\vec{S}_\nu = -\frac{1}{3\kappa_\nu} \left(\frac{\partial B_\nu}{\partial r}, \frac{\partial B_\nu}{\partial z} \right) - \dots;$$

$$\operatorname{div} \vec{S}_\nu = \frac{1}{r} \frac{\partial r S_{r,\nu}}{\partial r} + \frac{\partial S_{z,\nu}}{\partial z} = - \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r}{3\kappa_\nu} \frac{\partial B_\nu}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{3\kappa_\nu} \frac{\partial B_\nu}{\partial z} \right) \right] - \dots$$

Если уравнение для интенсивности записать в операторном виде $I_\nu = I_{p\nu} - \kappa_\nu^{-1} L_1 + \kappa_\nu^{-1} L_2 - \kappa_\nu^{-1} L_3 + \dots$, то первые три оператора приобретут вид

$$L_1 = \vec{\Omega} \cdot \nabla I_{p\nu} = \xi \frac{\partial I_{p\nu}}{\partial r} + \mu \frac{\partial I_{p\nu}}{\partial z};$$

$$L_2 = \xi \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{\kappa_\nu} \left(\xi \frac{\partial I_{p\nu}}{\partial r} + \mu \frac{\partial I_{p\nu}}{\partial z} \right) \right] + \mu \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{\kappa_\nu} \left(\xi \frac{\partial I_{p\nu}}{\partial r} + \mu \frac{\partial I_{p\nu}}{\partial z} \right) \right];$$

$$L_3 = \xi \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{\kappa_\nu} \left\{ \xi^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial I_{p\nu}}{\kappa_\nu \partial r} \right) + \xi \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial I_{p\nu}}{\kappa_\nu \partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial I_{p\nu}}{\kappa_\nu \partial r} \right) \right] + \mu^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial I_{p\nu}}{\kappa_\nu \partial z} \right) \right\} \right\} + \mu \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{1}{\kappa_\nu} \left\{ \xi^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial I_{p\nu}}{\kappa_\nu \partial r} \right) + \xi \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial I_{p\nu}}{\kappa_\nu \partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial I_{p\nu}}{\kappa_\nu \partial r} \right) \right] + \mu^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial I_{p\nu}}{\kappa_\nu \partial z} \right) \right\} \right\}.$$

Для того чтобы решение удовлетворяло уравнению переноса при учете первых трех членов в разложении, необходимо выполнение условия $L_3 = 0$. Оно имеет место для всех направлений в пространстве Ω , когда третьи производные в пространстве (r, z) обращаются в нуль, т. е.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{\kappa_\nu} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\kappa_\nu} \frac{\partial B_\nu}{\partial r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right] &= \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{\kappa_\nu} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\kappa_\nu} \frac{\partial B_\nu}{\partial r} \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{\kappa_\nu} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\kappa_\nu} \frac{\partial B_\nu}{\partial r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right] = \\ &= \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{\kappa_\nu} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\kappa_\nu} \frac{\partial B_\nu}{\partial r} \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{\kappa_\nu} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\kappa_\nu} \frac{\partial B_\nu}{\partial r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{\kappa_\nu} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\kappa_\nu} \frac{\partial B_\nu}{\partial r} \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] = \\ &= \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{\kappa_\nu} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\kappa_\nu} \frac{\partial B_\nu}{\partial r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{\kappa_\nu} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\kappa_\nu} \frac{\partial B_\nu}{\partial r} \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] = 0. \end{aligned}$$

Эти условия, в частности, выполняются для линейных функций $T = a_0 r + a_1 z + a_2$ с коэффициентом поглощения, пропорциональным $\frac{\partial B_\nu}{\partial T}$, но при этом отрыва температур не происходит.

Вариант 1. В сером приближении с постоянным коэффициентом поглощения и $\beta = \chi = 0$ условие $L_3 = 0$ выполняется для квадратичных функций вида $T^4 = a_0 r^2 + a_1 z^2 + a_2 r + a_3 z + a_4$, так как

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial T^4}{\partial r} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial T^4}{\partial z} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial T^4}{\partial z} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial T^4}{\partial z} \right) \right] = 0.$$

В этом случае решение системы (11), (12) имеет вид

$$I = \frac{B}{4\pi} - \frac{1}{4\pi\kappa} \left\{ \xi \frac{\partial B}{\partial r} + \mu \frac{\partial B}{\partial z} - \frac{1}{\kappa} \left[\xi \frac{\partial}{\partial r} \left(\xi \frac{\partial B}{\partial r} + \mu \frac{\partial B}{\partial z} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial z} \left(\xi \frac{\partial B}{\partial r} + \mu \frac{\partial B}{\partial z} \right) \right] \right\}; \quad U = B - \frac{Q}{\kappa};$$

$$\vec{S} = -\frac{1}{3\kappa} \nabla B; \quad \Delta T^4 = -\frac{3\kappa}{c\sigma} Q = -Q_1; \quad T = \sqrt[4]{a_0 r^2 - (2a_0 + 0,5Q_1)z^2 + a_2 r + a_3 z + a_4}.$$

Вариант 2. Рассмотрим решение в спектральном случае с коэффициентом поглощения Флека.

Из условия 1 (см. разд. 2) получаем $\int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu} \frac{\partial B_\nu}{\partial T} d\nu = mT^{n+6}$. С учетом этого выражения получаем уравнение для нахождения температуры

$$\operatorname{div} \vec{S} = -\frac{1}{3} \operatorname{div} \left[\left(\int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu} \frac{\partial B_\nu}{\partial T} d\nu \right) \nabla T \right] = -\frac{m}{3(n+7)} \operatorname{div} (\nabla T^{n+7}) = Q.$$

Из условия 2 получаем $\delta U = \frac{pT^{n+4}}{3\kappa_0^2} [\operatorname{div} (T^{n+5} \nabla T) m_1 + T^{n+4} (\nabla T \cdot \nabla T) (3m_3 - 2m_2 - 7m_1)]$.

В двумерной осесимметричной геометрии в случае постоянного источника решением уравнения Пуассона $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T^{n+7}}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T^{n+7}}{\partial z^2} = -Q_1$, $Q_1 = Q \frac{3(n+7)}{m}$, является функция

$$T^{n+7} = T_0 r^2 + T_1 z^2 + T_2 z + T_3, \quad (18)$$

где T_0, T_1, T_2, T_3 — произвольные константы, которые выбираются из условий согласования с граничными и начальными условиями для уравнения переноса и условия $4T_0 + 2T_1 = -Q_1$.

С учетом формулы (18) вычислим интеграл δU , который принимает вид

$$\delta U = m_6 T^{n+3} + \frac{m_5}{T^{n+4}} (T_0^2 r^2 + T_1^2 z^2),$$

где $m_6 = \frac{2pm_1(2T_0 + T_1)}{3\kappa_0^2(n+7)}$; $m_5 = \frac{4pm_4}{3\kappa_0^2(n+7)^2}$; $m_4 \approx 10898177$; $m_1 \approx 3636097,83$. Для задач Флека решение системы (11) будет иметь вид

$$I_\nu = I_{p\nu} - \kappa_\nu^{-1} (L_1 - L_2); \quad U_\nu = B_\nu - \kappa_\nu^{-1} \operatorname{div} \vec{S}_\nu; \quad \vec{S}_\nu = -\frac{1}{3\kappa_\nu} \nabla B_\nu;$$

$$U = c\sigma T^4 + \delta U, \quad \delta U = m_6 T^{n+3} + \frac{m_5}{T^{n+4}} [T_0^2 r^2 + (2T_0 + 0,5Q_1)^2 z^2]; \quad \vec{S} = -\frac{m}{3(n+7)} \nabla T^{n+7};$$

$$\beta_\nu(\vec{r}, \vec{\Omega}, T) = (\chi_\nu B_\nu - \chi_\nu \kappa_\nu^{-1} B_{1\nu} + \chi_\nu \kappa_\nu^{-1} B_{2\nu} + B_{3\nu}) U_\nu^{-1}; \quad T^{n+7} = T_0 r^2 - (2T_0 + 0,5Q_1) z^2 + T_2 z + T_3,$$

$$\text{где } B_{1\nu} = \vec{\Omega} \cdot \nabla B_\nu; \quad B_{2\nu} = \vec{\Omega} \cdot \nabla \kappa_\nu^{-1} (\vec{\Omega} \cdot \nabla B_\nu); \quad B_{3\nu} = \vec{\Omega} \cdot \nabla \kappa_\nu^{-1} [\vec{\Omega} \cdot \nabla \kappa_\nu^{-1} (\vec{\Omega} \cdot \nabla B_\nu)].$$

6. Трехмерная геометрия

В трехмерной декартовой прямоугольной системе координат оператор переноса имеет вид

$$\vec{\Omega} \cdot \nabla I_\nu = \Omega_1 \frac{\partial I_\nu}{\partial x_1} + \Omega_2 \frac{\partial I_\nu}{\partial x_2} + \Omega_3 \frac{\partial I_\nu}{\partial x_3},$$

где x_1, x_2, x_3 — координаты вектора \vec{r} ; $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ — координаты вектора $\vec{\Omega}$.

Вариант 1. Если рассмотреть первые три члена в ряде Неймана при $\kappa = \text{const}$, $\chi = \text{const}$, $\beta = 4\pi U^{-1} (L_3 + \chi I)$, $Q = \text{const}$, то система (11) примет вид

$$I = I_p - \kappa^{-1} (L_1 - L_2); \quad U = c\sigma T^4 - \frac{Q}{\kappa}, \quad \vec{S} = -\frac{c\sigma}{3\kappa} \nabla T^4,$$

$$\text{где } L_1 = \frac{1}{4\pi} \left(\Omega_1 \frac{\partial B}{\partial x_1} + \Omega_2 \frac{\partial B}{\partial x_2} + \Omega_3 \frac{\partial B}{\partial x_3} \right); \quad L_2 = \frac{1}{4\pi\kappa} \left(\vec{\Omega} \cdot \nabla \left(\Omega_1 \frac{\partial B}{\partial x_1} + \Omega_2 \frac{\partial B}{\partial x_2} + \Omega_3 \frac{\partial B}{\partial x_3} \right) \right);$$

$$L_3 = \frac{1}{4\pi\kappa^2} \left\{ \vec{\Omega} \cdot \nabla \left[\vec{\Omega} \cdot \nabla \left(\vec{\Omega} \cdot \nabla B \right) \right] \right\}.$$

Из уравнения энергии (12) получаем уравнение для нахождения температуры $\Delta T^4 = \frac{\partial^2 T^4}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T^4}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 T^4}{\partial x_3^2} = -\frac{3\kappa}{c\sigma}Q$. Это уравнение выполняется для функции вида $T^4 = a_0x_1^2 + a_1x_1 + a_2 + b_0x_2^2 + b_1x_2 + b_2 + c_0x_3^2 + c_1x_3 + c_2$, где $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, c_0, c_1, c_2$ — произвольные константы, удовлетворяющие условию $a_0 + b_0 + c_0 = -\frac{3\kappa}{2c\sigma}Q$. Остальные константы выбираются из условий согласования с граничными и начальными условиями, а также неотрицательности функций I, U, T, σ .

Вариант 2. Найдем решение в спектральном случае с коэффициентом поглощения Флека.

Из условия 1 (см. разд. 2) получаем $\int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu} \frac{\partial B_\nu}{\partial T} d\nu = mT^{n+6}$. С учетом этого выражения получаем уравнение для нахождения температуры: $\operatorname{div} \vec{S} = -\frac{m}{3(n+7)} \operatorname{div} (\nabla T^{n+7}) = Q$.

Из условия 2 получаем

$$\delta U = m_7 T^{n+3} + \frac{m_8}{T^{n+4}} \left[(2a_0x_1 + a_1)^2 + (2b_0x_1 + b_1)^2 + (2c_0x_1 + c_1)^2 \right],$$

где $m_7 = -\frac{pQ}{\kappa_0^2} \frac{m_1}{m}$; $m_8 = \frac{p(3m_3 - 2m_2 - 8m_1)}{3\kappa_0^2(n+7)^2}$; остальные коэффициенты введены ранее. Для задач Флека решение системы (11) будет иметь вид

$$\begin{aligned} I_\nu &= I_{p\nu} - \kappa_\nu^{-1} (L_1 - L_2); \quad U_\nu = B_\nu - \kappa_\nu^{-1} \operatorname{div} \vec{S}_\nu; \quad \vec{S}_\nu = -\frac{1}{3\kappa_\nu} \nabla B_\nu; \quad \vec{S} = -\frac{m}{3(n+7)} \nabla T^{n+7}; \\ U &= c\sigma T^4 + \delta U, \quad \delta U = m_7 T^{n+3} + \frac{m_8}{T^{n+4}} \left[(2a_0x_1 + a_1)^2 + (2b_0x_1 + b_1)^2 + (2c_0x_1 + c_1)^2 \right]; \\ \beta_\nu(\vec{r}, \vec{\Omega}, T) &= (\chi_\nu B_\nu - \chi_\nu \kappa_\nu^{-1} B_{1\nu} + \chi_\nu \kappa_\nu^{-1} B_{2\nu} + B_{3\nu}) U_\nu^{-1}; \\ T^{n+7} &= a_0x_1^2 + a_1x_1 + a_2 + b_0x_2^2 + b_1x_2 + b_2 + c_0x_3^2 + c_1x_3 + c_2, \quad a_0 + b_0 + c_0 = -\frac{3(n+7)}{2m}Q. \end{aligned}$$

Остальные константы выбираются из условий согласования с граничными и начальными условиями, а также неотрицательности функций I, U, T, σ .

Заключение

В данной работе на основе разложения резольвенты оператора переноса в ряд Неймана получены аналитические формулы для определения параметров теплового излучения в многомерной геометрии. Эти формулы позволяют при известной равновесной интенсивности, которая определяется только распределением температуры, и при заданных коэффициентах поглощения и рассеяния найти в явном виде аналитические выражения основных спектральных величин: интенсивности, плотности и потока излучения. Приведены решения в сером и спектральном приближениях для одномерной, двумерной и трехмерной геометрий.

По проведенным исследованиям можно сделать следующие выводы:

1. Решение системы (11), (12) с нулевым источником не дает отрыва температур.
2. Решение системы (11), (12) с нулевой индикатрисой рассеяния дает точные решения в сером приближении с постоянными коэффициентами поглощения.

Исходя из этого можно дать следующие рекомендации.

Для получения точных решений стационарной системы уравнений переноса излучения и энергии с отрывом температур через разложение в ряд Неймана достаточно:

- 1) использовать три члена в разложении в ряд Неймана;
- 2) рассматривать уравнение энергии с ненулевым источником;
- 3) выбирать индикатрису рассеяния по формуле (15).

В случае без рассеяния решение с отрывом температур получается только в сером приближении с постоянными коэффициентами поглощения.

Несмотря на то, что решения получены в стационарном случае, их можно использовать для построения численных тестов в нестационарных задачах переноса теплового излучения, так как любая нестационарная задача при задании стационарных граничных условий должна выходить с течением времени на стационарное решение. А близость приближенных численных решений к точным будет характеризовать корректность численных алгоритмов. При построении таких тестов граничные условия надо задавать из точных стационарных решений.

Список литературы

1. *Думкина Г. В., Козманов М. Ю.* Точное решение нелинейной системы уравнений энергии и нестационарного переноса излучения // Журнал вычислит. мат. и мат. физ. 1979. Т. 19. Вып. 4. С. 1061–1063.
Dumkina G. V., Kozmanov M. Yu. Tochnoe reshenie nelineynoy sistemy uravneniy energii i nestatsionarnogo perenosa izlucheniya // Zhurnal vychilit. mat. i mat. fiz. 1979. T. 19. Vyp. 4. S. 1061–1063.
2. *Гусев В. Ю., Козманов М. Ю.* О некоторых точных решениях системы уравнений энергии и переноса излучения с учетом рассеяния // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Методики и программы численного решения задач математической физики. 1986. Вып. 3. С. 20–21.
Gusev V. Yu., Kozmanov M. Yu. O nekotorykh tochnykh resheniyakh sistemy uravneniy energii i perenosa izlucheniya s uchyetom rasseyaniya // Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Metodiki i programmy chislennoho resheniya zadach matematicheskoy fiziki. 1986. Vyp. 3. S. 20–21.
3. *Тихомиров Б. П.* Об одном классе точных решений системы уравнений радиационного теплопереноса // Там же. Вып. 2. С. 3–8.
Tikhomirov B. P. Ob odnom klasse tochnykh resheniy sistemy uravneniy radiatsionnogo teploperenosa // Tam zhe. Vyp. 2. S. 3–8.
4. *Шестаков А. А.* Точные решения системы уравнений энергии и переноса излучения с учетом анизотропного рассеяния в многомерном случае // Там же. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1991. Вып. 3. С. 12–14.
Shestakov A. A. Tochnye resheniya sistemy uravneniy energii i perenosa izlucheniya s uchyetom anizotropnogo rasseyaniya v mnogomernom sluchae // Tam zhe. Ser. Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov. 1991. Vyp. 3. S. 12–14.
5. *Larsen E. W., Thommes G., Klar A., Sead M., Gotz T.* Simplified P_N approximations to the equations of radiative heat transfer and applications // J. Comp. Phys. 2002. Vol. 183. P. 652–675.
6. *Larsen E. W., Morel J. E., McGhee J. M.* Asymptotic derivation of the multigroup P_1 and simplified P_N equations with anisotropic scattering // Nucl. Sci. Eng. 1996. Vol. 123. P. 328–342.
7. *Brantley P. S., Larsen E. W.* The simplified P_3 approximation // Ibid. 2000. Vol. 134. P. 1–21.
8. *Завьялов В. В., Шестаков А. А.* Упрощенные решения задачи Флека // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2005. Вып. 3. С. 26–36.
Zavyalov V. V., Shestakov A. A. Uproshchennyye resheniya zadachi Fleka // Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov. 2005. Vyp. 3. S. 26–36.

9. *Ахромеева Т. С., Волосевич П. П., Леванов Е. И., Маслянкин В. И.* К расчету задач трехтемпературной гидродинамики: Препринт № 28. М.: ИПМ АН СССР, 1980.
Akhromeeva T. S., Volosevich P. P., Levanov E. I., Maslyankin V. I. K raschyetu zadach tryekhtemperaturnoy gidrodinamiki: Preprint № 28. М.: IPM AN SSSR, 1980.
10. *Зуев А. И., Карлыханов Н. Г., Лыков В. А., Черняков В. Е.* О роли быстрых электронов и ограничении теплопроводности в экспериментах с газонаполненными оболочками: Препринт № 37. М.: ИПМ АН СССР, 1980.
Zuev A. I., Karlykhanov N. G., Lykov V. A., Chernyakov V. E. O roly bystrykh elektronov i ogranichenii teploprovodnosti v eksperimentakh s gazonapolnennymi obolochkami: Preprint № 37. М.: IPM AN SSSR, 1980.
11. *Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П.* Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука, 1966.
Zeldovich ya. B., Rayzer Yu. P. Fizika udarnykh voln I vysokotemperaturnykh gidrodinamicheskikh yavleniy. М.: Nauka, 1966.
12. *Бай Ши-и.* Динамика излучающего газа. М.: Мир, 1968.
Bay Shi-i. Dinamika izluchayushchego gaza. М.: Mir, 1968.
13. *Fleck J. A., Cummings J. D.* An implicit Monte Carlo scheme for calculating time and frequency dependent nonlinear radiation transport // J. Comp. Phys. 1971. Vol. 8. P. 313—342.

Статья поступила в редакцию 05.12.22.

УДК 519.65

АППРОКСИМАЦИЯ ДАННЫХ ГИСТОГРАММЫ МЕТОДОМ УСЛОВНОЙ МИНИМИЗАЦИИ ДЛИНЫ КУБИЧЕСКОГО СПЛАЙНА КЛАССА C^1 , ОБЛАДАЮЩЕГО СВОЙСТВАМИ НЕОТРИЦАТЕЛЬНОСТИ И ЛОКАЛЬНОЙ МОНОТОННОСТИ. ЧАСТЬ 2

С. В. Мжачих, Н. В. Колобянина, Ю. Н. Лапшина
(ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области)

Представленная работа является продолжением опубликованной ранее работы с теми же авторами и названием. Освещены некоторые вопросы теории конструирования кубического сплайна, аппроксимирующего данные гистограммы, приводится рекомендуемая тактика расчета задач, основанная на многоэтапности, демонстрируются результаты расчетов некоторых тестовых задач, подтверждающие работоспособность алгоритма. В заключительном разделе обсуждаются достоинства и особенности метода.

Ключевые слова: кубический сплайн, условная минимизация, локально монотонная аппроксимация, неотрицательная аппроксимация.

Введение

Настоящая работа является продолжением работы [1], при этом наследуются ранее введенные переменные, сокращения и обозначения. Используются также ссылки на математические выражения работы [1], нумерация которых имеет вид (1.*).

Первые три раздела относятся к теоретическим вопросам методики. Затем приводится рекомендуемая тактика счета, которая заключается в том, что решение задачи разбивается на несколько этапов, на каждом из которых метод надежен и эффективен по быстродействию. И наконец, демонстрируются результаты расчетов некоторых довольно сложных, по мнению авторов, задач, для которых значения гистограммы отличаются на несколько порядков, а полученная аппроксимация имеет острые пики.

1. Расчет шагового множителя (метод одномерной минимизации)

Согласно формуле (1.35) новая итерация решения $\mathbf{f}_{k,l}$ рассчитывается с использованием коэффициента $\alpha_{k,l}$, который призван ограничивать смещение от вектора $\mathbf{f}_{k,l-1}$ в направлении векторного шага $\delta\mathbf{f}_{k,l}$. Коэффициент шага $\alpha_{k,l}$, максимальное значение которого равно 1, необходимо выбрать так, чтобы обеспечить понижение значения $\mathcal{L}_k(\mathbf{f})$ при переходе от точки $\mathbf{f}_{k,l-1}$ к точке $\mathbf{f}_{k,l}$. Для нахождения коэффициента используется итерационная процедура. В методе генерируется положительная убывающая последовательность (γ_j) , где $j \geq 0$ ($j \in \mathbb{Z}$), последнее значение которой объявляется значением $\alpha_{k,l}$. Определим $\gamma_0 = 0$; $\gamma_1 = 1$; $\mathbf{x} \equiv \mathbf{f}$; $\mathbf{x}_0 = \mathbf{f}_{k,l-1}$;

$$\mathbf{x}_j = \mathbf{x}_0 + \Delta\mathbf{x}_j, \quad \Delta\mathbf{x}_j = \gamma_j \delta\mathbf{f}_{k,l}. \quad (1)$$

Далее считаем, что для $j = 1$ истинно неравенство (см. (1.36))

$$(\Delta\mathbf{x}_j, \nabla\mathcal{L}_k(\mathbf{x}_0)) < 0. \quad (2)$$

Тогда оно будет истинным и для $j > 1$ при условии $\gamma_j > 0$. Это означает, что существует окрестность точки \mathbf{x}_0 , в которой функция $\mathcal{L}_k(\mathbf{x})$ убывает в направлении вектора $\Delta\mathbf{x}_j$.

Для расчета значения шагового множителя $\alpha_{k,l}$ выполняем следующие действия в цикле по $j = \overline{1, J+1}$ (J — параметр, задаваемый пользователем):

- 1) рассчитываем значения $\mathcal{L}_k(\mathbf{x}_j)$ и $\nabla\mathcal{L}_k(\mathbf{x}_j)$;
- 2) если

$$\mathcal{L}_k(\mathbf{x}_j) \leq \mathcal{L}_k(\mathbf{x}_0) + \sigma_\alpha (\Delta\mathbf{x}_j, \nabla\mathcal{L}_k(\mathbf{x}_0)), \quad (3)$$

где σ_α — параметр,

$$\sigma_\alpha \in (0, 1/2], \quad (4)$$

или $j > J$, то определяем $J_{k,l} = j$ и принудительно выходим из цикла по j ;

- 3) определяем число γ_{j+1} из интервала $(0, \gamma_j)$, затем рассчитываем векторы $\Delta\mathbf{x}_{j+1}$ и \mathbf{x}_{j+1} по формулам (1);
- 4) повторяем алгоритм с шага 1 для следующего индекса j (в рамках нового цикла).

Чем меньше значение σ_α , тем больше вероятность выполнения условия (3). С ростом значения σ_α уменьшаются значения γ_j , т. е. шаги $\Delta\mathbf{x}_{j+1}$ прогнозируются более мелкими.

Если цикл по индексу j завершен по причине истинности неравенства (3), то полагаем $\alpha_{k,l} = \gamma_j$. Выход из цикла при условии $j > J$ означает, что решение найти не удалось.

Рассмотрим метод расчета значения γ_{j+1} (см. шаг 3 алгоритма), полагая, что неравенство (2) истинно, а неравенство (3) ложно, т. е. имеет место случай

$$p_0 < 0; \quad (5)$$

$$\Delta z_j > \sigma_\alpha p_0, \quad (6)$$

где

$$p_0 = (\Delta\mathbf{x}_j, \nabla\mathcal{L}_k(\mathbf{x}_0)); \quad \Delta z_j = z_j - z_0, \quad z_j = \mathcal{L}_k(\mathbf{x}_j).$$

Для одномерного профиля $\mathcal{L}_k(\mathbf{x}_0 + C\Delta\mathbf{x}_j)$, где $C \in [0, 1]$, используем аппроксимацию в виде кубического полинома

$$y(C) = z_0 + p_0 C + 3BC^2 - 2AC^3, \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} A &= \Delta z_j - \frac{1}{2}(p_0 + p_1); \quad B = \Delta z_j - \frac{2}{3}p_0 - \frac{1}{3}p_1 = A + \theta, \quad \theta = \frac{1}{6}(p_1 - p_0); \\ p_1 &= (\Delta\mathbf{x}_j, \nabla\mathcal{L}_k(\mathbf{x}_j)). \end{aligned} \quad (8)$$

Полином (7) обладает следующими свойствами:

$$y(0) = z_0; \quad y(1) = z_j; \quad y'(0) = p_0, \quad y'(1) = p_1.$$

Из выражений (6) и (8) следует, что

$$A > A_{\min} = -\left(\frac{1}{2} - \sigma_\alpha\right)p_0 - \frac{1}{2}p_1; \quad B > B_{\min} = -\left(\frac{2}{3} - \sigma_\alpha\right)p_0 - \frac{1}{3}p_1. \quad (9)$$

Рассмотрим случай $p_1 > 0$. На основании выражений (5) и (8) получаем оценку $\theta > 0$. Из условия (4) следует, что переменные A_{\min} и B_{\min} могут иметь как положительные, так и отрицательные значения, т. е. с учетом первого неравенства из (9) возможен случай $A = 0$.

Для полинома третьей степени $y(C)$ со свойствами $y'(0) < 0$ и $y'(1) > 0$ существует единственная точка локального минимума $C = C_{\min}$, где $C_{\min} \in (0, 1)$. Найдем точку C_{\min} из условия $y'(C_{\min}) = 0$. Учитывая (7), приходим к квадратному уравнению

$$-6AC^2 + 6BC + p_0 = 0, \quad (10)$$

действительный корень которого существует. Значение дискриминанта определяется по формуле

$$D = 36B^2 + 24Ap_0. \quad (11)$$

Решение уравнения (10) не является кратным корнем, так как для полинома третьей степени точка перегиба возможна только при условии $p_0p_1 > 0$. Следовательно, $D > 0$.

Пусть $A \neq 0$. Рассчитаем корни уравнения (10) по формуле

$$C_{\pm} = \frac{-6B \pm \sqrt{D}}{-12A}. \quad (12)$$

В работе [1] было показано, что локальному минимуму кубического полинома $y(C)$ в случае $A \neq 0$ отвечает значение C_+ . В случае возможного значения $A = 0$ формула (12) становится некорректной.

Пусть $B \leq 0$. Учитывая выражение (8), а также оценку $\theta > 0$, получаем $A = B - \theta \leq -\theta < 0$. Следовательно, для $B \leq 0$ формула (12) применима.

Если $B > 0$, то преобразуем формулу (12) для расчета C_+ . С учетом (11) получим

$$C_+ = \frac{36B^2 - D}{12A(6B + \sqrt{D})} = \frac{-2p_0}{6B + \sqrt{D}}. \quad (13)$$

Числитель и знаменатель дроби в выражении (13) положительны, т. е. формула (13) численно корректна. Но ей, как видим, лучше не пользоваться в случае $B < 0$.

Теперь рассмотрим аппроксимацию $y(C)$, для которой истинны неравенства (5) и (6), но при этом $p_1 \leq 0$. Учитывая выражения (4), (5), (9), получаем оценки $A > A_{\min} \geq 0$, $B > B_{\min} > 0$. Следовательно, для расчета значения C_+ приемлемы как формула (12), так и формула (13). Функция $y(C)$ может иметь точку перегиба ($D = 0$).

Определяем значение γ_{j+1} по формуле $\gamma_{j+1} = \zeta C_+ \gamma_j$, где ζ — параметр: $\zeta \in (0, 1]$.

2. Расчет начального приближения

Метод Ньютона, использованный для решения задачи безусловной минимизации, относится к методам локальной сходимости, и его эффективность и надежность во многом определяются стартовой итерацией вектора решения.

В качестве начальной функции $F(t)$ зададим кубический сплайн класса $C^1[t_0, t_N]$ (см. 1.3) с естественными граничными условиями (ГУ), для которого истинны соотношения (1.6). Свойствами локальной монотонности (ЛМ) и неотрицательности на данном этапе будем пренебрегать.

Для расчета значений d_0 и d_N привлечем формулы (1.10) и (1.9). Значения переменных d_n , где $n = \overline{1, N-1}$, будем определять по трехточечной формуле

$$d_n = \sum_{k=-1}^1 \xi_{k,n} f_{n+k} + r_n. \quad (14)$$

Определим значения $\xi_{k,n}$. Для этого рассмотрим полином четвертой степени

$$S_n(t) = f_n + \sum_{i=1}^4 s_{i,n} (t - t_n)^i,$$

обладающий следующими свойствами:

$$S_n(t_{n+k}) = f_{n+k}, \quad k = \overline{-1, 1}; \quad \int_{t_{n-1}}^{t_n} S_n(t) dt = \bar{f}_n \Delta_n; \quad \int_{t_n}^{t_{n+1}} S_n(t) dt = \bar{f}_{n+1} \Delta_{n+1}.$$

На практике исследовались и другие формы функции $S_n(t)$. Заслуживает внимания вариант задания функции $S_n(t)$ в виде сплайна класса C^2 , состоящего из двух кубических полиномов. Сплайн

опирается на известные значения f_{n-1} , f_n , f_{n+1} и известные значения интегралов на множествах $[t_{n-1}, t_n]$, $[t_n, t_{n+1}]$.

Для расчета коэффициентов многочлена $S_n(t)$ составим систему уравнений

$$Q_n(s_{1,n}, s_{2,n}, s_{3,n}, s_{4,n})^T = (\bar{f}_n - f_n, f_{n-1} - f_n, f_{n+1} - f_n, \bar{f}_{n+1} - f_n)^T, \quad n = \overline{1, N-1}, \quad (15)$$

$$\text{где } Q_n \equiv \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\Delta_n & \frac{1}{3}\Delta_n^2 & -\frac{1}{4}\Delta_n^3 & \frac{1}{5}\Delta_n^4 \\ -\Delta_n & \Delta_n^2 & -\Delta_n^3 & \Delta_n^4 \\ \Delta_{n+1} & \Delta_{n+1}^2 & \Delta_{n+1}^3 & \Delta_{n+1}^4 \\ \frac{1}{2}\Delta_{n+1} & \frac{1}{3}\Delta_{n+1}^2 & \frac{1}{4}\Delta_{n+1}^3 & \frac{1}{5}\Delta_{n+1}^4 \end{pmatrix}.$$

Известно, что $d_n = F'_n(t_n)$. Определим $d_n = S'_n(t_n)$. Следовательно, $d_n = s_{1,n}$.

Найдем значение $s_{1,n}$ из решения системы (15) методом Крамера:

$$d_n = \frac{\det Q_{1,n}}{\det Q_n}, \quad (16)$$

где $\det A$ — определитель матрицы A . Матрица $Q_{1,n}$ получается из матрицы Q_n заменой 1-го столбца на вектор правой части системы (15). Используем формулу

$$\det Q_{1,n} = (\bar{f}_n - f_n) \det R_{1,n} - (f_{n-1} - f_n) \det R_{2,n} + (f_{n+1} - f_n) \det R_{3,n} - (\bar{f}_{n+1} - f_n) \det R_{4,n}, \quad (17)$$

где матрица $R_{i,n}$ получается из матрицы Q_n вычеркиванием i -й строки и 1-го столбца.

Учитывая (16) и (17), получаем коэффициенты для формулы (14):

$$\xi_{-1,n} = -z_{2,n}; \quad \xi_{1,n} = z_{3,n}; \quad \xi_{0,n} = z_{2,n} + z_{4,n} - z_{1,n} - z_{3,n}; \quad r_n = z_{1,n}\bar{f}_n - z_{4,n}\bar{f}_{n+1},$$

где $z_{i,n} \equiv \frac{\det R_{i,n}}{\det Q_n}$, т. е.

$$z_{2,n} = \frac{-2\Delta_{n+1}^2}{\Delta_n(\Delta_{n+1} + \Delta_n)^2}; \quad z_{3,n} = \frac{-2\Delta_n^2}{\Delta_{n+1}(\Delta_{n+1} + \Delta_n)^2};$$

$$z_{1,n} = z_{2,n} \left(4 - \frac{\Delta_{n+1} - \Delta_n}{\Delta_{n+1} + \Delta_n} \right); \quad z_{4,n} = z_{3,n} \left(4 + \frac{\Delta_{n+1} - \Delta_n}{\Delta_{n+1} + \Delta_n} \right).$$

Из N соотношений (1.6), учитывая (1.9), (1.10) и (14), получаем N уравнений:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{3}{\Delta_1} - \xi_{-1,1} \right) f_0 + \left(\frac{5}{\Delta_1} - \xi_{0,1} \right) f_1 - \xi_{1,1} f_2 = g_1; \\ & \xi_{-1,n-1} f_{n-2} + \left(\frac{6}{\Delta_n} + \xi_{0,n-1} - \xi_{-1,n} \right) f_{n-1} + \left(\frac{6}{\Delta_n} + \xi_{1,n-1} - \xi_{0,n} \right) f_n - \\ & \quad - \xi_{1,n} f_{n+1} = g_n, \quad n = \overline{2, N-1}; \\ & \xi_{-1,N-1} f_{N-2} + \left(\frac{5}{\Delta_N} + \xi_{0,N-1} \right) f_{N-1} + \left(\frac{3}{\Delta_N} + \xi_{1,N-1} \right) f_N = g_N, \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$g_1 = \frac{8}{\Delta_1} \bar{f}_1 + r_1; \quad g_n = \frac{12}{\Delta_n} \bar{f}_n + r_n - r_{n-1}, \quad n = \overline{2, N-1}; \quad g_N = \frac{8}{\Delta_N} \bar{f}_N - r_{N-1}.$$

Для формирования замкнутой системы уравнений относительно неизвестного вектора $(f_n)_{n=\overline{0,N}}$ требуется одно дополнительное соотношение (ДС). Можно, например, первым уравнением системы сделать соотношение

$$f_0 + \alpha_0 f_1 = g_0 \quad (19)$$

или в качестве последнего уравнения системы использовать соотношение

$$\alpha_{N+1}f_{N-1} + f_N = g_{N+1}. \quad (20)$$

Если для задачи известно значение $f_0 = g_0$, то полагаем $\alpha_0 = 0$. Аналогично можно задать ГУ $f_N = g_{N+1}$.

Предложим еще способы задания коэффициентов для ДС. Рассмотрим кубический полином третьей степени

$$S_0(t) = f_0 + \sum_{i=1}^3 s_{i,0} (t - t_0)^i,$$

обладающий свойствами

$$S_0(t_0) = f_0; \quad S_0(t_1) = f_1; \quad \int_{t_0}^{t_1} S_0(t) dt = \bar{f}_1 \Delta_1; \quad \int_{t_1}^{t_2} S_0(t) dt = \bar{f}_2 \Delta_2.$$

Для расчета коэффициентов многочлена $S_0(t)$ составим систему уравнений

$$Q_0(s_{1,0}, s_{2,0}, s_{3,0})^T = (f_1 - f_0, \bar{f}_1 - f_0, \bar{f}_2 - f)^T,$$

где $Q_0 \equiv \begin{pmatrix} \Delta_1 & \Delta_1^2 & \Delta_1^3 \\ \frac{1}{2}\Delta_1 & \frac{1}{3}\Delta_1^2 & \frac{1}{4}\Delta_1^3 \\ \Delta_1 + \frac{1}{2}\Delta_2 & \Delta_1^2 + \Delta_1\Delta_2 + \frac{1}{3}\Delta_2^2 & \Delta_1^3 + \frac{3}{2}\Delta_1^2\Delta_2 + \Delta_1\Delta_2^2 + \frac{1}{4}\Delta_2^3 \end{pmatrix}$.

Определим $d_0 = S'_0(t_0) = s_{1,0}$. Рассчитаем значение $s_{1,0}$ с помощью формулы (16), задав $n = 0$. После преобразования определителей приходим к формуле вида (14), но модифицированной, применительно к случаю $n = 0$:

$$d_0 = \sum_{k=0}^1 \xi_{k,0} f_k + r_0, \quad (21)$$

где

$$\xi_{0,0} = z_{2,0} - z_{1,0} - z_{3,0}; \quad \xi_{1,0} = z_{1,0}; \quad r_0 = z_{3,0}\bar{f}_2 - z_{2,0}\bar{f}_1.$$

Приравнявая правые части в равенствах (1.10) и (21), получаем ДС (19), для которого

$$\alpha_0 = \frac{1 + \Delta_1 \xi_{1,0}}{3 + \Delta_1 \xi_{0,0}} = \frac{(2\Delta_1 + \Delta_2)(\Delta_1 + \Delta_2)}{\Delta_2(3\Delta_1 + \Delta_2)};$$

$$g_0 = \frac{4\bar{f}_1 - \Delta_1 r_0}{3 + \Delta_1 \xi_{0,0}} = \frac{2\Delta_1^3}{\Delta_2(3\Delta_1 + \Delta_2)(\Delta_1 + \Delta_2)} \bar{f}_2 + \frac{2(2\Delta_1 + \Delta_2)^2}{(3\Delta_1 + \Delta_2)(\Delta_1 + \Delta_2)} \bar{f}_1.$$

Анализ кубического полинома $S_N(t)$, построенного по данным для двух крайних правых интервалов, который аналогичен (в некотором смысле "симметричен") полиному $S_0(t)$, приводит к значениям

$$\alpha_{N+1} = \frac{(2\Delta_N + \Delta_{N-1})(\Delta_N + \Delta_{N-1})}{\Delta_{N-1}(3\Delta_N + \Delta_{N-1})};$$

$$g_{N+1} = \frac{2\Delta_N^3}{\Delta_{N-1}(3\Delta_N + \Delta_{N-1})(\Delta_N + \Delta_{N-1})} \bar{f}_{N-1} + \frac{2(2\Delta_N + \Delta_{N-1})^2}{(3\Delta_N + \Delta_{N-1})(\Delta_N + \Delta_{N-1})} \bar{f}_N.$$

Матрица системы, образуемой уравнениями (18) и ДС (19) (или (20)), содержит четыре ненулевые смежные диагонали, включая главную. При задании соотношения (19) матрица имеет две нижние и одну верхнюю диагонали, а при задании соотношения (20) — одну нижнюю и две верхние. Элементы матрицы, а также одномерные числовые массивы, зависящие от сеточного вектора Δ , которые нужны для быстрого расчета вектора правой части системы, запасаются на стадии расчета

начальных данных (РНД). Для решения системы уравнений применяется метод исключения Гаусса, оптимизированный под ленточную матрицу, с выбором главного элемента в строке.

3. Ограничения в виде четырех линейных неравенств, гарантирующие неотрицательность сплайна на отрезке данных

В подразд. 2.4 работы [1] для расчета значения функции $F_n(t)$ в точке локального экстремума $t_n^* = t_{n-1} + \gamma_n^* \Delta_n$ получена формула

$$f_n^* = \frac{3}{2} \bar{f}_n - \frac{1}{2} (1 - \gamma_n^*) f_n - \frac{1}{2} \gamma_n^* f_{n-1} + \Delta_n^3 U(\gamma_n^*) b_n,$$

где

$$U(\gamma) \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \gamma \right) \left[\left(\frac{1}{2} - \gamma \right)^2 + \frac{1}{4} \right]. \quad (22)$$

Интерес представляет случай, когда значение γ_n^* соответствует точке локального минимума функции $F_n(t)$, при этом $\gamma_n^* \in (0, 1)$.

Определим функцию

$$H_n(\gamma) \equiv \frac{3}{2} \bar{f}_n - \frac{1}{2} (1 - \gamma) f_n - \frac{1}{2} \gamma f_{n-1} + \Delta_n^3 b_n U(\gamma), \quad (23)$$

для которой $f_{n-1} \geq 0$; $f_n \geq 0$;

$$H_n(\gamma_n^*) = F_n(t_n^*) = f_n^*; \quad (24)$$

$$H_n'(\gamma) = \frac{1}{2} \Delta f_n - \frac{3}{2} \Delta_n^3 \left[\left(\frac{1}{2} - \gamma \right)^2 + \frac{1}{12} \right] b_n; \quad H_n''(\gamma) = 3 \Delta_n^3 \left(\frac{1}{2} - \gamma \right) b_n. \quad (25)$$

Предположим, что уравнение $H_n'(\gamma) = 0$ имеет действительные корни. Пусть значение $\gamma = \gamma_n^+$ соответствует точке локального минимума полинома третьей степени $H_n(\gamma)$, а значение $\gamma = \gamma_n^-$ — точке локального максимума. Уравнение $H_n'(\gamma) = 0$ преобразуем к виду

$$b_n = \frac{\frac{1}{3} \Delta f_n}{\Delta_n^3 \left[\left(\frac{1}{2} - \gamma_n^\pm \right)^2 + \frac{1}{12} \right]}. \quad (26)$$

Поскольку $H_n''(\gamma_n^+) > 0$, то на основании (25) и (26) истинно неравенство

$$\left(\frac{1}{2} - \gamma_n^+ \right) \Delta f_n > 0. \quad (27)$$

Учитывая (27), получаем значения

$$\gamma_n^+ = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{12} \left(\frac{4v_n}{b_n} - 1 \right)} \operatorname{sign} b_n; \quad \gamma_n^- = 1 - \gamma_n^+, \quad (28)$$

где $v_n \equiv \Delta f_n / \Delta_n^3$. Уравнение (26) имеет действительное решение (28) при условии

$$b_n \Delta f_n > 0 \quad \text{и} \quad |b_n| \leq 4 |v_n|. \quad (29)$$

Рассмотрим случай $\gamma_n^+ \in [0, 1]$. Для этого к условиям (29) добавим неравенство $|v_n| \leq |b_n|$. Для любого значения γ из отрезка $[0, 1]$ истинно неравенство

$$H_n(\gamma) \geq \min \{ H_n(0), H_n(1), H_n(\gamma_n^+) \}, \quad (30)$$

где

$$H_n(0) \equiv -\frac{1}{8}Q_{n,1}(\mathbf{f}); \quad H_n(1) \equiv -\frac{1}{8}Q_{n,2}(\mathbf{f}); \quad (31)$$

$$Q_{n,1}(\mathbf{f}) \equiv 4f_n - \Delta_n^3 b_n - 12\bar{f}_n; \quad Q_{n,2}(\mathbf{f}) \equiv 4f_{n-1} + \Delta_n^3 b_n - 12\bar{f}_n. \quad (32)$$

С учетом (22), (23) и (26) получаем

$$\begin{aligned} H_n(\gamma_n^+) &= \frac{3}{2}\bar{f}_n - \frac{1}{2}(1 - \gamma_n^+)f_n - \frac{1}{2}\gamma_n^+f_{n-1} + \Delta_n^3 \frac{\frac{1}{3}\Delta f_n}{\Delta_n^3 \left[\left(\frac{1}{2} - \gamma_n^+ \right)^2 + \frac{1}{12} \right]} U(\gamma_n^+) = \\ &= \frac{3}{2}\bar{f}_n - \frac{1}{2}f_n + \frac{1}{2}\Delta f_n W(\gamma_n^+), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} W(\gamma) &\equiv \frac{1}{2} - \frac{\frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} - \gamma \right)^3}{\left(\frac{1}{2} - \gamma \right)^2 + \frac{1}{12}}; \quad W'(\gamma) = \frac{2}{3} \left[\frac{\frac{1}{2} - \gamma}{\left(\frac{1}{2} - \gamma \right)^2 + \frac{1}{12}} \right]^2 \left[\left(\frac{1}{2} - \gamma \right)^2 + \frac{1}{4} \right]; \\ W'(\gamma) &\geq 0; \quad W(0) = \frac{1}{4}; \quad W(1) = \frac{3}{4}. \end{aligned} \quad (33)$$

Определим функцию

$$\tilde{H}_n(\gamma) \equiv \frac{3}{2}\bar{f}_n - \frac{1}{2}f_n + \frac{1}{2}\Delta f_n W(\gamma). \quad (34)$$

На основании (27) истинны неравенства

$$\begin{aligned} \tilde{H}_n(\gamma_n^+) &\geq \min_{\gamma \in [0, 1/2]} \tilde{H}_n(\gamma), \quad \text{если } \Delta f_n > 0; \\ \tilde{H}_n(\gamma_n^+) &\geq \min_{\gamma \in [1/2, 1]} \tilde{H}_n(\gamma), \quad \text{если } \Delta f_n < 0, \end{aligned}$$

где с учетом (33) и (34)

$$\min_{\gamma \in [0, 1/2]} \tilde{H}_n(\gamma) = \frac{3}{2}\bar{f}_n - \frac{1}{2}f_n + \frac{1}{2}\Delta f_n \min_{\gamma \in [0, 1/2]} W(\gamma) = \tilde{H}_n(0), \quad \text{если } \Delta f_n > 0;$$

$$\min_{\gamma \in [1/2, 1]} \tilde{H}_n(\gamma) = \frac{3}{2}\bar{f}_n - \frac{1}{2}f_n + \frac{1}{2}\Delta f_n \max_{\gamma \in [1/2, 1]} W(\gamma) = \tilde{H}_n(1), \quad \text{если } \Delta f_n < 0;$$

$$\tilde{H}_n(0) \equiv -\frac{1}{8}Q_{n,3}(\mathbf{f}); \quad \tilde{H}_n(1) \equiv -\frac{1}{8}Q_{n,4}(\mathbf{f}); \quad (35)$$

$$Q_{n,3}(\mathbf{f}) \equiv 3f_n + f_{n-1} - 12\bar{f}_n; \quad Q_{n,4}(\mathbf{f}) \equiv f_n + 3f_{n-1} - 12\bar{f}_n. \quad (36)$$

Заметим, что $\tilde{H}_n(0) = \tilde{H}_n(1)$, если $\Delta f_n = 0$. Учитывая, что $\tilde{H}_n(\gamma_n^+) = H_n(\gamma_n^+)$, получаем оценку

$$H_n(\gamma_n^+) \geq \min \left\{ \tilde{H}_n(0), \tilde{H}_n(1) \right\}. \quad (37)$$

Рассмотрим неравенство (30) для $\gamma = \gamma_n^*$, где $\gamma_n^* \in (0, 1)$. Учтем (24), (31), (35) и (37). Неравенство $f_n^* \geq 0$ всегда будет истинным, если

$$\min \left\{ H_n(0), H_n(1), \tilde{H}_n(0), \tilde{H}_n(1) \right\} \geq 0,$$

т. е. при условии (см. (32), (36))

$$q_{n,1} = Q_{n,1}(\mathbf{f}) \leq 0; \quad q_{n,2} = Q_{n,2}(\mathbf{f}) \leq 0; \quad (38)$$

$$q_{n,3} = Q_{n,3}(\mathbf{f}) \leq 0; \quad q_{n,4} = Q_{n,4}(\mathbf{f}) \leq 0. \quad (39)$$

В случае $\gamma_n^+ \notin [0, 1]$ (при этом $\gamma_n^- \notin [0, 1]$, см. (28)), а также в случае, когда уравнение $H'_n(\gamma) = 0$ не имеет действительных корней, функция $H_n(\gamma)$ на отрезке $[0, 1]$ монотонна и, следовательно, истинно неравенство

$$H_n(\gamma_n^*) = f_n^* \geq \min \{H_n(0), H_n(1)\}.$$

Как видим, при этом достаточно ограничений (38).

