

УДК 519.6

## АНИЗОТРОПНАЯ МОДЕЛЬ ЗАМЫКАНИЯ УРАВНЕНИЙ УПРУГОПЛАСТИКИ МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ СРЕДЫ В СМЕШАННЫХ ЯЧЕЙКАХ

А. Л. Стадник, Ю. В. Янилкин, О. О. Топорова  
(ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", г. Саров Нижегородской области)

Смешанные ячейки в лагранжево-эйлеровых или эйлеровых методах расчета упругопластических течений могут содержать в себе контактные границы между различными веществами. При применении ALE-методов используется двухэтапный подход. На первом (лагранжевом) этапе рассматриваются уравнения упругопластики без конвективных членов, учет конвективного переноса осуществляется на втором этапе. В работе описана новая анизотропная модель замыкания уравнений упругопластики в смешанных ячейках, содержащих два и более компонентов среды, на лагранжевом этапе. Модель реализована в двумерной методике ЭГАК. Приводятся постановки и результаты расчетов двух одномерных и одной двумерной тестовых задач, демонстрирующих преимущества нового метода.

*Ключевые слова:* модель замыкания, смешанная ячейка, многокомпонентная среда, конечно-разностные методы, численное моделирование, двумерные течения, упругопластика.

### Введение

В лагранжево-эйлеровых (ALE) или эйлеровых методах расчета газодинамических и упругопластических течений смешанные ячейки содержат в себе контактные границы (КГ) между различными веществами или смеси веществ. Многие из таких методов используют двухэтапный подход. На первом этапе рассматриваются уравнения лагранжевой газовой динамики или упругопластики без конвективных членов, т. е. осуществляется учет членов уравнений, содержащих давление и напряжения. Учет конвективного переноса осуществляется на втором этапе.

В данной работе исследуется проблема расчета смешанных ячеек на первом этапе. Отметим, что смешанные ячейки могут содержаться даже в чисто лагранжевых методиках, так что проблемы, связанные с их наличием, должны решаться и в этом случае. Второе замечание касается того, что при использовании неподвижных сеток ALE-метод фактически становится эйлеровым.

Далее будем, как правило, употреблять термин *лагранжева газовая динамика* (или просто *газодинамика*), имея в виду, что сюда включается и упругопластика. Имеется несколько подходов к проблеме смешанных ячеек в газодинамике. При этом предполагается, что все они основаны на односкоростной модели среды. Основной подход, который стал главенствующим в настоящее время, основан на полном термодинамическом выделении в смешанных ячейках веществ (далее будем использовать термин *компонент*, имея в виду, что КГ математически может быть и между одинаковыми веществами).

В газодинамике термодинамическими параметрами являются плотность, внутренняя энергия и давление. Если моделируются другие процессы, то количество параметров увеличивается, например, для упругопластики это компоненты девиатора напряжений и параметры модели среды. Кроме термодинамических параметров, полагается, что для каждой смешанной ячейки задаются объемные доли (концентрации) компонентов, которые позволяют определять объемы, занимаемые ими в ячейке. К тому же по полю объемных концентраций может быть определено положение КГ внутри смешанной ячейки, которое используется в некоторых моделях.

Данный подход позволяет моделировать состояния в смешанных ячейках, содержащих как смеси компонентов, так и КГ между компонентами. Этот подход в приложении к КГ является объектом исследований данной работы. Далее речь пойдет только о нем, поэтому не будем выделять его особым названием.

При использовании смешанных ячеек для уравнений газодинамики необходимы дополнительные замыкающие соотношения, которые по сути определяют внутриячеечные (подсеточные) движения компонентов. Большинство известных моделей не требуют информации о положении КГ в ячейке, достаточно знать об объемных (или массовых) концентрациях компонентов и их термодинамическом состоянии [1–15]. Эти модели можно разделить на два класса по количеству вычислительных этапов.

Первый класс основан на одноэтапном введении модели замыкания.

Известны следующие *одноэтапные* модели замыкания:

- 1) на основе равенства дивергенций компонентов [16] (модель 1);
- 2) на основе равенства давлений компонентов [17] (модель 2);
- 3) на основе равенства приращений давлений [9] (модель 3);
- 4) на основе равенства массовых скоростей компонентов после прохождения слабой волны [18] (модель 4);
- 5) метод Делова, основанный на решении задачи о распаде разрыва в акустическом приближении [10] (модель 5);
- 6) метод Типтона [1] (модель 6).

Во втором (*двухэтапном*) классе моделей замыкания второй этап по сути является дополнением к первому и заключается в том, что на нем осуществляется взаимодействие компонентов внутри смешанной ячейки (так называемое подсеточное взаимодействие). Второй (подсеточный) этап был введен в [18]. В этой работе на втором этапе осуществляется дополнительное выравнивание давлений компонентов. Данный алгоритм применяется в моделях 3 и 4.

Все вышеуказанные модели (методы)\* не используют данные о положении КГ внутри смешанной ячейки. Однако имеются методы, в которых эта информация используется, один из них (IA-SSD) описан в работе [14]. Подробное изложение данного метода с некоторыми дополнениями приведено в работе [19]. В ней предложена двухэтапная модель, на первом этапе которой используется модель 1 на основе равенства дивергенций скорости компонентов. На втором этапе происходит движение КГ между компонентами по нормали к ней под действием индивидуальных давлений компонентов с учетом их реальных масс и расстояний между центрами масс. При этом положение КГ восстанавливается по объемным концентрациям, а ее движение осуществляется на основе решения задачи о распаде разрыва в акустическом приближении (фактически это обобщенный метод Делова из работы [10]). Метод, разработанный на основе этой модели, довольно сложен для реализации и имеет существенное ограничение в случае малых концентраций одного из компонентов (как и метод Делова). Физически это связано с тем, что при расчете распада разрыва за временной шаг распространение волн происходит на определенное расстояние, которое должно быть не больше размера области, занимаемой каждым из компонентов. Так как выбор счетного шага осуществляется исходя из курантовского ограничения, то необходимое условие может быть нарушено, что приводит к нефизичным результатам (например, отрицательному значению нового объема компонента). Для устранения этого недостатка авторы работы [19] разработали дополнительные ограничители для приращений объемов, что значительно усложняет алгоритмы метода.

Отметим одно общее свойство (вследствие принятых в моделях предположений) всех указанных моделей замыкания. В них движение КГ (определенной или воображаемой) происходит по нормали к КГ, по сути они являются одномерными и изотропными в том смысле, что сжатия (растяжения) компонентов полагаются одинаковыми во всех направлениях. Данное свойство моделей вполне применимо в большинстве приложений, однако имеются задачи (см. далее), в которых оно приводит к существенной погрешности при численном моделировании.

\* Далее будем употреблять термины *модель* и *метод*, зачастую не делая между ними разницы. Здесь надо иметь в виду, что под *методом* понимается алгоритм, реализованный в виде программы, в основе которого лежит та или иная физико-математическая модель.

В работе [20] описана анизотропная модель замыкания АСМ-1 (далее модель 7), являющаяся дальнейшим развитием модели на основе равенства дивергенций скорости компонентов. Она обладает всеми достоинствами моделей 3, 4, являющихся основными моделями методики ЭГАК [21, 22] при моделировании течений, в которых приемлемо предположение об изотропности, и имеет существенное преимущество по сравнению с ними при моделировании более сложных течений. Однако в модели 7 не полностью учитываются упругопластические свойства материалов из-за того, что в ней используется лишь шаровая часть тензора напряжений. В настоящей работе предлагается модификация этой модели (модель 8), учитывающая упругопластические свойства материалов полностью (с учетом полного тензора напряжений).

## 1. Исходные уравнения на лагранжевом этапе

Исходная система уравнений газодинамики, решаемая на лагранжевом этапе, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\mathbf{u}}{dt} &= -\frac{1}{\rho}\nabla p; \\
 \frac{d\rho_\xi}{dt} &= -\rho_\xi\nabla\cdot\mathbf{u}_\xi; \\
 \frac{d\beta_\xi}{dt} &= \beta_\xi(\nabla\cdot\mathbf{u}_\xi - \nabla\cdot\mathbf{u}); \\
 \frac{de_\xi}{dt} &= -\frac{p_\xi}{\rho_\xi}\nabla\cdot\mathbf{u}_\xi; \\
 \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \mathbf{u}; \\
 p_\xi &= P_\xi(\rho_\xi, e_\xi).
 \end{aligned} \tag{1}$$

В случае упругопластических течений решается аналогичная система уравнений:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\mathbf{u}}{dt} &= \frac{1}{\rho}\nabla T; \\
 \frac{d\rho_\xi}{dt} &= -\rho_\xi\nabla\cdot\mathbf{u}_\xi; \\
 \frac{d\beta_\xi}{dt} &= \beta_\xi(\nabla\cdot\mathbf{u}_\xi - \nabla\cdot\mathbf{u}); \\
 \frac{de_\xi}{dt} &= \frac{1}{\rho_\xi}\text{Sp}(T_\xi D_\xi); \\
 \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \mathbf{u}.
 \end{aligned} \tag{2}$$

В системах уравнений (1) и (2) используются обозначения:  $\mathbf{r}(x, y)$  — радиус-вектор;  $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$  — скорость;  $\rho$  — плотность;  $T$  — тензор напряжений;  $D$  — тензор скоростей деформации;  $p$  — давление;  $e$  — удельная внутренняя энергия;  $\beta$  — объемная доля (концентрация) вещества ( $\beta_\xi = V_\xi/V$ ). Индекс  $\xi$  означает номер вещества (компонента); отметим также, что в выражении для дивергенции скорости он относится не к скорости, а к дивергенции скорости в целом.

Тензор напряжений и тензор скоростей деформации имеют вид

$$T = \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & 0 \\ T_{yx} & T_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & T_\varphi \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} d_{xx} & d_{xy} & 0 \\ d_{yx} & d_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & d_\varphi \end{pmatrix}.$$

Компоненты девиатора напряжений  $S = (S_{xx}, S_{yy}, S_{xy}, S_{\varphi})$  определяются формулой

$$S_{ij} = T_{ij} + p.$$

Для компонентов среды определяются уравнения состояния

$$p_{\xi} = P_{\xi}(\rho_{\xi}, e_{\xi})$$

и уравнения, выражающие зависимость девиатора напряжений от тензора скоростей деформации:

$$f_{\xi}(S_{\xi}, D_{\xi}) = 0. \quad (3)$$

Конкретный вид формулы (3) определяется принятой моделью среды.

В методике ЭГАК используется метод расщепления по физическим процессам, в котором члены, связанные с давлением, аппроксимируются на лагранжевом этапе, а члены, связанные с девиатором напряжений, — на другом этапе вычислений.