Исследования показали, что в случае $\gamma_n^+ \notin [0, 1]$

$$\max \{q_{n,1}, q_{n,2}, q_{n,3}, q_{n,4}\} = \begin{cases} q_{n,1}, & \text{если } \Delta f_n > 0 \text{ и } b_n \in (0, v_n); \\ q_{n,2}, & \text{если } \Delta f_n < 0 \text{ и } b_n \in (v_n, 0). \end{cases}$$

Если уравнение $H'_n(\gamma) = 0$ не имеет действительных корней, то

$$\max \{q_{n,1}, q_{n,2}, q_{n,3}, q_{n,4}\} = \begin{cases} q_{n,2}, & \text{если } (\Delta f_n > 0 \text{ и } b_n > 4v_n) \text{ или } (\Delta f_n \leq 0 \text{ и } b_n \geq 0); \\ q_{n,1}, & \text{если } (\Delta f_n < 0 \text{ и } b_n < 4v_n) \text{ или } (\Delta f_n \geq 0 \text{ и } b_n \leq 0). \end{cases}$$

Итак, если функция $H_n(\gamma)$ на отрезке $[0, 1]$ монотонна, то неравенства (39) не могут быть активными, т. е. они всегда истинны и не определяют область неотрицательности функции $F_n(t)$. Следовательно, неравенства (39) в рассматриваемом случае не влияют на решение и могут быть включены в систему ограничений.

Если функция $F_n(t)$ всюду монотонна ($p_n \leq 0$, см. (1.5)) или $\gamma_n^* \notin (0, 1)$, то, вообще говоря, никаких ограничений на неотрицательность функции $F_n(t)$ вводить не требуется, но, как показала практика расчетов, можно использовать ограничения (38) и (39).

Обратим внимание на некоторые следствия неравенств (38) и (39):

- 1) $q_{n,1} + q_{n,2} = q_{n,3} + q_{n,4} = 8 \left(\frac{f_n + f_{n-1}}{2} - 3\bar{f}_n \right)$, и, следовательно, $\frac{f_n + f_{n-1}}{2} \leq 3\bar{f}_n$;
- 2) $f_{n-1} \leq 4\bar{f}_n$, $f_n \leq 4\bar{f}_n$.

Если сплайн становится неотрицательным благодаря полученным ограничениям, то в критерий завершения расчета задачи нахождения условного минимума можно к четырем линейным неравенствам (1.38) добавить два константных ограничения:

$$f_{n-1} \leq (4 + \varepsilon_1) \bar{f}_n + \varphi_4, \quad f_n \leq (4 + \varepsilon_1) \bar{f}_n + \varphi_4.$$

4. Тактика счета

В ходе численного тестирования выяснилось, что попытка рассчитать задачу с нелинейными ограничениями (1.17) и (1.29), используя при этом начальное приближение \mathbf{f}_0 , полученное по методу из разд. 2, может оказаться неудачной. Это связано с тем, что метод Ньютона при всех его достоинствах имеет существенный недостаток: он относится к методам локальной итерационной сходимости и при неудачном выборе стартовой итерации может отказать. Поэтому была выработана тактика расчетов, согласно которой задача аппроксимации данных гистограммы делится на несколько этапов, при этом решение предыдущего этапа является начальной итерацией для этапа текущего. Такой подход приводит к тому, что стартовый вектор \mathbf{f} на каждом этапе всегда находится в области итерационной сходимости метода Ньютона. Опишем эти этапы.

Этап 0: расчет начального приближения (см. разд. 2).

Этап 1: решение задачи безусловной минимизации целевой функции (ЦФ) $\Gamma(\mathbf{f})$. На данном этапе рассчитывается аппроксимирующая функция для данных гистограммы, обеспечивающая минимум длины кривой сплайна $F(t)$, при этом на вектор решения \mathbf{f} не накладываются ограничения по ЛМ и неотрицательности.

Далее пользователь должен определиться с выбором, какая аппроксимирующая функция ему больше подходит. Если задачу аппроксимации нужно рассчитать быстро и надежно, то применяет-

ся только этап 2а. Для получения наиболее точного решения задачи (1.31), для которого ЦФ достигает своего абсолютного минимума (с заданной итерационной точностью), последовательно используются этапы 2б и 3.

Этап 2а: решение задачи (1.31) условной минимизации ЦФ $\Gamma(\mathbf{f})$ с использованием ограничений на неотрицательность сплайна в виде линейных неравенств (38), (39) и ограничений на ЛМ в виде линейных неравенств (1.19) и (1.23). Стандартно $I = 1$. Проблема ЛМ и неотрицательности на данном этапе (и для всей задачи) решается точно. Минимум ЦФ достигается в области заданных линейных ограничений. Значение ЦФ можно понизить, но для этого надо перейти к более широкой области значений \mathbf{f} , задаваемой нелинейными ограничениями этапа 3.

Этап 2б (вспомогательный): решение задачи (1.31) минимизации ЦФ $\Gamma(\mathbf{f})$, но с использованием ограничений в виде линейных неравенств (1.19), (1.21) и (1.30). На этом этапе в качестве начальной итерации вектора \mathbf{f} берется сплайн, полученный на этапе 1. Проблема ЛМ и неотрицательности на данном этапе решается приближенно. После завершения этапа 2б проверяются нелинейные неравенства (1.17) и (1.29), и если они истинны (с заданной точностью), то задача считается решенной.

Этап 3: точное решение задачи (1.31) условной минимизации ЦФ $\Gamma(\mathbf{f})$, при этом к линейным неравенствам этапа 2б добавляются нелинейные неравенства (1.17) и (1.29). На данном этапе минимум ЦФ ищется на самом широком множестве значений \mathbf{f} , на котором гарантируются желаемые свойства ЛМ и неотрицательности сплайна. В качестве начальной итерации вектора \mathbf{f} берется аппроксимирующая функция, рассчитанная на этапе 2б, при этом стартовый вектор множителей Лагранжа $\boldsymbol{\eta}$ обнуляется.

На этапах 2а, 2б и 3 также задаются ограничения (1.25).

В представленных ниже задачах естественное ГУ для сплайна на всех этапах задавалось в крайней правой точке (см. (1.9)). На этапах 0 и 1 использовалось значение $f_N = 0$, т. е. искомым был вектор $(f_n)_{n=0, N-1}$.

Экспериментально определялось минимальное достаточное число квадратур Гаусса на каждом отрезке $[t_{n-1}, t_n]$, используемых при расчете целевой функции $\Gamma(\mathbf{f})$. Результаты расчетов приводятся для $M_G = 8$ (см. подразд. 2.1 работы [1]).

Максимальное число итераций k (число K) и максимальное число итераций l (число L) также выбирались экспериментально. Результаты представлены для значений $K = 40$ и $L = 70$ (на этапе 1 $L = 300$).

Значение штрафа χ_k рассчитывалось по формуле $\chi_{k+1} = \theta_{k+1}\chi_k$, где

$$\theta_{k+1} = \left\{ \begin{array}{l} 1, \text{ если } L_k > L \text{ или } N_k \geq 32 \text{ (} N_k = \log_2 \chi_k \text{);} \\ 2, \text{ если } k \leq 3; \\ 1, \text{ если } |\Omega_k^+| \leq \sigma_\chi |\Omega_{k-1}^+|, \text{ где } \sigma_\chi \in (0, 1); \\ 2, \text{ если } L_k > 30 \text{ или } N_k \geq 28; \\ \min\{2\theta_k, 4\}, \text{ если } L_k \leq 30, N_k < 28; \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} |\Omega_k^+| > \sigma_\chi |\Omega_{k-1}^+|; \\ k > 3; \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} L_k \leq L; \\ N_k < 32. \end{array} \right.$$

Переменная L_k задает число итераций l , которое потребовалось для расчета итерации \mathbf{f}_k с заданной точностью. В случае $L_k = L + 1$ критерий выхода из цикла по l не был выполнен.

Были использованы следующие значения параметров: $J = 20$; $\sigma_\alpha = 0,2$; $\zeta = 0,9$ (см. разд. 1); $\varsigma = 0,05$ (см. [1], подразд. 2.2); $\lambda = 0,01$ (см. [1], подразд. 2.4); $\sigma_\chi = 1/8$. Значения других параметров представлены в табл. 1.

Таблица 1

Значения параметров

φ_0	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	ε_1	ε_2	ε_3	ε_4	ε_5
10^{-6}	10^{-14}	10^{-6}	10^{-8}	10^{-6}	10^{-3}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-6}	10^{-4}	10^{-3}

5. Численное тестирование

Тестирование методики проводилось на большом числе задач. Для демонстрации результатов были выбраны сложные, по мнению авторов, задачи с общей разницей значений гистограммы (между $\min_n \bar{f}_n$ и $\max_n \bar{f}_n$) в шесть-семь порядков и примерно три порядка для соседних значений \bar{f}_n . Но, как будет показано далее, представленный в работе метод хорошо аппроксимирует и такие данные.

Для численного исследования метода рассмотрим две задачи, начальные данные которых представлены в табл. 2. Здесь символом "+" отмечены отрезки с номерами n (от t_{n-1} до t_n), для которых задавались ограничения на ЛМ и неотрицательность (столбец "Н") сплайна. Символом "×" отмечены те отрезки, для которых изначально заданные ограничения на монотонность затем были отменены, так как эти отрезки непосредственно соседствуют с отрезками, для которых условия ЛМ (1.13) и (1.18) для $\varsigma = 0,05$ не выполняются (см. разд. 2.2 работы [1]). Алгоритм, снимающий ограничения на монотонность, не затронул отрезок $[t_1, t_2]$ в задаче 2: в заданной постановке аппроксимирующая кривая больше соответствует ожиданиям. Снятие на отрезке ограничения на монотонность автоматически приводило к заданию ограничения на неотрицательность.

Как видно из табл. 2, в задаче 1 были удалены из рассмотрения первые три "плохих" отрезка согласно неравенствам (1.2), так как они затрудняли процесс расчета.

Отметим, что среднее значение данных гистограммы для обеих задач нормировано на единицу (см. (1.1)).

В табл. 3 и 4 приведены следующие результаты решения задач 1 и 2 соответственно:

Таблица 2

Начальные данные задач 1 и 2

n	t_n	Задача 1			Задача 2		
		\bar{f}_n	ЛМ	Н	\bar{f}_n	ЛМ	Н
0	-3,49952e-1						
1	-3,30023e-1	< 1e-6			3,37632e+1		+
2	-2,70027e-1	< 1e-6			2,54973e+0	+	
3	-2,15111e-1	< 1e-6			1,93391e+0	+	
4	-1,57004e-1	6,52211e-6	+		1,63123e+0	+	
5	-4,87902e-2	6,96467e-5	+		1,28882e+0	+	
6	7,25707e-2	1,53577e-4	+		9,82365e-1	+	
7	2,67879e-1	3,90299e-4	+		7,73837e-1	×	+
8	5,00051e-1	1,06887e-3	+		7,20681e-1		+
9	9,16291e-1	3,34121e-3	+		9,50591e-1	×	+
10	1,25527e+0	7,19463e-3	+		1,36119e+0	+	
11	1,60944e+0	1,11954e-2	+		1,89346e+0	+	
12	2,00026e+0	1,52261e-2	+		2,35504e+0	+	
13	2,52573e+0	2,16939e-2	×	+	2,83103e+0	×	+
14	2,99994e+0	2,70693e-2		+	3,52408e+0		+
15	3,57985e+0	2,67399e-2		+	3,67026e+0		+
16	4,19971e+0	1,83153e-2	×	+	2,91576e+0	×	+
17	4,79997e+0	1,29529e-2	+		2,51957e+0	+	
18	5,50019e+0	7,32085e-3	+		2,20811e+0	+	
19	6,21461e+0	4,21292e-3	×	+	1,33515e+0	+	
20	6,99998e+0	2,71077e-2		+	4,98446e-1	×	+
21	7,99989e+0	4,77779e-2	×	+	1,12247e-1		+
22	8,80488e+0	1,51389e+0	×	+	1,20412e-1		+
23	9,21034e+0	6,69244e+0		+	3,43351e-2	×	+
24	1,07475e+1	4,05383e+0	×	+	7,95946e-4	+	
25	1,24292e+1	3,24865e+0	+		3,25819e-5	+	
26	1,54249e+1	5,67953e-3	+		3,60883e-6	+	

Таблица 3

Результаты решения задачи 1

k	L_k	J_k	θ_{k+1}	N_k	$\delta\mathcal{L}_k$	$ \Omega_k^+ $
Этап 1						
0	13	4				
Этап 2а						
1	3	0	2	-5	4,55e-4	8,84e-1
2	3	0	2	-4	1,39e-3	7,44e-1
3	3	0	2	-3	2,88e-3	6,89e-1
4	2	0	4	-2	5,97e-3	6,79e-1
5	2	0	4	0	1,65e-2	6,76e-1
6	3	0	4	2	5,42e-2	6,41e-1
7	5	0	4	4	1,14e-1	4,53e-1
8	4	0	4	6	3,17e-2	7,97e-2
9	70	1	1	8	1,26e+1	9,63e-3
10	70	1	1	8	1,57e+1	7,97e-3
11	70	1	1	8	1,69e+1	6,81e-3
12	70	1	1	8	1,78e+1	5,56e-3
13	44	1	2	8	1,36e-2	3,85e-2
14	14	1	4	9	7,59e-3	9,68e-3
15	3	0	1	11	2,98e-4	3,48e-4
16	2	0	1	11	8,61e-6	9,91e-6
17	1	0		11	2,44e-7	2,81e-7
Этап 2б						
1	4	0	2	-5	3,07e-4	7,26e-1
2	3	0	2	-4	1,13e-3	6,86e-1
3	2	0	2	-3	2,48e-3	6,37e-1
4	2	0	4	-2	4,78e-3	5,97e-1
5	3	0	4	0	1,19e-2	5,69e-1
6	3	0	4	2	3,89e-2	5,44e-1
7	5	0	4	4	1,06e-1	4,44e-1
8	5	0	4	6	5,51e-2	1,26e-1
9	3	0	1	8	4,26e-3	7,72e-3
10	2	0	1	8	2,91e-4	5,01e-4
11	2	0	1	8	1,89e-5	3,26e-5
12	1	0		8	1,23e-6	2,12e-6
Этап 3						
1	9	2	2	-5	3,07e-4	7,26e-1
2	8	1	2	-4	1,19e-3	7,13e-1
3	2	0	2	-3	2,95e-3	7,10e-1
4	2	0	4	-2	6,42e-3	7,06e-1
5	6	1	4	0	1,74e-2	6,91e-1
6	4	1	4	2	5,59e-2	6,49e-1
7	5	0	4	4	1,14e-1	4,50e-1
8	6	0	4	6	1,79e-2	6,93e-2
9	5	1	4	8	4,36e-3	1,79e-2
10	4	0	4	10	1,66e-3	3,93e-3
11	3	0	1	12	1,66e-4	3,53e-4
12	2	0	1	12	1,64e-5	3,32e-5
13	1	0		12	1,55e-6	3,13e-6

Результаты решения задачи 2

k	L_k	J_k	θ_{k+1}	N_k	$\delta\mathcal{L}_k$	$ \Omega_k^+ $
Этап 1						
0	34	7				
Этап 2а						
1	21	3	2	-5	2,23e-2	1,02e+1
2	7	0	2	-4	5,75e-3	1,25e+0
3	5	0	2	-3	1,11e-3	2,71e-1
4	4	0	4	-2	7,63e-4	1,81e-1
5	4	0	4	0	4,53e-4	9,15e-2
6	3	0	4	2	1,62e-4	2,83e-2
7	3	0	4	4	2,79e-5	5,04e-3
8	2	0	1	6	1,92e-6	5,92e-4
9	2	0	2	6	2,19e-7	1,08e-4
10	1	0	4	7	2,39e-8	4,97e-5
11	1	0	4	9	1,45e-8	4,36e-5
12	1	0	4	11	2,12e-9	1,14e-5
13	1	0	4	13	7,68e-9	3,77e-6
14	1	0	4	15	7,66e-8	1,89e-5
15	1	0	4	17	-7,34e-9	5,85e-6
16	6	1	4	19	3,79e-8	2,54e-6
17	1	0		21	4,35e-9	1,68e-7
Этап 2б						
1	11	3	2	-5	6,69e-2	1,67e+1
2	10	3	2	-4	1,31e-2	1,75e+0
3	6	0	2	-3	1,71e-3	2,53e-1
4	5	0	4	-2	8,73e-4	1,24e-1
5	4	0	4	0	3,97e-4	5,59e-2
6	3	0	4	2	9,99e-5	1,28e-2
7	2	0	4	4	1,10e-5	3,36e-2
8	2	0	4	6	1,71e-6	1,01e-3
9	2	0	1	8	2,22e-7	1,13e-4
10	1	0	2	8	3,87e-8	5,02e-5
11	1	0	4	9	7,51e-9	1,28e-5
12	1	0	4	11	3,48e-10	4,11e-6
13	1	0	4	13	1,47e-9	2,55e-6
14	1	0	4	15	2,88e-9	2,41e-6
15	1	0	4	17	9,19e-9	2,41e-6
16	1	0	4	19	3,44e-8	2,41e-6
17	1	0		21	3,31e-9	9,30e-7
Этап 3						
1	6	0	2	-5	1,39e-3	2,60e+0
2	4	0	2	-4	1,01e-3	7,68e-1
3	4	0	2	-3	4,87e-4	3,12e-1
4	4	0	4	-2	2,38e-4	1,42e-1
5	3	0	4	0	7,64e-5	4,86e-2
6	3	0	4	2	2,36e-5	1,61e-2
7	3	0	4	4	7,63e-6	5,96e-3
8	3	0	4	6	9,87e-6	3,18e-3
9	4	0	4	8	1,01e-5	1,50e-3
10	5	0	1	10	1,16e-7	2,98e-5
11	1	0	2	10	1,25e-8	2,13e-5
12	1	0	4	11	2,14e-8	2,11e-5
13	1	0	4	13	5,07e-8	2,10e-5

Результаты решения задачи 2

k	L_k	J_k	θ_{k+1}	N_k	$\delta\mathcal{L}_k$	$ \Omega_k^+ $
14	1	0	4	15	1,69e-7	2,10e-5
15	2	0	4	17	6,43e-7	2,10e-5
16	4	1	4	19	7,91e-7	9,70e-6
17	2	0		21	5,56e-7	3,44e-6

- значения $J_k = \max(J_{k,1}, J_{k,2}, \dots, J_{k, \min(L, L_k)})$, где k – номер итерации; $J_{k,l}$ – число пересчетов шагового множителя $\alpha_{k,l}$ (см. разд. 1). В случае $J_{k,l} = 0$ использовалась начальная итерация $\alpha_{k,l} = 1$;
- значения θ_{k+1} , определяющие возрастание на итерациях параметра квадратичного штрафа χ_k ;
- показатель степени N_k : $\chi_k = 2^{N_k}$;
- значения $\delta\mathcal{L}_k = \frac{\mathcal{L}_k(\mathbf{f}_k)}{\Gamma(\mathbf{f}_k)} - 1$ и $|\Omega_k^+|$, которые с возрастанием χ_k должны сходиться к нулю.

В задаче 1 на этапе 3 был задействован метод градиентного спуска с масштабированием.

На рисунках далее показаны графики сплайна $F(t)$, полученные на разных этапах решения. Значения гистограмм представлены прямоугольниками красного цвета.

На рис. 1 приводятся результаты расчетов задачи 1. Рис. 1, а демонстрирует решение на всем множестве задания гистограммы. На рис. 1, б–г результаты представлены более детально на фрагментах множества $[t_0, t_{26}]$.

В процессе тестирования методики проводились расчеты с заданием ограничений только на неотрицательность сплайна. На рис. 1, в, г показаны графики полученных сплайнов в двух вариантах расчета. Видно, что функции, рассчитанные с ограничениями на монотонность и без них, различаются. При задании условия монотонности локальный максимум функции переместился из точки $t \approx 11$ на границу "ступеней" (см. рис. 1, г). Пользователю предоставляется возможность выбрать, какой сплайн больше соответствует его представлению о решении. (В табл. 3 приведены данные для задачи со свойством ЛМ.) На рис. 1, б не приведен график решения этапа 3 без свойства ЛМ, так как он визуально не отличим от результата этапа 3 со свойством ЛМ. На рис. 1, в не представлен график этапа 2а без свойства ЛМ, поскольку он совпадает с графиком решения этапа 3 без свойства ЛМ.

На рис. 2 показаны графики сплайна $F(t)$ для задачи 2. Данная задача интересна тем, что в значениях гистограммы присутствует "острый пик" на первом отрезке. На некоторых изображениях рис. 2 графики сплайна этапа 2а не приводятся, так как они не отличимы от графиков сплайна этапа 3. На рис. 2, е показано различие решений для трех постановок задачи этапа 2а, сформулированных для значений I из множества $\{1, 2, 3\}$ (см. [1], подразд. 2.3). (В табл. 4 приведены данные для случая $I = 1$.)

Анализ результатов расчетов двух задач позволяет сделать следующие выводы:

1. Этап 1 эффективно сглаживает функцию начального приближения этапа 0, и сплайны, полученные на этих этапах, хорошо совпадают между собой для "значимых" отрезков гистограммы, т. е. отрезков, определяющих интеграл.
2. Аппроксимирующая функция, рассчитанная на этапе 1, близка к точному решению задачи (этапа 3) для большинства отрезков. Отметим, что вычислительные затраты на расчет одной итерации этапа 1 относительно невелики по сравнению с этапами 2 и 3.
3. Метод хорошо аппроксимирует гистограмму, которая характеризуется большими перепадами значений для соседних отрезков. Значения "ступеней" для двух крайних справа отрезков в задаче 1 отличаются почти на три порядка, тем не менее, свойства монотонности и неотрицательности сплайна обеспечиваются (см. рис. 1, в).

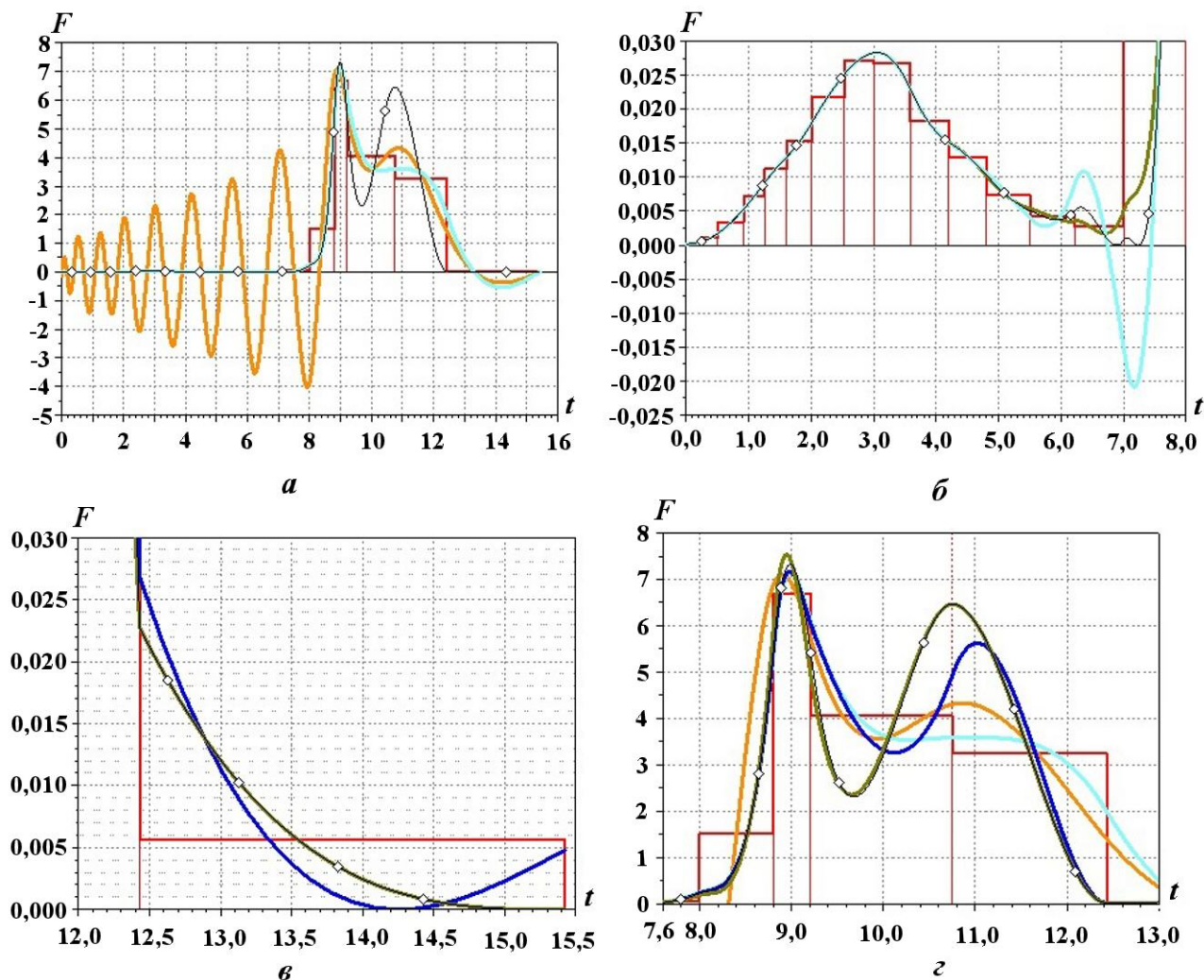


Рис. 1. Графики данных гистограммы и аппроксимирующих сплайнов для задачи 1, рассчитанной в двух постановках: *a* — общее решение; *б* — $0 \leq t \leq 8$; *в* — $12 \leq t \leq 15,5$; *г* — $7,6 \leq t \leq 13$; — этап 0; — этап 1; — этап 2а со свойством ЛМ; — этап 3 со свойством ЛМ; — этап 3 без свойства ЛМ

4. На этапе 2а лучше использовать небольшое число неравенств. Замечено, что с увеличением числа ограничений эффективность метода падает, при этом решение с точки зрения пользователя, как правило, уточняется не существенно. Так, например, при использовании неравенств (1.23) для $I = 3$ метод позволил успешно справиться с расчетом задачи 2. Сравнивая полученную функцию $F(t)$ со сплайном, в расчете которого использовалось значение $I = 1$, можно заметить, что в окрестности точки $t = 11$ решение уточнилось (см. рис. 2, *e*). Но платой за малозначимую поправку был более чем двукратный рост общего числа итераций ($\sum L_k$). С увеличением значения параметра M , отвечающего за число используемых неравенств-ограничений (1.30), также, начиная с некоторого значения, наблюдается резкое удорожание расчетов на этапе 2б. Для рассматриваемых тестов оптимальным оказалось значение $M = 8$. Как оказалось, использовать на этапе 2б дорогостоящие алгоритмы не имеет смысла, так как небольшое уточнение сплайна практически не сказывается на скорости сходимости итераций решения на этапе 3.

Заключение

В работе предложены некоторые алгоритмы аппроксимации ступенчатой диаграммы с помощью кубического сплайна $F(t)$ класса C^1 , обладающего свойствами ЛМ и неотрицательности. Алгоритмы базируются на методе поиска точки условного минимума функции нескольких переменных.

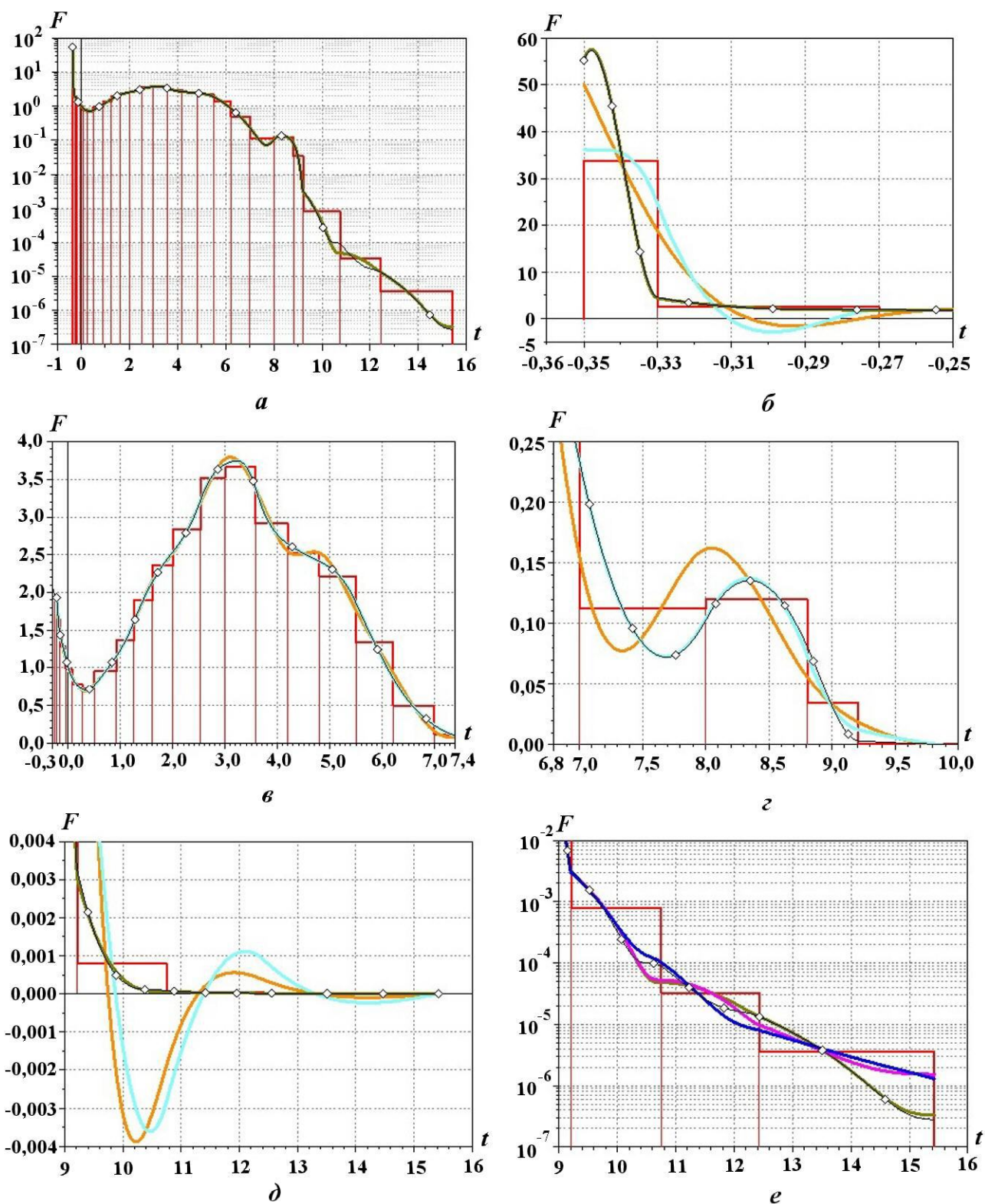


Рис. 2. Графики данных гистограммы и аппроксимирующих сплайнов для задачи 2: *a* — общее решение; *б* — $-0,36 \leq t \leq -0,25$; *в* — $-0,3 \leq t \leq 7,4$; *г* — $6,8 \leq t \leq 10$; *д*, *е* — $9 \leq t \leq 16$; — — этап 0; — — этап 1; — — этап 2а ($I = 1$); — — этап 2а ($I = 2$); — — этап 2а ($I = 3$); —◇— — этап 3

Очень хорошо показала себя ЦФ $\Gamma(\mathbf{f})$ в виде длины кривой сплайна, которая, хотя не определяет свойство его ЛМ, но эффективно влияет на сглаживание искомой аппроксимации. Это свойство подтверждается результатами расчетов задач этапа 1, в которых от сплайна не требовались свойства ЛМ и неотрицательности.

Нелинейные неравенства-ограничения решают проблему неотрицательности и ЛМ сплайна точно. Здесь следует пояснить: авторы использовали итерационный метод, и свойства, которые требуются от сплайна, могут оказаться не очень строгими, что обусловлено задаваемой точностью сведения итераций решения \mathbf{f}_k . Заметим также, что не точно формулируется и сама задача минимизации длины кривой сплайна, так как значения ЦФ $\Gamma(\mathbf{f}_k)$ определяются приближенно с помощью метода численного интегрирования Гаусса.

Линейные ограничения, задающие свойство ЛМ, решают проблему ЛМ сплайна точно на этапе 2а и приближенно — на этапе 2б.

Линейные ограничения настоящей работы (см. разд. 3), задающие свойство неотрицательности на этапе 2а, решают проблему неотрицательности сплайна точно.

Линейные ограничения работы [1], задающие свойство неотрицательности на этапе 2б, решают проблему неотрицательности сплайна приближенно. Ограничения в таком виде хорошо зарекомендовали себя на практике. Задачи этапа 2б, как правило, решаются быстрее задач этапа 2а. Но при данных ограничениях сплайн в общем случае может принимать отрицательные значения. В пределах отрезка $[t_{n-1}, t_n]$ размер участка, на котором сплайн может быть отрицателен, не превышает значения Δ_n/M , где M — параметр метода, отвечающий за число используемых неравенств-ограничений (1.30). В узловых точках сетки $(t_n)_{n=0, \overline{N}}$ сплайн всегда неотрицателен (с заданной точностью). Увеличивая значение параметра M , пользователь может нивелировать дефект решения. При необходимости функцию на участках отрицательности можно легко скорректировать простейшими алгоритмами.

Отметим достоинства постановки задачи с линейными ограничениями.

Во-первых, этап 2а дает выигрыш по сравнению с этапом 3 в скорости расчета одной итерации по Ньютону, так как все производные для функций неравенств-ограничений рассчитываются на этапе РНД. При этом матрицы вторых частных производных для модифицированной функции Лагранжа $\mathcal{L}_k(\mathbf{f})$ и ЦФ $\Gamma(\mathbf{f})$ совпадают, т. е. матрица $\nabla^2 \mathcal{L}_k(\mathbf{f})$ обладает свойством положительной главной диагонали. Для "плохой" точки \mathbf{f} , в которой вектор Ньютона $\delta \mathbf{f}$ не задает для ЦФ направление спуска, такой вид матрицы Гессе позволяет задействовать менее эффективный, но надежный метод градиентного спуска с масштабированием.

Во-вторых, в ходе тестирования была отмечена надежность алгоритма с линейными ограничениями, тогда как метод с нелинейными ограничениями мог отказать. Хотя надо заметить, что это происходило крайне редко. При этом расчеты с немного измененными параметрами оказывались успешными. Для повышения надежности расчета с нелинейными ограничениями пришлось пожертвовать эффективностью метода и ввести в практику вспомогательный этап 2б. Как уже отмечалось, на этапе 2б не требуется задания большого числа ограничений, что позволяет методу быстро "выходить" на решение.

Достоинство постановки задачи с нелинейными ограничениями заключается в том, что она позволяет наиболее точно решить математическую задачу нахождения минимального значения длины кривой сплайна с заданными свойствами. Однако практика расчетов показала, что аппроксимирующие функции этапов 3 и 2а почти не различаются. Поэтому можно предположить, что для большинства приложений вполне подойдет более "дешевое" (в общем случае) и более надежное решение этапа 2а с использованием небольшого числа неравенств-ограничений.

Отметим еще одно свойство представленной методики. Значения параметров, отвечающих за относительную точность сведения итераций решения, нельзя задавать слишком маленькими, т. е. нельзя требовать высокой точности решения. Дело в том, что ЦФ может слабо зависеть от длины кривой сплайна на каком-нибудь отрезке данных. В этом случае задача, которая фактически уже решена, не всегда может выйти из итерационного цикла: итерации сплайна с ростом значения k не могут сойтись с заданной точностью, при этом значение ЦФ и вектор ее градиента практически не

меняются из-за ошибок округления на ЭВМ. Если такой процесс сопровождается ростом значения штрафа, то он неминуемо приведет к вычислительной катастрофе.

Следует учитывать, что успешность решения задачи описанным методом зачастую определяется постановкой, которая является отдельной проблемой, иногда достаточно сложной. Прежде всего надо определиться с выбором независимой переменной: желательно, чтобы сетка по ней была близка к равномерной. Затем следует по возможности преобразовать переменную гистограммы так, чтобы избежать больших перепадов значений для соседних ступеней. Формулировка задачи также включает в себя назначение областей ЛМ для аппроксимирующей функции. И здесь может возникнуть сложность в случае, когда алгоритм является частью нестационарной задачи, а входные данные для него с течением времени сильно меняются. Для подобных задач, к методу решения которых предъявляется требование повышенной надежности, следует учитывать, что безаварийность расчета возрастает с уменьшением числа "монотонных" отрезков сплайна, а также при использовании только этапа 2а при задании $I = 1$.

Итак, можно утверждать, что алгоритм работоспособен. Он не требует больших вычислительных затрат. Однако метод решения необходимо настроить на конкретный класс задач (преобразовать независимую переменную и переменную гистограммы, подобрать значения параметров, определить ГУ и т. п.).

Список литературы

1. Мжачих С. В., Колобянина Н. В., Лапшина Ю. Н. Аппроксимация данных гистограммы методом условной минимизации длины кубического сплайна класса $C1$, обладающего свойствами неотрицательности и локальной монотонности. Часть 1 // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2023. Вып. 2. С. 30–44.
Mzhachikh S. V., Kolobyenin N. V., Lapshina Yu. N. Approximatsiya dannykh gistogrammy metodom uslovnoy minimizatsii dliny kubicheskogo splayna klassa $C1$, obladayushchego svoystvami neotritsatelnosti i lokalnoy monotonnosti. Chast 1 // Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov. 2023. Vyp. 2. S. 30–44.

Статья поступила в редакцию 07.07.22.

УДК 519.6

СРАВНЕНИЕ WPH И DISPH МЕТОДОВ ЧАСТИЦ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ УДАРНЫХ ВОЛН

Ф. А. Сапожников, В. С. Рыкованов
(ФГУП "РФЯЦ-ВНИИТФ им. академ. Е. И. Забабахина",
г. Снежинск Челябинской области)

Изложены теоретические основы метода гидродинамики сглаженных частиц (SPH). Рассматриваются две его разновидности — WPH и DISPH. Приводятся тестовые расчеты для определения применимости методов при моделировании ударных волн. Рассматриваются следующие тесты: задача Сода, задача Ноха и задача Вудварда—Колеллы в одномерной постановке, а также седовский взрыв в трехмерной постановке. При сравнении WPH и DISPH учитываются ошибка в норме L_1 и астрономическое время, затраченное на проведение расчета. Для трехмерных тестов проводится оценка асимметрии решения. Во всех тестах, рассчитанных по методу WPH, получается меньшая ошибка и счет выполняется от 1,5 до 2 раз быстрее, чем по DISPH. Делается вывод о целесообразности применения метода WPH при моделировании задач с ударными волнами.

Ключевые слова: гидродинамика сглаженных частиц, SPH, программа "Молох", ударные волны, задача Сода, задача Ноха, задача Вудварда—Колеллы, седовский взрыв.

Введение

Метод гидродинамики сглаженных частиц SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics), или просто *метод сглаженных частиц*, в настоящее время широко известен и в силу своей лагранжевости и бессеточной дискретизации наиболее часто применяется для расчетов движений сплошных сред с большими деформациями. На протяжении 45 лет своего развития [1, 2] для него было предложено большое количество различных формулировок, приспособленных для определенных задач.

В качестве наиболее удачных подходов для расчетов ударных волн и неустойчивостей можно выделить подходы, реализованные в методах DISPH (Density-Independent SPH) [3] и WPH (Weighted SPH) [4], совместное исследование которых проведено в работе [5]. В настоящей работе проводится сравнение этих методов между собой на задачах с ударными волнами.

Далее используются общепринятые обозначения физических величин, описывающих состояние определенных частей жидкости или газа: ρ — плотность; V — объем; $m = \rho V$ — масса; \mathbf{v} — скорость; $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ — импульс; E и U — полная и внутренняя энергии, $e = E/m$ и $u = U/m$ — их удельные аналоги; P — давление; c — скорость звука; \mathbf{r} — вектор, состоящий из d компонент — декартовых координат, любые индексы которых будут обозначаться как α или β^1 ; t — время.

В методе SPH используются следующие обозначения: i, j — уникальные номера SPH-частиц; $W(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|, h_i) \equiv W(r_{ij}, h_i) \equiv W_{ij}(h_i)$ — так называемая сглаживающая функция ядра, зависящая от расстояния r_{ij} между парой частиц i, j и радиуса h_i влияния ядра i -й частицы.