В описываемой методике компонентами могут быть как различные материалы со своими уравнениями состояния, так и вакуум, а также абсолютно твердое тело.

В разностной схеме методики скорость определена в узлах счетной сетки, а остальные величины (плотность, энергия, элементы девиатора напряжений) — в центрах ячеек и для каждого компонента в отдельности. Здесь необходимо иметь в виду, что при программной реализации в системе (1) или (2) вместо давления используется сумма давления и искусственной (счетной) вязкости:  $q$  для среды в целом и  $q_{\xi}$  для компонентов.

В системах уравнений (1) и (2) не определены следующие величины: среднее давление  $p$ , вязкости компонентов, вязкость и компоненты девиатора напряжений для среды в целом, а также дивергенции и тензор скоростей деформации для компонентов.

Искусственные вязкости определяются по формулам из работы [23].

Формулы для среднего давления, вязкости и девиатора напряжений имеют следующий вид:

$$p^{n+1/2} = \sum_{\xi} \beta_{\xi} \lambda_{\xi} p_{\xi}^{n+1/2}; \quad q^n = \sum_{\xi} \beta_{\xi} \lambda_{\xi} q_{\xi}^n; \quad S^n = \sum_{\xi} \beta_{\xi} \lambda_{\xi} S_{\xi}^n,$$

где коэффициент  $\lambda_{\xi}$  определяется принятой моделью замыкания уравнений газодинамики [22].

Для определения дивергенций скорости компонентов необходимы замыкающие соотношения, являющиеся следствием различных предположений относительно термодинамического состояния компонентов в смешанных ячейках. Реализованные в методике модели замыкания описаны в работе [22].

## 2. Анизотропная модель замыкания

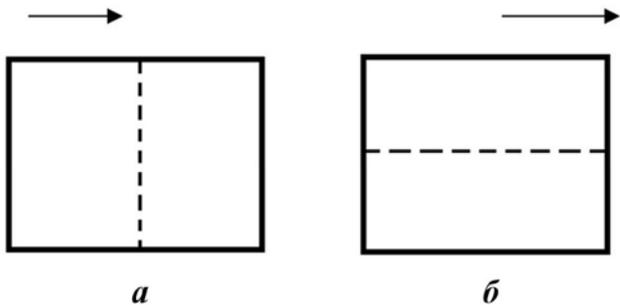


Рис. 1. Два случая расположения КГ по отношению к движению волны: перпендикулярно (а) и вдоль (б)

**2.1. Идея и основы модели.** Рассмотрим два предельных случая расположения КГ по отношению к движению волны (ударной, упругой и др.), на которой происходит сжатие или растяжение ячеек, т. е. имеет место ненулевая дивергенция скорости (рис. 1). Заметим, что только в этом случае на первом этапе модели замыкания происходит перераспределение общей дивергенции скорости в ячейке между компонентами. Что касается второго этапа модели, то на нем осуществляется взаимодействие между компонентами, если они находятся в неравновесном состоянии, без обязательного условия наличия ненулевой дивергенции скорости.

В первом случае (см. рис. 1, *a*) движение происходит по нормали к КГ, поэтому здесь пригодны все вышеуказанные модели 1–6, каждая со своей точностью. Сразу отметим, что, как показано в работах [9, 11, 18], наименьшей точностью среди всех моделей в этом случае обладает модель 1, основанная на равенстве сжимаемостей компонентов. Кроме того, в этих работах показано, что наиболее приемлемой по совокупности результатов расчетов большого количества задач является модель 4, основанная на предположении о равенстве массовых скоростей компонентов после прохождения слабой волны.

Во втором случае (см. рис. 1, *b*) основное движение происходит вдоль КГ, а в поперечном направлении оно незначительно, поэтому носит вспомогательный характер. Это означает, что сжатия или растяжения компонентов происходят в тангенциальном к КГ направлении. Таким образом, в этом случае более корректным может стать использование модели с равенством сжимаемостей компонентов, т. е. модели 1. Действительно, расчеты показывают, что, например, для упругопластической среды модель 1 обеспечивает хорошую точность, в то время как, применяя модели 2–4, можно получить значительную погрешность.

Таким образом, для обеспечения приемлемой точности моделирования двух разных типов течений (в разных направлениях относительно КГ) должны использоваться разные замыкающие соотношения. Для этого предлагается следующая двухэтапная модель.

На первом этапе в любой смешанной ячейке осуществляется движение среды в целом, в котором все ее неоднородности (в том числе КГ) полагаются *вмороженными*. Условие вмороженности на этом этапе с точки зрения замыкания в первом приближении означает равенство дивергенций скорости компонентов. Второй этап — релаксация давления (и напряжений) на фоне такого движения. В работе [19] для этого используется решение задачи Римана в акустическом приближении (данный подход ранее был реализован в работе [10]), при этом решение не зависит от положения КГ относительно общего движения. В настоящей работе вместо решения задачи Римана предлагается использовать алгоритм выравнивания давлений компонентов из работы [18], при этом степень выравнивания предлагается сделать зависимой от взаимной ориентации направлений движения среды и КГ. В частном случае движения по нормали к КГ релаксация давления наибольшая, а при движении вдоль КГ вообще отсутствует.

**2.2. Описание метода замыкания.** Новая модель замыкания реализована на основе метода замыкания из работы [20]. Далее дано описание этого метода (метод 7) и его модификации для упругопластики, реализованной в настоящей работе.

В методе 7 расчет дивергенций скорости компонентов на временном шаге выполняется в два этапа, и общая дивергенция скорости представляется как сумма дивергенций скорости, полученных на этих двух этапах:

$$(\nabla \cdot \mathbf{u})_{\xi} = (\nabla \cdot \mathbf{u})_{\xi 1} + (\nabla \cdot \mathbf{u})_{\xi 2}.$$

Здесь  $(\nabla \cdot \mathbf{u})_{\xi 1}$  — дивергенция скорости компонента  $\xi$  на первом этапе, и она равна полной дивергенции скорости смешанной ячейки в соответствии с моделью замыкания 1 (равенство дивергенций скорости компонентов):

$$(\nabla \cdot \mathbf{u})_{\xi 1} = \nabla \cdot \mathbf{u}.$$

На втором этапе происходит релаксация давлений компонентов в смешанных ячейках. При этом для сохранения объема ячеек и их внутренней энергии накладывается условие, чтобы на втором этапе в ячейке оставались неизменными дивергенции скорости. Выравнивание давлений компонентов осуществляется за счет вычисления дополнительных дивергенций скорости компонентов  $(\nabla \cdot \mathbf{u})_{\xi 2}$  по формуле

$$(\nabla \cdot \mathbf{u})_{\xi 2} = -\frac{\Delta p_{\xi}}{\tau \rho_{\xi} c_{\xi}^2}, \quad (4)$$

где  $\Delta p_{\xi}$  определяется выражением

$$\Delta p_{\xi} = A \frac{c\tau}{h} (p - p_{\xi}), \quad (5)$$

в котором  $p$  — среднее давление в смешанной ячейке. При получении выражения (4) использовалось известное в адиабатическом приближении соотношение  $\Delta p / \Delta t = -\rho c^2 \nabla \cdot \mathbf{u}$ .

Множитель  $c\tau/h$  в (5), равный отношению временного шага к характерному для данной смешанной ячейки времени выравнивания давлений  $h/c$ , определяет долю от разницы в давлениях компонентов, на которую произойдет выравнивание давлений компонентов за один временной шаг.

Для анизотропной модели замыкания коэффициент выравнивания давлений  $A$  зависит от взаимной ориентации направлений движения среды и КГ. Для этого общую дивергенцию скорости разделяем на две составляющие  $\nabla \cdot \mathbf{u}_\tau$  и  $\nabla \cdot \mathbf{u}_n$ , получающиеся разложением скорости на две компоненты — вдоль КГ и по нормали к ней. Далее полагаем

$$A = A_0 \frac{\nabla \cdot \mathbf{u}_n}{\nabla \cdot \mathbf{u}},$$

где  $A_0$  — некоторая константа.

В случае движения по нормали к КГ (см. рис. 1, а)  $\nabla \cdot \mathbf{u}_n = \nabla \cdot \mathbf{u}$  и коэффициент выравнивания давлений  $A = A_0$ , т. е. в этом случае релаксация давлений наибольшая. При движении вдоль КГ (см. рис. 1, б)  $\nabla \cdot \mathbf{u}_n = 0$  и коэффициент выравнивания давлений  $A = 0$ , т. е. выравнивание давлений полностью отсутствует и работает только первый этап метода замыкания.

Коэффициент  $A_0 = 1$  определен по результатам тестовых расчетов в работе [20].

При учете упругопластических свойств материалов в формуле (5) вместо шаровой части тензора напряжений (давления) используется сумма его шаровой и девиаторной составляющих. С учетом того, что давление действует по нормали к КГ, сначала необходимо осуществить перевод девиатора напряжений в новую систему координат  $(x', y')$ , связанную с КГ:

$$\begin{pmatrix} S_{xx} & S_{xy} \\ S_{yx} & S_{yy} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} S_{x'x'} & S_{x'y'} \\ S_{y'x'} & S_{y'y'} \end{pmatrix}.$$

В новой системе координат полагаем ось  $OY'$  перпендикулярной КГ, а ось  $OX'$  — совпадающей с КГ. Тогда формула (5) принимает следующий вид:

$$\Delta p_\xi = A \frac{c\tau}{h} \left[ p - S_{y'y'} - p_\xi + (S_{y'y'})_\xi \right].$$

В остальной модели 7 остается без изменений, в том числе для ячеек, содержащих вакуум.

В заключение раздела покажем, что при использовании предлагаемого метода дивергенция скорости для всей ячейки остается неизменной:

$$\begin{aligned} \sum \beta_\xi (\nabla \cdot \mathbf{u})_\xi &= \sum \beta_\xi \left[ (\nabla \cdot \mathbf{u})_{\xi 1} + (\nabla \cdot \mathbf{u})_{\xi 2} \right] = \sum \beta_\xi \left[ (\nabla \cdot \mathbf{u}) + (\nabla \cdot \mathbf{u})_{\xi 2} \right] = \\ &= (\nabla \cdot \mathbf{u}) \sum \beta_\xi + \sum \beta_\xi (\nabla \cdot \mathbf{u})_{\xi 2} = \nabla \cdot \mathbf{u} + \sum \beta_\xi \frac{\Delta V_{\xi 2}}{V_\xi} = \nabla \cdot \mathbf{u} + \sum \frac{\Delta V_{\xi 2}}{V} = \nabla \cdot \mathbf{u} + 0 = \nabla \cdot \mathbf{u}. \end{aligned}$$

### 3. Тестовые расчеты

В данном разделе рассматриваются две одномерные и одна двумерная задачи, имеющие точные решения. Использованные в расчетах модели (методы) замыкания приведены в табл. 1.