Система уравнений идеальной гидродинамики, состоящая из трех уравнений (законов сохранения массы, импульса и энергии), в SPH-дискретизации представима в виде

¹При этом $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \equiv \sum_{\alpha=1}^d a_{\alpha} b_{\alpha} \equiv a_{\alpha} b_{\alpha}$ для любых векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} .

$$\begin{aligned}\rho_i &= \frac{m_i}{V_i} \equiv \frac{m_i}{X_i} \sum_j X_j W_{ij}(h_i); \\ \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} &= -V_i \sum_j V_j \left(\frac{\Phi_j}{\Phi_i} P_j \nabla_i W_{ij}(h_i) + \frac{\Phi_i}{\Phi_j} P_i \nabla_i W_{ij}(h_j) \right); \\ \frac{dU_i}{dt} &= V_i \sum_j V_j \frac{\Phi_i}{\Phi_j} P_i (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) \nabla_i W_{ij}(h_i).\end{aligned}$$

Полная энергия запишется в виде

$$\frac{dE_i}{dt} = \frac{dU_i}{dt} + \mathbf{v}_i \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = V_i \sum_j V_j \left(-\frac{\Phi_j}{\Phi_i} P_j \mathbf{v}_i \nabla_i W_{ij}(h_i) - \frac{\Phi_i}{\Phi_j} P_i \mathbf{v}_j \nabla_i W_{ij}(h_j) \right).$$

В силу антисимметрии $\nabla_i W_{ij}(h) = -\nabla_j W_{ij}(h)$ уравнения для $\frac{d\mathbf{p}}{dt}$ и $\frac{dE}{dt}$ являются консервативными². В качестве Φ может быть выбрана любая функция от физических величин, связанных с частицами. При выборе $\Phi = 1/\rho$ вид уравнений оказывается согласован с видом, полученным из лагранжиана системы [6]. В качестве X обычно выбирают любую простую экстенсивную величину³, характеризующую частицы (например, m , U , 1 , V , ...).

Для повышения порядка точности дифференцирования в SPH можно использовать следующие представления, получаемые с помощью разложения в ряд Тейлора:

$$\begin{aligned}f_j &= f_i + \nabla_\alpha f_i (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)_\alpha + \dots; \\ \sum_j f_j V_j G_{i,\beta} W_{ij}(h) &= f_i \sum_j V_j G_{i,\beta} W_{ij}(h) + \nabla_\alpha f_i \sum_j V_j (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)_\alpha G_{i,\beta} W_{ij}(h) + \dots,\end{aligned}$$

где

$$\mathbf{G}_i \equiv \begin{cases} \nabla_i & \text{для подходов CSPM [7], MSPH [8];} \\ \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i & \text{для SSPH [9], IAD}_0 \text{ [10], KGF-SPH [11];} \\ \frac{1}{V_j} (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) & \text{для MLS [12].} \end{cases}$$

Отсюда могут быть получены выражения для ∇f_i :

$$\nabla_\alpha f_i \approx \left(\sum_j (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)_\alpha V_j G_{i,\beta} W_{ij}(h) \right)^{-1} \sum_j (f_j - f_i) V_j G_{i,\beta} W_{ij}(h).$$

Для добавления в уравнения вязкости, необходимой для правильного описания ударных волн, существуют два пути: введение искусственной вязкости или использование решения задачи о распаде разрыва (метод Годунова).

В обоих случаях взаимодействующую пару частиц i, j можно рассмотреть как две среды, разделенные общей границей (в простейшем случае она проходит через $\mathbf{r}^* = (\mathbf{r}_i + \mathbf{r}_j)/2$ перпендикулярно $\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i$). Вязкость необходима только для сближающихся частиц, $(\mathbf{v}_i^* - \mathbf{v}_j^*)(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) < 0$, где \mathbf{v}^* можно получать способом с любым порядком восстановления скоростей из центров частиц на грани:

²В силу связи $\rho_i = \frac{m_i}{X_i} \sum_j X_j W_{ij}(h_i)$ и $\frac{d\rho_i}{dt} = \rho_i \sum_j \frac{\Phi_j}{\Phi_i} (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) V_j \nabla_i W_{ij}(h_i)$, где $\Phi = X/V$, рассматриваемая система уравнений является полностью консервативной по Самарскому, но используемая численная схема вида *предиктор—корректор* либо нарушает соответствие $\frac{dU}{dt} = -P \frac{dV}{dt}$ при сохранении E , либо выполняет первое ценой потери сохранения E .

³Экстенсивная величина изменяется пропорционально изменению количества одинаковых частей вещества (например, масса двух частей вещества равна удвоенной массе одной части такого же вещества), а интенсивная величина остается неизменной. Простая экстенсивная величина не может представлять собой произведение экстенсивной и интенсивной величин. Физическим смыслом значения 1 является единичное количество частиц, "находящееся в ней самой" (т. е. сама частица в количестве 1, так как в процессе моделирования она считается сохраняющей свою целостность и не объединяющейся с другими частицами).

$v_\alpha^* = v_\alpha + \nabla_\beta v_\alpha(\mathbf{r}^* - \mathbf{r})_\beta + \dots$. Дополнительно к этому допустимо использование ограничителей наклона (например, ограничитель ван-Лири).

В методе Годунова необходим решатель задачи о распаде произвольного разрыва. В качестве такового наиболее часто используется приближенный решатель семейства HLL (HLLC, HLLD) [13]. В случае существования для простых уравнений состояния (УРСов) используются точные решения задачи о распаде разрыва. Для нахождения исходных величин (ρ , P , \mathbf{v} , u , c) слева и справа от разрыва с координатой \mathbf{r}^* используется такой же способ восстановления из центров частиц на грань разрыва, что и для определения скоростей сближения в вязкости.

Физическая вязкость рассматривается в квадратично-линейном виде [14] с использованием подстройки коэффициента в соответствии с [15].

В итоге особенности выбранных схем можно свести в таблицу.

Особенности сравниваемых видов метода SPH

Метод	X	Вязкость	Повышение порядка точности
DISPH	U	Искусственная [15]	Нет
WPH	1	Метод Годунова, HLLC	MLS

Результаты расчетов

В программном комплексе "Молох" [16] реализован трехмерный (3D) метод частиц, т. е. используется 3D (сферическое) ядро, а именно Wendland C4 [17]. Поэтому для счета задач в одномерной (1D) и двумерной (2D) постановках необходимо использовать 3D образцы, правда, можно уменьшить их линейные размеры по "второстепенным" направлениям. Везде, где не определено иное, используются периодические граничные условия.

Исследование влияния способа расстановки частиц на точность описания среды и нахождение оптимального способа приведены в работе [18], где показано, что частицы, расставленные в узлах гранецентрированной кубической (ГЦК) решетки, дают наименьшую ошибку. Поэтому в тестах начальная расстановка частиц происходит с использованием шаблона ГЦК решетки.

Задача о распаде разрыва (задача Сода) в 1D постановке (задача 1). Этот тест моделирует распад разрыва с образованием ударной волны. В качестве эталона здесь используется решение, приведенное в [19]. Одномерная равномерная сетка при получении эталонного решения содержала 20 000 ячеек.

В левой половине образца давление равно 1 Па, плотность — 1 кг/м³. В правой половине образца давление равно 10⁻¹ Па, плотность — 0,125 кг/м³. УРС — для идеального газа с $\gamma = 1,4$. Граничные условия: по направлению x — жесткие стенки, по y и z — периодические. Ядро содержит 180 соседей. Задача считалась до момента времени 0,25 с.

Для определения порядка сходимости было проведено пять расчетов:

- 1) количество частиц $128 \times 32 \times 32$; размер образца $1 \text{ м} \times 1/4 \text{ м} \times 1/4 \text{ м}$;
- 2) количество частиц $256 \times 32 \times 32$; размер образца $1 \text{ м} \times 1/8 \text{ м} \times 1/8 \text{ м}$;
- 3) количество частиц $512 \times 32 \times 32$; размер образца $1 \text{ м} \times 1/16 \text{ м} \times 1/16 \text{ м}$;
- 4) количество частиц $1024 \times 32 \times 32$; размер образца $1 \text{ м} \times 1/32 \text{ м} \times 1/32 \text{ м}$;
- 5) количество частиц $2048 \times 32 \times 32$; размер образца $1 \text{ м} \times 1/64 \text{ м} \times 1/64 \text{ м}$.

На рис. 1 показано начальное расположение частиц. Частицы в образце имеют равную массу, а так как плотность образца слева в 8 раз больше, то и концентрация частиц слева в 8 раз больше (в 2 раза по каждому направлению). Изображения сфер взаимодействия частиц соответствуют наименьшему и наибольшему среди всех частиц радиусам взаимодействия, в обеих сферах находятся ≈ 180 "взвешенных соседей" — область влияния частицы.

На рис. 2—5 приведены профили плотности, давления, x -составляющей скорости, удельной энергии на момент времени $t = 0,25 \text{ с}$, полученные по WPH-методу при увеличивающемся количестве частиц, а на рис. 6—9 — то же самое по DISPH-методу. Оба метода показали хорошие результаты. Наблюдается сходимость к эталонному решению.

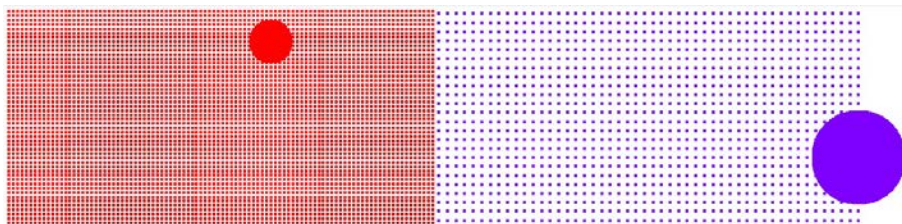


Рис. 1. Задача 1. Начальная расстановка частиц с раскраской по плотности

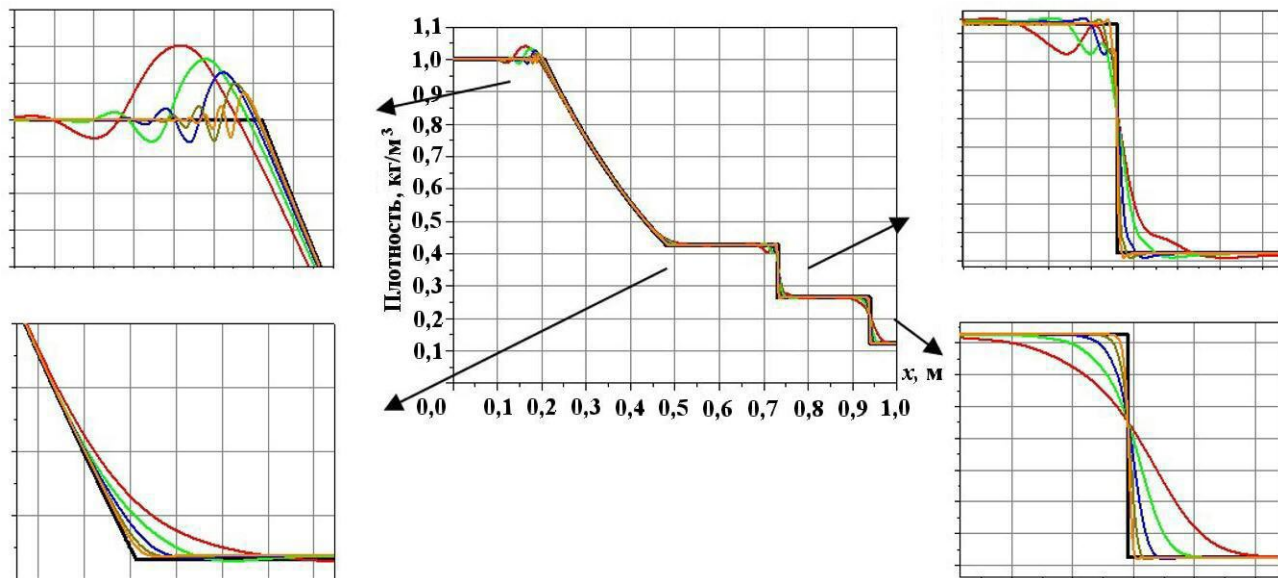


Рис. 2. Задача 1. Профили плотности для WPH, $t = 0,25$ с: — эталон; — 128 частиц; — 256 частиц; — 512 частиц; — 1024 частицы; — 2048 частиц

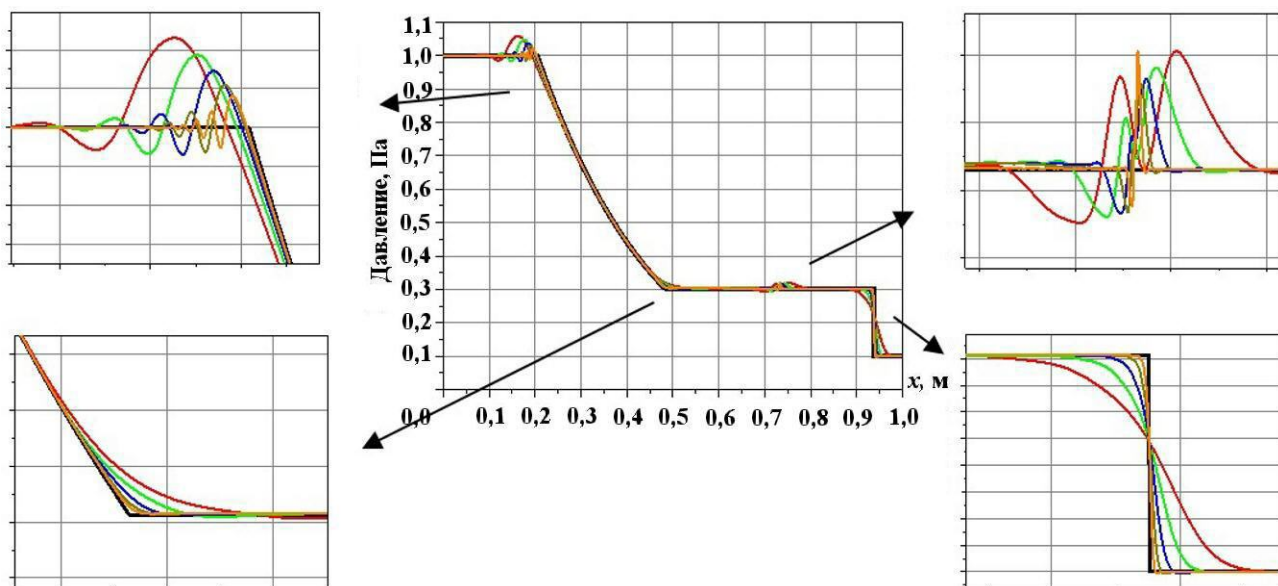


Рис. 3. Задача 1. Профили давления для WPH, $t = 0,25$ с: — эталон; — 128 частиц; — 256 частиц; — 512 частиц; — 1024 частицы; — 2048 частиц

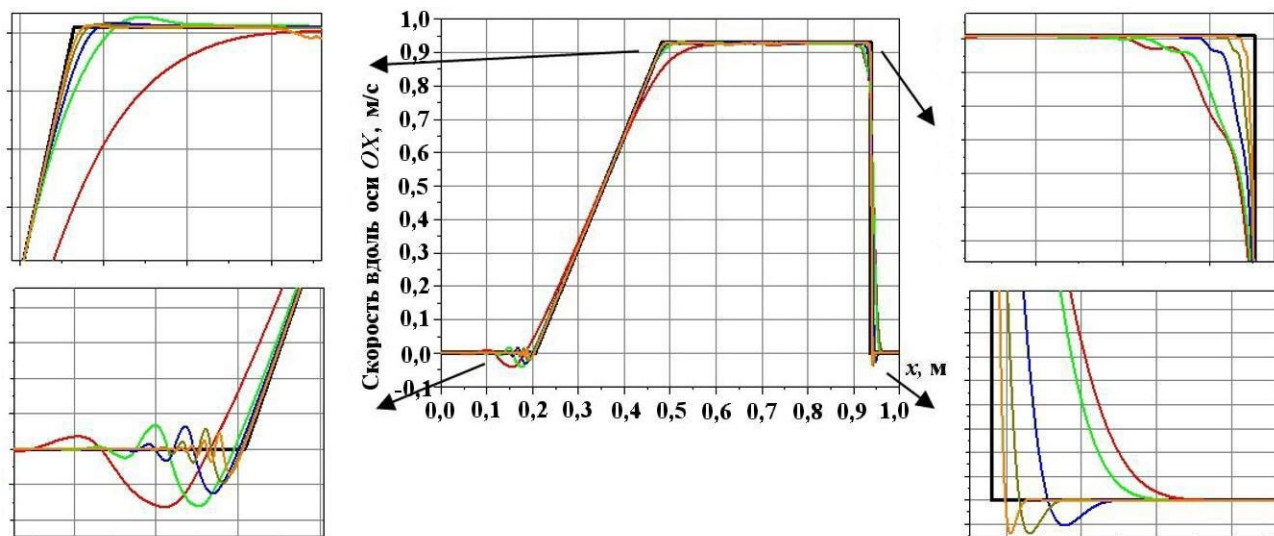


Рис. 4. Задача 1. Профили x -составляющей скорости для WPH, $t = 0,25$ с: — эталон; — 128 частиц; — 256 частиц; — 512 частиц; — 1024 частицы; — 2048 частиц

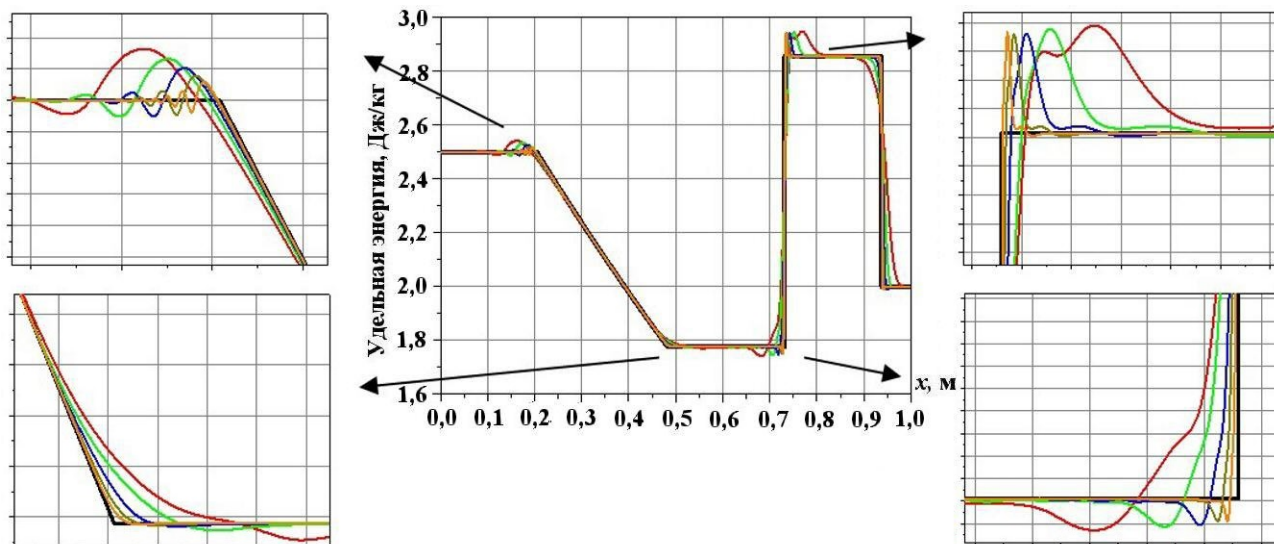


Рис. 5. Задача 1. Профили удельной энергии для WPH, $t = 0,25$ с: — эталон; — 128 частиц; — 256 частиц; — 512 частиц; — 1024 частицы; — 2048 частиц

На рис. 10, 11 показаны профили плотности, давления, x -составляющей скорости, удельной энергии на момент времени $t = 0,25$ с для двух методов при наибольшем количестве частиц. По обоим методам получены близкие решения, однако есть и различия:

- хотя для обоих методов в плотности при $x = 0,2$ м присутствуют нефизичные осцилляции, для DISPН наблюдается нефизичное возмущение при $x = 0,5$ м, тогда как для WPH — гладкое решение;
- для давления повторяется аналогичная ситуация, однако при $x = 0,73$ м (на границе двух "веществ") при использовании метода WPH наблюдается нефизичный скачок, который в 4 раза больше, чем при DISPН;
- для скорости, полученной по DISPН, при $x = 0,5$ м наблюдается сильный шум, а по WPH — гладкое решение;
- для удельной энергии повторяется ситуация, как для скорости.

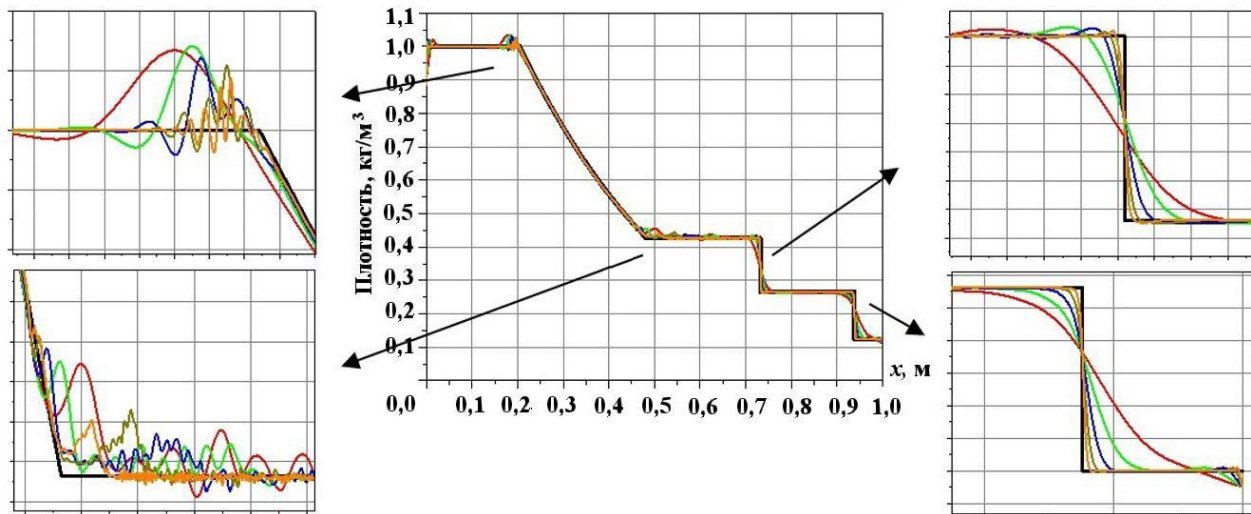


Рис. 6. Задача 1. Профили плотности для DISPH, $t = 0,25$ с: — эталон; — 128 частиц; — 256 частиц; — 512 частиц; — 1024 частицы; — 2048 частиц

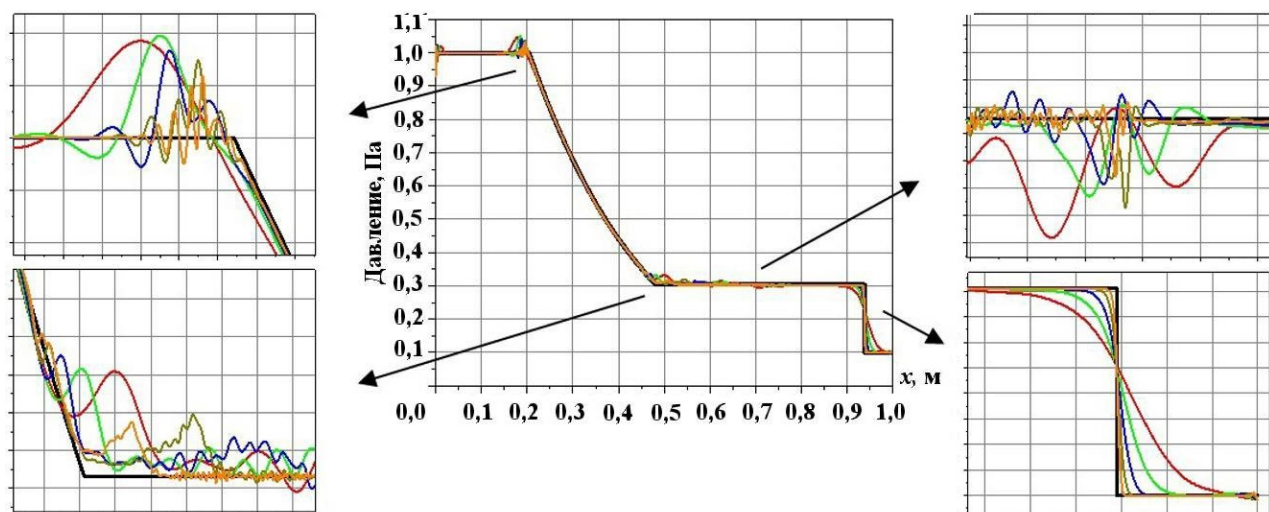


Рис. 7. Задача 1. Профили давления для DISPH, $t = 0,25$ с: — эталон; — 128 частиц; — 256 частиц; — 512 частиц; — 1024 частицы; — 2048 частиц

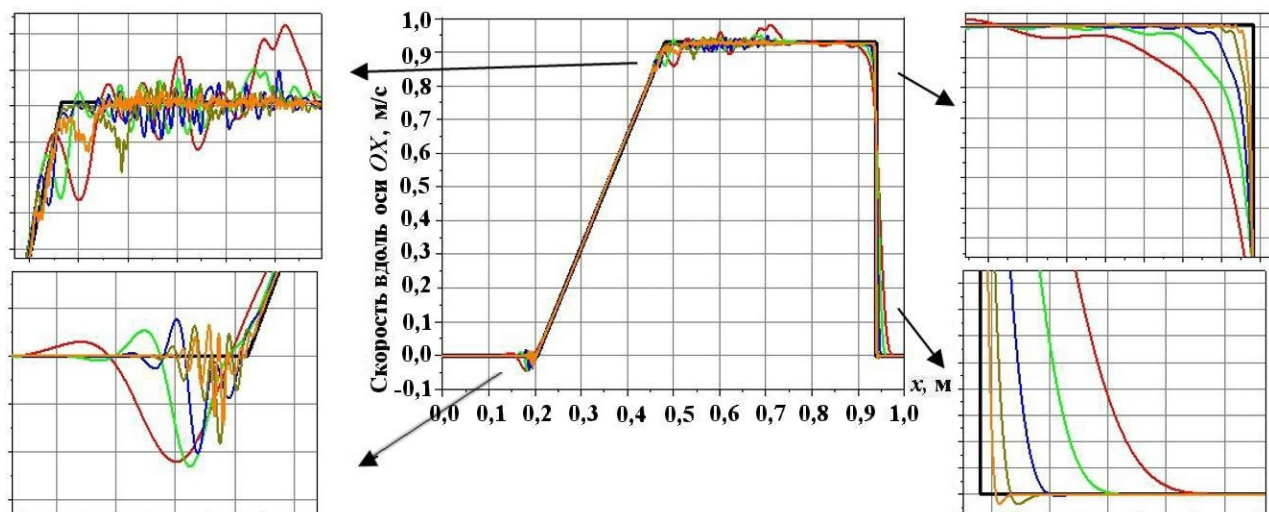


Рис. 8. Задача 1. Профили x -составляющей скорости для DISPH, $t = 0,25$ с: — эталон; — 128 частиц; — 256 частиц; — 512 частиц; — 1024 частицы; — 2048 частиц

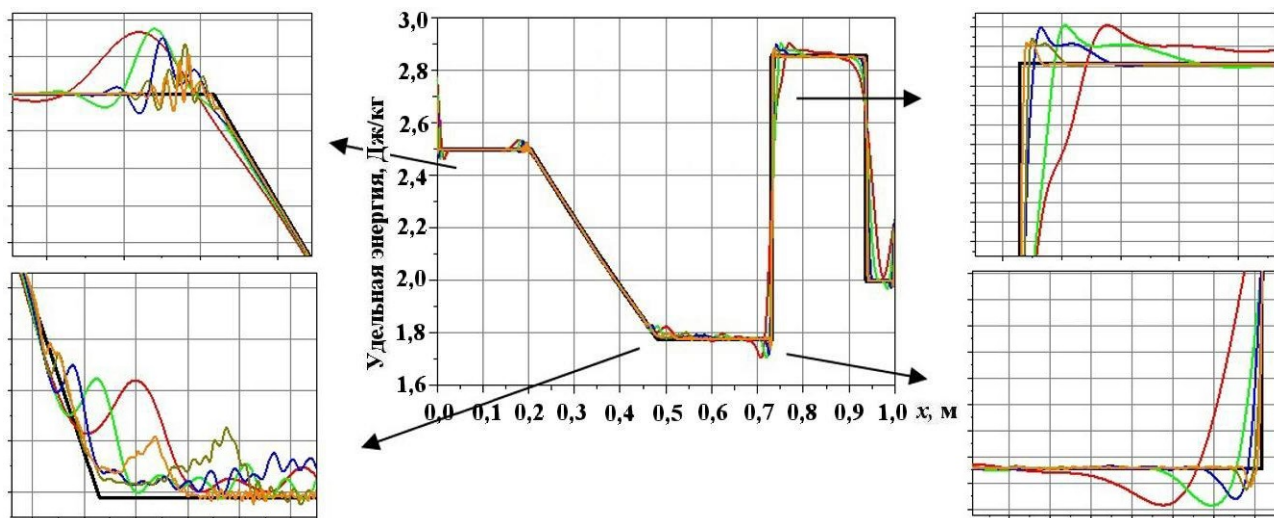


Рис. 9. Задача 1. Профили удельной энергии для DISPH, $t = 0,25$ с: — эталон; — 128 частиц; — 256 частиц; — 512 частиц; — 1024 частиц; — 2048 частиц

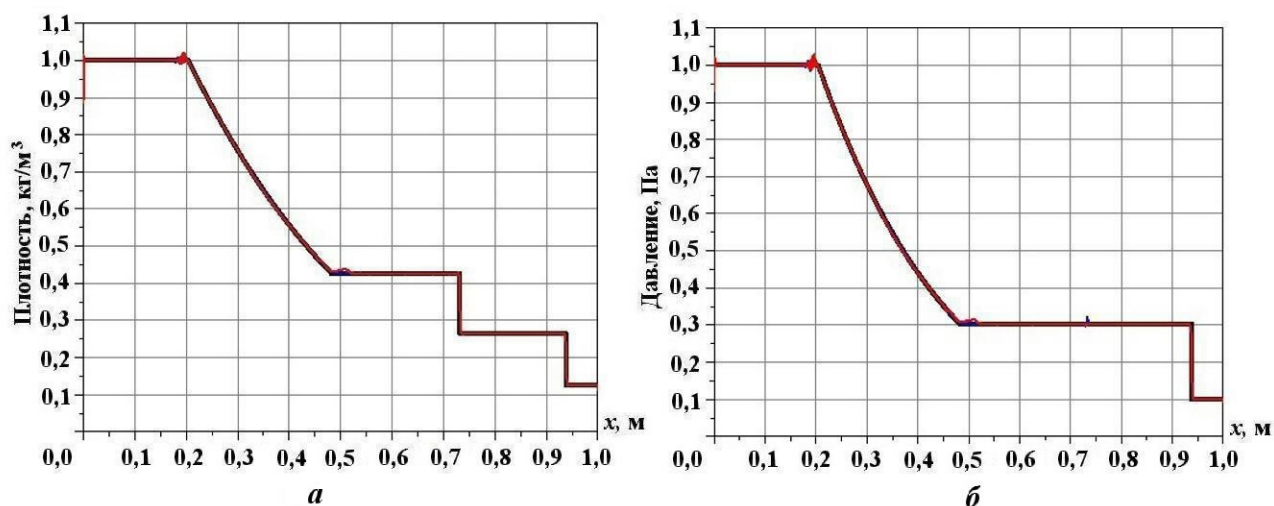


Рис. 10. Задача 1. Профили плотности (а) и давления (б) при числе частиц 2048, $t = 0,25$ с: — эталон; — WPH; — DISPH

Сохранение исходной ГЦК решетки не влияет на гладкость решения. При использовании DISPH-метода решетка разрушается там, где при WPH она еще сохранена. На рис. 12 приведены частицы, имеющие координату $0,44 \text{ м} < x < 0,76 \text{ м}$. По DISPH-методу получается шум в скорости как на идеальной решетке, так и на разрушенной.

Оценим ошибки в нормах L_1 и L_2 и найдем порядок сходимости. На рис. 13 показаны зависимости ошибок плотности и давления от числа частиц в x -направлении для обоих методов⁴.

Повышенную точность метода WPH можно проиллюстрировать на примере нормы L_1 : как для плотности, так и давления в подробных расчетах с WPH получается меньшая ошибка и более высокий порядок сходимости 0,8, чем с DISPH — 0,55 (рис. 14). В данном тесте решение WPH было менее "шумным" и более точным для высоких разрешений. По WPH-методу посчитано в 1,5 раза быстрее, чем по DISPH, при этом при использовании WPH сделано 3 804 шага, а при DISPH — 4 797.

⁴На рис. 13 и далее на рисунках n/n_0 — отношение текущего числа частиц в направлении вдоль x к их наименьшему числу ($n_0 = 128$) в этом направлении.

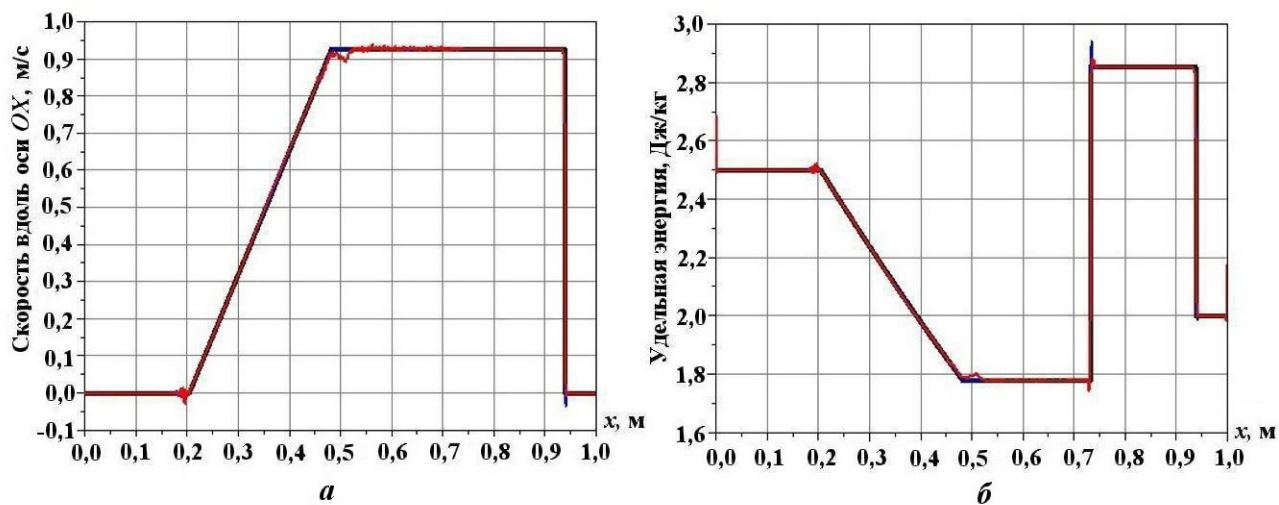


Рис. 11. Задача 1. Профили x -составляющей скорости (а) и удельной энергии (б) при числе частиц 2048, $t = 0,25$ с: — эталон; — WPH; — DISPH

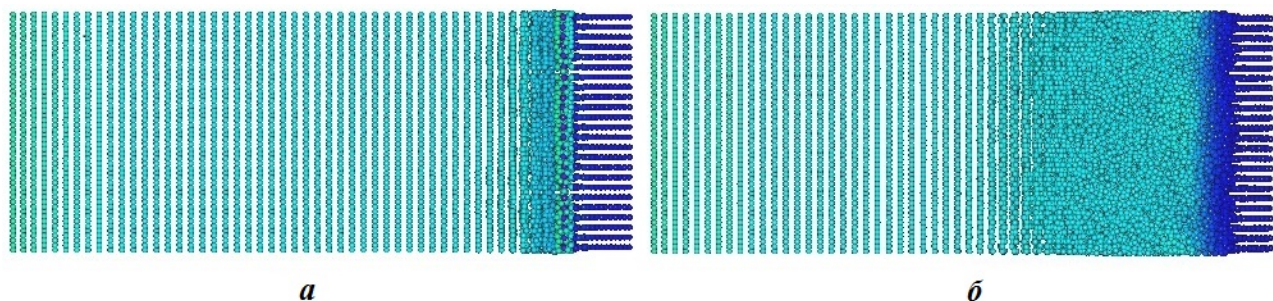


Рис. 12. Задача 1. Частицы, окрашенные по плотности, для $0,44\text{ м} < x < 0,76\text{ м}$, $t = 0,25$ с: а — WPH; б — DISPH

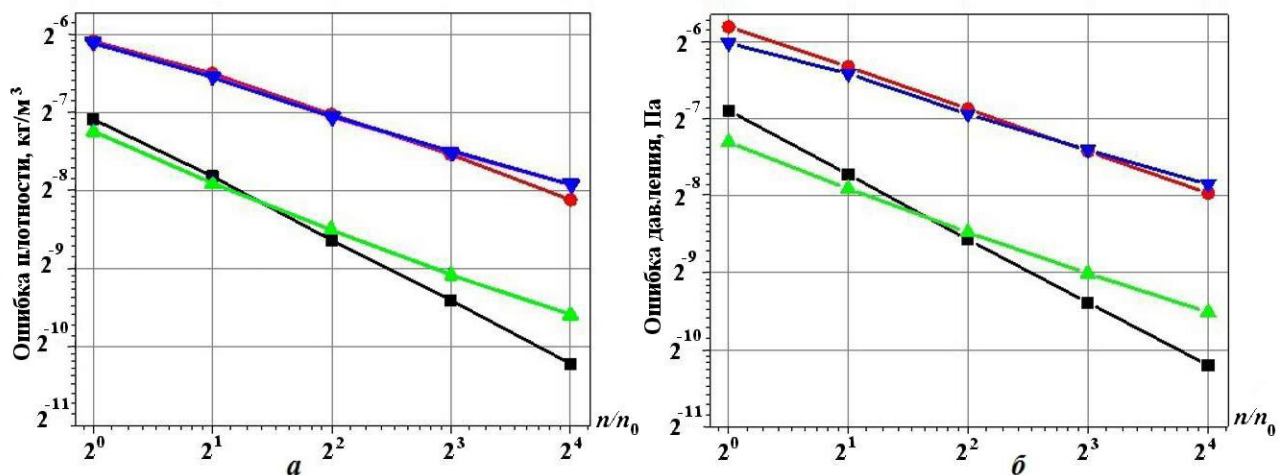


Рис. 13. Задача 1. Зависимости ошибок в нормах L_1 и L_2 от числа частиц в x -направлении для плотности (а) и давления (б): — WPH, в норме L_1 ; — WPH, в норме L_2 ; — DISPH, в норме L_1 ; — DISPH, в норме L_2

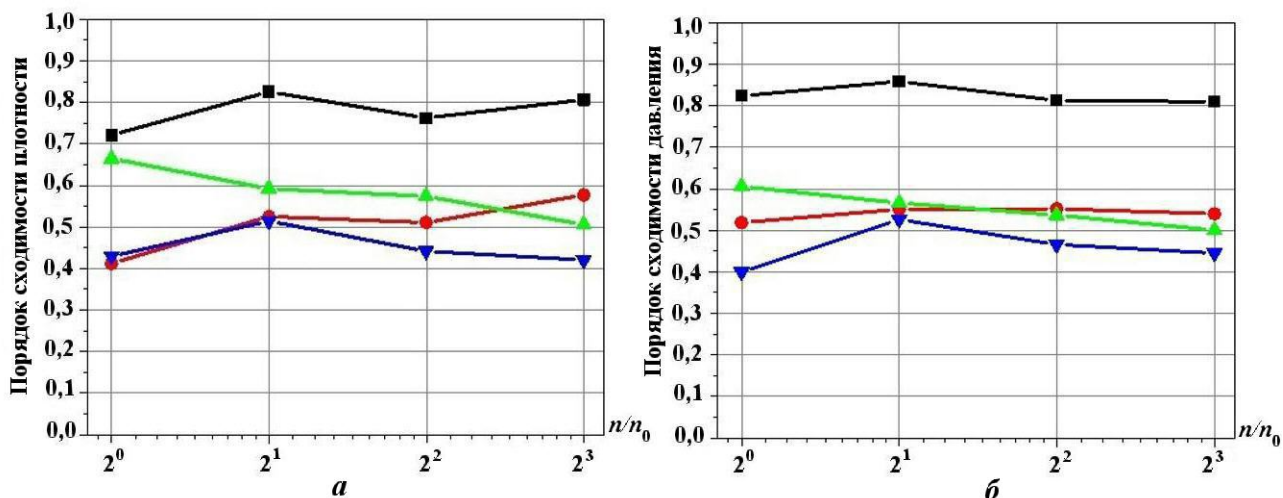


Рис. 14. Задача 1. Зависимости порядка сходимости в нормах L_1 и L_2 от числа частиц в x -направлении для плотности (а) и давления (б): \blacksquare — WPH, в норме L_1 ; \bullet — WPH, в норме L_2 ; \blacktriangle — DISPH, в норме L_1 ; \blacktriangledown — DISPH, в норме L_2

Задача Ноха в 1D постановке (задача 2). Этот тест моделирует столкновение двух слоев газа, движущихся с одинаковой скоростью навстречу друг другу. В качестве эталона используется решение, приведенное в [20]. Одномерная равномерная сетка, на которой получено аналитическое решение, содержала 20 000 ячеек.

Скорость в левой половине образца $v_x = 1$ м/с, в правой половине образца $v_x = -1$ м/с; давление равно 10^{-6} Па; плотность — 1 кг/м³. УРС — для идеального газа с $\gamma = 5/3$. Граничные условия: по направлению x — свободная поверхность, по y и z — периодические. Ядро содержит 180 соседей. Время счета — 0,6 с.

Для определения порядка сходимости было проведено пять расчетов:

- 1) количество частиц $128 \times 32 \times 32$; размер образца $3 \text{ м} \times 1/4 \text{ м} \times 1/4 \text{ м}$;
- 2) количество частиц $256 \times 32 \times 32$; размер образца $3 \text{ м} \times 1/8 \text{ м} \times 1/8 \text{ м}$;
- 3) количество частиц $512 \times 32 \times 32$; размер образца $3 \text{ м} \times 1/16 \text{ м} \times 1/16 \text{ м}$;
- 4) количество частиц $1024 \times 32 \times 32$; размер образца $3 \text{ м} \times 1/32 \text{ м} \times 1/32 \text{ м}$;
- 5) количество частиц $2048 \times 32 \times 32$; размер образца $3 \text{ м} \times 1/64 \text{ м} \times 1/64 \text{ м}$.

На рис. 15 изображено начальное расположение частиц. Они имеют равные массы, отличается только x -составляющая скорости.

На рис. 16–19 приведены профили плотности, давления, x -составляющей скорости, удельной энергии на момент времени $t = 0,6$ с, полученные по WPH-методу при увеличивающемся количестве частиц, а на рис. 20–23 — то же самое по DISPH-методу. Оба метода показали хороший результат. Наблюдается сходимость к эталонному решению.