**3.1. Задача Сода (задача 1).** В этой газодинамической задаче, описанной в работе [24], имеются два идеальных газа со следующими начальными данными ( $e$  — удельная внутренняя энергия):

$$(\gamma, \rho, e, p, u) = \begin{cases} (1,4; 1; 2,5; 1; 0), & 0 \leq x \leq 0,5; \\ (1,4; 0,125; 2; 0,1; 0), & 0,5 < x \leq 1. \end{cases}$$

В расчетах используются два компонента с указанными параметрами и пространственными размерами; в подобласти  $0 \leq x \leq 0,5$  газ описывается как компонент 1, в подобласти  $0,5 < x \leq 1$  — как компонент 2. Расчеты проведены на сетках со 100, 200, 400 и 800 ячейками.

Таблица 1

Методы замыкания, использованные в расчетах

Номер метода замыкания	Описание
4	Равенство приращений скорости компонентов + алгоритм релаксации давлений (основной метод в ЭГАК)
1	Одинаковая сжимаемость компонентов (первая часть анизотропной модели)
7	Анизотропная модель замыкания без учета девиатора напряжений
8	Анизотропная модель замыкания с учетом полного тензора напряжений

В табл. 2 приводятся точные и расчетные значения основных величин в смешанных ячейках, полученные по разным методам замыкания. На рис. 2 приводятся графики зависимостей абсолютной погрешности в норме  $L_1$  от  $h$ . Видно, что метод 8 (в этой задаче он совпадает с методом 7, кроме того, коэффициент  $A = 1$ ) дает результат, по точности близкий к методу 4. Отметим, что метод 1 без алгоритма релаксации давлений дает худший результат.

Таблица 2

Задача 1. Точные и расчетные значения основных величин в смешанных ячейках на сетке с 800 ячейками

Метод решения	$p_1$	$p_2$	$\rho_1$	$\rho_2$	$e_1$	$e_2$
Точное решение	0,303	0,303	0,426	0,266	1,778	2,853
Чистые ячейки	0,303	0,303	0,423	0,257	1,792	2,953
Метод 1	0,551	0,055	0,652	0,082	2,113	1,690
Метод 8 (метод 7)	0,303	0,303	0,391	0,245	1,938	3,090
Метод 4	0,303	0,303	0,391	0,248	1,940	3,060

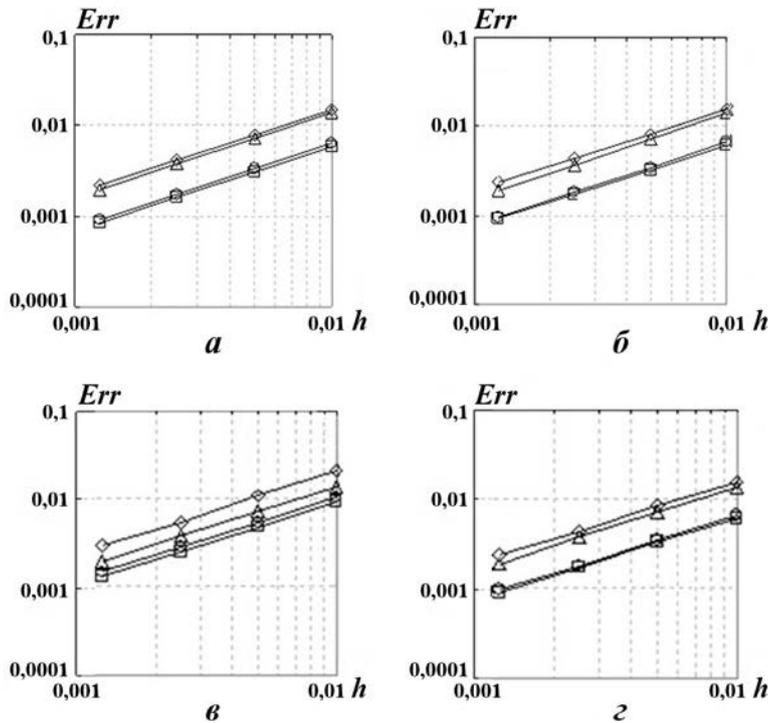


Рис. 2. Задача 1. Зависимости абсолютной погрешности в норме  $L_1$  от  $h$ : а — чистые ячейки; б — метод 4; в — метод 1; г — метод 8; —○— давление; —□— плотность; —◇— энергия; —△— скорость

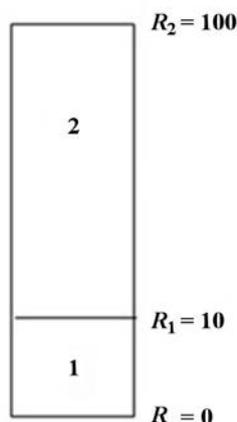


Рис. 3. Геометрия задачи 2

**3.2. Цилиндрическая задача Блэка (задача 2).** Для этой осесимметричной одномерной упругопластической задачи, сформулированной в работах [25, 26], существует несколько постановок. Представленная ниже постановка взята из работы [27]. Геометрия задачи приведена на рис. 3.