На рис. 24 приведены профили плотности, давления, x -составляющей скорости, удельной энергии на момент времени $t = 0,6$ с для двух методов при наибольшем количестве частиц. Оба метода

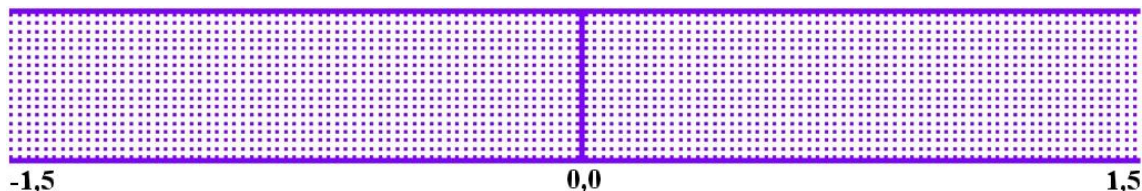


Рис. 15. Задача 2. Начальная расстановка частиц

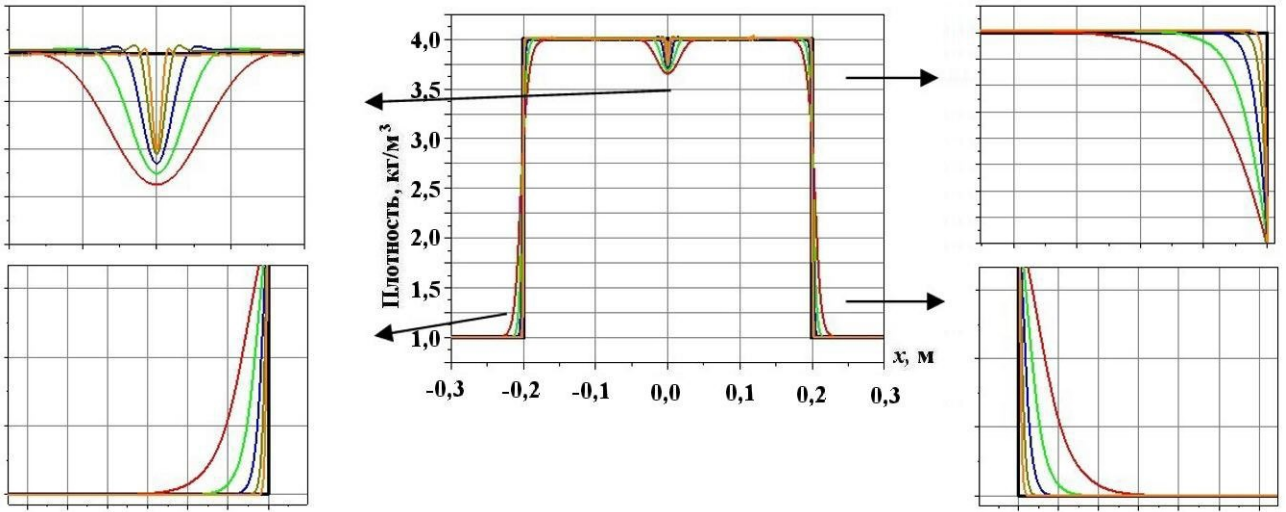


Рис. 16. Задача 2. Профили плотности для WPH, $t = 0,6$ с: — эталон; — 128 частиц; — 256 частиц; — 512 частиц; — 1024 частицы; — 2048 частиц

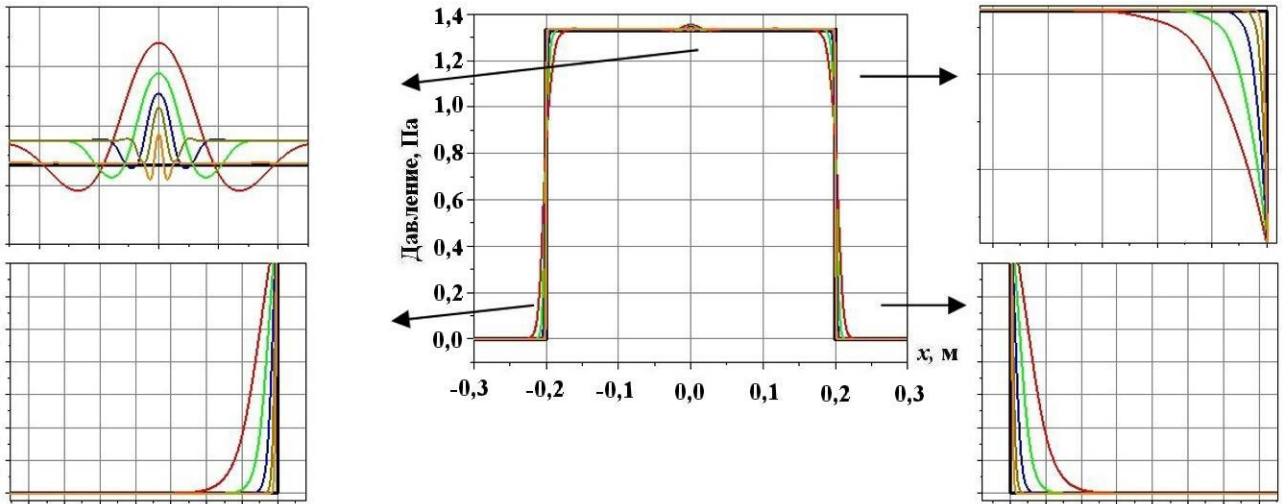


Рис. 17. Задача 2. Профили давления для WPH, $t = 0,6$ с: — эталон; — 128 частиц; — 256 частиц; — 512 частиц; — 1024 частицы; — 2048 частиц

показали близкие решения, однако есть и различия. Энтропийный след на границе двух газов ($x = 0$), которого вообще не должно быть, для WPH-метода по амплитуде в 2,5 раза меньше, чем для DISPH, и с увеличением количества частиц по направлению уменьшился в 1,5 раза, тогда как для DISPH-метода остался практически таким же (только стал уже). Для давления и удельной энергии повторяется ситуация, как для плотности.

Из рис. 25, *a* можно заметить, что давление, полученное по WPH-методу, сходится не к аналитическому решению (1,33335 Па), а немного более завышенному значению (1,33738 Па), но для 2048 частиц вдоль x решение становится близким к точному. Это можно объяснить тем, что после прохождения ударной волны по образцу частицы, изначально расставленные в узлах ГЦК решетки, начали уходить со своих позиций, создавая новую нерегулярную структуру, которая сначала была несрелаксированной, а по прошествии совсем небольшого времени стала равновесной (срелаксированной). Такое поведение решения еще раз подтверждает важность начального расположения частиц.

Оценим ошибки в нормах L_1 и L_2 и найдем порядок сходимости. На рис. 26 приведены зависимости ошибок плотности и давления от числа частиц в x -направлении для обоих методов.

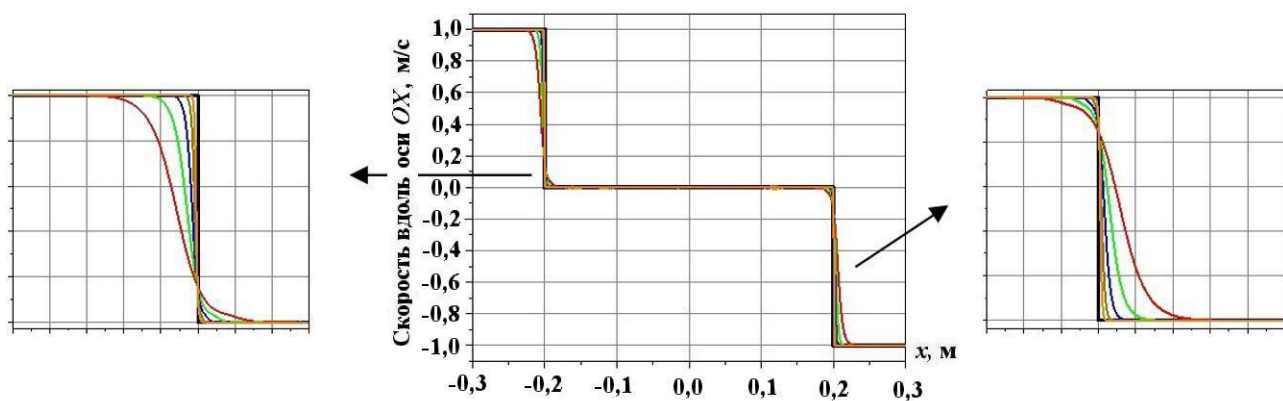


Рис. 18. Задача 2. Профили x -составляющей скорости для WPH, $t = 0,6$ с: — эталон; — 128 частиц; — 256 частиц; — 512 частиц; — 1024 частицы; — 2048 частиц

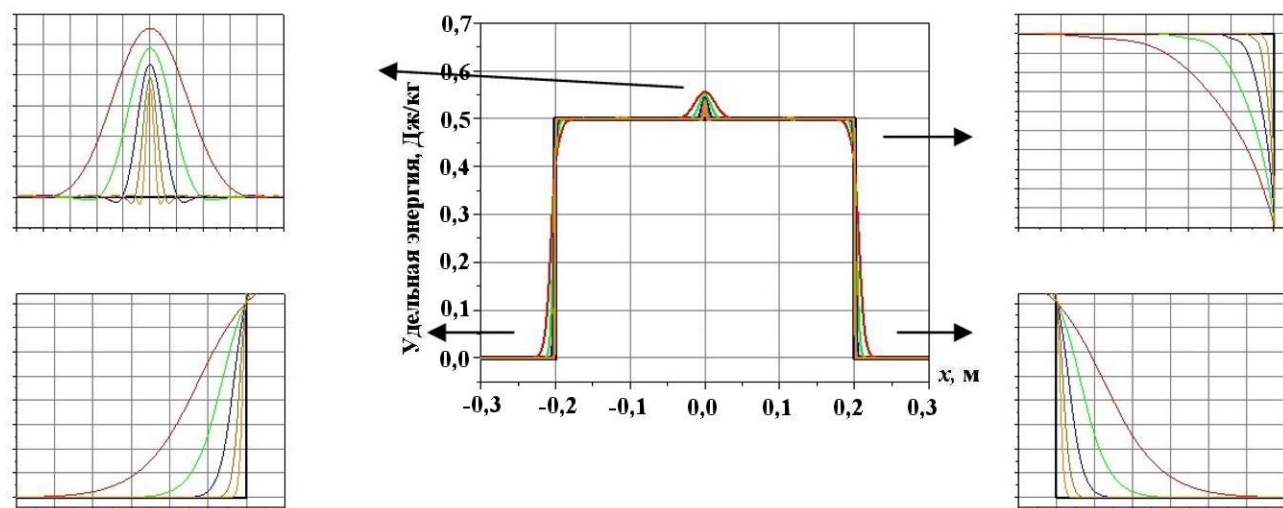


Рис. 19. Задача 2. Профили удельной энергии для WPH, $t = 0,6$ с: — эталон; — 128 частиц; — 256 частиц; — 512 частиц; — 1024 частицы; — 2048 частиц

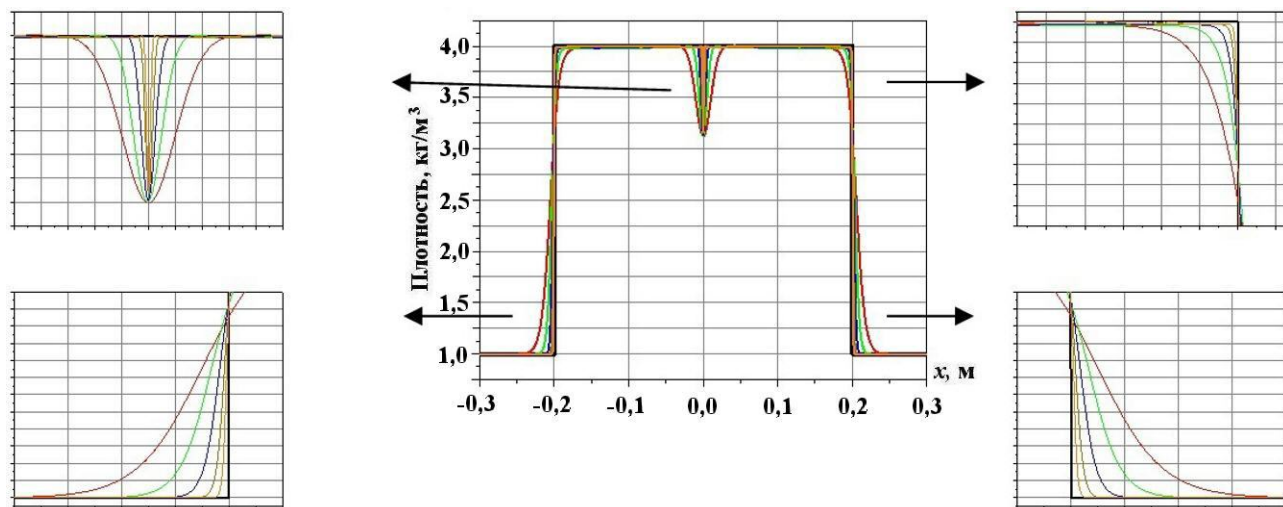


Рис. 20. Задача 2. Профили плотности для DISPH, $t = 0,6$ с: — эталон; — 128 частиц; — 256 частиц; — 512 частиц; — 1024 частицы; — 2048 частиц

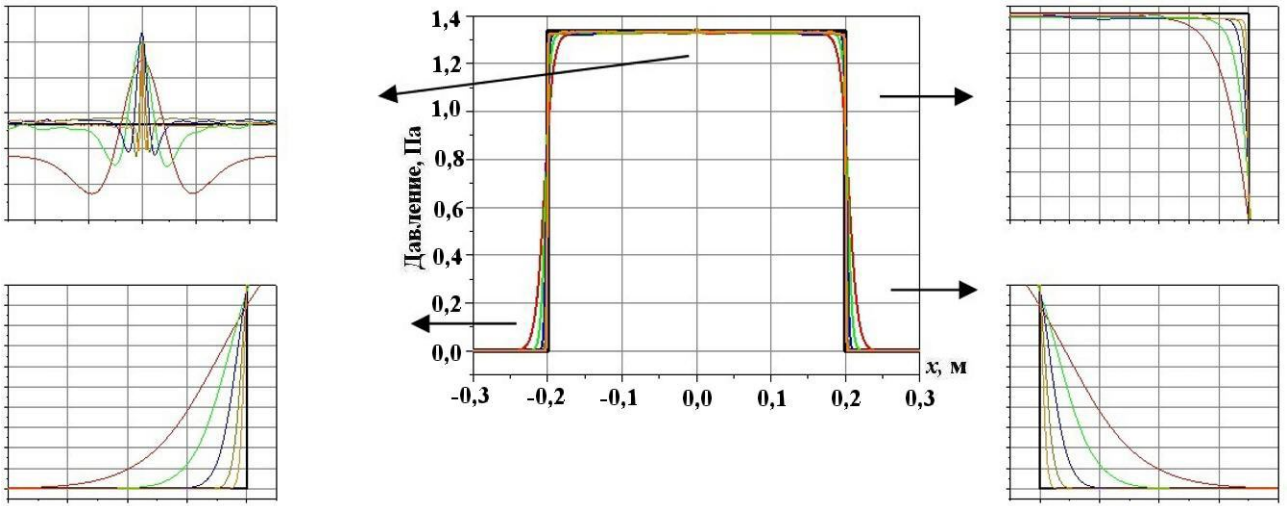


Рис. 21. Задача 2. Профили давления для DISPH, $t = 0,6$ с: — эталон; — 128 частиц; — 256 частиц; — 512 частиц; — 1024 частицы; — 2048 частиц

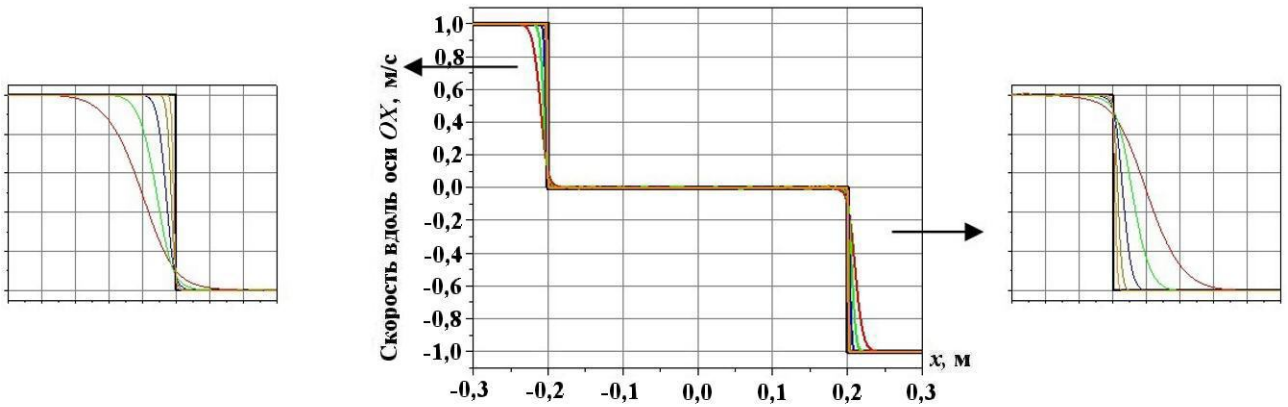


Рис. 22. Задача 2. Профили x -составляющей скорости для DISPH, $t = 0,6$ с: — эталон; — 128 частиц; — 256 частиц; — 512 частиц; — 1024 частицы; — 2048 частиц

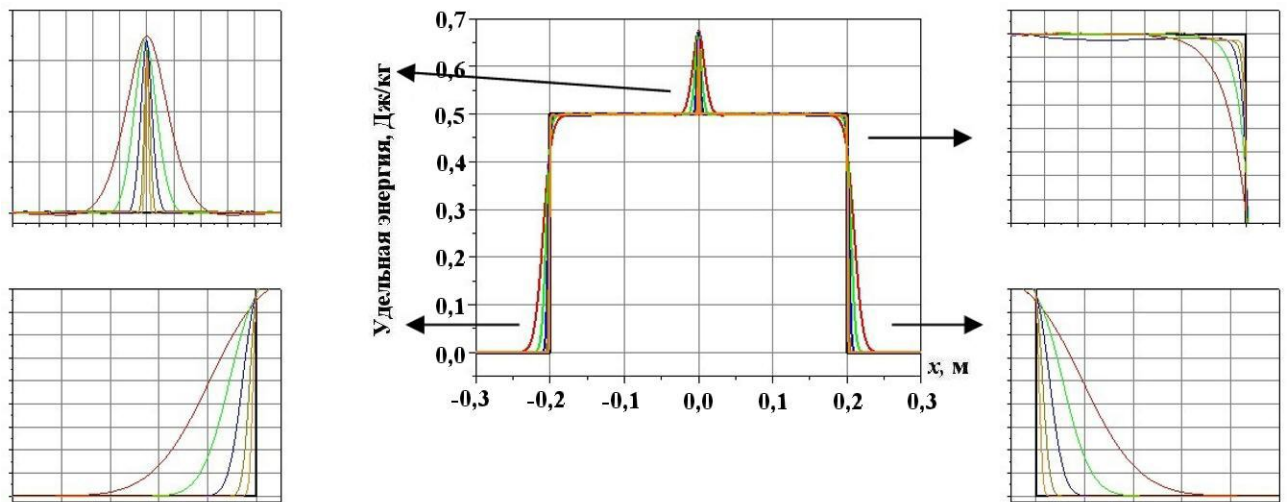


Рис. 23. Задача 2. Профили удельной энергии для DISPH, $t = 0,6$ с: — эталон; — 128 частиц; — 256 частиц; — 512 частиц; — 1024 частицы; — 2048 частиц

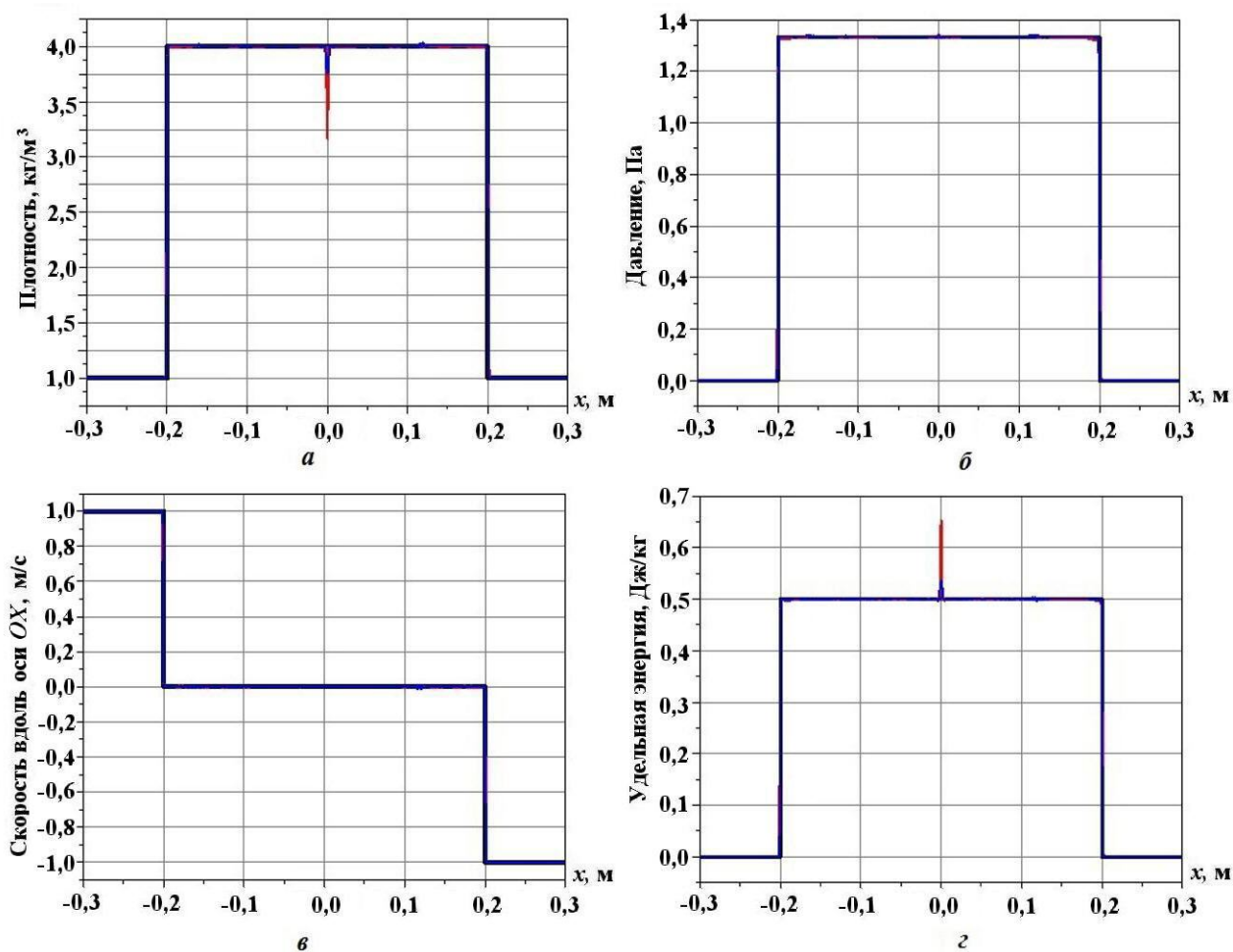


Рис. 24. Задача 2. Профили плотности (а), давления (б), x -составляющей скорости (в), удельной энергии (г) при числе частиц 2048, $t = 0,6$ с: — эталон; — WPH; — DISPH

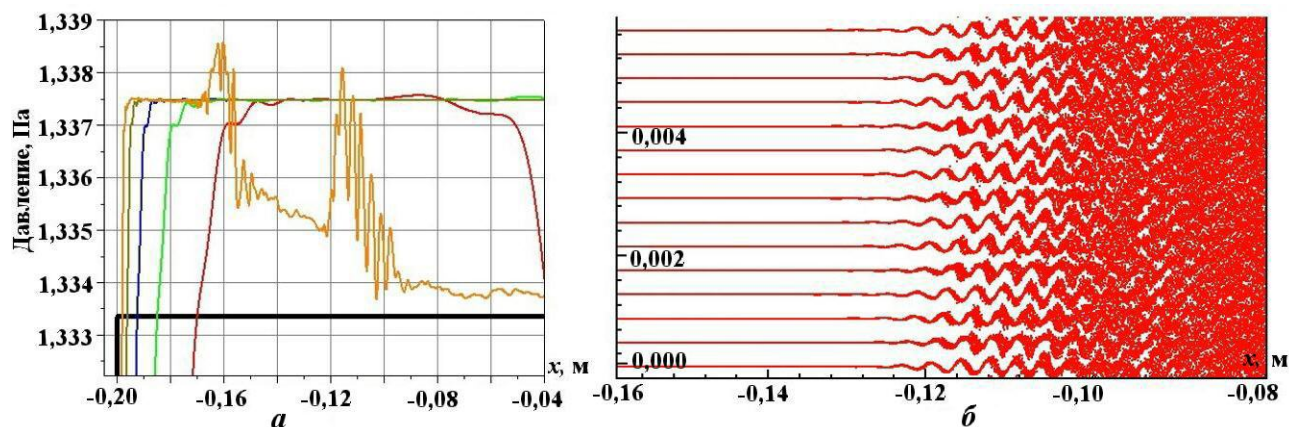


Рис. 25. Задача 2. Профиль давления (а) и частицы для $-0,16 \text{ м} < x < -0,08 \text{ м}$ в методе WPH при $t = 0,6$ с: — эталон; — 128 частиц; — 256 частиц; — 512 частиц; — 1024 частиц; — 2048 частиц

Качественную оценку можно провести на примере нормы L_1 : как для плотности, так и давления в подробных расчетах с WPH получается меньшая ошибка и более высокий порядок сходимости 0,8, чем с DISPH — 0,55 (рис. 27). В данной задаче решение WPH было менее шумным и более точным для высоких разрешений, при этом по WPH-методу посчитано в 1,8 раза быстрее и сделано 9162 шага против 16832 в DISPH. Оба метода показали одинаковый порядок сходимости $\approx 0,85$.

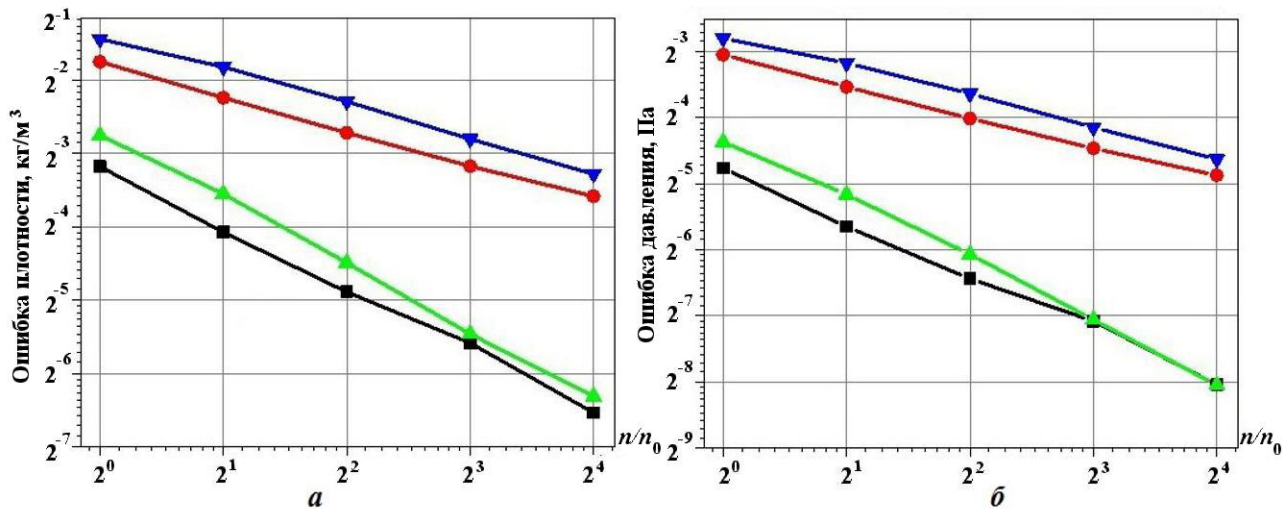


Рис. 26. Задача 2. Зависимости ошибок в нормах L_1 и L_2 от числа частиц в x -направлении для плотности (а) и давления (б): \blacksquare — WPH, в норме L_1 ; \bullet — WPH, в норме L_2 ; \blacktriangle — DISPH, в норме L_1 ; \blacktriangledown — DISPH, в норме L_2

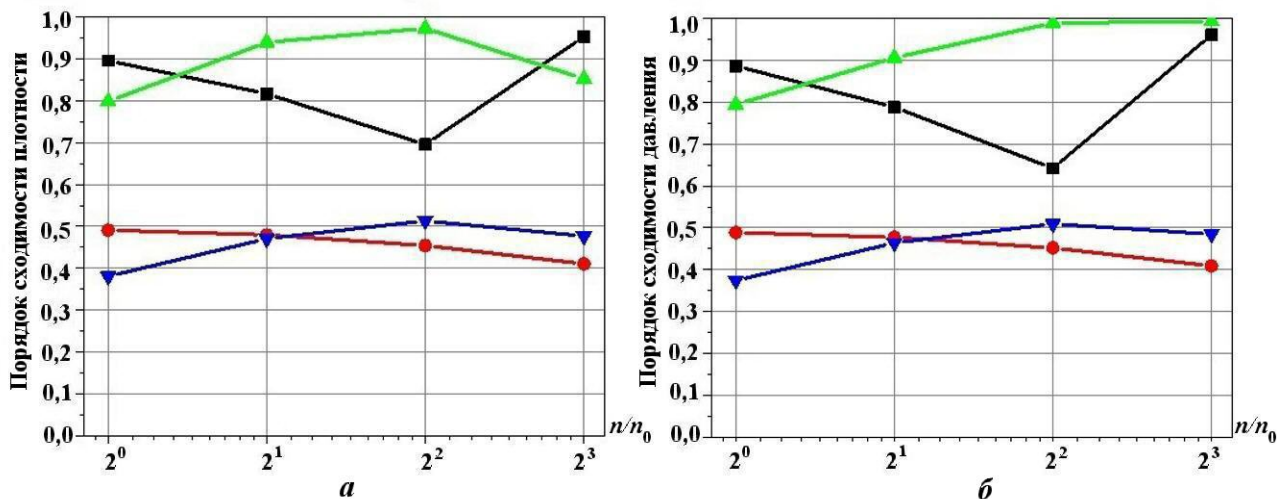


Рис. 27. Задача 2. Зависимости порядка сходимости в нормах L_1 и L_2 от числа частиц в x -направлении для плотности (а) и давления (б): \blacksquare — WPH, в норме L_1 ; \bullet — WPH, в норме L_2 ; \blacktriangle — DISPH, в норме L_1 ; \blacktriangledown — DISPH, в норме L_2

Задача Вудварда—Колеллы в 1D постановке (задача 3). Задача Вудварда—Колеллы [21] — задача о сложном нестационарном взаимодействии двух сильных ударных волн. В качестве эталона используется решение, полученное по программе "Волна" [22] (64 000 ячеек).

Давление в области 1 (рис. 28) равно 10^3 Па, в области 2 — 10^{-1} Па, в области 3 — 10^2 Па; плотность равна 1 кг/м^3 . УРС — для идеального газа с $\gamma = 5/3$. Граничные условия: по направлению x — жесткие стенки, по направлениям y и z — периодические. Ядро — 180 соседей. Время счета — 0,038 с.

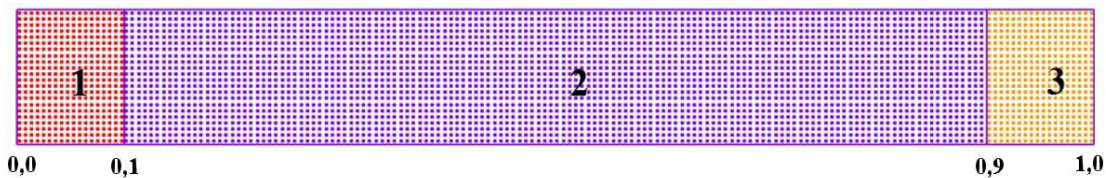


Рис. 28. Задача 3. Начальная расстановка частиц в областях

Для определения порядка сходимости было проведено пять расчетов:

- 1) количество частиц $128 \times 32 \times 32$; размер образца $1 \text{ м} \times 1/4 \text{ м} \times 1/4 \text{ м}$;
- 2) количество частиц $256 \times 32 \times 32$; размер образца $1 \text{ м} \times 1/8 \text{ м} \times 1/8 \text{ м}$;
- 3) количество частиц $512 \times 32 \times 32$; размер образца $1 \text{ м} \times 1/16 \text{ м} \times 1/16 \text{ м}$;
- 4) количество частиц $1024 \times 32 \times 32$; размер образца $1 \text{ м} \times 1/32 \text{ м} \times 1/32 \text{ м}$;
- 5) количество частиц $2048 \times 32 \times 32$; размер образца $1 \text{ м} \times 1/64 \text{ м} \times 1/64 \text{ м}$.

На рис. 28 показано начальное расположение частиц. Они имеют примерно равные массы, чтобы достичь равномерной концентрации.

На рис. 29, 30 показаны профили плотности, давления, x -составляющей скорости, удельной энергии на момент времени $t = 0,038 \text{ с}$, полученные по WPH-методу при увеличивающемся количестве частиц, а на рис. 31, 32 — то же самое по DISPH-методу. Оба метода показали хорошие результаты. Наблюдается сходимость к эталонному решению.

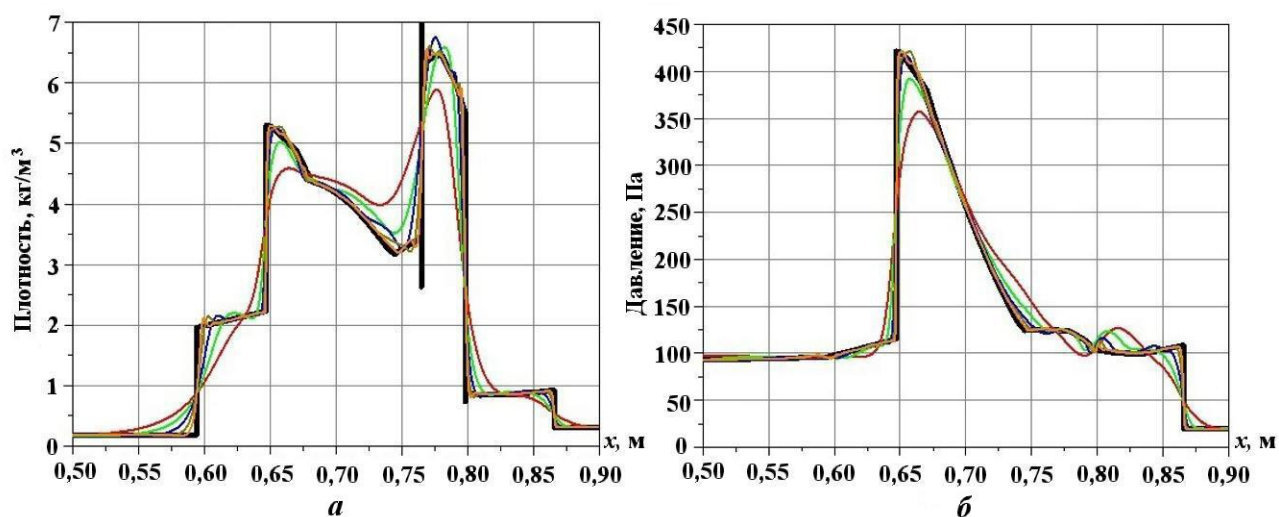


Рис. 29. Задача 3. Профили плотности (а) и давления (б) для WPH, $t = 0,038 \text{ с}$: — эталон; — 128 частиц; — 256 частиц; — 512 частиц; — 1024 частицы; — 2048 частиц

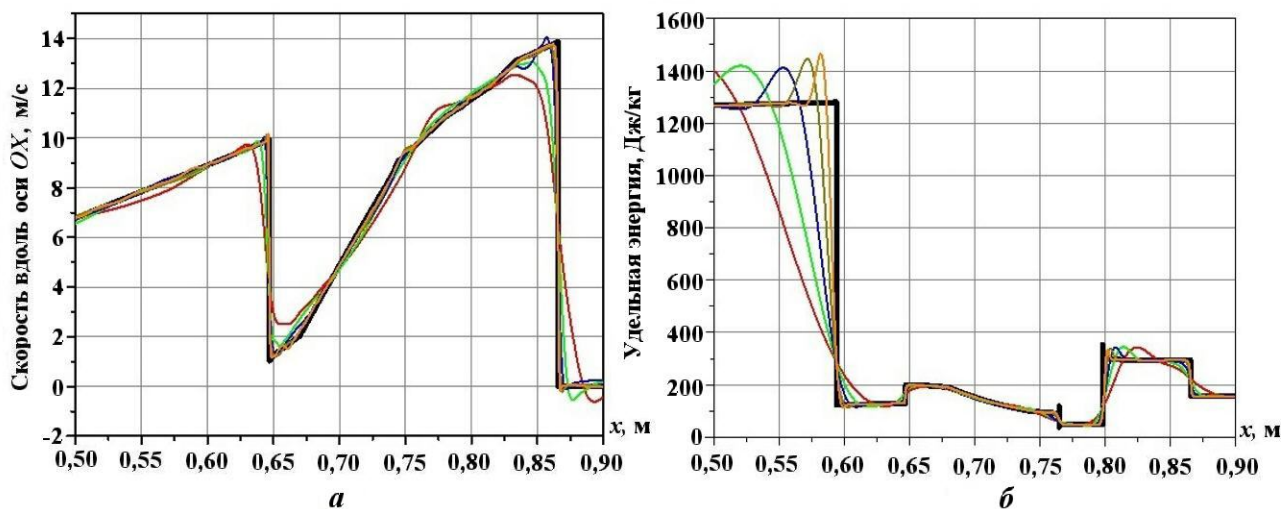


Рис. 30. Задача 3. Профили x -составляющей скорости (а) и удельной энергии (б) для WPH, $t = 0,038 \text{ с}$: — эталон; — 128 частиц; — 256 частиц; — 512 частиц; — 1024 частицы; — 2048 частиц

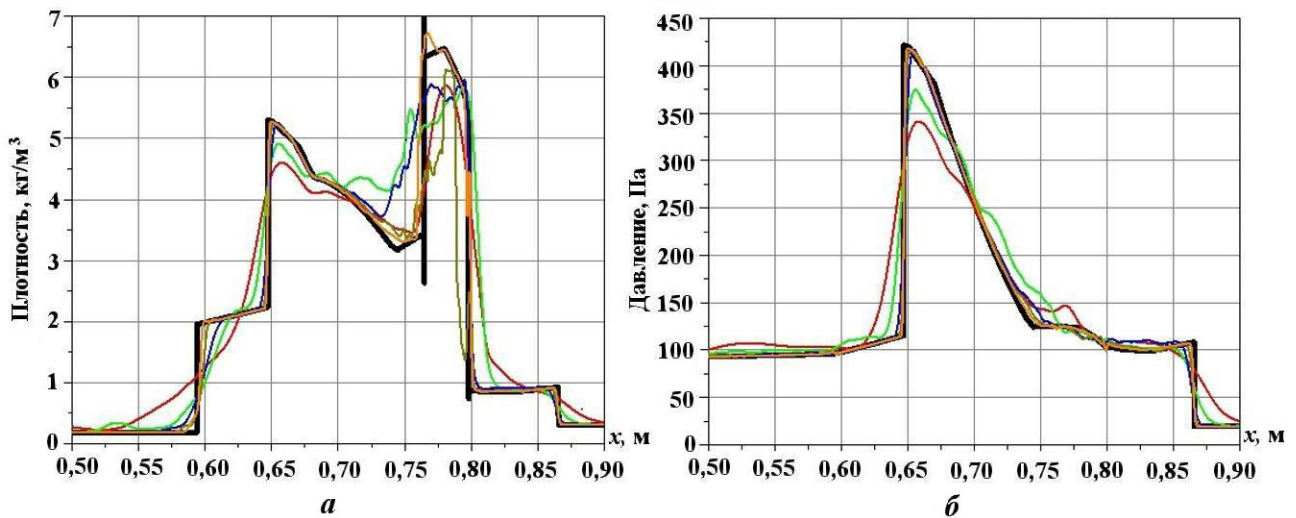


Рис. 31. Задача 3. Профили плотности (а) и давления (б) для DISPH, $t = 0,038$ с: — эталон; — 128 частиц; — 256 частиц; — 512 частиц; — 1 024 частицы; — 2 048 частиц

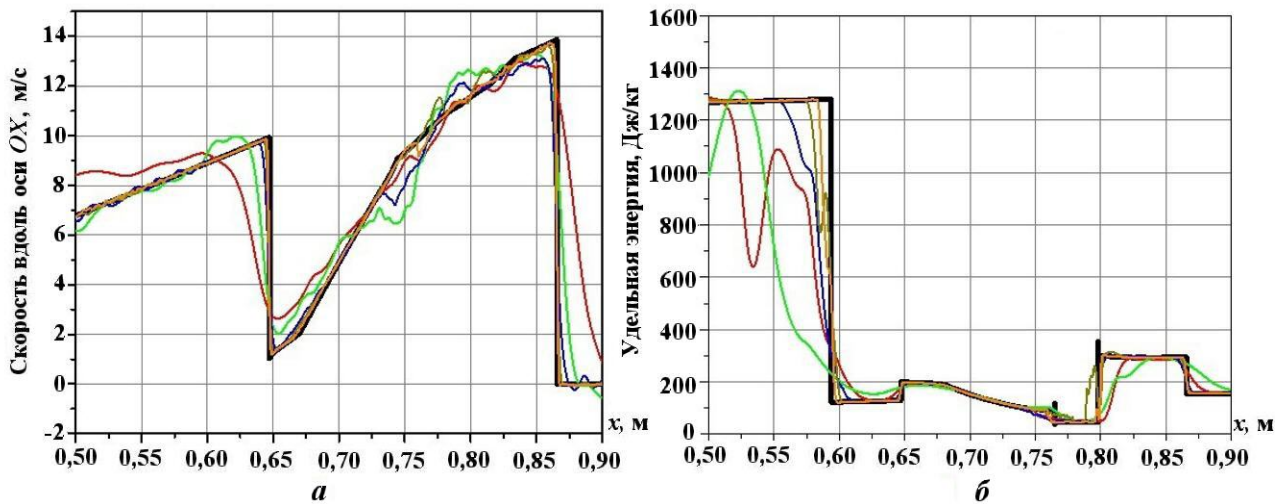


Рис. 32. Задача 3. Профили x -составляющей скорости (а) и удельной энергии (б) для DISPH, $t = 0,038$ с: — эталон; — 128 частиц; — 256 частиц; — 512 частиц; — 1 024 частицы; — 2 048 частиц

На рис. 33 приведены профили плотности, давления, x -составляющей скорости, удельной энергии на момент времени $t = 0,038$ с для двух методов при наибольшем количестве частиц. Оба метода показали близкие решения, однако есть и различия. У энергии, полученной по методу WPH, при $x = 0,6$ м наблюдается нефизичный скачок, который с увеличением количества частиц по направлению уменьшает свою ширину, при этом немного увеличивая амплитуду. Поведение решения, полученного по DISPH-методу, в этой области соответствует поведению эталонного решения.

Оценим ошибки в нормах L_1 и L_2 и найдем порядок сходимости. На рис. 34 показаны зависимости ошибок плотности и давления от числа частиц в x -направлении для обоих методов.

Качественную оценку можно провести на примере нормы L_1 : как для плотности, так и давления в подробных расчетах по методу WPH получается меньшая ошибка, порядок сходимости для WPH $\approx 0,8$, а для DISPH — от 0,6 у плотности, до 0,85 у давления (рис. 35). В данной задаче решение WPH было более точным и менее шумным, по WPH-методу посчитано в 1,6 раза быстрее, чем при использовании DISPH-метода. Сходимость присутствует у каждого из методов.

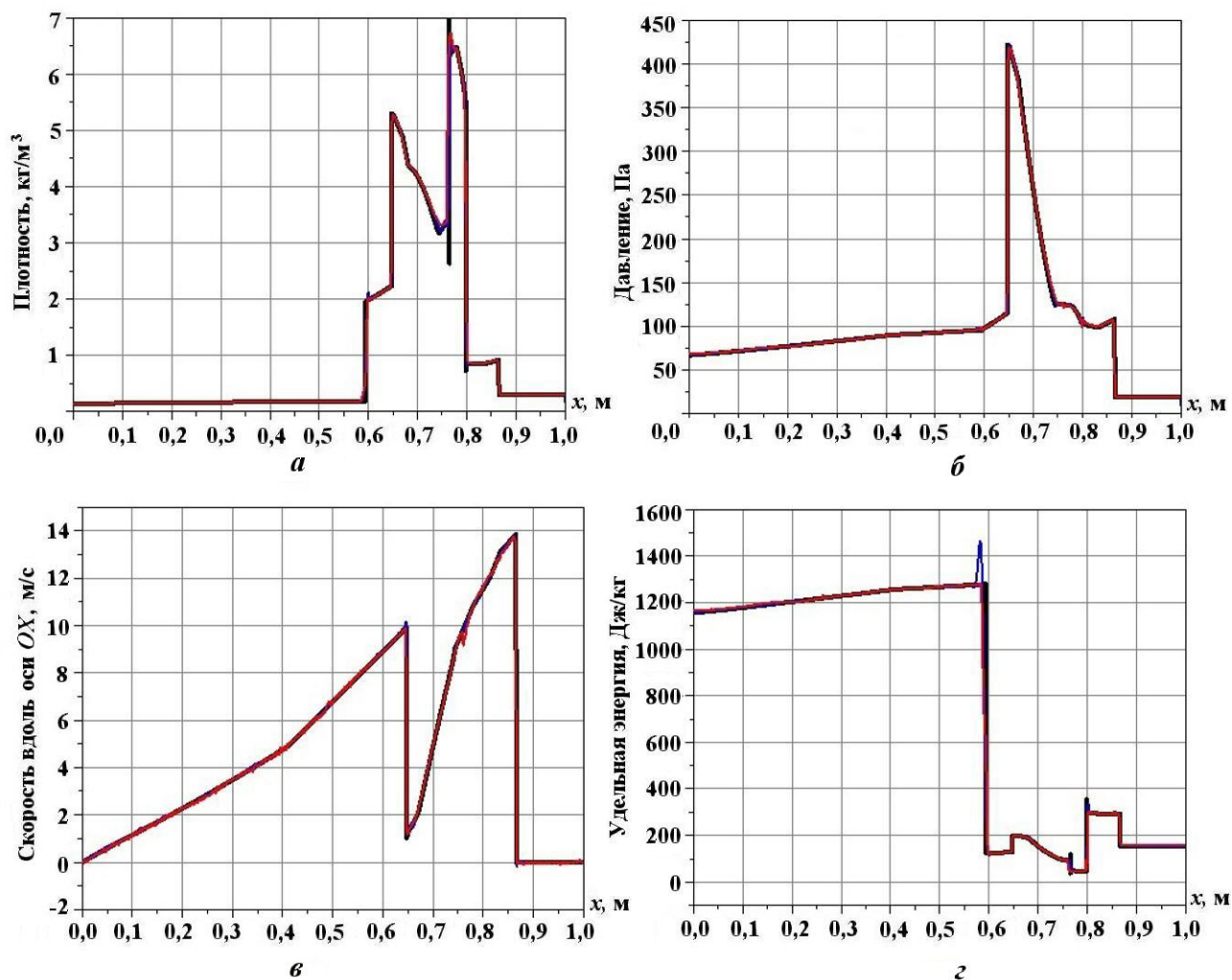


Рис. 33. Задача 3. Профили плотности (*а*), давления (*б*), *x*-составляющей скорости (*в*), удельной энергии (*г*) при числе частиц 2048, $t = 0,038$ с: — эталон; — WPH; — DISPH

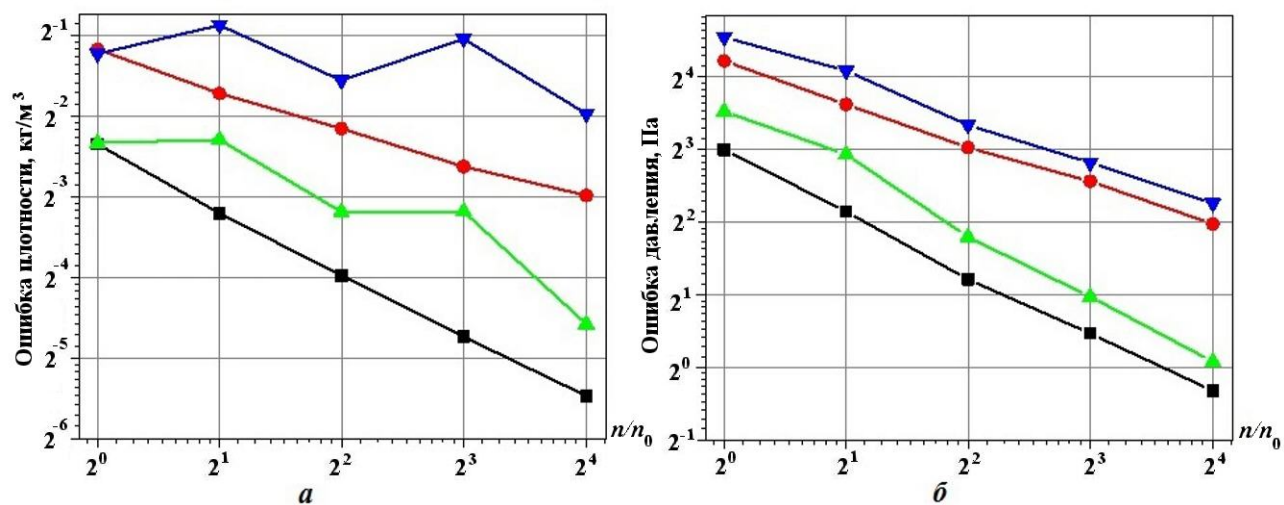


Рис. 34. Задача 3. Зависимости ошибок в нормах L_1 и L_2 от числа частиц в *x*-направлении для плотности (*а*) и давления (*б*): — WPH, в норме L_1 ; — WPH, в норме L_2 ; — DISPH, в норме L_1 ; — DISPH, в норме L_2

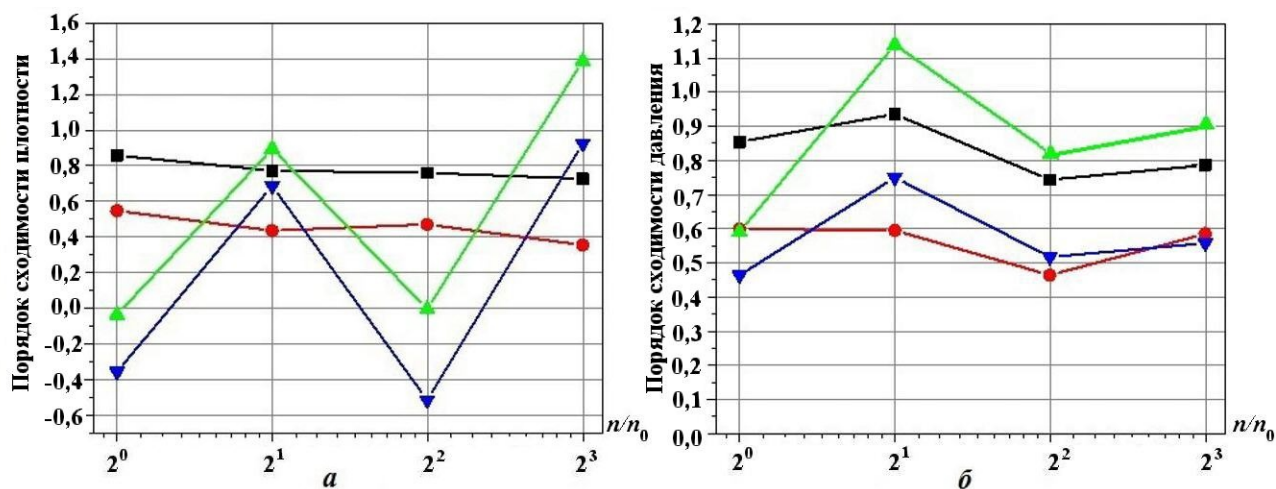


Рис. 35. Задача 3. Зависимости порядка сходимости в нормах L_1 и L_2 от числа частиц в x -направлении для плотности (а) и давления (б): \blacksquare — WPH, в норме L_1 ; \bullet — WPH, в норме L_2 ; \blacktriangle — DISPH, в норме L_1 ; \blacktriangledown — DISPH, в норме L_2

Седовский взрыв в 3D постановке (задача 4). В 3D постановке данный тест моделирует образование и распространение сильной сферической взрывной волны. Седовский взрыв особенно сложен для моделирования, так как в задаче присутствует значительный градиент энтропии. Для этого теста существует аналитическое решение [23].

Одномерная равномерная сетка, на которой получено аналитическое решение, содержит 5000 ячеек вдоль радиуса.

Количество частиц: $256 \times 256 \times 256$ (всего — 16 777 216). Размер образца: $20 \text{ м} \times 20 \text{ м} \times 20 \text{ м}$. Плотность равна 1 кг/м^3 . УРС — для идеального газа с $\gamma = 5/3$. Ядро содержит 90 соседей. Время счета — 0,2 с. Давление полагается равным $P = 10^6 \text{ Па}$ при $r \leq 1 \text{ м}$, $P = 10^{-6} \text{ Па}$ при $r > 1 \text{ м}$.

При такой постановке для данной концентрации частиц в сферу единичного радиуса попало 1128 частиц. Полная энергия системы для метода WPH равна $2,5545 \cdot 10^7 \text{ Дж}$, а для DISPH — $3,0135 \cdot 10^7 \text{ Дж}$, что на 18% больше⁵. Такую разницу можно объяснить формулировкой метода, где объем — это отношение внутренней энергии к плотности внутренней энергии. В WPH внутренняя энергия переносится частицей, а в DISPH — усредняется по соседям, что приводит к ее изменению (размытию, усреднению). Найдем аналитические решения данной задачи для двух начальных энергий системы.

Профили плотности на момент времени $t = 0,2 \text{ с}$ показаны на рис. 36, а, а плотность в частицах — на рис. 36, б. Наблюдается достаточно хорошее описание аналитического решения обоими методами, хотя DISPH-метод дает менее сферически-симметричное решение. Ошибка в норме L_1 для WPH равна $0,25 \text{ кг/м}^3$, а для DISPH — $0,51 \text{ кг/м}^3$. Сферичность оценим из ошибки в норме L_2 значений плотности в частицах: $0,003 \text{ кг/м}^3$ для WPH и $0,05 \text{ кг/м}^3$ для DISPH.

Пространственное распределение плотности, показанное на рис. 37, а, б, демонстрирует высокую степень симметрии для обоих методов.

Данная задача по WPH посчитана в 1,6 раза быстрее, чем по DISPH, при этом по WPH сделано 979 шагов против 1488 по DISPH. Это решение в два раза более точное и приблизительно в 16 раз сферичнее. В неприведенном здесь расчете с точечным (в центральной частице) энерговыделением наблюдалась низкая чувствительность WPH к начальной расстановке частиц, тогда как для DISPH это вызывало потерю сферичности.

⁵ Аналитические решения данной задачи для двух начальных энергий системы различаются.

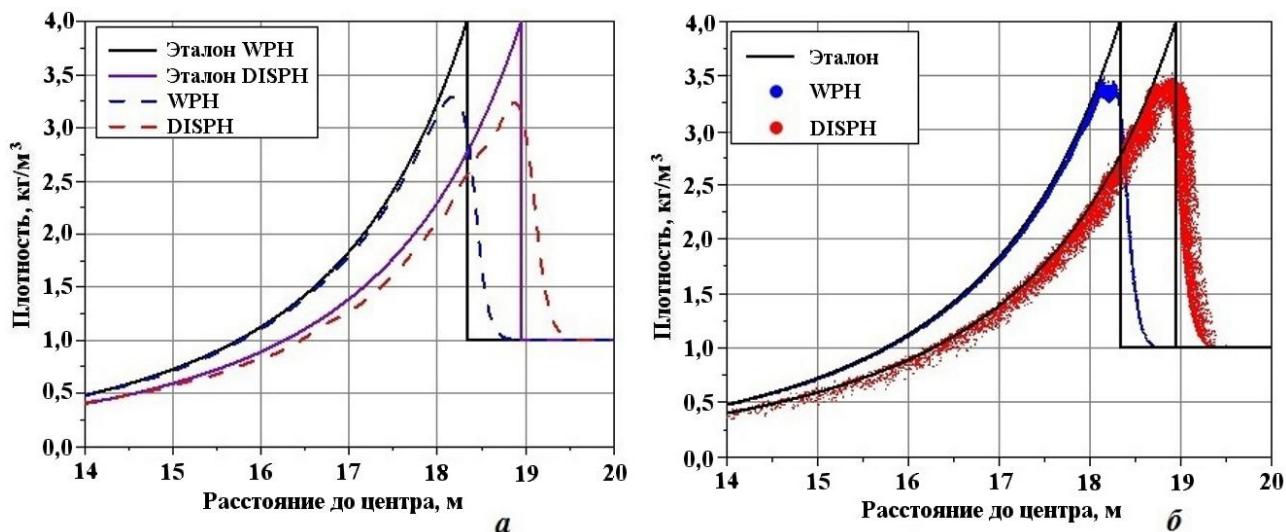


Рис. 36. Задача 4. Профили плотности (а) и плотность в частицах (б), $t = 0,2$ с

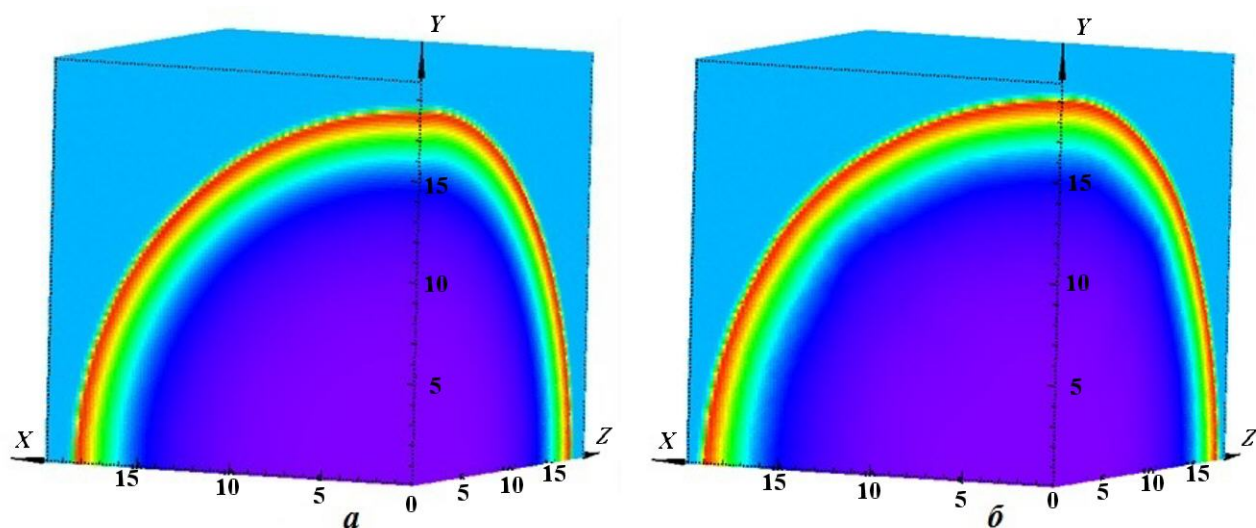


Рис. 37. Задача 4. Пространственные распределения плотности, $t = 0,2$ с: а — WPH; б — DISP

Заключение

Были проведены расчеты для определения применимости методов DISP и WPH при моделировании ударных волн на тестовых 1D задачах Сода, Ноха, Вудварда—Колеллы и 3D задаче о седовском взрыве. На этих задачах была показана сходимость численного решения к эталонному и определен порядок сходимости $\approx 0,8$.

При сравнении двух подходов учитывались ошибка в норме L_1 и астрономическое время, затраченное на проведение расчета. Для тестов в 3D постановке была проведена оценка сферической симметрии решения. Было показано, что во всех тестах при использовании метода WPH получена меньшая ошибка, счет выполнен от 1,5 до 2 раз быстрее. Сделан вывод о целесообразности его использования при моделировании задач с ударными волнами.

Список литературы

1. *Gingold R. A., Monaghan J. J.* Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 1977. Vol. 181. P. 375—389.

2. *Lucy L. B.* A numerical approach to the testing of the fission hypothesis // *The Astronomical Journal*. 1977. Vol. 82, No 12. P. 1013–1024.
3. *Saitoh T. R., Makino J.* A density-independent formulation of smoothed particle hydrodynamics // *Ibid.* 2013. Vol. 768. P. 44–67.
4. *Hosono N., Saitoh T. R., Makino J.* A comparison of SPH artificial viscosities and their impact on the Keplerian disk // *The Astrophysical Journal Supplement Series*. 2016. Vol. 224. P. 32–50.
5. *Hopkins P. F.* A new class of accurate, mesh-free hydrodynamic simulation methods // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2015. Vol. 450. P. 53–110.
6. *Springel V., Hernquist L.* Cosmological smoothed particle hydrodynamics simulations: the entropy equation // *Ibid.* 2002. Vol. 333. P. 649–664.
7. *Chen J. K., Beraun J. E., Jih C. J.* An improvement for tensile instability in smoothed particle hydrodynamics // *Computational Mechanics*. 1999. Vol. 23. P. 279–287.
8. *Zhang G. M., Batra R. C.* Modified smoothed particle hydrodynamics method and its application to transient problems // *Ibid.* 2004. Vol. 34. P. 137–146.
9. *Zhang G. M., Batra R. C.* Symmetric smoothed particle hydrodynamics (SSPH) method and its application to elastic problems // *Ibid.* 2009. Vol. 43. P. 321–340.
10. *García-Senz D., Cabezón R. M., Escartín J. A.* Improving smoothed particle hydrodynamics with an integral approach to calculating gradients // *Astronomy & Astrophysics*. 2012. Vol. 538. A9.
11. *Huang C., Lei J. M., Liu M. B., Peng X. Y.* A kernel gradient free (KGF) SPH method // *Int. J. Numerical Methods Fluids*. 2015. Vol. 78. P. 691–707.
12. *Dilts G. A.* Moving-least-squares-particle hydrodynamics—I. Consistency and stability // *Ibid.* 1999. Vol. 44. P. 1115–1155.
13. *Toro E. F.* *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics: A Practical Introduction*. Springer, 2009.
14. *Monaghan J. J., Gingold R. A.* Shock Simulation by the Particle Method SPH // *J. Comp. Phys*. 1983. Vol. 52. P. 374–389.
15. *Cullen L., Dehnen W.* Inviscid smoothed particle hydrodynamics // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2010. Vol. 408. P. 669–683.
16. *Сапожников Ф. А., Ионов Г. В., Дрёмов В. В.* Программный комплекс "Молах" для молекулярно-динамического моделирования процессов в конденсированных материалах // *Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов*. 2011. Вып. 4. С. 50–57.
Sapozhnikov F. A., Ionov G. V., Dremov V. V. Programmnyy kompleks kompleks "Molokh" dlya molekulyarno-dinamicheskogo modelirovaniya protsessov v kondensirovannykh materialakh // *Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov*. 2011. Vyp. 4. S. 50–57.
17. *Dehnen W., Aly H.* Improving convergence in smoothed particle hydrodynamics simulations without pairing instability // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2012. Vol. 425. P. 1068–1082.
18. *Diehl S., Rockefeller G., Fryer C. L., Riethmiller D., Statler T. S.* Generating optimal initial conditions for smoothed particle hydrodynamics simulations // *Ibid.* 2015. Vol. 32. P. 1–18.
19. *Sod G. A.* A survey of several finite difference methods for systems of nonlinear hyperbolic conservation laws // *J. Comp. Phys*. 1978. Vol. 27. P. 1–31.
20. *Noh W. F.* Errors for calculation of strong shocks using an artificial viscosity and an artificial heat flux // *Ibid.* 1987. Vol. 72. P. 78–120.
21. *Woodward P., Colella P.* The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 1984. Vol. 54. P. 115–173.

22. Куропатенко В. Ф., Коваленко Г. В., Кузнецов В. И., Михайлова Г. И., Потапкин В. К., Сапожникова Г. Н. Комплекс программ "Волна" и неоднородный разностный метод для расчета неустановившихся движений сжимаемых сплошных сред. Часть 1. Неоднородный разностный метод // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1989. Вып. 2. С. 9—18.
Kuropatenko V. F., Kovalenko G. V., Kuznetsov V. I., Mikhaylova G. I., Potapkin V. K., Sapozhnikova G. N. Kompleks program "Volna" i neodnorodnyy raznostnyy metod dlya raschyeta neustanovivshikhsya dvizheniy szhimaemykh sploshnykh sred. Chast 1. Neodnorodnyy raznostnyy metod // Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov. 1989. Vyp. 2. S. 9—18.
23. Sedov L. I. Similarity and dimensial methods in mechanics // Academic Press Inc. 1959. Vol. 11. P. 210.

Статья поступила в редакцию 13.02.23.

УДК 519.6

ОСОБЕННОСТИ ВЫЧИСЛЕНИЯ КОНВЕКТИВНЫХ ПОТОКОВ ДЛЯ ЗАДАЧ АЭРОДИНАМИКИ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ СЕТОК С ПОДВИЖНЫМИ УЗЛАМИ

А. В. Саразов

(ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области)

Рассматриваются вопросы численного моделирования аэродинамики (гидродинамики) с подвижными границами для трехмерного случая. Обсуждаются подходы, гарантирующие консервативность численной схемы без потери точности моделирования. Предложена формула расчета скорости движения граней расчетных ячеек, которая позволяет корректно вычислять вектор скорости движения грани при произвольных деформациях расчетной сетки. Формула основана на принципе геометрической консервативности с использованием метода восстановления нормали с учетом корректировки по направлению. Для демонстрации реализованных алгоритмов решаются нестационарные задачи в прямой постановке. Предложенная схема расчета скорости грани показала качественное согласие результатов моделирования с реальной физикой течения.

Ключевые слова: скорость грани, условие геометрической консервативности, система уравнений Навье—Стокса, NASA0012, AGARD 445.6, деформация расчетной сетки.

Введение

К настоящему времени растут потребности в решении задач, связанных с движением тел в газе или жидкости. Это, например, задачи движения отдельных управляющих конструктивных элементов обтекаемого объекта [1], катапультирования [2], течения с учетом деформации границ [3], работы винтов [4], старта ракет из шахт [5] и т. д. Многие из задач, имеющих практический интерес, связаны с моделированием нестационарных трехмерных процессов, учитывающих движение объектов относительно друг друга. Например, переходные режимы в процессе эксплуатации часто сопряжены с движением отдельных узлов конструкции, изменением формы органов управления [6].

При решении задач с криволинейными границами или поверхностями, которые могут по тем или иным причинам менять свое положение в пространстве, возникает проблема постановки граничных условий на таких поверхностях. Эффективным способом в этом случае является использование криволинейных координатных систем, которые могут перемещаться в пространстве либо оставаться неподвижны-

ми, но в каждый момент времени они должны быть согласованы с криволинейными поверхностями тел. В случае малых деформаций расчетной сетки находит свое применение метод ALE (Arbitrary Lagrangian-Eulerian). Так, в ряде методик (см., например, [7]) границы раздела материалов совпадают с линиями сетки и выделяются особым *лагранжевым* типом перестроения сетки, что позволяет получать качественные результаты моделирования. Также для задач с подвижными элементами конструкции может использоваться подход деформирования расчетной сетки с сохранением топологии связей [8, 9].

Для решения практических задач с подвижными границами основная система гидродинамических уравнений должна быть дополнена граничными условиями, учитывающими движение граничных граней дискретной модели. В настоящей статье представлены основные соотношения, описывающие процессы течения вязкого газа относительно подвижных объектов. Погрешность, вносимая дискретизацией базовых уравнений, зависящей от скорости движения границ, может привести к нарушению точности разностных схем, поэтому ключевой со-

ставляющей численной методики является метод расчета скорости грани. В работе приводятся анализ и сравнение двух методов расчета с разными способами вычисления вектора скорости грани контрольного объема.

Представлено решение задачи нестационарного обтекания профиля NASA0012 [9] и крыла AGARD 445.6 [10] потоком вязкого сжимаемого газа в случае, когда профиль движется с определенной скоростью в неподвижной среде. Приведены результаты сравнения полученных аэродинамических характеристик (АДХ) профиля при использовании двух алгоритмов расчета скорости грани.

Основные уравнения, способ дискретизации и учет граничных условий

Нестационарные трехмерные турбулентные течения вязкого газа описываются системой уравнений Навье—Стокса, осредненных по Рейнольдсу [9], которая в дифференциальной форме в декартовых координатах имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{u}) &= 0; \\ \frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{u} \cdot \vec{u}) &= -\nabla p + \nabla(\tau_\mu + \tau_t); \quad (1) \\ \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{u} h) &= \nabla[\vec{u} \tau - (\vec{q}_\mu + \vec{q}_t)]. \end{aligned}$$

Здесь используются общепринятые обозначения: ρ — плотность; $\vec{u} = (u, v, w)$ — вектор скорости течения; p — давление; $E = c_V T + 0,5(u^2 + v^2 + w^2)$ — полная энергия газа; $h = c_P T + 0,5(u^2 + v^2 + w^2)$ — полная энтальпия газа; T — температура; $c_V = (c_P T - R/m)$ — удельная теплоемкость при постоянном объеме; c_P — удельная теплоемкость при постоянном давлении; R — универсальная газовая постоянная; m — молярная масса газа; τ_μ и τ_t — соответственно молекулярная и турбулентная составляющие тензора касательных напряжений; q_μ и q_t — соответственно молекулярная и турбулентная составляющие плотности теплового потока.

Молекулярная вязкость ньютоновской среды удовлетворяет реологическому закону Ньютона, выражающему связь между тензором вязких напряжений и тензором скоростей деформаций, а компоненты вектора плотности теплового потока связаны с локальным градиентом темпера-

туры законом Фурье [11]. На практике исходную систему уравнений вида (1) записывают в матрично-векторной форме

$$\int_{V(t)} \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} dV + \oint_{S(t)} (F(\mathbf{W}) - G(\mathbf{W})) d\mathbf{S} = \int_{V(t)} \mathbf{H} dV. \quad (2)$$

Здесь \mathbf{W} , \mathbf{H} — векторы-столбцы консервативных переменных и правой части соответственно; F , G — матрицы, состоящие из столбцов соответственно конвективного и диффузионного потоков по каждому направлению; $V(t)$, $S(t)$ — контрольный объем и его поверхность, изменяющиеся с течением времени t ; $d\mathbf{S}$ — произведение площади dS элементарного участка на вектор нормали \mathbf{n} к нему.

Дискретизация системы уравнений (2) корректна только при условии неподвижности расчетной сетки. Для расчета задач аэродинамики с подвижными элементами конструкций, в частности, при движении границ контрольного объема представленная методика должна быть дополнена специализированными алгоритмами. Движение границ может повлечь за собой изменение контрольных объемов, что должно быть учтено при построении численных схем расчета для решения подобных задач.

В системе уравнений (2) учет движения границ контрольного объема осуществляется путем модификации с использованием интегрально-дифференциального тождества

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V(t)} \mathbf{W} dV = \int_{V(t)} \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} dV + \oint_{S(t)} \mathbf{W} \dot{\mathbf{x}}^T d\mathbf{S}, \quad (3)$$

где $\dot{\mathbf{x}}$ представляет собой вектор-столбец скорости движения грани.

Изменение контрольного объема выражается вторым слагаемым правой части тождества (3). Сделав его подстановку в (2), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{V(t)} \mathbf{W} dV + \oint_{S(t)} (F(\mathbf{W}) - \mathbf{W} \dot{\mathbf{x}}^T) d\mathbf{S} - \\ - \oint_{S(t)} (G(\mathbf{W})) d\mathbf{S} = \int_{V(t)} \mathbf{H} dV. \end{aligned} \quad (4)$$

По сравнению с системой уравнений для неподвижных сеток уравнение (4) включает скорость

изменения контрольного объема и скорость движения его границы, которую необходимо учитывать при расчете конвективных потоков. В том случае, если все границы неподвижны, из уравнения (4) следует базовый закон Навье—Стокса.

Корректный расчет скорости движения грани напрямую влияет на точность расчета. Для гарантии, как минимум, первого порядка аппроксимации по времени требуется, как показано в [12, 13], выполнение условия геометрической консервативности (Geometric Conservation Law — GCL). Основная идея данного условия сводится к тому, что схема дискретизации удовлетворяет условию геометрической консервативности в случае, когда вектор \mathbf{W} с компонентами $W_i = \text{const}_i$ является точным решением уравнения типа (3).

Расчет скорости грани

Основной проблемой при построении схемы дискретизации уравнений типа (4) является нахождение векторов скоростей движения граней контрольного объема. Направление движения грани необходимо для корректной аппроксимации конвективных и вязких потоков. Неверный прогноз вектора скорости грани приводит к нефизичным результатам вследствие изменения вклада в вязкие потоки. Ввиду особенностей расчета на неструктурированных сетках, где ячейки являются произвольными многогранниками, решение и устойчивость численной схемы существенно ухудшаются.

Основой для вычисления вектора скорости грани является условие геометрической консервативности. Для простоты дальнейших построений рассмотрим уравнение (4) без источников в правой части. Если принять, что в каждой точке пространства расчетные поля неизменны, т. е. $W_i = \text{const}_i$, то выражение (4) примет вид

$$\mathbf{W} \frac{dV}{dt} + \oint_{S(t)} (F(\mathbf{W}) - \mathbf{W} \dot{\mathbf{x}}^T) d\mathbf{S} = 0. \quad (5)$$

С другой стороны, условие $W_i = \text{const}_i$ означает, что суммарные потоки массы, импульса, энергии через грани контрольного объема равны нулю. При этом уравнение (5) упрощается:

$$\frac{dV}{dt} - \oint_{S(t)} \dot{\mathbf{x}}(t) \cdot d\mathbf{S} = 0,$$

или в дискретном виде согласно схеме Эйлера

$$\frac{V_i^{n+1} - V_i^n}{\Delta t} = \sum_f (\dot{\mathbf{x}}_f \cdot \mathbf{n}) \Delta S_f, \quad (6)$$

где суммирование выполняется по всем граням f контрольного объема.

Физический смысл соотношения (6) состоит в том, что скорость изменения объема произвольной ячейки зависит от суммы *заметаемых* объемов¹.

Таким образом приращение объема i -й ячейки можно выразить следующим образом:

$$V_i^{n+1} - V_i^n = \sum_f \Delta V_f,$$

где ΔV_f — объем, заметаемый гранью f .

В свою очередь, заметаемый объем можно записать в виде

$$\Delta V_f = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{S_f} (\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{n}) dS dt,$$

или в дискретной форме

$$\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{n} = \frac{\Delta V_f}{\Delta t \Delta S_f}. \quad (7)$$

Если предположить, что векторы $\dot{\mathbf{x}}$ и \mathbf{n} коллинеарны, то скорость грани можно вычислить, используя следующее выражение (для плоской грани):

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\Delta V_f}{\Delta t \Delta S_f} \mathbf{n}. \quad (8)$$

Однако при расчете в прямой постановке (когда тело движется в среде) скорость движения грани в общем случае не совпадает по направлению с вектором нормали в точке. Данный факт сказывается на точности получаемого решения при использовании выражения (8), что будет показано в численных экспериментах.

Анализируя выражение (7), можно выделить две основные проблемы расчета скорости грани: вычисление заметаемого объема и определение направления вектора $\dot{\mathbf{x}}$.

Вычисление заметаемого объема ΔV_f движущейся грани, которая в общем случае может подвергаться произвольной деформации, является отдельной задачей. Трудности вычисления заметаемого объема связаны с тем, что узлы грани могут двигаться произвольным образом².

¹Заметаемым будем называть объем, продуцированный движением отдельно взятой грани.

²Здесь и далее под термином *деформация грани* будем подразумевать изменение площади, формы грани с сохранением реберно-узловой топологии.

Один из подходов вычисления заметаемого объема подвижной грани основан на методе восстановления средней нормали, представленном в работе [14]. Данный метод хорошо подходит как для плоскопараллельного сдвига граней, так и для произвольного их движения. Он используется по причине общности подхода для различных видов движения грани контрольного объема. Однако этот метод дает только значение заметаемого объема. В общем же случае важным может оказаться и направление движения грани.

Если движение грани близко к плоскопараллельному сдвигу, то вопрос определения вектора скорости грани решается просто. Если же движение грани сопряжено с такими процессами, как вращение, сжатие/растяжение, то определение вектора скорости существенно усложняется, в особенности для неструктурированных сеток, ввиду того, что в большинстве случаев планарность граней не гарантируется. Также следует учитывать, что при деформации сетки увеличивается вероятность деградации сеточной модели, что может приводить к дополнительным трудностям определения вектора скорости грани.

Направление движения грани можно определить путем введения дополнительных характеристик грани. Предыдущее положение грани позволяет выполнить мониторинг перемещения самой грани. Для определения вектора скорости грани для произвольной неструктурированной сетки предлагается следующий алгоритм:

- вычисление перемещений узлов, перемещения центра грани, заметаемого объема на основе подхода восстановления средней нормали;
- усреднение вычисленных перемещений и нормировка усредненного вектора перемещения;
- масштабирование на основе выражения (7).

В итоге измененная формула для определения вектора скорости выглядит следующим образом:

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\Delta V_f}{\Delta t \Delta S_f} \frac{\sum_{k=1}^{K_f} \mathbf{R}_k + \mathbf{R}_c}{\left(\sum_{k=1}^{K_f} \mathbf{R}_k + \mathbf{R}_c \right) \cdot \mathbf{n}}, \quad (9)$$

где \mathbf{R}_c , \mathbf{R}_k — векторы перемещений центра и K_f узлов грани f . Такой способ расчета скорости грани далее будем называть методом 2.

В качестве иллюстрации методов 1 и 2 расчета скорости грани на рис. 1 схематично приводятся результаты их применения для произвольной грани в трехмерном случае. Видно качественное отличие результатов расчета скорости грани по методу 2 от метода 1. Скорость грани, вычисленная на основании формулы (9), сохраняет направление движения большинства узлов грани.

Приведенные соотношения справедливы для любых типов движения граней расчетной сетки. Следует заметить, что сделанные допущения не влияют на количество геометрических примитивов дискретной модели, отношение соседства

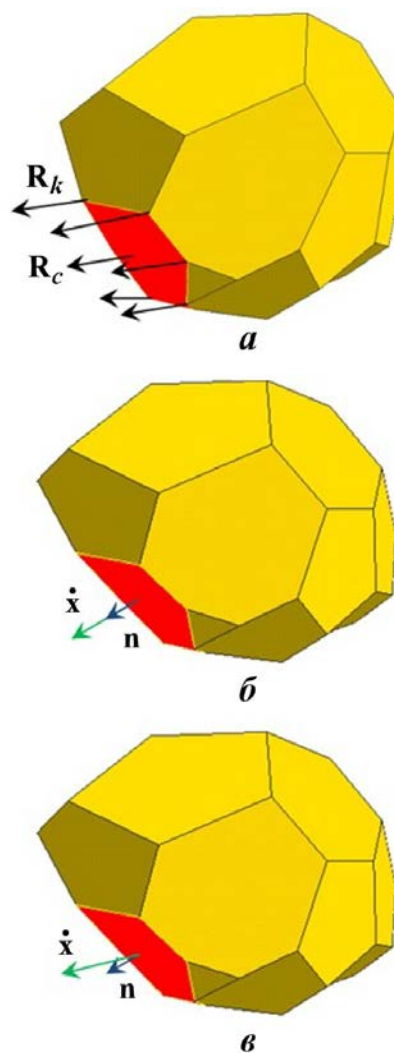


Рис. 1. Сравнение методов расчета скорости грани: *a* — начальное положение узлов и центра грани и их перемещения; *б* — скорость грани, реконструированная по методу 1; *в* — скорость грани, реконструированная по методу 2

ячеек по грани или узлов по ребру, другими словами, на топологию сетки. Это позволяет эффективно решать задачи аэродинамики (гидродинамики) с подвижными граничными условиями.

Численные эксперименты

Задача обтекания профиля NASA0012. В качестве численного эксперимента рассмотрим задачу нестационарного обтекания профиля NASA0012 [9] потоком вязкого сжимаемого газа. Задача решается в два этапа.

На первом этапе определяются АДХ неподвижного профиля крыла в стационарной постановке для получения соответствующих количественных характеристик. Эти характеристики будут использованы для сопоставления при прямом нестационарном расчете (тело само движется в среде) с результатами вычисления геометрических характеристик граничного условия *непроницаемая стенка* на основе различных алгоритмов.

На втором этапе проводится прямой нестационарный расчет с использованием двух подходов для вычисления скорости движения грани, основанных:

- 1) на предположении коллинеарности векторов скорости грани и нормали (метод 1);
- 2) восстановлению направления грани (метод 2).

Суть данного численного эксперимента состоит в том, чтобы показать существенное отклонение ожидаемых АДХ от стационарного решения уже на первых шагах по времени при использовании некорректного алгоритма для расчета скорости грани.

Для расчетов использовалась дискретная трехмерная модель двумерной задачи, содержащая ~ 160 тыс. ячеек (с тремя ячейками по оси, перпендикулярной плоскости симметрии) (рис. 2).

Для решения стационарной задачи рассматривался поток вязкого сжимаемого газа со следующими параметрами: $M_\infty = 0,184893$ — число Маха; $\alpha = 4^\circ$ — угол атаки; $T_\infty = 245,35$ К — температура набегающего потока; $P_\infty = 95\,610$ Па — статическое давление набегающего потока; $v_\infty = 58,1$ м/с — скорость набегающего потока.

На рис. 3, 4 показаны распределения турбулентной вязкости и амплитуды скорости стационарной задачи соответственно. Видны сформир-

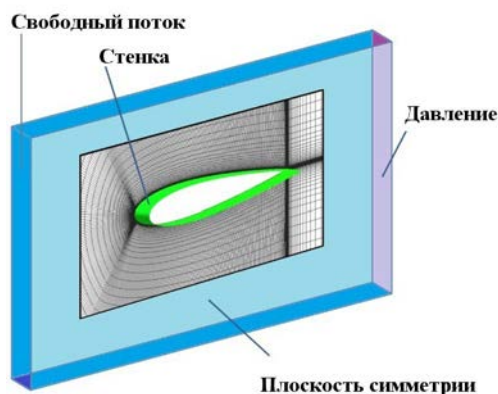


Рис. 2. Схема расчетной модели

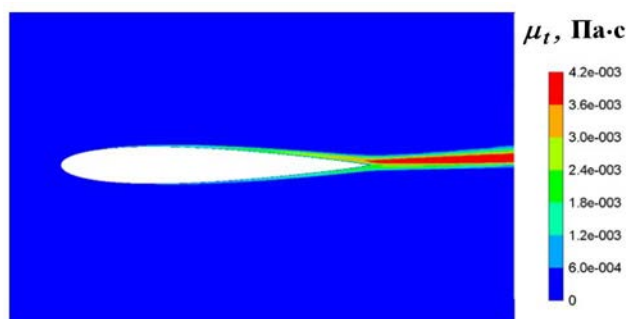


Рис. 3. Распределение турбулентной вязкости для стационарного решения

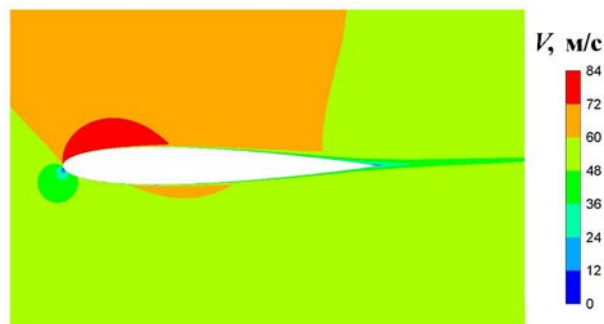


Рис. 4. Распределение амплитуды скорости для стационарного решения

рованный турбулентный след и характерное распределение поля скорости для данного режима течения. В стационарном расчете непроницаемая стенка была зафиксирована на протяжении всего расчета, поэтому конвективные потоки вычислялись на основе выражения (2).

Для того чтобы согласовать начальные данные нестационарного расчета с результатами моделирования, полученными на первом этапе, был

произведен переход в неподвижную систему координат с исправлением поля скоростей и граничных условий.

Для нестационарного расчета применялся подход деформации расчетной сетки с сохранением топологии связей. Так, все открытые границы были зафиксированы, для границы профиля крыла навязывалась скорость, эквивалентная заданной в стационарной задаче. Плоскость симметрии, сопряженная с открытыми границами и подвижной стенкой, являлась *свободной границей*. Координаты узлов при движении границы вычислялись согласно обратно-весовой интерполяции [8].

На рис. 5 показана дискретная модель в конечный момент моделирования.

При нестационарном расчете решалась прямая задача, т. е. вычислялись АДХ профиля

крыла при непосредственном движении. Скорость непроницаемой стенки (см. рис. 2) вычислялась по формулам (8) и (9) для каждого расчетного случая.

На рис. 6, 7 приведено сравнение распределений турбулентной вязкости на различные моменты времени при использовании двух разных подходов расчета скорости грани. Как видно из рисунков, в результате расчета по методу 1 происходит *отрыв* турбулентной вязкости. При применении метода 2 такого отрыва не наблюдается. Метод 2 также позволяет качественно и количественно сохранить поле скоростей, что корректно описывает физику процесса. Это наглядно демонстрирует сравнение распределений скоростей в прямой постановке на один и тот же момент времени (рис. 8).

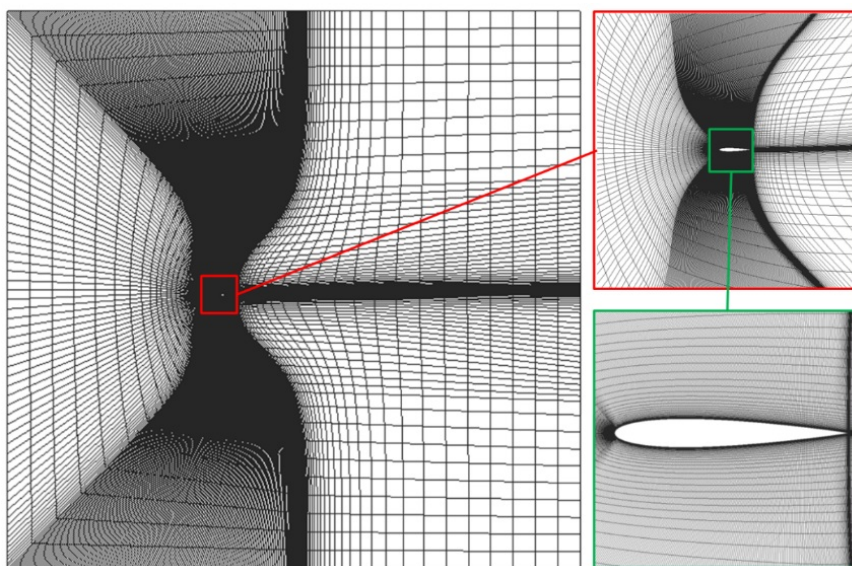


Рис. 5. Расчетная сетка на конечный момент времени расчета (профиль движется справа налево)

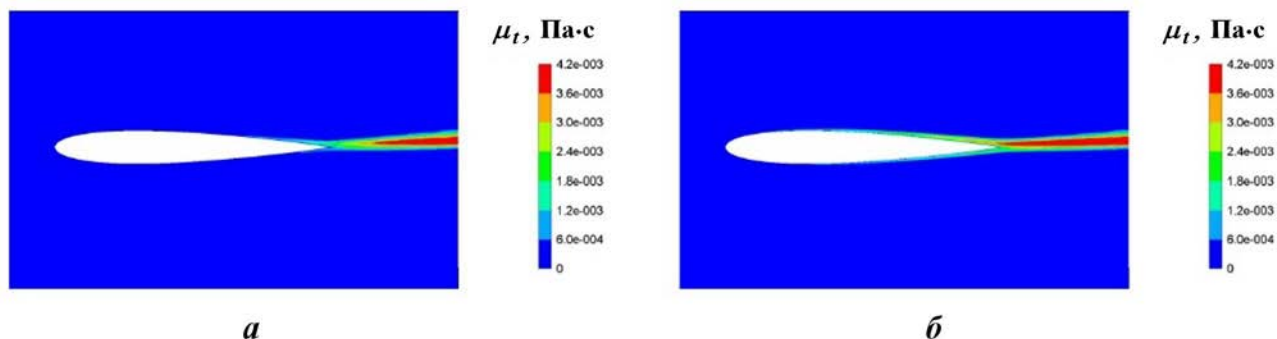


Рис. 6. Распределение турбулентной вязкости на момент времени 0,01: *а* — метод 1; *б* — метод 2

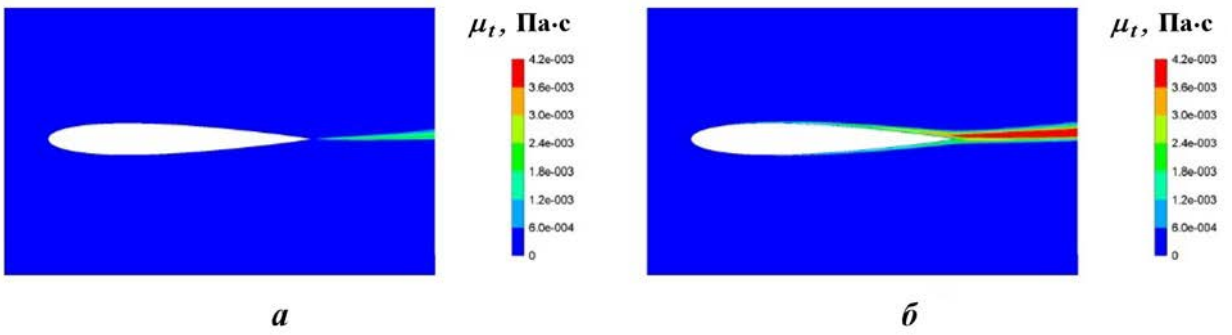


Рис. 7. Распределение турбулентной вязкости на момент времени 0,02: *а* — метод 1; *б* — метод 2

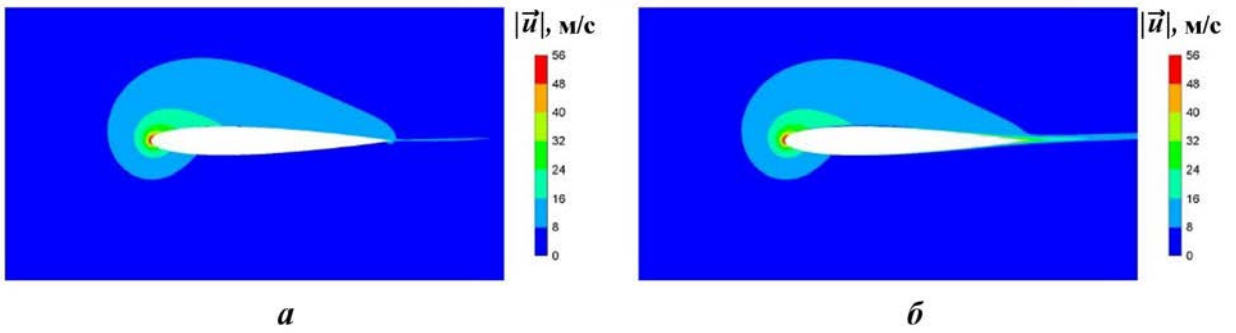


Рис. 8. Распределение модуля скорости на момент времени 0,02: *а* — метод 1; *б* — метод 2

Из рис. 8 видно, что модифицированный подход сохраняет качественное распределение модуля скорости на задней кромке крыла.