В области 2, ограниченной радиусами  $R_1 = 10$  см и  $R_2 = 100$  см, находится абсолютно упругое вещество с плотностью  $\rho_0 = 3$  г/см<sup>3</sup> и уравнением состояния в форме Ми–Грюнаизена со следующими параметрами: скорость звука  $c_0 = 3,7265$  км/с; безразмерный параметр  $n_0 = 7$ ; коэффициент Грюнаизена  $\Gamma_0 = 1,0001$ ; отклонное давление  $p_0 = -10^8$  ГПа. Параметры для упругопластической модели: предел текучести  $Y_0 = 1 \cdot 10^8$  ГПа; модуль сдвига  $G_0 = 25$  ГПа; модуль объемного сжатия  $K_0 = 41,66$  ГПа; коэффициент Пуассона  $\nu_0 = 0,25$ . Такие большие значения  $p_0$  и  $Y_0$  для основного вещества задаются для того, чтобы деформации оставались в упругой области.

В области 1, ограниченной осью координат и радиусом  $R_1 = 10$ , находится вещество с плотностью  $\rho_0 = 3$  г/см<sup>3</sup> и постоянным давлением  $p_0 = 0,001$  ГПа и скоростью звука  $c_0 = 3,7265$  км/с.

Граничные условия — жесткие стенки.

В задаче происходит распространение упругой волны по первому веществу (со стороны второго вещества). Задача имеет аналитическое решение, что позволяет на определенный момент времени сравнивать распределения давления и напряжений.

Все расчеты проводились в лагранжевых координатах на равномерной сетке. Проведена серия расчетов на сходимость с измельчением счетной сетки (число ячеек по радиусу  $N = 100, 200, 400$ ). Во всех расчетах на начальный момент времени задавался один слой смешанных ячеек так, что вещества делили такие ячейки поровну.

На рис. 4 приведены профили радиальных напряжений в зависимости от радиуса, полученные с двумя методами замыкания, в сравнении с точным решением. На рис. 5 представлены графики погрешностей величин в норме  $L_1$ . Из этих рисунков видно, что метод 8 (в этой задаче коэффициент  $A = 1$ ) дает более точный результат по сравнению с методом 4.

**3.3. Задача о распространении упругих волн в пластине (задача 3).** Рассматривается двумерная задача распространения упругих волн в пластине (задача сформулирована и решена А. А. Краюхиным в работе [28]). Летящий со скоростью  $V_0 = 0,01$  км/с ударник из титана длиной  $L = 10$  см ударяется о жесткую стенку. При этом в ударнике возникает упругая волна, распро-

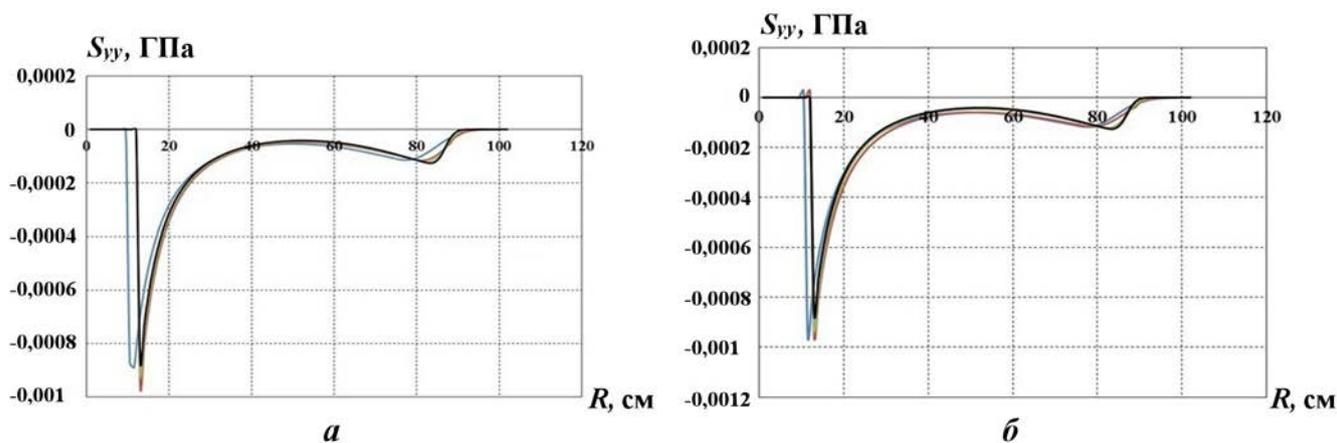


Рис. 4. Задача 2.  $S_{yy}(R)$ -зависимости: а — метод 8, б — метод 4; —  $N = 100$ ; —  $N = 200$ ; —  $N = 400$ ; — точное решение

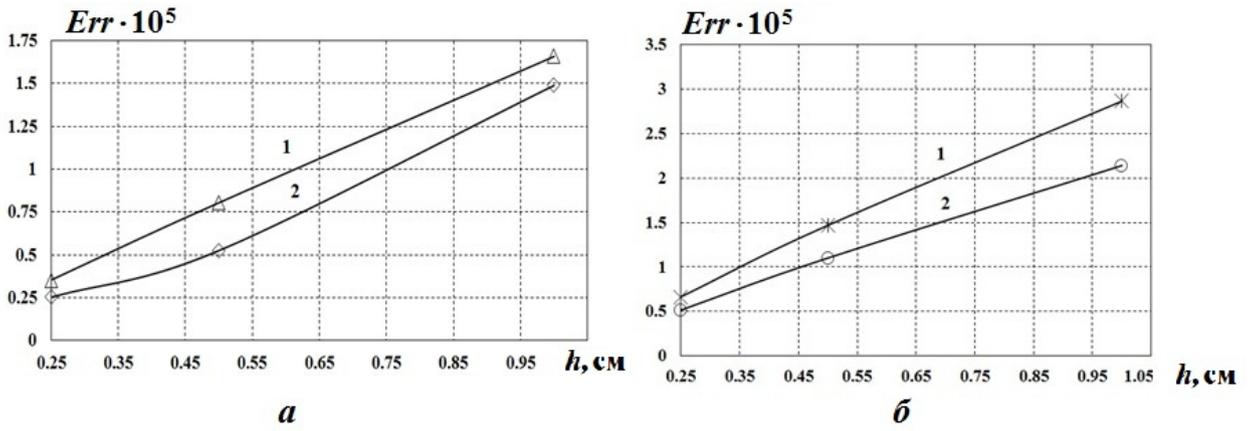


Рис. 5. Задача 2. Погрешности давления (а) и радиальных напряжений (б) в норме  $L_1$ : 1 — метод 4; 2 — метод 8

страняющаяся по направлению к его тыльной поверхности. По результатам расчетов определялась скорость волны. На рис. 6 схематично изображена начальная геометрия задачи.

Расчеты проводились на неподвижной квадратной сетке с размером счетной ячейки  $h = 0,2$  см. В расчетах ударник двигался в воздухе. Счетная сетка строилась таким образом, чтобы вокруг ударника на начальный момент времени были смешанные ячейки, содержащие воздух и титан в пропорции 1 : 1.

Также были проведены расчеты на кривой сетке. Картина поля концентраций и фрагмент счетной сетки для данного расчета приведены на рис. 7.

Для описания воздуха использовалось уравнение состояния идеального газа при следующих начальных условиях:  $e_0 = 0$ ;  $p_0 = 0$ ;  $\rho_0 = 1,3 \cdot 10^{-3}$  г/см<sup>3</sup>. Для смешанных ячеек, содержащих вещества ударника и воздуха, использовались методы замыкания из табл. 1. Во всех расчетах на толщину пластины приходилось 5 счетных ячеек ( $N = 5$ ), расчетная сетка строилась таким образом, чтобы на боковых поверхностях ударника на начальный момент времени присутствовали смешанные ячейки (объемные концентрации компонентов равны 0,5).

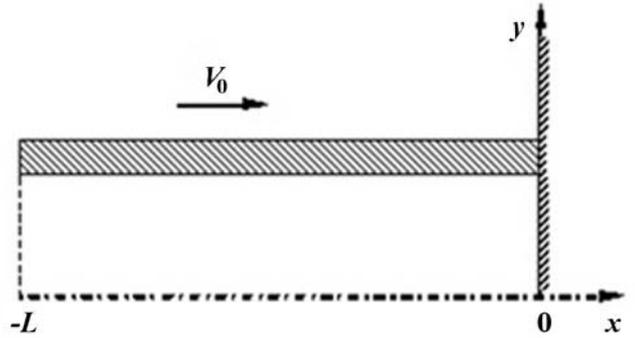


Рис. 6. Геометрия задачи 3

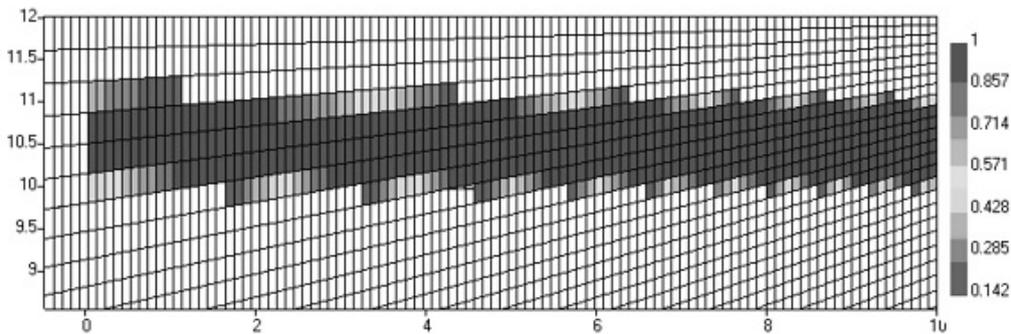


Рис. 7. Задача 3. Картина объемных концентраций в расчете на кривой сетке

Для описания титана использовались уравнение состояния в форме Ми–Грюнайзена, откольный критерий разрушения и модель упругопластичности Джонсона–Кука с параметрами из табл. 3, 4.

Для определения скорости продольной волны в работе [28] предложен следующий способ. Предположим, что в процессе распространения упругой волны ее фронт не "размазывается". Из-за того, что имеет место удар по жесткой стенке, скорость материала ударника за фронтом волны должна равняться нулю. Поэтому темп уменьшения скорости центра масс ударника можно связать со скоростью распространения упругой волны.