В то же время отрыв турбулентной вязкости сказывается на АДХ профиля крыла, что продемонстрировано на рис. 9.

На рис. 10 показано распределение аэродинамических нагрузок для двух этапов моделирования:

- 1) стационарный расчет до 5 000 итераций, соответствующий продувке профиля;
- 2) нестационарный расчет, соответствующий прямой задаче.

Видно, что при рестарте обе кривые, полученные с помощью метода 1, в отличие от метода 2 терпят разрыв.

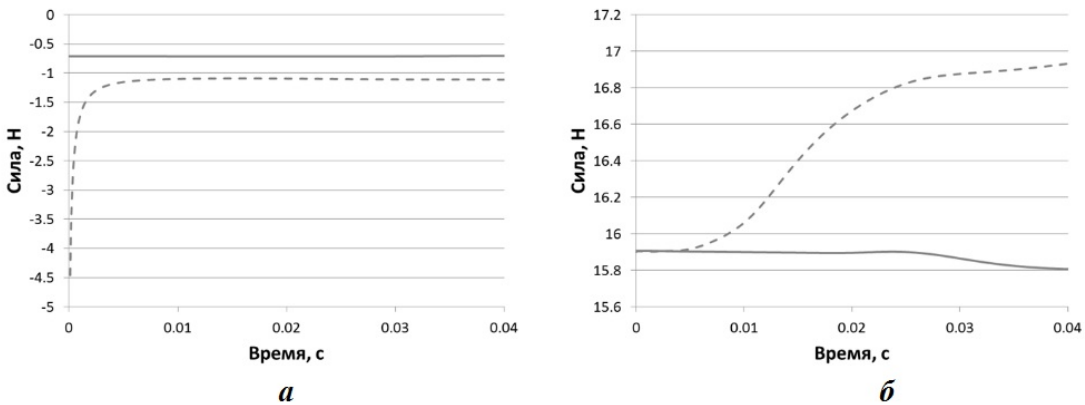


Рис. 9. Сравнение аэродинамических нагрузок, полученных при применении двух подходов, по времени: *а* — сила лобового сопротивления; *б* — подъемная сила; — — — метод 1; — — метод 2

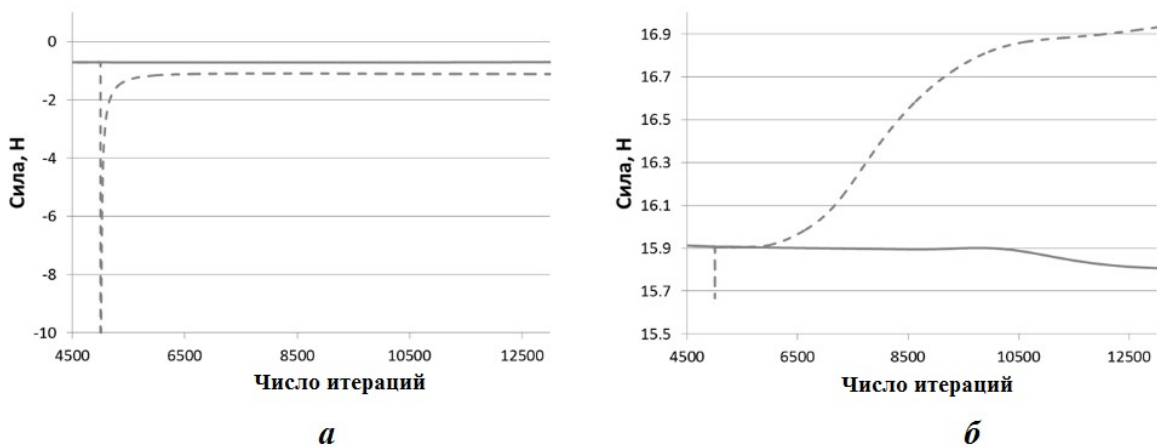


Рис. 10. Сравнение аэродинамических нагрузок, полученных при применении двух подходов, по итерациям: *а* — сила лобового сопротивления; *б* — подъемная сила; - - - метод 1; — метод 2

Задача обтекания крыла AGARD 445.6. Рассматривается обтекание крыла AGARD 445.6 [10], геометрия которого представлена на рис. 11. В сечении, параллельном направлению потока, модель имеет профиль *NACA65A004* (см. рис. 11, *а*).

Для расчетов использовалась дискретная нерегулярная трехмерная модель, содержащая ~ 2,3 млн полиэдральных ячеек (рис. 12). Открытые границы, соответствующие свободному потоку, лежат на расстоянии 20 хорд крыла.

Моделирование проводится в два этапа, как и для задачи обтекания профиля крыла *NACA0012*. Параметры потока для первого этапа характеризуются числом Маха $M_\infty = 0,678$, соответствующим $v_\infty = 227,54$ м/с, температурой набегающего потока 280,255 К, статическим

давлением $P_\infty = 20781,6$ Па и нулевым углом атаки. Второй этап моделирования соответствует задаче в прямой постановке, начальные распределения полей которой были получены путем преобразований результатов расчета первого этапа; шаг по времени принимался равным 0,0001 секунды.

На рис. 13 показано сечение расчетной сетки на начальный и конечный моменты времени.

На рис. 14, 15 приведено сравнение распределений турбулентной вязкости на начальный и конечный моменты времени при использовании двух разных подходов расчета скорости. Видно, что применение метода 2, в отличие от метода 1, позволяет сохранить качественное распределение турбулентной вязкости.

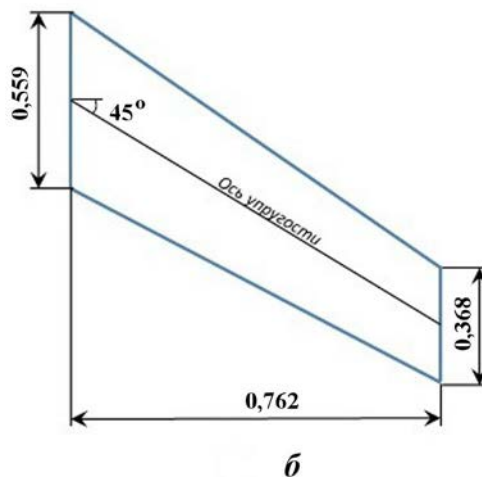
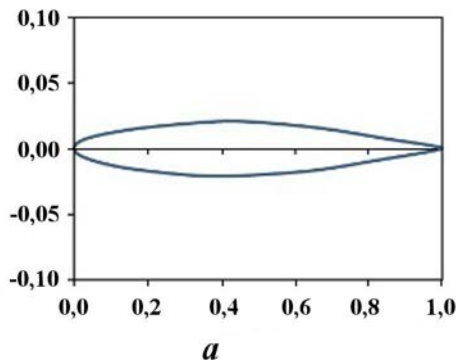


Рис. 11. Геометрия крыла: *а* — профиль крыла в безразмерном виде; *б* — эскиз крыла

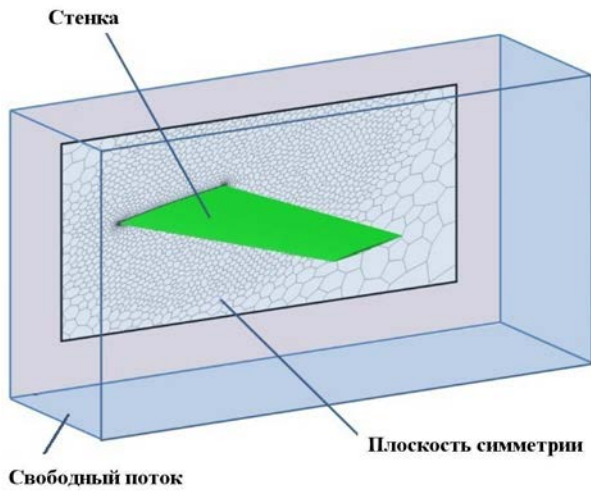
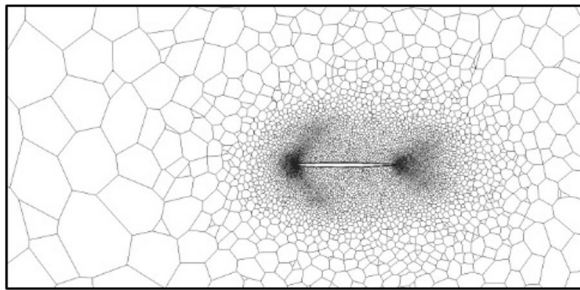


Рис. 12. Схема расчетной модели

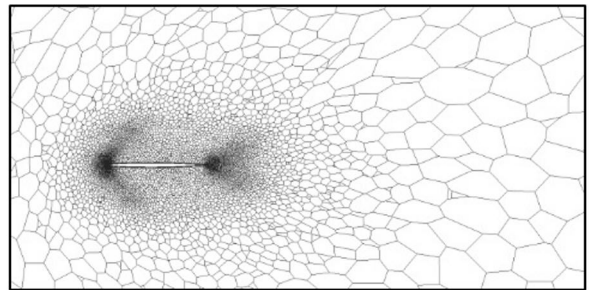
Для количественного сравнения двух подходов используются зависимости аэродинамических нагрузок (рис. 16). Здесь, как и для задачи с профилем *NACA0012*, при использовании метода 1 происходит разрыв в решении в точке рестарта (1000 итераций).

Анализ полученных результатов

Результаты численного моделирования характерных задач аэродинамики показывают ключевое отличие рассмотренных методов расчета скорости движения произвольной грани контрольного объема. Так, АДХ обтекаемых тел, полученные с помощью метода 2, сохраняют свою непрерывность. В то же время АДХ, полученные по методу 1, терпят разрыв в точке рестарта.

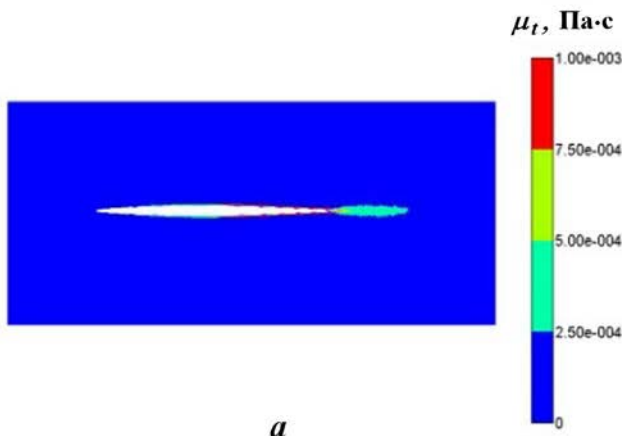


a

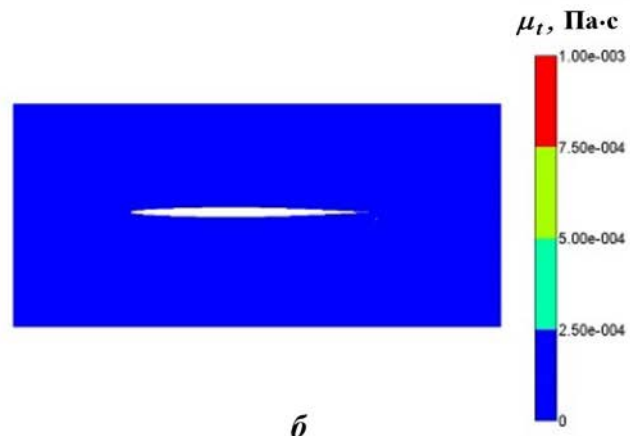


б

Рис. 13. Сечение дискретной модели: *a* — начальный момент времени; *б* — конечный момент времени (0,004 с)



a



б

Рис. 14. Распределения турбулентной вязкости, полученные по методу 1: *a* — начальный момент времени; *б* — конечный момент времени

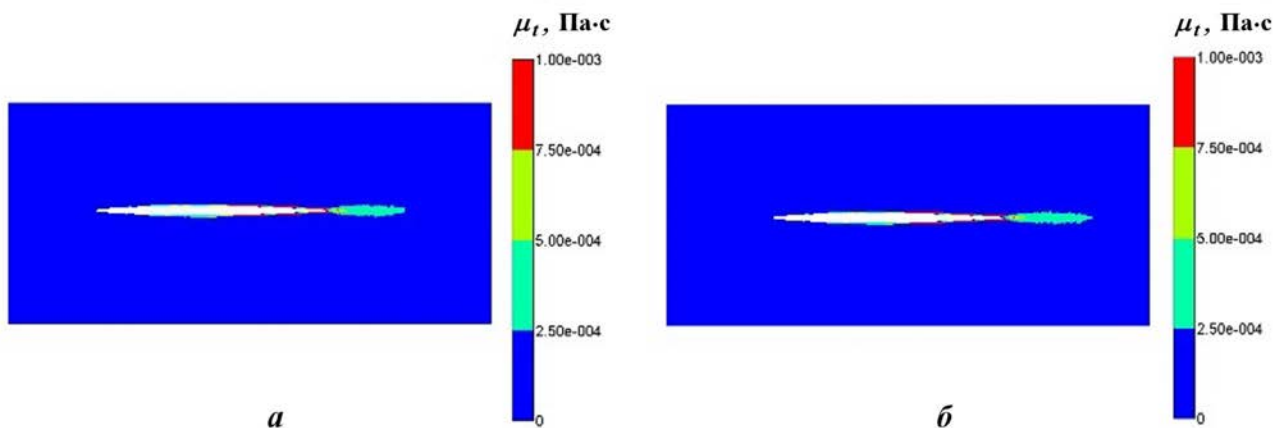


Рис. 15. Распределения турбулентной вязкости, полученные по методу 2: *a* — начальный момент времени; *б* — конечный момент времени

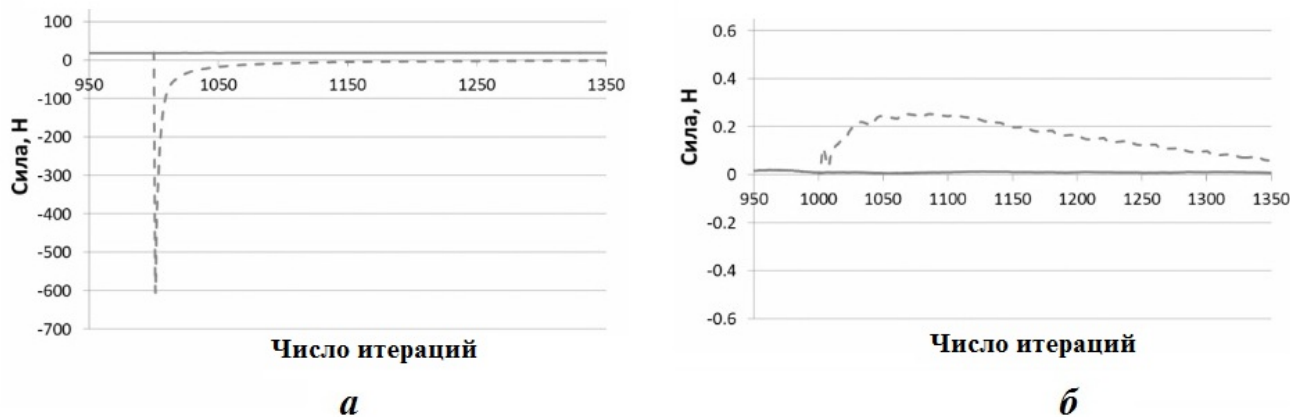


Рис. 16. Сравнение аэродинамических нагрузок, полученных при применении двух подходов, по итерациям: *a* — сила лобового сопротивления; *б* — подъемная сила; - - - метод 1; — — метод 2

Следует отметить, что для решения нестационарных задач используется подход двойного шага [15], поэтому подъемная сила для задачи обтекания профиля *NACA0012* на первом шаге по времени при использовании метода 1 успевает сойтись к стационарному решению в отличие от силы лобового сопротивления, которая остается некорректной на протяжении всего расчета.

Однако расчет АДХ крыла *AGARD 455.6* отличается от обтекания профиля ввиду наличия существенно трехмерного течения, а также использования неструктурированной расчетной сетки. Указанные факторы вкуче усложняют решение рассматриваемой задачи, что, в конечном итоге, приводит к более сильному разрыву кривых АДХ в точке рестарта и получению некорректных результатов в дальнейшем.

Причиной получения некорректного решения является существенное перестроение потока вблизи подвижных стенок ввиду несоответствия направлений векторов действительной скорости грани и скорости, вычисленной на основании выражения вида (8).

В свою очередь, предложенный подход вычисления скорости грани в виде соотношения (9) позволяет сохранить сформированный на этапе стационарного расчета пограничный слой обтекаемого объекта. Это преимущество является причиной неизменности АДХ обтекаемых объектов и турбулентного следа в процессе рестарта задачи, как показано на рис. 6, б; 7, б и 15.

Данный факт наглядно показывает важность корректного вычисления вектора скорости грани, так как соблюдение только условия геомет-

рической консервативности не гарантирует корректности получаемых результатов.

Предложенный в настоящей работе метод расчета скорости движения грани внедрен в пакет программ "Логос" [16–19] и применяется для решения задач с подвижными граничными условиями. Пакет программ "Логос" предназначен для решения задач вычислительной гидро-, аэродинамики и теплопереноса и в настоящее время широко используется для решения различных классов задач индустриального назначения [20, 21].

Заключение

В данной работе рассмотрены вопросы, связанные с проблемами при решении задач численной гидро- и аэродинамики в пакете программ "Логос". Большое внимание уделяется задаче корректного определения скорости движения грани контрольного объема в случае произвольной деформации расчетной сетки. Анализ полученных соотношений на основе условия геометрической консервативности позволил реконструировать вектор скорости грани, обеспечивающий корректность численной схемы.

Предложенная схема расчета скорости движения грани позволяет учитывать направление ее движения с соблюдением условия геометрической консервативности. Она позволяет корректно вычислять вектор скорости движения грани для различного рода деформаций расчетной сетки, что обеспечивает высокую точность при моделировании обтекания объекта с подвижными границами.

Применимость и эффективность предложенного метода продемонстрированы на характерных задачах численной аэродинамики в прямой постановке.

Результаты получены при поддержке национального проекта "Наука и университеты" в рамках программы Минобрнауки РФ по созданию молодежных лабораторий № FSWE-2021-0009 (научная тема "Разработка численных методов, моделей и алгоритмов для описания гидродинамических характеристик жидкостей и газов в естественных природных условиях и условиях функционирования индустриальных объектов в штатных и критических условиях на суперкомпьютерах петафлопсного класса").

Список литературы

1. *Meakin R. L., Suhs N. E.* Unsteady aerodynamic simulation of multiple bodies in relative motion // AIAA Paper 89-1996-CP, 1989.
2. *Rock S. G., Habchi S. D.* Application of an automated Chimera methodology to aircraft-canopy:ejection seat separation // AIAA Paper 98-0767, 1998.
3. *Eckstorm C. V., Seidel D. A., Sandford M. C.* Measurement of Unsteady Pressure and Structural Response for an Elastic Supercritical Wing. NASA Technical Paper 3443, 2003.
4. *Lakshminarayan V., Sitaraman J., Wissink A.* Sensitivity of rotorcraft hover predictions to mesh resolution in strand grid framework // AIAA Jurnal. 2019. Vol. 57, No 8. P. 3173–3184.
5. *Hall L. H., Parthasarathy V.* Validation of an automated Chimera: 6DOF methodology for multiple moving body problems // AIAA Paper 98-0753, 1998.
6. *Волков К. Н., Емельянов В. Н.* Течения и теплообмен в каналах и вращающихся полостях. М.: Физматлит, 2010.
Volkov K. N., Emelyanov V. N. Tcheniya i teploobmen v kanalakh i vrashchayushchikhsya polostyakh. М.: Fizmatlit, 2010.
7. *Софронов И. Д., Афанасова Е. А., Винокуров О. А., Воропинов А. И., Змушко В. В., Плетенёв Ф. А., Рыбаченко П. В., Саравев В. А., Соколова Н. В., Шамраев Б. Н.* Комплекс программ МИМОЗА для решения многомерных задач механики сплошной среды на ЭВМ "Эльбрус" // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1990. Вып. 2. С. 3–9.
Sofronov I. D., Afanasova E. A., Vinokurov O. A., Voropinov A. I., Zmushko V. V., Pletenyev F. A., Rybachenko P. V., Sarav V. A., Sokolova N. V., Shamraev B. N. Kompleks program MIMOZA dlya resheniya mnogomernykh zadach mekhaniki sploshnoy sredy na EVM "Elbrus" // Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov. 1990. Vyp. 2. S. 3–9.

8. Luke E., Collins E., Blades E. A fast mesh deformation method using explicit interpolation // *J. Comp. Phys.* 2012. Vol. 231. P. 586–601.
9. Ladson C. L., Brooks Jr. C. W., Hill A. S., Sproles D. W. Computational Program to Obtain Ordinates for NACA Airfoils. NASA Technical Memorandum 4741, 1996.
10. E. Carson Yates, Jr. AGARD Standard Aeroelastic Configurations for Dynamic Response I-WING 445.6. AGARD Report № 765. NASA Langley Research Center. Hampton, USA, 1988.
11. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей: В 2 томах: Т. 1: Пер. с англ. М.: Мир, 1991.
Fletcher K. Vychislitelnye metody v dinamike zhidkostey: V 2 tomakh: T. 1: Per. s angl. M.: Mir, 1991.
12. Thomas P. D., Lombard C. K. Geometric conservation law and its application to flow computations on moving grids // *AIAA Jurnal.* 1979. Vol. 17, No 10. P. 1030–1037.
13. Farhat Ch., Geuzaine Ph., Grandmonty C. The Discrete Geometric Conservation Law and the Nonlinear Stability of ALE Schemes for the Solution of Flow Problems on Moving Grids // *J. Comp. Phys.* 2001. Vol. 174. P. 669–694.
14. Lesoinne M., Farhat Ch. Geometric conservation laws for flow problems with moving boundaries and deformable meshes, and their impact on aeroelastic computations // *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 1996. Vol. 134. P. 71–90.
15. Blazek J. Computational fluid dynamics: principles and applications. Elsevier, 2001.
16. Козелков А. С., Шагалиев Р. М., Курюлин В. В., Ялозо А. В., Лашкин С. В. Исследование потенциала суперкомпьютеров для масштабируемого численного моделирования задач гидродинамики в промышленных приложениях // *Вычислительная математика и математическая физика.* 2016. Т. 56, № 8. С. 1524–1535.
Kozalkov A. S., Shagaliev R. M., Kurulin V. V., Yalozo A. V., Lashkin S. V. Issledovaniye potentsiala superkompyuterov dlya masshtabiruемого chislenного modelirovaniya zadach gidrodinamiki v industrialnykh prilozheniyakh // *Vychislitel'naya matematika i matematicheskaya fizika.* 2016. Т. 56, № 8. С. 1524–1535.
17. Стручков А. В., Козелков А. С., Жучков Р. Н., Уткина А. А., Саразов А. В. Численное моделирование задач аэродинамики со статической адаптацией сетки под особенности решения // *Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов.* 2019. Вып. 2. С. 55–67.
Struchkov A. V., Kozelkov A. S., Zhuchkov R. N., Utkina A. A., Sarazov A. V. Chislennoe modelirovanie zadach aerodinamiki so staticheskoy adaptatsiyey setki pod osobennosti resheniya // *Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov.* 2019. Vyp. 2. S. 55–67.
18. Тятюшккина Е. С., Козелков А. С., Куркин А. А., Пелиновский Е. Н., Курюлин В. В., Плыгунова К. С., Уткин Д. А. Verification of the LOGOS software package for tsunami simulations // *Geosciences.* 2020. Vol. 10. P. 385. doi:10.3390/geosciences10100385.
19. Дерюгин Ю. Н., Саразов А. В., Жучков Р. Н. Особенности построения методики расчета на сетках типа "Химера" для неструктурированных сеток // *Математическое моделирование.* 2017. Т. 29, № 2. С. 106–118.
Deryugin Yu. N., Sarazov A. V., Zhuchkov R. N. Osobennosti postroeniya metodiki raschyeta na setkakh tipa "Khimera" dlya nestrukturirovannykh setok // *Matematicheskoe modelirovanie.* 2017. Т. 29, № 2. С. 106–118.
20. Козелков А. С., Стреlets Д. Ю., СокULER М. С., Арифиллин Р. Н. Application of mathematical modeling to study near-field pressure pulsations of a near-future prototype supersonic business aircraft // *J. Aerosp. Eng.* 2022. Vol. 35(1). Paper 04021120.
21. Козелков А. С., Стручков А. В., Стреlets Д. Ю. Two methods to improve the efficiency of supersonic flow simulation on unstructured grids // *Fluids.* 2022. Vol. 7. P. 136. <https://doi.org/10.3390/fluids7040136>.

Статья поступила в редакцию 16.11.22.

УДК 533.95, 621.373.826

СИММЕТРИЧНЫЕ КОНФИГУРАЦИИ ЛАЗЕРНЫХ ИСТОЧНИКОВ ДЛЯ ПРЯМОГО ОБЛУЧЕНИЯ МИШЕНИ. СИММЕТРИЯ ТЕТРАЭДРА

С. А. Бельков, С. В. Бондаренко, Л. В. Солнышкова
(ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области)

Описан метод построения симметричных систем лазерного облучения с повышенными характеристиками однородности освещенности термоядерной капсулы. Найдены оптимальные конфигурации лазерных источников для прямого облучения сферической мишени, обладающие симметриями вращения тетраэдра, и проанализированы их возможности с точки зрения достигаемых уровней однородности лазерного облучения термоядерной капсулы. Предложен критерий оценки эффективности конфигураций лазерных источников. Проведено сопоставление эффективности редукции низших мод в структуре лазерной засветки сферической капсулы в поясных конфигурациях лазерных источников, построенных на основе квадратурных формул Гаусса—Лежандра, и в конфигурациях, обладающих симметрией тетраэдра.

Ключевые слова: инерциальный термоядерный синтез, мишень прямого облучения, однородность облучения мишени, поясная и симметричная системы облучения, симметрия тетраэдра.

Введение

В направлении инерциального термоядерного синтеза одной из ключевых задач является обеспечение высокой однородности воздействия излучения на лазерную мишень, которая позволяет осуществить глубокое объемное сжатие термоядерного топлива, необходимое для достижения условий термоядерного горения.

В схеме прямого (лазерного) облучения мишени можно выделить два способа достижения высокой однородности.

В работе [1] сформулирован метод построения осесимметричной системы лазерного облучения (также будем называть такую систему поясной, поскольку источники в ней распределены по поясам) мишени с расположением лазерных источников, определяемым нулями полиномов Лежандра $P_n(\theta)$. Эффективность этого метода обусловлена высокой алгебраической точностью квадратурных формул¹ Гаусса—Лежандра, за счет чего достигается существенная редукция осесимметричных сферических гармоник (в современной англоязычной научной литературе называемых *модами*) низших порядков в распределении интенсивности поля лазерного излучения на поверхности сферической капсулы.

Любая система лазерного облучения мишени, вследствие конечности числа лазерных источников, неизбежно порождает азимутальную зависимость в распределении лазерной освещенности капсулы. Устранение низших азимутальных мод в работе [1] достигается путем создания поясов лазерных источников достаточной кратности. Видно, что эффективность редукции азимутальных мод заметно ниже.

¹Напомним, что под алгебраической точностью понимается максимальная степень многочлена, для которой результат интегрирования по квадратурным формулам является точным.

Второй подход заключается в использовании свойств симметрии правильных многогранников, поскольку наложение условий симметрии само по себе ведет к значительной редукции числа возможных мод. Так, при симметрии тетраэдра запрещенными оказываются моды порядков $l = 1, 2, 5$. Всюду далее будем использовать термин *симметричная конфигурация* для обозначения конфигурации лазерных источников, обладающей вращательными симметриями одного из правильных многогранников (тел Платона).

Симметрия наиболее высокого порядка — симметрия икосаэдра-додекаэдра — заложена в конструкции 60-пучковой системы прямого (лазерного) облучения мишени на установке OMEGA (США) [2]. Американские исследователи предложили использовать возможности установки OMEGA для проведения экспериментов по непрямоу (рентгеновскому) облучению термоядерной капсулы, создавая совокупную симметрию тетраэдра для 60 лазерных источников и 4 отверстий для ввода излучения в сферический бокс-конвертор [3]. Возможность такого построения обусловлена тем, что симметрии тетраэдра являются подгруппой группы симметрий икосаэдра.

Проведенные позднее на установке OMEGA эксперименты с тетраэдральным хольраумом [4, 5] продемонстрировали возможность использования одной и той же симметричной конфигурации лазерных источников как для прямого, так и непрямого облучения термоядерной мишени. Напомним, что попытки реализовать прямое облучение криогенной капсулы на зажигание на мегаджоульной установке NIF (США) сталкиваются с большими проблемами в отношении симметрии облучения мишени [6, 7], поскольку поясная система облучения установки NIF не позволяет создать однородную лазерную засветку экваториальных областей сферической капсулы.

Для решения задач численной оптимизации облучения мишени в работе [3] были найдены моды 3-го, 4-го и 6-го порядков, разрешенные условиями симметрии тетраэдра. Для анализа условий однородности облучения рентгеновской капсулы этого достаточно, поскольку в схеме непрямого облучения, как известно, происходит эффективное сглаживание мелкомасштабных неоднородностей при переносе квазитеплового излучения со стенок бокса-конвертора на поверхность капсулы. В этом заключается преимущество метода непрямого воздействия на мишень.

В случае прямого облучения сферической капсулы с термоядерным горючим моды высокого порядка также являются значимыми. Здесь полагаются на хорошее качество лазерного пятна (отсутствие спеклов и т. д.), понимая под этим монотонное падение амплитуд мод, создаваемых одним пятном, с ростом их порядка. Заметим, что для излучения лазерного драйвера получение "хороших" пятен лазерной засветки на мишени представляет собой непростую задачу, требующую применения специальных методов сглаживания возникающих когерентных структур. Это, однако, является отдельной проблемой, неразрешимой с помощью оптимизации геометрии лазерных источников. Поэтому в данном анализе будем считать все лазерные пятна на мишени "хорошими" и, более того, идентичными.

Использованный в работе [3] метод установления вида допускаемых симметрией тетраэдра мод заключался в нахождении симметричных полиномов от декартовых координат x, y, z (поскольку, как известно, сферические гармоники являются многочленами степени, соответствующей их порядку). Этот метод нагляден в отношении низших мод и в этом случае быстро приводит к результату. Установление вида симметричной моды требует перебора всех возможных симметричных произведений декартовых координат, что с ростом порядка моды становится все более трудной задачей.

В настоящей работе предлагается метод нахождения симметричных мод с помощью численного решения линейных систем уравнений совместности для матриц преобразования сферических гармоник при поворотах группы симметрий вращения правильных многогранников (тел Платона). Изложению этого подхода посвящен разд. 1.

Установление вида симметричных мод позволило математически сформулировать задачу их дальнейшей редукции как задачу минимизации квадратичной по этим модам формы невязки. Результаты многопараметрической минимизации для случая симметрии тетраэдра излагаются в разд. 2. Авторами был найден новый класс симметричных систем лазерного облучения с повышенными характеристиками однородности освещенности термоядерной капсулы. Здесь же приводятся результаты непосредственной численной верификации достигаемых в оптимизированных симметричных конфигурациях лазерных источников однородностей облучения мишени.

В разд. 3, воспользовавшись оригинальным подходом для эффективной редукции низших мод, предложенным в работе [1], авторы представляют усовершенствованную осесимметричную систему с целью установления минимального числа лазерных источников, необходимых для устранения всех низших мод вплоть до некоторого порядка. Это позволило в разд. 4 провести сравнение эффективности редукции низших мод в поясных системах облучения и предложенных авторских конфигурациях, обладающих симметрией тетраэдра.

1. Моды, обладающие симметрией тетраэдра

Для количественного анализа распределения лазерной освещенности на поверхности сферической мишени будем пользоваться системой нормированных сферических функций, определяемых в сферической системе координат в виде

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos\theta) e^{im\varphi}, \quad m \geq 0, \quad (1)$$

где $P_l^m(\cos\theta)$ — присоединенный полином Лежандра степени l и порядка m [8]; θ — полярный угол, отсчитываемый от оси OZ декартовой системы координат; φ — азимутальный угол, отсчитываемый от плоскости XOZ . Для $m < 0$

$$Y_{l,-m}(\theta, \varphi) = (-1)^m Y_{l,m}^*(\theta, \varphi).$$

Функции $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ позволяют математически проанализировать структуру освещенности сферической мишени, а именно определить вклад в неоднородность различных пространственных масштабов, которые теперь оказываются связанными с амплитудами разложения распределения интенсивности по сферическим гармоникам (1).

Генераторами группы трехмерных вращений в квантовой механике являются матрицы оператора момента \hat{L} [9]. При поворотах системы координат гармоники одинакового порядка преобразуются друг в друга.

Преобразование сферических гармоник при произвольном повороте на угол φ вокруг оси, ориентированной по вектору \vec{n} , представляется оператором

$$\hat{M}(\vec{n}, \varphi) = \exp(-i\hat{L}\vec{n}\varphi). \quad (2)$$

Функции (2) в квантовой механике называются функциями Вигнера [9].

Симметричная комбинация мод порядка l , которая при повороте вокруг любой из осей симметрии $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3, \vec{n}_4$ переводится сама в себя, представляется суммой

$$\Psi_l^{sym} = \sum_m \alpha_m Y_{lm}. \quad (3)$$

То есть должно выполняться соотношение

$$M_l(\vec{n}_k, \varphi) \Psi_l^{sym} = \Psi_l^{sym}, \quad k = \overline{1,4}, \quad (4)$$

где $M_l(\vec{n}_k, \varphi)$ — матрица представления оператора поворота $\hat{M}(\vec{n}_k, \varphi)$.

Система (4) позволяет численно определить вид симметричных мод Ψ_l^{sym} . Если такое решение существует, значит, существует мода порядка l , удовлетворяющая наложенным условиям симметрии. Симметричная мода может быть не единственной. Если система (4) не имеет решения, значит, симметричной моды данного порядка l не существует.

Наличие вращательной симметрии позволяет построить симметричное семейство источников. Если задано направление $\vec{\Omega}_1 = (\sin\theta_1 \cos\varphi_1, \sin\theta_1 \sin\varphi_1, \cos\theta_1)$ одного источника, то применение к $\vec{\Omega}_1$ группы симметрий вращения тетраэдра порождает семейство из 12 источников, переходящих друг

в друга при таких вращениях. При этом углы θ_1, φ_1 являются свободными параметрами, которые задают базовый источник и могут быть использованы для численной оптимизации.

Отметим еще раз, что численное решение системы (4) дает моды, обладающие симметриями вращения тетраэдра. В полной группе симметрий тетраэдра, включающей зеркальные отражения, часть мод отсутствует. Наложение условий полной симметрии тетраэдра приводит к дополнительным ограничениям, уменьшая число параметров, доступных для оптимизации. Можно сказать по-другому: найденные в результате численной оптимизации конфигурации источников (см. разд. 2) не отображаются друг в друга при зеркальном отражении относительно плоскости симметрии тетраэдра. Применение зеркальной симметрии переводит условно правые конфигурации в условно левые и наоборот. Число симметричных мод при этом уменьшается, что, конечно, означает некоторое улучшение однородности. Однако достигаемое при этом улучшение однородности меньше, чем в случае применения дополнительных источников для поэтапной численной оптимизации по предлагаемому сценарию. Опыт авторов свидетельствует об этом.

Полученные с помощью разработанного метода симметричные моды $\Psi_3^{tetr}, \Psi_4^{tetr}, \Psi_{6a}^{tetr}, \Psi_{6b}^{tetr}$ ² совпадают с модами, найденными в работе [3] (после выполнения простых координатных и алгебраических преобразований). Американские авторы находили симметричные моды перебором симметричных комбинаций из произведений декартовых координат. Этот метод, легко и быстро приводящий к результату для низших мод (при $l = 3, 4, 6$), становится все более громоздким с ростом порядка моды l .

Предлагаемый подход нахождения симметричных мод результативен и для мод высоких порядков. Для процедуры минимизации потребуются значения коэффициентов α_m в (3), которые могут быть найдены в результате численного решения системы уравнений (4). Другое дело, что численная оптимизация систем с большим числом параметров может представлять проблему.

Авторами были найдены симметричные конфигурации из 36, 48 и 60 лазерных источников с помощью вполне стандартных алгоритмов численной оптимизации. Достигаемые характеристики однородности освещенности сферической капсулы, как будет показано далее, вполне достаточны для целей термоядерного синтеза.

2. Симметричные конфигурации лазерных источников

В этом разделе приводятся найденные в результате численной оптимизации конфигурации лазерных источников. Для минимальной системы из 12 источников расчет приводит к их локализации в 12 вершинах икосаэдра (лежащих на пересечении нулевых изолиний симметричных мод Ψ_3^{tetr} и Ψ_4^{tetr}).

Конфигурации *Tetr-36* и *Tetr-36-dis*. Нетривиальный результат получается для системы из 36 лазерных источников (порождаемых тремя базовыми). Составленная форма невязки [10] в этом случае выглядит следующим образом:

$$\ell_{36}^{tetr}(\theta_1, \varphi_1, \theta_2, \varphi_2, \theta_3, \varphi_3) = \sum_{i=3,4,6a,6b,7,8} (\Psi_i^{tetr}(\theta_1, \varphi_1) + \Psi_i^{tetr}(\theta_2, \varphi_2) + \Psi_i^{tetr}(\theta_3, \varphi_3))^2.$$

Для 36 источников можно задействовать еще два параметра для численной оптимизации — взаимную разноэнергетичность симметричных семейств из 12 пучков. Тогда форма невязки примет вид³

$$\ell_{36}^{tetr}(\theta_1, \varphi_1, \theta_2, \varphi_2, \theta_3, \varphi_3, p_2, p_3) = \sum_{i=3,4,6a,6b,7,8,9a,9b} (\Psi_i^{tetr}(\theta_1, \varphi_1) + p_2 \Psi_i^{tetr}(\theta_2, \varphi_2) + p_3 \Psi_i^{tetr}(\theta_3, \varphi_3))^2.$$

Задача минимизации позволила определить координаты $\theta_1, \varphi_1, \theta_2, \varphi_2, \theta_3, \varphi_3$ трех базовых источников. Положения остальных источников определяются применением вращательных симметрий тетраэдра (4).

² Ψ_{6a}^{tetr} и Ψ_{6b}^{tetr} — две симметричные моды, полученные в результате решения системы (4) при $l = 6$.

³ p_2, p_3 — параметры минимизации невязки за счет относительной разноэнергетичности симметричных семейств лазерных источников ($p_1 = 1$).

На рис. 1 показано положение осей лазерных источников (и приведены координаты базовых источников) в конфигурациях *Tetr-36* и *Tetr-36-dis*, удовлетворяющих условиям $\ell_{36}^{tetr}(\theta_1, \varphi_1, \theta_2, \varphi_2, \theta_3, \varphi_3) = 0$ и $\ell_{36-dis}^{tetr}(\theta_1, \varphi_1, \theta_2, \varphi_2, \theta_3, \varphi_3, p_2, p_3) = 0$ соответственно. Полярный угол θ отсчитывался от оси трехкратной симметрии вращения тетраэдра, а азимутальный угол φ — от плоскости, проходящий через две вершины тетраэдра. Видно, что геометрические различия между двумя полученными конфигурациями минимальны.

Численные расчеты освещенности сферической капсулы в найденных симметричных конфигурациях источников позволили определить уровни однородности облучения для различных значений оптической толщины Δ_{IB} относительно процесса обратно-тормозного (столкновительного) поглощения лазерного излучения [11] в плазменной короне мишени в простейшем предположении равномерного по углам распределения падающего на мишень лазерного излучения. Ослабление рассеянного мишенью лазерного излучения на изотермической волне разрежения разгружающейся плазмы происходило по закону

$$R(\mu) = \exp(-\Delta_{IB}\mu^3), \quad (5)$$

где μ — косинус угла падения излучения на мишень; значение оптической толщины Δ_{IB} в расчетах варьировалось. При этом какими-либо эффектами когерентного наложения лазерных пучков пренебрегалось в предположении, что на мишени лазерные интенсивности просто суммируются.

Вычисления Δ_{IB} в модели стационарной лазерной абляции [11] для аблятора капсулы из пластика (СН) дают следующий скейлинг оптической толщины лазерной короны:

$$\Delta_{IB}^{(CH)} = \frac{0,26 t}{I_{abs}^{2/3} \lambda_L^{10/3}}, \quad (6)$$

где время t измеряется в нс, поглощенная интенсивность I_{abs} — в 10^{15} Вт/см², а длина волны λ_L — в микронах.

Отметим, что высокие уровни однородности лазерной засветки капсулы потребовали модификации алгоритмов расчета лазерной засветки мишени. Целью таких расчетов является подтверждение редукции низших мод, достигаемой в предлагаемых конфигурациях лазерных источников. Демонстрация в расчетах редукции таких мод требует достижения точности вычислений распределения лазерного поглощения на мишени не ниже 10^{-4} .

Авторами специально была разработана монте-карловская методика расчета лазерной освещенности сферической мишени системой большого числа произвольно ориентированных лазерных источников. Для убыстрения сходимости интегральных сумм в монте-карловских расчетах использовались псевдослучайные числа *LP* τ -последовательности [12], так как другими методами требуемой

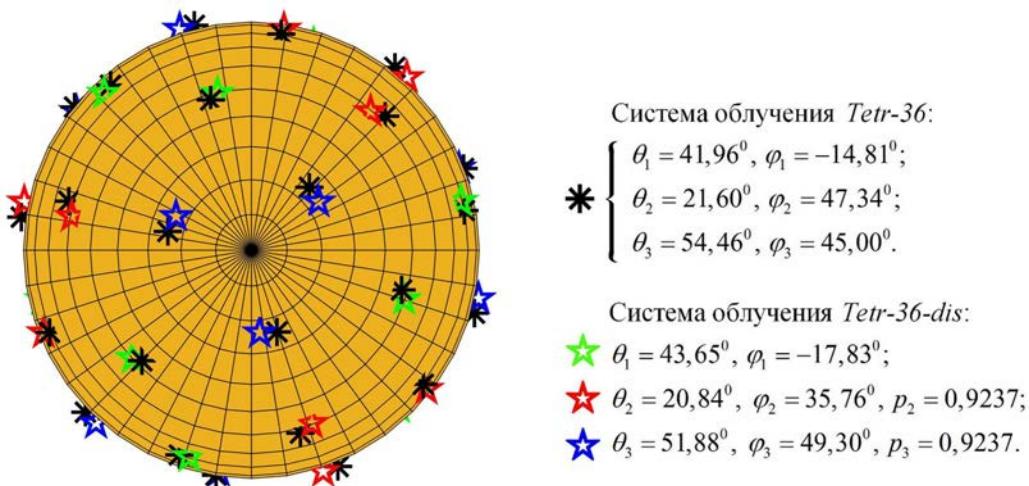


Рис. 1. Расположение лазерных источников конфигураций *Tetr-36* и *Tetr-36-dis*

точности расчетов достичь не удалось. Эти числа имеются, в частности, в интерактивной среде математических вычислений Matlab, в которой они называются числами Соболя.

При проведении численного моделирования предполагалось, что каждый лазерный пучок является однородным и засвечивает обращенную к нему полусферу мишени. Лазерное энерговыделение на поверхности мишени происходит в соответствии с законом (5) ослабления интенсивности света. Помимо непосредственной численной верификации достигаемой редукции мод, выполненные расчеты позволили также проследить изменение во времени вклада в неоднородность симметричных мод различных порядков при изменении оптической толщины Δ_{IB} мишенной плазмы согласно (6).

Несмотря на минимальные геометрические различия между двумя полученными конфигурациями *Tetr-36* и *Tetr-36-dis*, различия в амплитудах симметричных мод в них оказываются вполне ощутимыми, как можно видеть из рис. 2, где приведены значения *парциальных* неоднородностей ε_l для различных значений оптической толщины Δ_{IB} мишенной плазмы.

Следовательно, дополнительная взаимная компенсация мод в конфигурации *Tetr-36-dis* достигается, главным образом, за счет введения небольших различий в значения энергий между симметричными семействами лазерных источников. Снижение полной лазерной энергии на мишени в конфигурации *Tetr-36-dis* составляет при этом всего 5 %.

Амплитуды симметричных мод меняют знаки и, как видно из рис. 2, обращаются в нуль на рассмотренном интервале значений Δ_{IB} . Отметим, что обеднение в результате численной оптимизации спектра мод в конфигурации *Tetr-36-dis* не дает существенного суммарного уменьшения полной неоднородности по сравнению с конфигурацией *Tetr-36*.

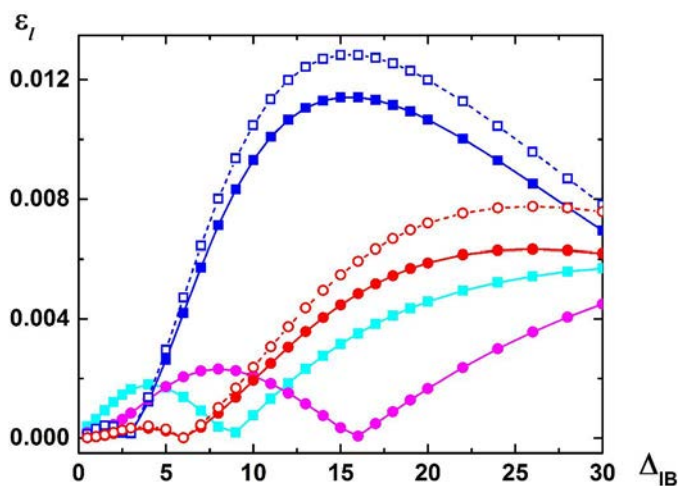


Рис. 2. Амплитуды парциальных неоднородностей в конфигурациях *Tetr-36* (—■— ε_9 ; —■— ε_{10} ; —●— ε_{11} ; —●— ε_{12}) и *Tetr-36-dis* (- - □ - - ε_{10} ; - - ○ - - ε_{12})

Конфигурации *Tetr-48* и *Tetr-48-dis*. Были найдены парные зеркально-симметричные конфигурации из 48 лазерных источников. С точностью до зеркальной симметрии в результате численной оптимизации получены одна конфигурация для случая лазерных пучков с равной энергией (*Tetr-48*) и одна конфигурация с несколько различающейся энергией в четырех симметричных семействах лазерных источников (*Tetr-48-dis*). Найденные конфигурации обнуляют соответствующие составленные формы невязок $\ell_{48}^{tetr}(\theta_1, \varphi_1, \theta_2, \varphi_2, \theta_3, \varphi_3, \theta_4, \varphi_4)$ и $\ell_{48-dis}^{tetr}(\theta_1, \varphi_1, \theta_2, \varphi_2, \theta_3, \varphi_3, \theta_4, \varphi_4, p_2, p_3, p_4)$. Расположение источников показано на рис. 3.

Формы невязок ℓ_{48}^{tetr} , ℓ_{48-dis}^{tetr} составлены аналогично предыдущим конфигурациям. Различия заключаются лишь в количестве параметров минимизации и соответственно числе устраняемых мод. В конфигурации *Tetr-48* устраняются все моды вплоть до 9-го порядка включительно, а в конфигурации *Tetr-48-dis* — все моды, включая моду 11-го порядка. Снижение суммарной энергии в конфигурации *Tetr-48-dis* составляет примерно 5,2 %.

Видно, что, хотя различия в положении осей лазерных пучков невелики, характеристики однородности облучения мишени различаются заметным образом, что видно по парциальным неоднородностям, показанным на рис. 4.

Конфигурация *Tetr-60-dis*. Для случая 60 источников в результате 14-параметрической оптимизации была найдена конфигурация с пятью разноэнергетическими симметричными семействами источников, обладающая лучшими характеристиками однородности (*Tetr-60-dis*). Она показана на рис. 5.

Видно, что удалось получить достаточно равномерное по телесному углу распределение лазерных источников. В структуре освещенности остаются симметричные моды высокого порядка, соответ-

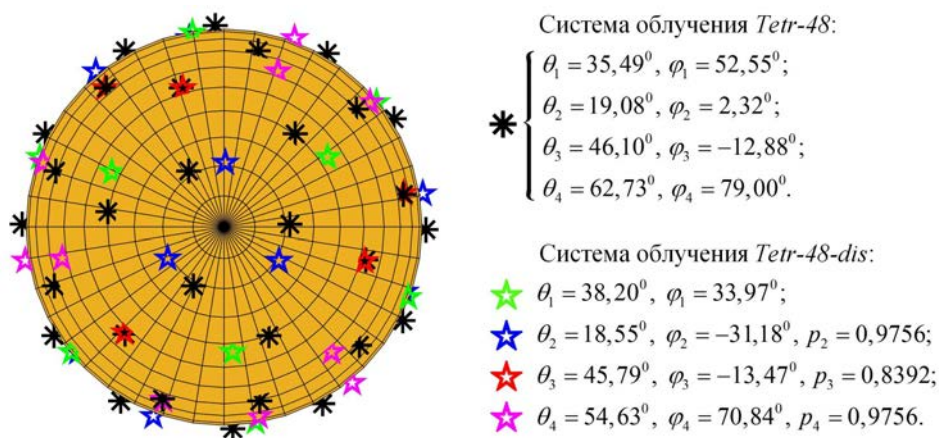


Рис. 3. Расположение лазерных источников в конфигурациях *Tetr-48* и *Tetr-48-dis*

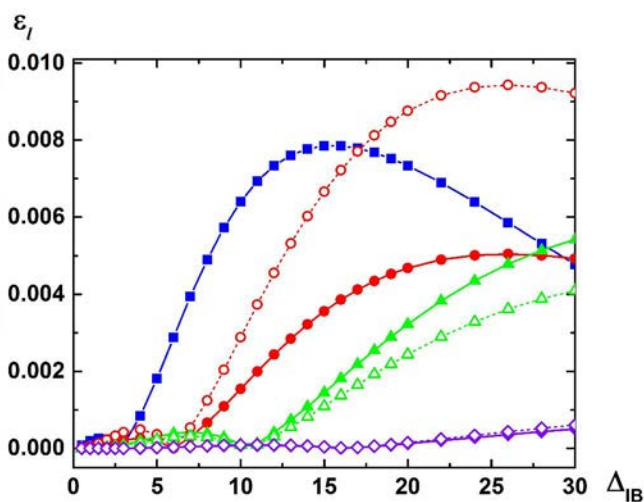


Рис. 4. Амплитуды парциальных неоднородностей в конфигурации *Tetr-48* (—■— ε_{10} ; —●— ε_{12} ; —▲— ε_{14} , —◆— ε_{16}) и *Tetr-48-dis* (---○--- ε_{12} ; ---△--- ε_{14} ; ---◇--- ε_{16})

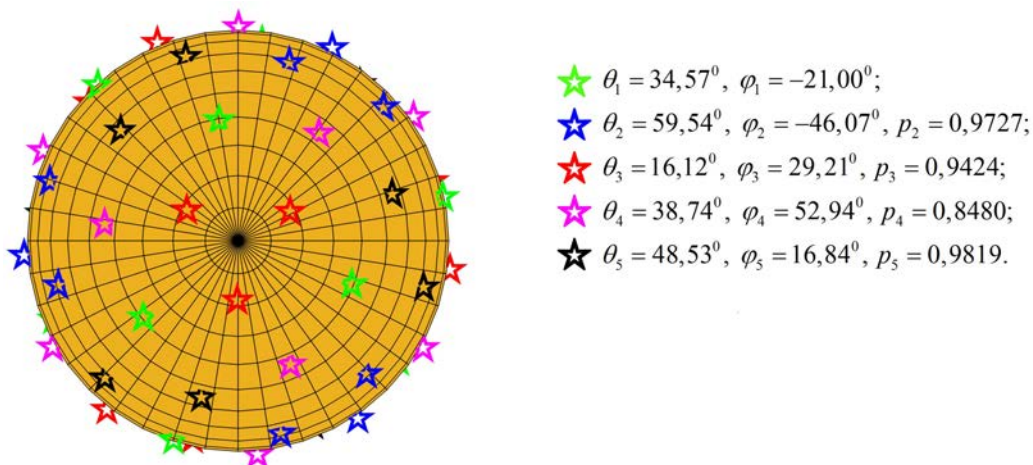


Рис. 5. Расположение лазерных источников в конфигурации *Tetr-60-dis*

ствующие мелкомасштабной структуре неоднородности, что можно видеть из данных, приведенных на рис. 6. Снижение суммарной энергии вследствие разноэнергетичности пяти симметричных семейств источников составляет примерно 5 %.

На рис. 7 показаны среднеквадратичные неоднородности ε лазерной освещенности капсулы для найденных конфигураций лазерных источников, обладающих симметрией тетраэдра. Видно, что предложенная стратегия оптимизации с ростом числа источников приводит к неуклонному улучшению однородности лазерного воздействия на термоядерную капсулу.

Напомним, что среднеквадратичная неоднородность ε и парциальные неоднородности ε_l связаны простым соотношением

$$\varepsilon = \sqrt{\sum_{l=1}^{\infty} \varepsilon_l^2},$$

что определяет возможность использования последних для характеристики модового состава излучения на поверхности сферической мишени.

Для характерной длительности ≈ 3 нс лазерного импульса на зажигание [13, 14] при максимальной интенсивности из скейлинга (6) получаем актуальный диапазон изменения оптической толщины мишенной плазмы до значений:

- $\Delta_{IB} \approx 7,5$ для излучения второй гармоники неодимового лазера ($\lambda_L = 0,53$ мкм);
- $\Delta_{IB} \approx 30$ для излучения третьей гармоники неодимового лазера ($\lambda_L = 0,35$ мкм).

Как видно из рис. 7, конфигурация облучения мишени *Tetr-48-dis* для условий облучения на второй гармонике решает все задачи по однородности освещения термоядерной мишени в основной части лазерного импульса.

Парциальные неоднородности ε_l по определению всегда неотрицательны. Между тем ε_l на рис. 2, 4, 6 обращаются в нуль при некоторых значениях параметра Δ_{IB} , что означает смену знака в этих точках амплитуды симметричной моды порядка l . Следовательно, с ростом во времени оптической толщины Δ_{IB} (согласно скейлингу (6)) неоднородность воздействия на капсулу в пространственном масштабе, соответствующем моде порядка l , будет носить знакопеременный характер.

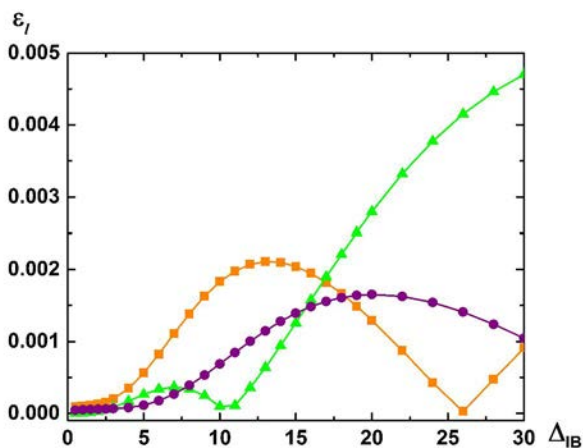


Рис. 6. Амплитуды парциальных неоднородностей в конфигурации *Tetr-60-dis*: —■— ε_{13} ; —▲— ε_{14} ; —●— ε_{15}

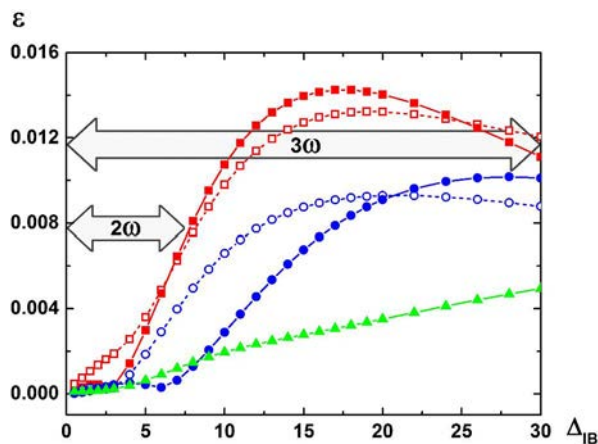


Рис. 7. Среднеквадратичные неоднородности облучения мишени в различных конфигурациях лазерных источников, обладающих симметрией тетраэдра: —□— *Tetr-36*; —■— *Tetr-36-dis*; —○— *Tetr-48*; —●— *Tetr-48-dis*; —▲— *Tetr-60-dis*

3. Поясные системы с максимальной редукцией

На основе работы [1] предлагается оригинальный подход для эффективной редукции низших мод с использованием квадратурной формулы Гаусса—Лежандра в поясных системах облучения. Ре-

зультат суммы вкладов системы произвольно расположенных источников описывается с помощью теоремы сложения [8], которая компактным образом формулируется с помощью нормированных гармоник (1). А именно, поворот источника от положения на оси симметрии к положению, определяемому угловыми координатами (θ_1, φ_1) , преобразует осесимметричную моду Y_{l0} следующим образом:

$$Y_{l0}(\cos \gamma) = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta_1, \varphi_1) Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (7)$$

где угол γ между направлением (θ_1, φ_1) и направлением (θ, φ) определяется соотношением $\cos \gamma = \cos \theta_1 \cos \theta + \sin \theta_1 \sin \theta \cos(\varphi - \varphi_1)$.

Соотношение (7) представляет вид функции Вигнера для частного случая осесимметричного объекта (каковым является, например, пятно лазерной засветки круглой формы). Если имеется система из N источников, ориентированных в направлениях (θ_n, φ_n) , $n = \overline{1, N}$, то из (7) следует, что их суммарный вклад в моду l -го порядка есть

$$\sum_{n=1}^N Y_{l0}(\cos \gamma_n) = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \sum_{m=-l}^l \left(\sum_{n=1}^N Y_{lm}^*(\theta_n, \varphi_n) \right) Y_{lm}(\theta, \varphi). \quad (8)$$

Если удастся обеспечить взаимную компенсацию вкладов источников в (8)

$$\sum_{n=1}^N Y_{lm}^*(\theta_n, \varphi_n) = 0, \quad (9)$$

то мода с индексами l и m будет, очевидно, редуцирована. При этом задачи взаимной компенсации низших азимутальных (т. е. мод, содержащих зависимость от азимутального угла φ) и осесимметричных мод решаются отдельно.

В каждом поясе предполагается равномерное расположение источников, следовательно, суммирование геометрической прогрессии в азимутальной части выражения (9) дает $\sum_{k=1}^{M_j} \exp(i\varphi_j m + i2\pi(k-1)m/M_j) = 0$, если m/M_j — нецелое число (M_j — число источников в поясе j ; φ_j — начальный угол j -го пояса источников).

Идея подхода, предложенного в работе [1], заключается в редукации осесимметричных слагаемых в правой части (7) с помощью квадратур Гаусса—Лежандра. При $m = 0$ в (9) получаем сумму вида $\sum_{n=1}^N w_n P_l^m(\cos \theta_n)$. Если угловые координаты θ_n поясов источников совпадают с узлами квадратурной формулы Гаусса, а коэффициенты w_n — со значениями весовых множителей в этой формуле, то указанная сумма обращается в нуль. Таким образом, число поясов L определяется числом узлов θ_n в квадратурной формуле Гаусса—Лежандра [8].

При этом в [1] не ставилась задача поиска системы с минимальным числом источников. Скорее, автор стремился выровнять энергию источников в различных поясах⁴.

Предлагаемые усовершенствования осесимметричной системы [1] касаются установления минимального числа лазерных источников, необходимых для устранения всех низших мод вплоть до некоторого порядка l . Минимальные осесимметричные конфигурации лазерных источников необходимы для последующего сопоставления эффективности редукации мод.

Проще всего пояснить суть дела, обратившись к самым простым геометриям.

⁴Значения весовых множителей в квадратурной формуле существенно отличаются друг от друга, и, следовательно, получается система лазерного облучения мишени с существенно разноэнергетическими источниками, что с практической точки зрения бессмысленно. Но здесь интересна сама принципиальная возможность эффективной редукации низших мод, и поэтому авторы оставляют за скобками вопросы практической целесообразности построения поясной системы с различной мощностью источников.

Наименьшей поясной системой является тетраэдр, две вершины которого располагаются в верхнем полупространстве, а две — в нижнем. В самом деле, вершины тетраэдра расположены как раз в точках, соответствующих нулям второго полинома Лежандра $P_2(\cos\theta)$ ($\theta \approx \pm 54,74^\circ$).

Геометрия тетраэдра обеспечивает отсутствие всех мод вплоть до порядка $l < 3$. На первый взгляд, пояса из двух источников в верхней полусфере и двух источников — в нижней для этого кажутся недостаточными. Но на самом деле, если расположить вершины тетраэдра попарно в верхней и нижней полусферах, то они окажутся повернуты друг относительно друга на угол $\pi/2$. Легко понять, что их вклады в моду Y_{22} оказываются разных знаков.

Ориентированный таким образом тетраэдр вместе с тетраэдром, повернутым на угол $\pi/2$, образует куб (8 источников). Такая система редуцирует моду третьего порядка. Эта конфигурация не является минимальной. В самом деле, 6 источников, расположенных в центрах граней куба, также обладают симметрией куба и, следовательно, в сумме компенсируют моду третьего порядка. Такая конфигурация одновременно является осесимметричной. Так, при совмещении оси OZ с диагональю куба получается поясная конфигурация, в которой источники располагаются в точках нулей второго полинома Лежандра $P_2(\cos\theta)$, а пояса повернуты друг относительно друга на угол $\pi/3$. Аналогичные рассуждения приводят к тому, что вклады в моду $Y_{3\pm 2}$ трех источников в верхней полусфере и трех источников (угол между которыми составляет $\pi/3$) в нижней полусфере взаимно компенсируют друг друга.

Так как для системы из трех поясов весовые множители являются рациональными числами, то можно построить конфигурацию из 18 источников равной энергии, редуцирующую все моды порядка $l \leq 5$. Минимальной при этом окажется конфигурация из 16 источников.

При удачном соотношении иррациональных весовых множителей можно построить четырехпоясную осесимметричную систему из 48 источников почти равной энергии, позволяющую редуцировать все моды порядка $l \leq 7$. Минимальной при этом будет система из $4 \times 7 = 28$ источников.

Таким образом, указан способ построения минимальных осесимметричных конфигураций лазерных источников, обеспечивающих редукцию всех низших мод вплоть до некоторого порядка l_{\min} . Результаты проведенного анализа сведены в табл. 1.

Как было показано, в минимальных конфигурациях (4 источника в вершинах тетраэдра и 6 источников в центрах граней куба) поясные и симметричные конфигурации совпадают. Однако затем (с ростом числа поясов и источников и соответственно увеличением порядка редуцируемых мод) эти системы расходятся. При этом эффективность редукции низших мод в симметричных системах оказывается выше. Так, для 12 источников, расположенных в вершинах икосаэдра, минимальный порядок остающейся моды l_{\min} равен 6, в то время как в поясной системе для этого необходимо 16 источников.

Таблица 1

Минимальные поясные конфигурации

Число поясов	N	l_{\min}
2	4	3
2	6	4
3	16	6
4	28	8
5	46	10
6	66	12

4. Эффективность редукции мод в поясных системах и конфигурациях, обладающих симметрией тетраэдра

В этом разделе сопоставим поясные [1] и симметричные конфигурации с точки зрения эффективности редукции низших мод. Для этого сопоставим количество низших мод, которые надо редуцировать, и число степеней свободы системы из N источников.

Полное число мод до l -го порядка включительно составляет $(l + 1)^2$. Задача достижения однородности лазерного воздействия заключается в устранении всех мод, кроме моды $l = 0$. Полное число геометрических степеней свободы системы из N источников составляет $3(N - 1)$ (три степени свободы характеризуют положение системы как целого, соответствуя, например, выбору некоторого направления, в котором ориентирована система, и угла поворота относительно нее). Приравнявая

оба эти числа, получаем выражение для порядка редукции l^* (характеризуемого, вообще говоря, нецелым числом):

$$l^* = \sqrt{3}(N - 1)^{1/2} - 1. \quad (10)$$

Допущение разное энергетичности источников дает еще $N - 1$ степеней свободы. Порядок редукции в этом случае равен

$$l_d^* = 2(N - 1)^{1/2} - 1. \quad (11)$$

В табл. 2 сопоставляются показатели минимальных (по числу источников N) поясных систем облучения мишени (L — количество поясов источников в осесимметричных конфигурациях *Axis*) и найденных оптимальных конфигураций источников в симметрии тетраэдра. Конфигурации с равной энергией источников характеризуются порядком редукции l^* (10), для оценки эффективности редукции конфигураций с источниками неравной мощности используется порядок l_d^* (11). Значения l^* и l_d^* служат ориентиром достижимой редукции мод исходя из числа имеющихся степеней свободы, в то время как значение l_{min} отражает действительную *глубину* редукции, реализуемой данной геометрией лазерных источников.

Видно, что высокая эффективная редукция в осесимметричных конфигурациях имеет место в трехпоясных системах. Так, для системы *Axis* $L = 3$ глубина редукции $l_{min} = 6$ сопоставима с порядком редукции $l^* = 6,1$, найденным согласно (10) из подсчета числа доступных степеней свободы. При возрастании числа лазерных источников, как видно из табл. 2, симметричные конфигурации предоставляют бóльшие возможности редукции (достигаются бóльшие значения l_{min} при меньшем числе лазерных источников N). Так, сопоставление поясной конфигурации *Axis* $L = 5$ и симметричной конфигурации *Tetr-48-dis* (с примерно равным числом источников 46 и 48) явно свидетельствует в пользу последней. Отметим также, что с увеличением числа источников эффективность редукции снижается как в поясных, так и симметричных конфигурациях.

Заметим, что ситуация $l_{min} \geq l^*$ имеет место только для геометрий с размещением источников в вершинах тетраэдра, октаэдра и икосаэдра (они приведены для сравнения в трех нижних строках табл. 2). Однако небольшое число вершин в этих правильных многогранниках не позволяет строить на их основе системы лазерного облучения мишени с требуемым высоким уровнем однородности.

Таблица 2

Сравнение эффективности редукции мод для различных конфигураций лазерных источников

Система облучения	N	l_{min}	$l^*(N)$	$l_d^*(N)$
<i>Axis</i> $L = 3$	16	6	—	6,7
<i>Axis</i> $L = 3$	18	6	6,1	—
<i>Axis</i> $L = 4$	28	8	—	9,4
<i>Axis</i> $L = 5$	46	10	—	12,4
<i>Axis</i> $L = 6$	66	12	—	15,1
<i>Tetr-36</i>	36	9	9,3	—
<i>Tetr-36-dis</i>	36	10	—	10,8
<i>Tetr-48</i>	48	10	10,9	—
<i>Tetr-48-dis</i>	48	12	—	12,7
<i>Tetr-60-dis</i>	60	13	—	14,4
Тетраэдр	4	3	2,0	—
Октаэдр	6	4	2,9	—
Икосаэдр	12	6	4,7	—

Заключение

На основе численного анализа условий вращательной симметрии тетраэдра определен вид допустимых этой симметрией мод, присутствующих в распределении лазерной интенсивности на поверхности сферической капсулы с термоядерным топливом.

Установление вида симметричных мод позволило найти симметричные конфигурации лазерных источников, обеспечивающие достижение высоких уровней однородности лазерного облучения термоядерной мишени.

В работе [1] был фактически предложен критерий оценки эффективности конфигураций лазерных источников для прямого облучения мишени, заключающийся в достигаемой глубине редукции мод низших порядков в структуре лазерной засветки сферической капсулы. Проведенное по этому критерию сопоставление эффективности редукции низших мод, достигаемой в поясных конфигурациях лазерных источников, построенных на основе квадратурных формул Гаусса—Лежандра [1], и редукции, достигаемой в конфигурациях, обладающих симметрией тетраэдра, показывает предпочтительность последних.

Непосредственная проведенная верификация оптимальности найденных симметричных конфигураций в численных расчетах освещенности сферической капсулы демонстрирует неуклонное улучшение однородности с увеличением числа источников (подтверждая, таким образом, и справедливость используемого критерия). Достигается облучение мишени, отличающееся от однородного меньше чем на 1%.

Отметим, что работы американских исследователей на лазерной установке OMEGA [3—5] обозначили интересную возможность применения симметричных систем лазерного облучения как для прямого (лазерного), так и непрямого (рентгеновского) воздействия на термоядерные мишени.

Список литературы

1. *Mark J. W. K.* Near spherical illumination of ion-beam and laser targets // *Physics Letters*. 1986. Vol. 114A, No 8-9. P. 458.
2. *Boehly T. R., Brown D. L., Craxton R. S., Keck R. L., Knauer J. P., Kelly J. H., Kessler T. J., Kumpan S. A., Loucks S. J., Letzring S. A., Marshall F. J., McCrory R. L., Morse S. F. B., Seka W., Soures J. M., Verdon C. P.* Initial performance results of the OMEGA laser system // *Optics Communication*. 1997. Vol. 133. P. 495—506.
3. *Phillion D. W., Pollaine S. M.* Dynamical compensation of irradiation nonuniformities in a spherical hohlraum illuminated with tetrahedral symmetry by laser beams // *Physics of Plasmas*. 1994. Vol. 1, No 9. Paper 2963.
4. *Schnittman J. D., Craxton R. S.* Three-dimensional modeling of capsule implosions in OMEGA tetrahedral hohlraums // *Ibid.* 2000. Vol. 7, No 7. Paper 2964.
5. *Bennett G. R., Wallace J. M., Murphy T. J., Chiren R. E., Delamater N. D., Gobby P. L., Hauer A. A., Klare K. A., Oertel J. A., Watt R. G., Wilson D. C., Varnum W. S., Craxton R. S., Glebov V. Yu., Schnittman J. D., Stoeckl C., Pollaine S. M., Turner R. E.* Moderate-convergence inertial confinement fusion implosions in tetrahedral hohlraums at Omega // *Ibid.* No 6. Paper 2594.
6. *Collins T. J. B., Marozas J. A., Anderson K. S., Betti R., Craxton R. S.* A polar-drive-ignition design for the National Ignition Facility // *Ibid.* 2012. Vol. 19. Paper 056308.
7. *Radha P. B., Hohenberger M., Edgell D. H., Marozas J. A., Marshall F. J., Michel D. T., Rosenberg M. J., Seka W., Shvydky A., Boehly T. R., Collins T. J. B., Campbell E. M., Craxton R. S., Delettrez J. A., Dixit S. N., Frenje J. A., Froula D. H., Goncharov V. N., Hu S. X., Knauer J. P., McCrory R. L., McKenty P. W., Meyerhofer D. D., Moody J., Myatt J. F., Petrasso R. D., Regan S. P., Sangster T. C., Sio H., Skupsky S., Zylstra A.* Direct drive: simulations and results from the National Ignition Facility // *Ibid.* 2016. Vol. 23. Paper 056305.
8. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1979.
9. *Korn G., Korn T.* Spravochnik po matematike dlya nauchnykh rabotnikov i inzhenerov. М.: Nauka, 1979.
10. *Давыдов А. С.* Квантовая механика. М.: Физматгиз, 1966.
11. *Davydov A. S.* Kvantovaya mekhanika. М.: Fizmatgiz, 1966.

10. *Тихонов А. Н., Арсенин В. А.* Методы решения некорректных задач. Москва: Наука, 1979.
Tikhonov A. N., Arsenin V. A. Metody resheniya nekorrektnykh zadach. Moskva: Nauka, 1979.
11. *Atzeni S., Meyer-Ter-Vehn J.* The Physics of Inertial Fusion. Oxford: Clarendon Press, 2004.
12. *Соболь И. М.* Численные методы Монте-Карло. М.: Наука, 1973.
Sobol I. M. Chislennye metody Monte-Karlo. M.: Nauka, 1973.
13. *Craxton R. S., Anderson K. S., Boehly T. R., Goncharov V. N., Harding D. R., Knauer J. P., McCrory R. L., McKenty P. W., Meyerhofer D. D., Myatt J. F., Schmitt A. J., Sethian J. D., Short R. W., Skupsky S., Theobald W., Kruer W. L., Tanaka K., Betti R., Collins T. J. B., Delettrez J. A., Hu S. X., Marozas J. A., Maximov A. V., Michel D. T., Radha P. B., Regan S. P., Sangster T. C., Seka W., Solodov A. A., Soures J. M., Stoeckl C., Zuegel J. D.* Direct-drive inertial confinement fusion: areview // Physics of Plasmas. 2015. Vol. 22. Paper 110501.
14. *Бельков С. А., Бондаренко С. В., Вергунова Г. А., Гаранин С. Г., Гуськов С. Ю., Демченко Н. Н., Доскоч И. Я., Кучугов П. А., Змитренко Н. В., Розанов В. Б., Степанов Р. В., Яхин Р. А.* Термоядерные мишени прямого облучения лазерным импульсом мегаджоульного уровня // ЖЭТФ. 2015. Т. 148. Вып. 4(10). С. 784—798.
Belkov S. A., Bondarenko S. V., Vergunova G. A., Garanin S. G., Guskov S. Yu., Demchenko N. N., Doskoch I. Ya., Kuchugov P. A., Zmitrenko N. V., Rozanov V. B., Stepanov R. V., Yakhin R. A. Termoyadernye misheni pryamogo oblucheniya lasernym impulsom megadzhoul'nogo urovnya // ZhETF. 2015. T. 148. Vyp. 4(10). S. 784—798.

Статья поступила в редакцию 22.06.22.

УДК 519.6:539.3

МОМЕНТНЫЙ КОНЕЧНЫЙ ЭЛЕМЕНТ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И ПЛАСТИЧНОСТИ

Д. Т. Чекмарев, Абу Даввас Яссер
(ННГУ им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород)

Приводится описание нового восьмиузлового конечного элемента для решения трехмерных динамических задач теории упругости и пластичности. Восьмиузловой конечный элемент в виде гексаэдра обладает следующими особенностями: 1) напряжения, а также их моменты (три изгибающих и один крутящий) считаются постоянными в пределах элемента; 2) элемент имеет одну точку интегрирования; 3) элемент имеет четыре параметра, настраивая которые можно регулировать сходимость численных решений. Метод построения данного конечного элемента основан на комбинации двух идей: применения ажурной схемы конечного элемента в виде симплекса, вписанного в n -мерный куб, и проецирования сеточной задачи высокой размерности на сетку пространства более низкой размерности. Описана реализация методики численного решения трехмерных нестационарных задач теории упругости и пластичности на базе данного конечного элемента. Приводятся результаты решения ряда тестовых задач теории упругости и пластичности и сравнение с решениями на основе других численных схем.

Ключевые слова: метод конечных элементов, ажурная схема, неустойчивость *песочные часы*, трехмерная задача, нестационарная задача теории упругости.

Введение

Проблема построения эффективных методик численного решения задач механики деформируемого твердого тела остается актуальной. В работе предлагается описание нового конечного элемента для решения трехмерных задач теории упругости и пластичности. Его отличают простота реализации и высокая эффективность по сравнению с традиционными конечными элементами, а также наличие регулируемых параметров. Другие достоинства данного конечного элемента будут описаны далее.

Подход к построению рассматриваемого моментного конечного элемента описан в работе [1]. В его основе лежит применение ажурных схем метода конечного элемента (МКЭ) [2–4] к решению динамических задач теории упругости и пластичности. Данные схемы были подробно исследованы теоретически и практически на решении большого количества модельных задач, они показали высокую эффективность и точность по сравнению с традиционными схемами МКЭ [5, 6]. Их особенностью является отсутствие эффекта неустойчивости типа *песочные часы* [7, 8], присущего схеме Уилкинса [9], а также эффекта завышенной сдвиговой жесткости, свойственного классическому четырехузловому элементу в виде тетраэдра. В трехмерных ажурных схемах МКЭ четырехузловые элементы в виде тетраэдров заполняют расчетную область с регулярными промежутками при сохранении связности сетки. Фактически в каждой ячейке конечно-разностной сетки из гексаэдров располагается один четырехузловой конечный элемент (тетраэдр). Иначе ажурные схемы можно интерпретировать как схемы на базе четырехузлового конечного элемента, полученного из гексаэдра. В итоге получается эффективная численная схема МКЭ, обладающая указанными выше достоинствами.

Отметим, что ажурные схемы обладают удачными свойствами не для любой размерности задач. Так, в двумерном случае ажурная схема из треугольных элементов обладает очевидной асимметрией (центр четырехугольника не совпадает с центром вписанного в него треугольника), что понижает порядок аппроксимации численной схемы. Трехмерный случай является удачным, так как есть возможность симметрично вписать тетраэдр в куб или параллелепипед. С учетом достоинств ажурных схем в работе [10] была предложена идея для задач "неудачной размерности": строить для них численные схемы путем проецирования ажурных схем "удачной размерности" на сетку пространства меньшей размерности. Так, проецируя трехмерную ажурную схему МКЭ на двумерную сетку, можно получить двумерную схему; при этом есть основания полагать, что ее положительные свойства сохраняются. Таким же образом можно получать и новые схемы (конечные элементы) для задач удачной размерности, например, проецируя семимерную удачную ажурную схему на трехмерное пространство. Построенный таким образом конечный элемент обладает рядом новых возможностей. В работе [1] дается обоснование базирующегося на этой идее метода построения трехмерного конечного элемента. В данной работе описана реализация этой схемы.

Ажурная схема МКЭ

Приведем краткое описание ажурной схемы, основанной на традиционной схеме с четырехузловым конечным элементом и явной схеме интегрирования по времени *крест* [3]. Она строится на базе ажурной сетки, в которой элементы заполняют расчетную область с регулярными промежутками.

Пусть рассматриваемое тело имеет объем V , на границах $\partial V = S_u \cup S_p$ имеются краевые условия на перемещения S_u и напряжения S_p . Полагаем, что известны поля внешних массовых ($\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$) и поверхностных ($\mathbf{P} = (P_1, P_2, P_3)$) сил. Заданы начальные условия при $t = 0$: распределения перемещений $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ и скоростей $\dot{\mathbf{u}}$. Общее уравнение динамики (вариационный принцип Даламбера—Лагранжа) имеет следующий вид:

$$\int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV = \int_V \rho (F_i - \ddot{u}_i) \delta u_i dV + \int_{S_p} P_i \delta u_i dS, \quad i = \overline{1, 3}, \quad j = \overline{1, 3}.$$

Рассматриваемая область покрывается гексаэдрической сеткой, расчетные элементы (тетраэдры) располагаются в центрах гексаэдров (рис. 1). Все экстенсивные характеристики (масса, объем и пр.) боковых тетраэдров присоединяются к центральному.

Для более ясного изложения идеи метода приведем конечно-разностное представление рассматриваемой схемы на равномерной сетке [3]. Явная ажурная схема на равномерной ортогональной сетке $x_i^1 = x_0^1 + h_1 i$, $x_j^2 = x_0^2 + h_2 j$, $x_k^3 = x_0^3 + h_3 k$ может быть записана в следующем конечно-разностном виде (см. [3]):

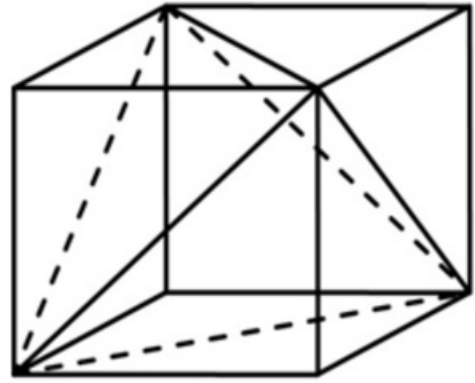


Рис. 1. Ячейка ажурной сетки

$$(\lambda + \mu) \begin{pmatrix} D_{11}u_1 + D_{12}u_2 + D_{13}u_3 \\ D_{21}u_1 + D_{22}u_2 + D_{23}u_3 \\ D_{31}u_1 + D_{32}u_2 + D_{33}u_3 \end{pmatrix} + \mu D \Delta \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = \rho D t t \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

аналогичном по форме системе уравнений Ламе

$$(\lambda + \mu) \text{grad div } \mathbf{u} + \mu \Delta \mathbf{u} + \rho \mathbf{F} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}. \quad (2)$$

Здесь λ, μ — параметры Ламе; ρ — плотность среды; D_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$), D_{Δ} — сеточные операторы, аппроксимирующие соответственно вторые частные производные и оператор Лапласа; D_{tt} — сеточный оператор второй производной по времени.

Операторы строятся следующим образом. Базисные операторы, аппроксимирующие первые частные производные в элементе $\left(d_m^+ \approx \frac{\partial}{\partial x^m}\right)$, записываются в виде

$$\begin{aligned} (d_1^+ f)_{ijk} &= \frac{1}{2h_1} (f_{i+1,j+1,k+1} + f_{i+1,j,k} - f_{i,j+1,k} - f_{i,j,k+1}); \\ (d_2^+ f)_{ijk} &= \frac{1}{2h_2} (f_{i+1,j+1,k+1} + f_{i,j+1,k} - f_{i+1,j,k} - f_{i,j,k+1}); \\ (d_3^+ f)_{ijk} &= \frac{1}{2h_3} (f_{i+1,j+1,k+1} + f_{i,j,k+1} - f_{i,j+1,k} - f_{i+1,j,k}). \end{aligned} \quad (3)$$

Операторы

$$\begin{aligned} (d_1^- f)_{ijk} &= \frac{1}{2h_1} (-f_{i-1,j-1,k-1} - f_{i-1,j,k} + f_{i,j-1,k} + f_{i,j,k-1}); \\ (d_2^- f)_{ijk} &= \frac{1}{2h_2} (-f_{i-1,j-1,k-1} - f_{i,j-1,k} + f_{i-1,j,k} + f_{i,j,k-1}); \\ (d_3^- f)_{ijk} &= \frac{1}{2h_3} (-f_{i-1,j-1,k-1} - f_{i,j,k-1} + f_{i,j-1,k} + f_{i-1,j,k}) \end{aligned} \quad (4)$$

являются сопряженными к (3) (взятыми со знаком "-").

Операторы D_{ij} , D_{Δ} определим через суперпозиции операторов (3) и (4):

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left(d_i^+ d_j^- + d_j^+ d_i^- \right); \quad D_{\Delta} = D_{11} + D_{22} + D_{33}; \quad D_{tt} f = \frac{1}{\tau^2} (f^{l+1} - 2f^l + f^{l-1}).$$

Построение двумерного моментного конечного элемента по трехмерной ажурной схеме

Численную схему решения двумерной задачи теории упругости (плоская деформация) [10] получим путем проецирования трехмерной задачи на плоскость $X_1 O X_2$. Полагая, что трехмерная расчетная область имеет вид $\Omega \times [0, h_3]$, где Ω — область в \mathbb{R}^2 , возьмем один ряд ячеек по координате x^3 и наложим на решение ограничение $u_3 = 0$. При этом разностная схема (1) примет вид

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu) (D_{11} u_1 + D_{12} u_2) + \mu (D_{11} u_1 + D_{22} u_1 + D_{33} u_1) + \rho F_1 &= \rho D_{tt} u_1; \\ (\lambda + \mu) (D_{21} u_1 + D_{22} u_2) + \mu (D_{11} u_2 + D_{22} u_2 + D_{33} u_2) + \rho F_2 &= \rho D_{tt} u_2. \end{aligned} \quad (5)$$

В (5) операторы D_{ij} получаются проецированием рассмотренных выше операторов на двумерную сетку, при этом операторы

$$\begin{aligned} (d_3^+ f)_{ij} &= \frac{1}{2h_3} (f_{i+1,j+1} + f_{i,j} - f_{i,j+1} - f_{i+1,j}); \\ (d_3^- f)_{ij} &= \frac{1}{2h_3} (f_{i-1,j-1} + f_{i,j} - f_{i,j-1} - f_{i-1,j}) \end{aligned}$$

аппроксимируют с точностью до множителя оператор второй смешанной производной $\frac{\partial^2}{\partial x^1 \partial x^2}$.

Размер элемента h_3 по оси Ox^3 в построенной численной схеме превращается в регулируемый параметр схемы. Таким образом, в результате проецирования трехмерной ажурной схемы на двумерное пространство получено однопараметрическое семейство численных схем МКЭ решения плоской задачи теории упругости, близких к схеме билинейного конечного элемента. Настраивая параметр h_3 , можно изменять влияние моментной составляющей в элементе и тем самым регулировать сходимость численных решений.

Построение трехмерного моментного конечного элемента по семимерной ажурной схеме

Обобщая данный подход, построим семейство восьмиузловых схем МКЭ решения трехмерных задач теории упругости, близких к схеме на базе восьмиузлового полилинейного конечного элемента. Отметим, что следующим удачным для построения ажурных схем является пространство размерности $n = 7$. При $n = 7$ в куб, содержащий 128 вершин, можно вписать правильный симплекс с 8 вершинами исходного куба таким образом, что центры куба и симплекса совпадут. Примером является следующий набор вершин симплекса, вписанного в единичный семимерный куб:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Все ребра данного симплекса имеют одинаковую длину. Отметим, что наборы из первых трех координат данной системы векторов образуют множество вершин единичного трехмерного куба. Отметим также, что при $n = 4, 5, 6$ подобное построение невозможно.

Для построения семимерной задачи рассмотрим гипотетическую задачу теории упругости в семимерном пространстве. Определим семимерный тензор деформаций через обобщение соотношений Коши:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad i, j = 1, \dots, 7.$$

Связь напряжений и деформаций установим на основе закона Гука:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, 7.$$

В результате семимерные уравнения движения теории упругости в перемещениях запишутся в виде (2), где градиент, дивергенция и оператор Лапласа определены соответственно в семимерном пространстве. Ажурная схема МКЭ на основе линейного конечного элемента на равномерной ортогональной сетке $x_{i_1}^1 = x_0^1 + h_1 i_1, \dots, x_{i_7}^7 = x_0^7 + h_7 i_7$ примет вид, аналогичный (1):

$$(\lambda + \mu) \begin{pmatrix} D_{11}u_1 + \dots + D_{17}u_7 \\ \dots \\ D_{71}u_1 + \dots + D_{77}u_7 \end{pmatrix} + \mu D_{\Delta} \begin{pmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_7 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} F_1 \\ \dots \\ F_7 \end{pmatrix} = \rho D_{tt} \begin{pmatrix} F_1 \\ \dots \\ F_7 \end{pmatrix}.$$

Для построения трехмерной схемы поступим аналогично рассмотренному выше случаю двумерной схемы. Полагая во всех узлах $u_4 = u_5 = u_6 = u_7 = 0$, получаем после проецирования на трехмерное пространство схему МКЭ в виде

$$\begin{aligned}
 & (\lambda + \mu) \begin{pmatrix} D_{11}u_1 + D_{12}u_2 + D_{13}u_3 \\ D_{21}u_1 + D_{22}u_2 + D_{23}u_3 \\ D_{31}u_1 + D_{32}u_2 + D_{33}u_3 \end{pmatrix} + \mu D_{\Delta} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \\
 & + \mu (D_{44} + D_{55} + D_{66} + D_{77}) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = \rho D_{tt} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}. \quad (6)
 \end{aligned}$$

В (6) операторы $D_{ij} = \frac{1}{2} (d_i^+ d_j^- + d_j^+ d_i^-)$, $D_{\Delta} = D_{11} + D_{22} + D_{33}$ выражаются через базисные операторы $d_1^+, d_2^+, d_3^+, d_4^+, d_5^+, d_6^+, d_7^+$ и сопряженные к ним (взятые со знаком "-") $d_1^-, d_2^-, d_3^-, d_4^-, d_5^-, d_6^-, d_7^-$, определенные на восьмиузловых шаблонах. При этом операторы d_1^+, d_2^+, d_3^+ и d_1^-, d_2^-, d_3^- аппроксимируют первые производные по соответствующим координатам, а операторы $d_4^+, d_5^+, d_6^+, d_7^+$ и $d_4^-, d_5^-, d_6^-, d_7^-$ аппроксимируют с точностью до множителя операторы старших производных, соответственно $\frac{\partial^2}{\partial x^1 \partial x^2}$, $\frac{\partial^2}{\partial x^1 \partial x^3}$, $\frac{\partial^2}{\partial x^2 \partial x^3}$, $\frac{\partial^3}{\partial x^1 \partial x^2 \partial x^3}$. Подобные аппроксимации моментных составляющих имеют место и в традиционной схеме на базе полилинейного восьмиузлового конечного элемента (см., например, [11]).

Таким образом, в результате проецирования получено четырехпараметрическое семейство численных схем МКЭ решения трехмерной задачи теории упругости. Параметры h_4, h_5, h_6, h_7 можно настраивать, изменяя влияние моментных составляющих в элементе.

Реализация численной схемы на основе моментного конечного элемента

Реализация численной схемы может быть выполнена в традиционной технике МКЭ с использованием векторной и матричной форм записи. Но поскольку в исходном конечном элементе (семи-мерном) используется линейная аппроксимация неизвестных функций, то и матрица жесткости, и якобиан отображения на стандартный элемент являются постоянными в пределах элемента. Поэтому более удобно и экономично выполнить реализацию в форме, аналогичной схеме Уилкинса [9].

Тензор деформаций в элементе имеет вид

$$(\varepsilon)_{\substack{i=1,2,3 \\ j=1,\dots,7}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} & \varepsilon_{14} & \varepsilon_{15} & \varepsilon_{16} & \varepsilon_{17} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{24} & \varepsilon_{25} & \varepsilon_{26} & \varepsilon_{27} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} & \varepsilon_{34} & \varepsilon_{35} & \varepsilon_{36} & \varepsilon_{37} \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{2} (d_i^+ u_j + d_j^+ u_i), & j \leq 3; \\ \frac{1}{2} d_j^+ u_i, & j > 3, \end{cases}$$

а тензор напряжений —

$$(\sigma)_{\substack{i=1,2,3 \\ j=1,\dots,7}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} & \sigma_{14} & \sigma_{15} & \sigma_{16} & \sigma_{17} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} & \sigma_{24} & \sigma_{25} & \sigma_{26} & \sigma_{27} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} & \sigma_{34} & \sigma_{35} & \sigma_{36} & \sigma_{37} \end{pmatrix}.$$

Последние четыре столбца соответствуют трем изгибающим и одному крутящему моментам конечного элемента. Далее интегралы от компонент тензора напряжений определяют силы, приложенные к узлам элемента, в результате чего формируются уравнения движения узлов.

Вычисление производных в произвольном гексаэдрическом элементе выполняется по формуле

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} \approx d_i^+ f = \frac{\det V_i}{\det V}, \quad (7)$$

где матрица V имеет вид

$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_1^1 & x_1^2 & x_1^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_2^1 & x_2^2 & x_2^3 & 0 & h_5 & h_6 & h_7 \\ 1 & x_3^1 & x_3^2 & x_3^3 & h_4 & 0 & h_6 & h_7 \\ 1 & x_4^1 & x_4^2 & x_4^3 & h_4 & h_5 & 0 & 0 \\ 1 & x_5^1 & x_5^2 & x_5^3 & h_4 & h_5 & 0 & h_7 \\ 1 & x_6^1 & x_6^2 & x_6^3 & h_4 & 0 & h_6 & 0 \\ 1 & x_7^1 & x_7^2 & x_7^3 & 0 & h_5 & h_6 & 0 \\ 1 & x_8^1 & x_8^2 & x_8^3 & 0 & 0 & 0 & h_7 \end{pmatrix},$$

а матрицы V_i получаются из матрицы V заменой столбца i -й координаты на столбец значений функций в узлах элемента, например,

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 & f_1 & x_1^2 & x_1^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & f_2 & x_2^2 & x_2^3 & 0 & h_5 & h_6 & h_7 \\ 1 & f_3 & x_3^2 & x_3^3 & h_4 & 0 & h_6 & h_7 \\ 1 & f_4 & x_4^2 & x_4^3 & h_4 & h_5 & 0 & 0 \\ 1 & f_5 & x_5^2 & x_5^3 & h_4 & h_5 & 0 & h_7 \\ 1 & f_6 & x_6^2 & x_6^3 & h_4 & 0 & h_6 & 0 \\ 1 & f_7 & x_7^2 & x_7^3 & 0 & h_5 & h_6 & 0 \\ 1 & f_8 & x_8^2 & x_8^3 & 0 & 0 & 0 & h_7 \end{pmatrix}; \quad V_2 = \begin{pmatrix} 1 & x_1^1 & f_1 & x_1^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_2^1 & f_2 & x_2^3 & 0 & h_5 & h_6 & h_7 \\ 1 & x_3^1 & f_3 & x_3^3 & h_4 & 0 & h_6 & h_7 \\ 1 & x_4^1 & f_4 & x_4^3 & h_4 & h_5 & 0 & 0 \\ 1 & x_5^1 & f_5 & x_5^3 & h_4 & h_5 & 0 & h_7 \\ 1 & x_6^1 & f_6 & x_6^3 & h_4 & 0 & h_6 & 0 \\ 1 & x_7^1 & f_7 & x_7^3 & 0 & h_5 & h_6 & 0 \\ 1 & x_8^1 & f_8 & x_8^3 & 0 & 0 & 0 & h_7 \end{pmatrix}$$

и т. д. Операторы (7) могут быть представлены в виде линейных комбинаций значений функций в узлах элемента:

$$d_i^+ f = \sum_{j=1}^8 \beta_j^i f_j.$$

После вычисления деформаций и напряжений в элементах осуществляется процедура сборки уравнений движения узлов сетки, как в схеме Уилкинса [9]: формируются и суммируются силы, действующие от элементов к узлам, масса каждого узла принимается равной $1/8$ суммы масс инцидентных ему элементов, далее из второго закона Ньютона определяются ускорения узлов. Построенная система обыкновенных дифференциальных уравнений интегрируется по времени с использованием явной схемы *крест*.

Численные результаты

Для иллюстрации работоспособности методики на основе нового моментного конечного элемента рассмотрим результаты решения трех динамических задач теории упругости и пластичности. Одна *упругая* задача — на равномерной сетке, вторая — на неравномерной сетке, третья — *упруго-пластическая* задача в геометрически и физически нелинейной постановке.

Колебания бруса с квадратным сечением. Рассматривается геометрически и физически линейная задача о колебаниях бруса с квадратным сечением под действием мгновенно приложенной по центру нагрузки. Приводятся решения с использованием схемы Уилкинса, а также ажурной и моментной схем.

Брус длиной $L = 10$ см с квадратным сечением $H_1 = H_2 = 1$ см (рис. 2) заземлен на торцах. Давление $P = 0,17$ ГПа равномерно распределено на участке поверхности $4 < x < 6$ (заштрихованном). Механические свойства материала: $\rho = 7,8$ г/см³; $E = 210$ ГПа; коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$. Внешнее давление постоянно по пространству и времени.

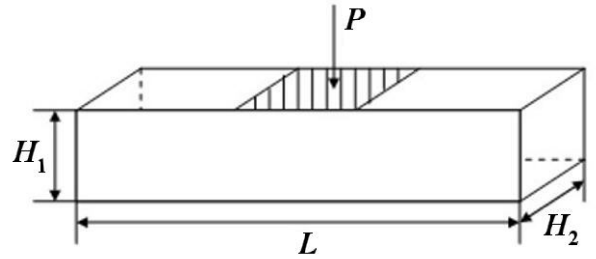


Рис. 2. Постановка задачи о колебании бруса

Задача решалась на двух сетках: $40 \times 4 \times 4$ ячейки и $80 \times 8 \times 8$ ячеек. Значения параметров моментной схемы $h_4 = h_5 = h_6 = h_7$ принимались равными 0,5 для первой сетки и 0,25 для второй сетки.

На рис. 3 показаны полученные в результате решения этих задач зависимости скорости от времени $v_3(t)$ в центре грани, противоположной нагруженной. Для нахождения численного решения были использованы четыре различные схемы: моментная, ажурная, Уилкинса и классическая схема на базе линейного четырехузлового конечного элемента в форме тетраэдра.

Из приведенных результатов видно, что наихудшую сходимость демонстрирует традиционная схема на тетраэдрах, что объясняется эффектом завышенной сдвиговой жесткости, присущим данной схеме. Схема Уилкинса, ажурная и моментная схемы показали примерно одинаковую сходимость.

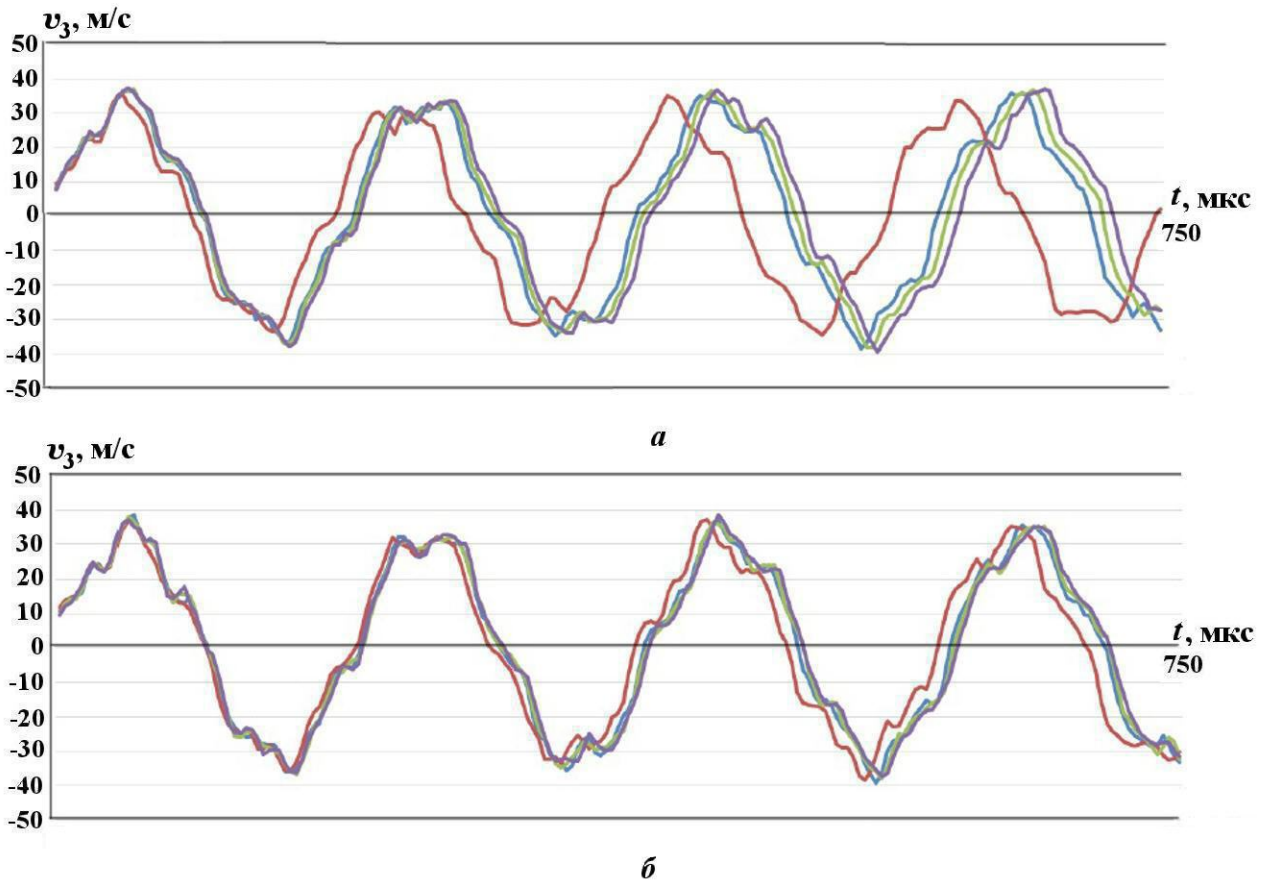


Рис. 3. Задача о колебании бруса. Скорости в центре грани в зависимости от времени: *a* — сетка $40 \times 4 \times 4$; *б* — сетка $80 \times 8 \times 8$; — ажурная схема; — классическая схема на базе тетраэдров; — моментная схема; — схема Уилкинса

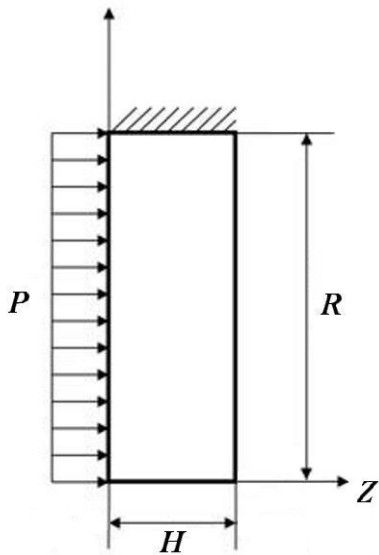


Рис. 4. Постановка задачи о деформировании диска

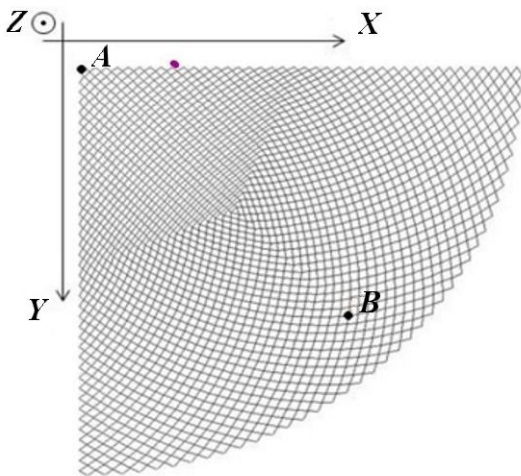


Рис. 5. Ажурная сетка на поверхности диска

Деформирование диска под действием внешнего давления. Задача решалась в геометрически и физически линейной постановке. К круглому диску, закрепленному по контуру, приложено постоянное равномерно распределенное по поверхности давление. Постановка задачи показана на рис. 4. Здесь $H = 1,5$ см; $R = 14,85$ см. Свойства материала: $\rho = 7,8$ г/см³; $E = 210$ ГПа; коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$. Граничные условия: жесткое закрепление контура диска, на одной свободной поверхности задавалось давление $P = 0,17$ ГПа.

Расчетная область (четверть диска) покрывалась нерегулярной сеткой из трех блоков. Задача решалась на сетке из 80 ячеек вдоль радиуса и 16 ячеек по толщине пластины. Каждый из блоков покрывался сеткой 40×40 четырехугольных ячеек. По толщине диска сетка равномерная. Значения параметров моментной схемы $h_4 = h_5 = h_6 = h_7$ принимались равными 0,5. Вид ажурной сетки на поверхности диска показан на рис. 5.

На рис. 6 показан деформированный диск при максимальном прогибе.

На рис. 7 изображена зависимость скорости в центре грани, противоположной нагруженной, от времени, полученная с использованием схемы Уилкинса, ажурной и моментной схем. Результаты получились близкими, поскольку расчетная сетка была достаточно мелкой.

Динамический изгиб круглой пластины под действием импульсной нагрузки. Круглая пластина радиусом $R = 76,24$ мм и толщиной $h = 1,59$ мм нагружена импульсом давления, моделируемым начальной скоростью, заданной на центральной части пластины (рис. 8). Пластина жестко заделана по торцевой поверхности. Физико-механические характеристики материала пластины: модуль Юнга $E = 71,8$ ГПа; коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$; плотность $\rho = 2,6697$ г/см³; предел текучести $\sigma_T = 280$ МПа; модуль упрочнения $G = 140$ МПа. Область нагружения начальной скоростью $v = 188,72$ м/с имеет радиус, равный $R/3$.

Расчетная сетка для 1/4 пластины строилась аналогично предыдущей задаче с разбиением на 100 элементов вдоль радиуса и 4 элемента по толщине (всего 38 255 узлов, 30 000 элементов). Значения параметров моментной схемы $h_4 = h_5 = h_6 = h_7$ принимались равными 0,5.

Учет геометрической нелинейности осуществлялся в начальной конфигурации с использова-

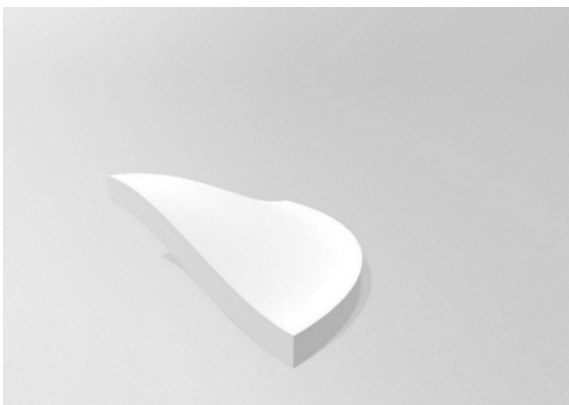


Рис. 6. Деформированный диск при максимальном прогибе

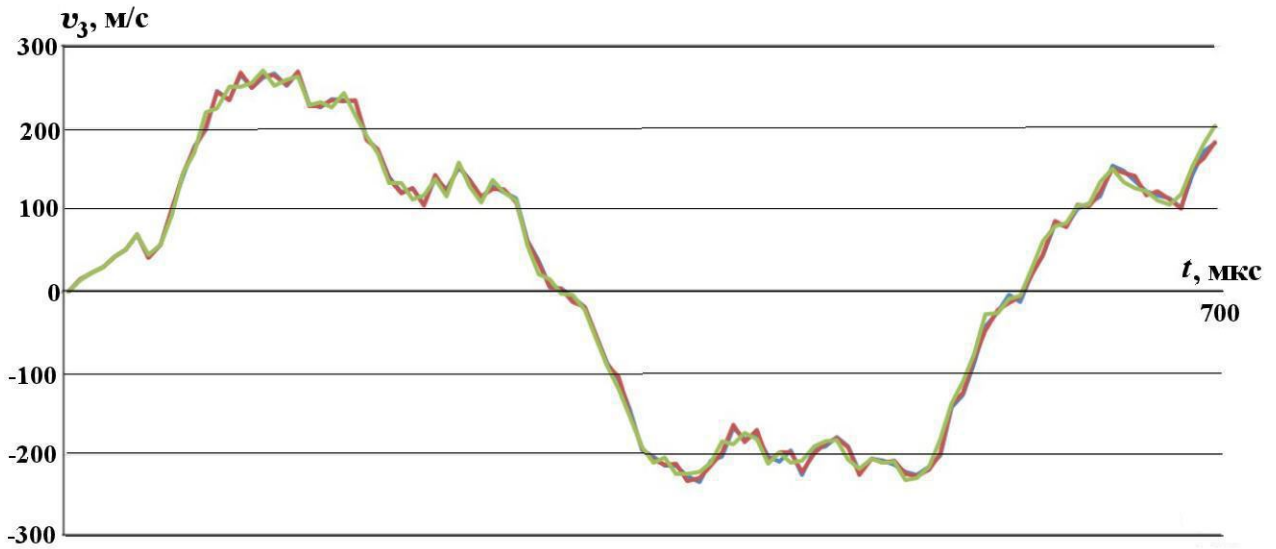


Рис. 7. Задача о деформировании диска. Скорости в центре грани в зависимости от времени: — ажурная схема; — моментная схема; — схема Уилкинса

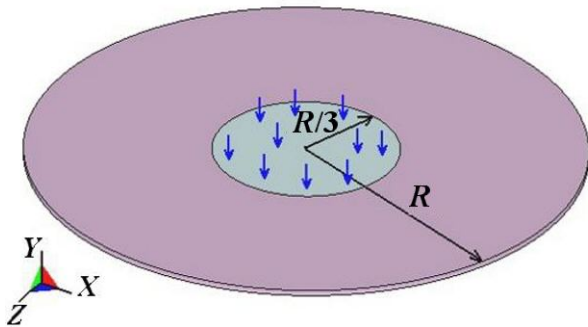


Рис. 8. Постановка задачи об изгибе круглой пластины

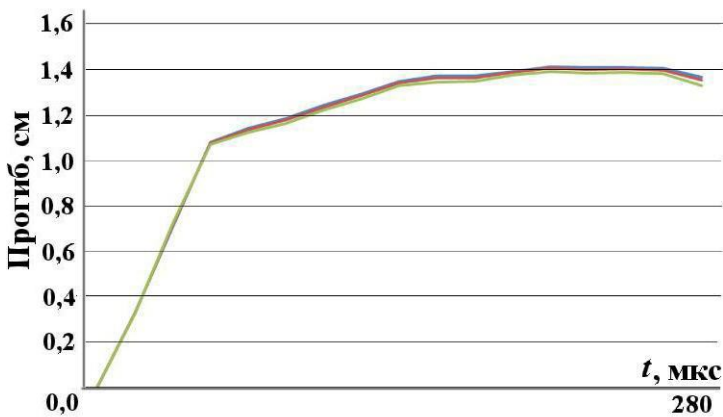


Рис. 9. Задача об изгибе круглой пластины. Временные зависимости смещения центральной точки пластины: — ажурная схема; — моментная схема; — схема Уилкинса

нием квадратичного варианта нелинейного тензора деформаций. Для учета физической нелинейности применялась теория пластичности с линейным кинематическим упрочнением.

На рис. 9 приведены графики временной зависимости смещения центральной точки пластины. Все три схемы на данной задаче показали близкие результаты.

Таким образом, результаты тестирования методики на базе нового моментного конечного элемента показали хорошее совпадение с численными результатами, полученными с использованием других численных схем, что свидетельствует о высоком качестве нового конечного элемента.

Заключение

Рассмотрена методика численного решения трехмерных динамических задач теории упругости и пластичности на базе нового моментного конечного элемента. Особенности данного конечного элемента являются отсутствие эффекта завышенной сдвиговой жесткости, присущего классическому четырехузловому конечному элементу в виде тетраэдра [11] и неустойчивости типа *песочные часы*, свойственной схеме Уилкинса, а также одна точка интегриро-

вания в элементе и наличие регулируемых параметров численной схемы. Вопрос оптимального подбора параметров схемы h_4, h_5, h_6, h_7 требует дополнительного изучения. Отметим, что каждый из данных параметров должен быть больше, чем характерный размер минимальной ячейки трехмерной сетки, чтобы не создавать дополнительных ограничений на устойчивость явной разностной схемы.

Отмеченные особенности моментного конечного элемента и результаты тестирования показывают перспективность данного подхода к построению эффективных методик численного решения задач теории упругости и пластичности, а также других задач механики сплошных сред и математической физики. Отметим также возможность построения на основе данного подхода методов решения задач с размерностью больше трех.

Список литературы

1. *Чекмарев Д. Т.* Об одном способе построения двумерных 4-узловых и трехмерных 8-узловых конечных элементов для решения задач теории упругости // Ученые записки Казанского университета. Сер. Физико-математические науки. 2013. Т. 155, № 3. С. 150—158.
Chekmarev D. T. Ob odnom sposobe postroeniya dvumernykh 4-uzlovykh i tryekhmernykh 8-uzlovykh konechnykh elementov dlya resheniya zadach teorii uprugosti // Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta. Ser. Fiziko-matematicheskie nauki. 2013. T. 155, № 3. S. 150—158.
2. *Чекмарев Д. Т.* Численные схемы метода конечного элемента на "ажурных" сетках // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2009. Вып. 2. С. 49—54.
Chekmarev D. T. Chislennye skhemy metoda konechnogo elementa na "azhurnykh" setkakh // Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov. 2009. Выр. 2. S. 49—54.
3. *Жидков А. В., Зефирова С. В., Кастальская К. А., Спиринов С. В., Чекмарев Д. Т.* Ажурная схема численного решения трехмерных динамических задач теории упругости и пластичности // Вестник ННГУ. 2011. № 4, ч. 4. С. 1480—1482.
Zhidkov A. V., Zefirov S. V., Kastalskaya K. A., Spirin S. V., Chekmarev D. T. Azhurnaya schema chislennogo resheniya tryekhmernykh dinamicheskikh zadach teorii uprugosti i plastichnosti // Vestnik NNGU. 2011. № 4, ch. 4. S. 1480—1482.
4. *Spirin S. V., Chekmarev D. T., Zhidkov A. V.* Solving the 3D elasticity problems by rare mesh FEM scheme // Lect. Notes in Comput Science. 2015. Vol. 9045. P. 379—384.
5. *Крутова К. А.* Численное решение трехмерных динамических задач теории упругости и пластичности на основе ажурной вариационно-разностной схемы: Дис. канд. физ.-мат. наук. ННГУ, 2015.
Krutova K. A. Chislennoe reshenie tryekhmernykh dinamicheskikh zadach teorii uprugosti i plastichnosti na osnove azhurnoy variatsionno-raznostnoy skhemy: Dis. kand. fiz.-mat. nauk. NNGU, 2015.
6. *Жидков А. В., Крутова К. А., Миронов А. А., Чекмарев Д. Т.* Численное решение трехмерных динамических упругопластических задач с использованием ажурной схемы метода конечных элементов // Проблемы прочности и пластичности. 2017. Т. 79, № 3. С. 327—337.
Zhidkov A. V., Krutova K. A., Mironov A. A., Chekmarev D. T. Chislennoe reshenie tryekhmernykh dinamicheskikh uprugoplasticheskikh zadach s ispolzovaniem azhurnoy skhemy metoda konechnykh elementov // Problemy prochnosti i plastichnosti. 2017. T. 79, № 3. S. 327—337.
7. *Ohya Y., Youshida N.* FEM model of Biot's equations free from volume locking and hourglass instability // The 14th World Conf. on Earthquake Engineering. October 12—17, 2008. Beijing, China.
8. *Chekmarev D. T., Dawwas Ya. A.* Solving the hourglass instability problem using rare mesh variation-difference schemes // J. Phys., Conf. Ser. 2021. Vol. 2099. Paper 012003.

9. *Уилкинс М. Л.* Расчет упругопластических течений // Вычислительные методы в гидродинамике. М.: Мир, 1967. С. 212–263.
Wilkins M. L. Raschet uprugoplasticheskikh techeniy // Vychislitelnye metody v gidrodinamike. М.: Mir, 1967. S. 212–263.
10. *Чекмарев Д. Т., Гладильщикова К. М.* Об одном классе двумерных схем МКЭ // Проблемы прочности и пластичности. 2006. Вып. 68. С. 236–242.
Chekmarev D. T., Gladilshchikova K. M. Ob odnom klasse dvumernykh skhem MKE // Problemy prochnosti i plastichnosti. 2006. Vyp. 68. S. 236–242.
11. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975.
Zenkevich O. Metod konechnykh elementov v tekhnike. М.: Mir, 1975.

Статья поступила в редакцию 23.11.22.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Абу Даввас Яссер — ННГУ им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, аспирант,
e-mail: yasserdawwas@gmail.ru

Бельков Сергей Аркадьевич — ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области, заместитель директора ИЛФИ по моделирующим установкам — начальник научно-исследовательского отделения, *e-mail*: SABelkov@vniief.ru

Бондаренко Сергей Викторович — ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области, начальник научно-теоретической лаборатории, *e-mail*: SVBondarenko@vniief.ru

Колобянина Наталья Викторовна — ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области, научный сотрудник

Лапшина Юлия Николаевна — ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области, старший научный сотрудник, *e-mail*: YNLapshina@vniief.ru

Мжачих Сергей Викторович — ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области, начальник научно-исследовательской лаборатории, *e-mail*: SVMzhachikh@vniief.ru

Саразов Алексей Владимирович — ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области, старший научный сотрудник, *e-mail*: AVSarazov@vniief.ru

Солнышкова Людмила Владимировна — ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области, старший научный сотрудник, *e-mail*: LVSolnyshkova@vniief.ru

Чекмарев Дмитрий Тимофеевич — ННГУ им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, профессор, *e-mail*: 4ekm@mm.unn.ru

Шестаков Александр Александрович — ФГУП "РФЯЦ-ВНИИТФ им. академ. Е. И. Забабахина", г. Снежинск Челябинской области, ведущий научный сотрудник, *e-mail*: A.A.Shestakov2012@yandex.ru

Сапожников Филипп Анатольевич — ФГУП "РФЯЦ-ВНИИТФ им. академ. Е. И. Забабахина", г. Снежинск Челябинской области, ведущий научный сотрудник, *e-mail*: f.a.sapozhnikov@vniitf.ru

Рыкованов Василий Сергеевич — ФГУП "РФЯЦ-ВНИИТФ им. академ. Е. И. Забабахина", г. Снежинск Челябинской области, научный сотрудник, *e-mail*: v.s.rykovanov@vniitf.ru

INFORMATION ABOUT AUTHORS

Abu Dawwas Yasser — NNSU n. a. N. I. Lobachevsky, Nizhny Novgorod, post-graduate,
e-mail: yasserdawwas@gmail.ru

Belkov Sergey Arkadyevich — FSUE "RFNC-VNIIEF", Sarov, N. Novgorod region, Deputy Director of ILFI for simulator devices — head of research division, *e-mail*: SAbelkov@vniief.ru

Bondarenko Sergey Viktorovich — FSUE "RFNC-VNIIEF", Sarov, N. Novgorod region, head of theoretical research laboratory, *e-mail*: SVBondarenko@vniief.ru

Kolobyanina Natalya Viktorovna — FSUE "RFNC-VNIIEF", Sarov, N. Novgorod region, scientist

Lapshina Yuliya Nikolaevna — FSUE "RFNC-VNIIEF", Sarov, N. Novgorod region, senior scientist,
e-mail: YNLapshina@vniief.ru

Mzhachikh Sergey Viktorovich — FSUE "RFNC-VNIIEF", Sarov, N. Novgorod region, head of research laboratory, *e-mail*: SVMzhachikh@vniief.ru

Sarazov Aleksey Vladimirovich — FSUE "RFNC-VNIIEF", Sarov, N. Novgorod region, senior scientist,
e-mail: AVSarazov@vniief.ru

Solnyshkova Lyudmila Vladimirovna — FSUE "RFNC-VNIIEF", Sarov, N. Novgorod region, senior scientist, *e-mail*: LVSolnyshkova@vniief.ru

Chekmarev Dmitriy Timofeevich — NNSU n. a. N. I. Lobachevsky, Nizhny Novgorod, professor,
e-mail: 4ekm@mm.unn.ru

Shestakov Aleksandr Aleksandrovich — FSUE "RFNC-VNIITF n. a. Academician E. I. Zababakhin", Snezhinsk, Chelyabinsk region, leading scientist, *e-mail*: A.A.Shestakov2012@yandex.ru

Sapozhnikov Filipp Anatolyevich — FSUE "RFNC-VNIITF n. a. Academician E. I. Zababakhin", Snezhinsk, Chelyabinsk region, leading scientist, *e-mail*: f.a.sapozhnikov@vniitf.ru

Rykovanov Vasiliy Sergeevich — FSUE "RFNC-VNIITF n. a. Academician E. I. Zababakhin", Snezhinsk, Chelyabinsk region, scientist, *e-mail*: v.s.rykovanov@vniitf.ru

УДК 517.958:536.2

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ СТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ И ЭНЕРГИИ В МНОГОМЕРНОМ СЛУЧАЕ / А. А. Шестаков // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2023. Вып. 3. С. 3–16.

При тестировании программ в качестве модельных задач желательно выбирать задачи, которые имеют аналитические решения. Хотя определенный прогресс в построении аналитических решений для уравнения переноса излучения достигнут, этих решений не всегда достаточно для разных классов задач переноса.

Используя разложение резольвенты оператора переноса в ряд Неймана, можно получить аналитические решения задачи переноса излучения в стационарном случае. Разложение в ряд Неймана позволяет по известному температурному распределению получать спектрально-угловые характеристики поля излучения.

В данной работе на основе разложения резольвенты оператора переноса в ряд Неймана созданы аналитические формулы для определения параметров теплового излучения в многомерной геометрии. Эти формулы позволяют при известной равновесной интенсивности, которая определяется только распределением температуры, и при заданных коэффициентах поглощения и рассеяния найти в явном виде аналитические выражения основных спектральных величин: интенсивности, плотности и потока излучения. Приведены решения в *сером* и спектральном приближениях для одномерной, двумерной и трехмерной геометрий (список лит. — 13).

Ключевые слова: точные решения, система уравнений переноса теплового излучения.

УДК 519.65

АППРОКСИМАЦИЯ ДАННЫХ ГИСТОГРАММЫ МЕТОДОМ УСЛОВНОЙ МИНИМИЗАЦИИ ДЛИНЫ КУБИЧЕСКОГО СПЛАЙНА КЛАССА C^1 , ОБЛАДАЮЩЕГО СВОЙСТВАМИ НЕОТРИЦАТЕЛЬНОСТИ И ЛОКАЛЬНОЙ МОНОТОННОСТИ. ЧАСТЬ 2 / С. В. Мжачих, Н. В. Колобянина, Ю. Н. Лапшина // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2023. Вып. 3. С. 17–33.

Представленная работа является продолжением опубликованной ранее работы с теми же авторами и названием. Освещены некоторые вопросы теории конструирования кубического сплайна, аппроксимирующего данные гистограммы, приводится рекомендуемая тактика расчета задач, основанная на многоэтапности, демонстрируются результаты расчетов некоторых тестовых задач, подтверждающие работоспособность алгоритма. В заключительном разделе обсуждаются достоинства и особенности метода (рис. — 2, табл. — 4, список лит. — 1).

Ключевые слова: кубический сплайн, условная минимизация, локально монотонная аппроксимация, неотрицательная аппроксимация.

УДК 519.6

СРАВНЕНИЕ WPH И DISPH МЕТОДОВ ЧАСТИЦ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ УДАРНЫХ ВОЛН / Ф. А. Сапожников, В. С. Рыкованов // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2023. Вып. 3. С. 34–54.

Изложены теоретические основы метода гидродинамики сглаженных частиц (SPH). Рассматриваются две его разновидности — WPH и DISPH. Приводятся тестовые расчеты для определения применимости методов при моделировании ударных волн. Рассматриваются следующие тесты: задача Сода, задача Ноха и задача Вудварда—Колеллы в одномерной постановке, а также седовский взрыв в трехмерной постановке. При сравнении WPH и DISPH учитывается ошибка в норме L_1 и астрономическое время, затраченное на проведение расчета. Для трехмерных тестов проводится оценка асимметрии решения. Во всех тестах, рассчитанных по методу WPH, получается меньшая ошибка и счет выполняется от 1,5 до 2 раз быстрее, чем по DISPH. Делается вывод о целесообразности применения метода WPH при моделировании задач с ударными волнами (рис. — 37, табл. — 1, список лит. — 23).

Ключевые слова: гидродинамика сглаженных частиц, SPH, программа "Молох", ударные волны, задача Сода, задача Ноха, задача Вудварда—Колеллы, седовский взрыв.

УДК 519.6

ОСОБЕННОСТИ ВЫЧИСЛЕНИЯ КОНВЕКТИВНЫХ ПОТОКОВ ДЛЯ ЗАДАЧ АЭРОДИНАМИКИ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ СЕТОК С ПОДВИЖНЫМИ УЗЛАМИ / А. В. Саразов // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2023. Вып. 3. С. 55–66.

Рассматриваются вопросы численного моделирования аэродинамики (гидродинамики) с подвижными границами для трехмерного случая. Обсуждаются подходы, гарантирующие консервативность численной схемы без потери точности моделирования. Предложена формула расчета скорости движения граней расчетных ячеек, которая позволяет корректно вычислять вектор скорости движения грани при произвольных деформациях расчетной сетки. Формула основана на принципе геометрической консервативности с использованием метода восстановления нормали с учетом корректировки по направлению. Для демонстрации реализованных алгоритмов решаются нестационарные задачи в прямой постановке. Предложенная схема расчета скорости грани показала качественное согласие результатов моделирования с реальной физикой течения (рис. — 16, список лит. — 21).

Ключевые слова: скорость грани, условие геометрической консервативности, система уравнений Навье—Стокса, NASA0012, AGARD 445.6, деформация расчетной сетки.

УДК 533.95, 621.373.826

СИММЕТРИЧНЫЕ КОНФИГУРАЦИИ ЛАЗЕРНЫХ ИСТОЧНИКОВ ДЛЯ ПРЯМОГО ОБЛУЧЕНИЯ МИШЕНИ. СИММЕТРИЯ ТЕТРАЭДРА / С. А. Бельков, С. В. Бондаренко, Л. В. Солнышкова // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2023. Вып. 3. С. 67–79.

Описан метод построения симметричных систем лазерного облучения с повышенными характеристиками однородности освещенности термоядерной капсулы. Найдены оптимальные конфигурации лазерных источников для прямого облучения сферической мишени, обладающие симметриями вращения тетраэдра, и проанализированы их возможности с точки зрения достигаемых уровней однородности лазерного облучения термоядерной капсулы. Предложен критерий оценки эффективности конфигураций лазерных источников. Проведено сопоставление эффективности редукции низших мод в структуре лазерной засветки сферической капсулы в поясных конфигурациях лазерных источников, построенных на основе квадратурных формул Гаусса—Лежандра, и в конфигурациях, обладающих симметрией тетраэдра (рис. — 7, табл. — 2, список лит. — 14).

Ключевые слова: инерциальный термоядерный синтез, мишень прямого облучения, однородность облучения мишени, поясная и симметричная системы облучения, симметрия тетраэдра.

УДК 519.6:539.3

МОМЕНТНЫЙ КОНЕЧНЫЙ ЭЛЕМЕНТ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И ПЛАСТИЧНОСТИ / Д. Т. Чекмарев, Абу Даввас Яссер // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2023. Вып. 3. С. 80–90.

Приводится описание нового восьмиузлового конечного элемента для решения трехмерных динамических задач теории упругости и пластичности. Восьмиузловой конечный элемент в виде гексаэдра обладает следующими особенностями: 1) напряжения, а также их моменты (три изгибающих и один крутящий) считаются постоянными в пределах элемента; 2) элемент имеет одну точку интегрирования; 3) элемент имеет четыре параметра, настраивая которые можно регулировать сходимостью численных решений. Метод построения данного конечного элемента основан на комбинации двух идей: применения ажурной схемы конечного элемента в виде симплекса, вписанного в n -мерный куб, и проецирования сеточной задачи высокой размерности на сетку пространства более низкой размерности. Описана реализация методики численного решения трехмерных нестационарных задач теории упругости и пластичности на базе данного конечного элемента. Приводятся результаты решения ряда тестовых задач теории упругости и пластичности и сравнение с решениями на основе других численных схем (рис. — 9, список лит. — 11).

Ключевые слова: метод конечных элементов, ажурная схема, неустойчивость песочные часы, трехмерная задача, нестационарная задача теории упругости.

EXACT SOLUTIONS TO THE STATIONARY SYSTEM OF RADIATION AND ENERGY TRANSPORT EQUATIONS IN MULTIDIMENSIONAL CASE / A. A. Shestakov // VANT. Ser.: Mat. Mod. Fiz. Proc. 2023. No 3. P. 3–16.

For code testing purposes, it is desirable to select model problems having exact solutions. In spite of the advances achieved in constructing analytical solutions to the radiation transport equation these solutions are not always sufficient for different classes of the transport problems. In a stationary case, one can find the analytical solution to the radiation transport problem by expanding in von Neumann series the transport operator resolvent. The expansion in von Neumann series allows obtaining the spectral-angular characteristics of the radiation field using the known temperature profiles. The paper presents the developed analytical formulas for finding the thermal radiation parameters in a multidimensional geometry. These formulas allow explicitly finding the analytical expressions for the main spectral quantities, such as intensity, density and radiation flux, using the known equilibrium intensity determined by the temperature distribution only and the given absorption and dispersion factors. The grey and spectral approximation solutions for 1D, 2D, and 3D geometries are presented.

Key words: exact solutions, system of thermal radiation transport equations.

THE HISTOGRAM DATA APPROXIMATION WITH THE CONDITIONAL MINIMIZATION METHOD FOR THE LENGTH OF THE CUBIC C^1 -CLASS SPLINE WITH THE NON-NEGATIVENESS AND LOCAL MONOTONICITY PROPERTIES. PART 2 / S. V. Mzhachikh, N. V. Kolobyanina, Yu. N. Lapshina // VANT. Ser.: Mat. Mod. Fiz. Proc. 2023. No 3. P. 17–33.

This paper is the continuation of the previous paper by the authors, which has the same name. Some issues of the theory of building a cubic spline approximating the histogram data are considered, the recommended multistage tactics of solving problems is presented, and the calculated results for some test problems demonstrating the algorithm efficiency are given. The final section of the paper discusses the benefits and specific features of the method.

Key words: cubic spline, conditional minimization, locally monotone approximation, non-negative approximation.

COMPARISON BETWEEN THE WPH AND DISPH METHODS OF PARTICLES IN SIMULATION OF SHOCK WAVES / F. A. Sapozhnikov, V. S. Rykovanov // VANT. Ser.: Mat. Mod. Fiz. Proc. 2023. No 3. P. 34–54.

The paper presents theoretical grounds of the smoothed particles hydrodynamics (SPH) method with consideration of its two modifications — the WPH and DISPH methods. Results of the method applicability tests are given for the shock wave simulation problems. The following problems are considered: 1D problems, such as the Sod problem, the Noh problem, and the Woodward-Colella problem, as well as the 3D Sedov blast wave problem. While comparing the WPH and DISPH methods, the L_1 norm error and astronomical computation time are taken into account. For 3D tests, the solution asymmetry is assessed. All tests with the WPH method demonstrate a less error and a 1.5 to 2 times higher computation speed, as compared to the DISPH method. So, the conclusion of the WPH method expediency for the simulation of problems with shock waves is made.

Key words: smoothed particles hydrodynamics, SPH, MOLOK code, shock waves, Sod problem, Noh problem, Woodward–Colella problem, Sedov blast wave.

THE SPECIFICS OF CALCULATING CONVECTIVE FLOWS IN AERODYNAMICS PROBLEMS USING MESHES WITH MOVING NODES / A. V. Sarazov // VANT. Ser.: Mat. Mod. Fiz. Proc. 2023. No 3. P. 55–66.

The paper considers the 3D numerical simulation of aerodynamics (hydrodynamics) with moving boundaries. The approaches ensuring the numerical scheme conservativeness without diminution of accuracy are discussed. A formula is proposed for the velocity calculation of the moving faces of computational cells, which allows correctly calculating the face motion velocity vector in case of arbitrary distortions of the computational mesh. This formula is based on the idea of geometric conservativeness with the use of the normal reconstruction method with corrections in the direction. To demonstrate the performance of the implemented algorithms, direct unsteady problems are solved. The proposed scheme for calculating the moving face velocity demonstrates a good qualitative agreement of the calculated results with the real physics of the flow.

Key words: velocity of a face, the geometrical conservativeness condition, the Navier-Stokes equation system, NACA0012, AGARD 445.6, computational mesh distortions.

SYMMETRIC CONFIGURATIONS OF LASER SOURCES FOR DIRECT-DRIVE TARGET. TETRAHEDRAL SYMMETRY / S. A. Belkov, S. V. Bondarenko, L. V. Solnyshkova // VANT. Ser.: Mat. Mod. Fiz. Proc. 2023. No 3. P. 67–79.

The paper describes the method of building symmetric laser irradiation systems with a higher level of illuminating a hohlraum. Optimal configurations of laser sources having tetrahedron rotation symmetries were found for directly driving a spherical target and capabilities of these configurations were examined from the viewpoint of achievable levels of uniformly illuminating the hohlraum by laser beams. A criterion is proposed to estimate the efficiency of configurations of laser sources. The comparison has been made between the efficiency of reducing the lowest modes in the laser illumination structure for a spherical hohlraum in zonal configurations of laser sources constructed on the base of Gauss–Legendre quadrature and in configurations with tetrahedral symmetry.

Key words: inertial confinement fusion, direct-drive target, target illumination uniformity, zonal and symmetric irradiation systems, tetrahedral symmetry.

MOMENTARY FINITE ELEMENT FOR SOLVING 3D DYNAMIC ELASTICITY AND PLASTICITY PROBLEMS / D. T. Chekmarev, Abu Dawwas Yasser // VANT. Ser.: Mat. Mod. Fiz. Proc. 2023. No 3. P. 80–90.

A description of a new 8-node finite element for solving 3D dynamic elasticity and plasticity problems is given. This 8-node finite element in the form of a hexahedron has the following features: 1) stresses and their moments (three bending and one torsional moments) are constant within the element; 2) it has one integration point; 3) the element has four parameters, by setting them one can control the numerical solution convergence. The finite element construction method is based on a combination of the two ideas: the rare mesh FEM scheme with a finite element in the form of a simplex inscribed in an n -dimensional cube is used and a mesh problem of high dimensionality is projected onto a lower dimension mesh. The implementation of the numerical solution technique to solve 3D nonstationary elasticity and plasticity problems based on a given finite element is described. The paper presents solutions for a number of test elasticity and plasticity problems and compares them with those based on the other numerical schemes.

Key words: the finite element method, the *hourglass* instability, a 3D problem, a nonstationary elasticity problem

Индекс подписки 72248

ISSN 2414-0171 **ВОПРОСЫ АТОМНОЙ НАУКИ И ТЕХНИКИ**

Серия:

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

2023 Вып. 3. 1–92