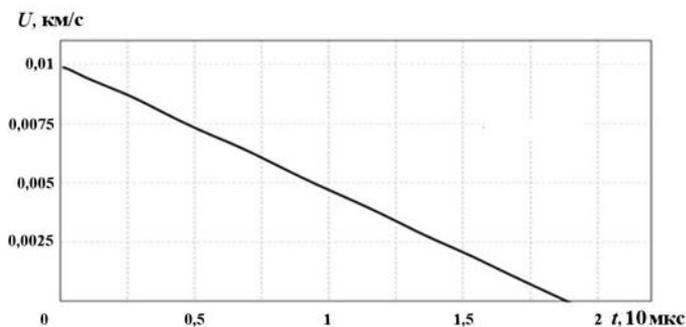


Рис. 8. Задача 3. Зависимость скорости центра масс пластины от времени в расчете с чистыми ячейками

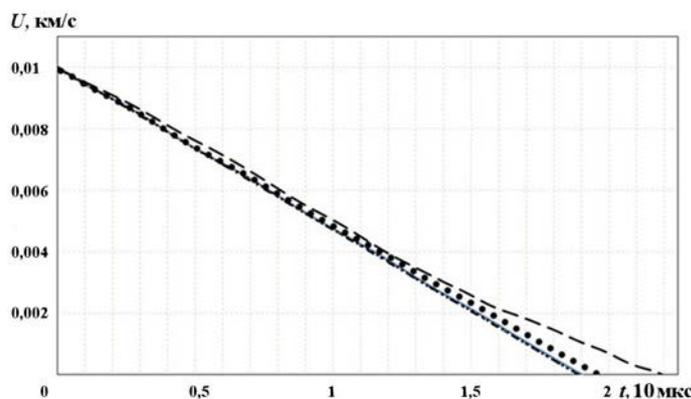


Рис. 9. Задача 3. Зависимости скорости центра масс пластины от времени в расчетах на прямоугольной счетной сетке с различными условиями замыкания: — — метод 8; ••• — метод 7; — — метод 4; — · — · — теория

На рис. 8 приведена зависимость скорости центра масс ударника от времени в расчете с воздухом без смешанных ячеек. Отметим, что в этой задаче сжатия в поперечном направлении незначительны, поэтому за все время движения упругой волны по ударнику смешанные ячейки не образуются. Обработка данных, представленных в виде графика на рис. 8, показывает, что эта зависимость хорошо аппроксимируется линейной функцией ( $u = -0,0052t + 0,01$ ). Это значит, что скорость распространения упругой волны постоянна. Время прохождения упругой волны вдоль всего ударника составляет  $t = 0,01/0,0052 = 1,92 \cdot 10$  мкс. При достижении этого момента времени скорость центра масс ударника становится равной нулю. Зная начальную длину ударника, можно вычислить скорость продольной волны:  $c_w = L/T = 5,2$  км/с. Погрешностью, связанной с перемещением заднего торца ударника, можно пренебречь из-за малости массовой скорости материала по сравнению с волновой. Полученное расчетное значение скорости продольной волны хорошо согласуется с ее теоретическим значением  $c_w = 5,3$  км/с для плоской геометрии и  $5,02$  для цилиндрической [28].

На рис. 9 приведены зависимости скорости центра масс пластины от времени, полученные в расчетах с плоской геометрией на прямоугольной сетке с различными условия-

Таблица 3

Задача 3. Параметры уравнения состояния Ми–Грюнайзена

Материал	$\rho_0$ , г/см <sup>3</sup>	$c_0$ , км/с	$n$	$\Gamma$	$\rho_{отк}$ , ГПа
Титан	4,5	4,842	3,4243	1,18	-1,8

Таблица 4

Задача 3. Параметры модели Джонсона–Кука

Материал	$Y_0$ , ГПа	$b$ , ГПа	$k$	$c$	$m$	$c_V$ , кДж/(г·К)	$T_m$ , К	$G$ , ГПа	$\nu$
Титан	1,098	1,092	0,93	0,014	1,1	$580 \cdot 10^{-6}$	1 878	43	0,32

ми замыкания. В табл. 5 приведены значения скорости продольной волны  $c_w$ , полученные в подобных расчетах.

На рис. 10 приведены зависимости скорости центра масс пластины  $c_w$  от времени, полученные на косоj сетке с различными условиями замыкания (плоский случай).

На рис. 11 приведены зависимости скорости центра масс пластины от времени в расчетах с цилиндрической геометрией на прямоугольной счетной сетке с различными условиями замыкания. В табл. 6 приведены значения скорости  $c_w$ , полученные в подобных расчетах.

Из табл. 5 видно, что метод 8 дает наиболее точное значение  $c_w$  в задаче с плоской геометрией. Аналогично из табл. 6 видно, что метод 8 дает наиболее точное значение  $c_w$  и в задаче с цилиндрической

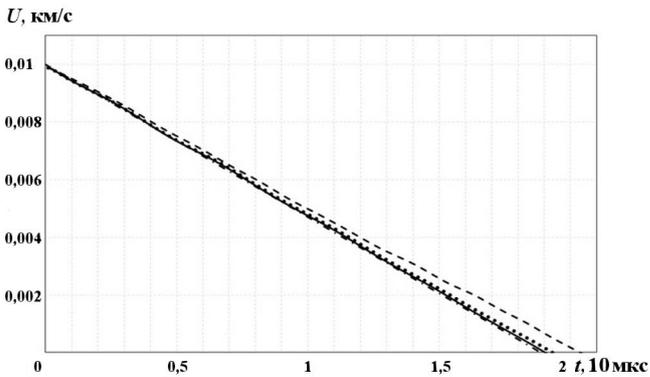


Рис. 10. Задача 3. Зависимости скорости центра масс пластины от времени, полученные на косоj сетке с различными условиями замыкания (плоский случай):  $\cdots$  — метод 7;  $----$  — метод 4;  $—$  — метод 8;  $- \cdot - \cdot -$  — теория

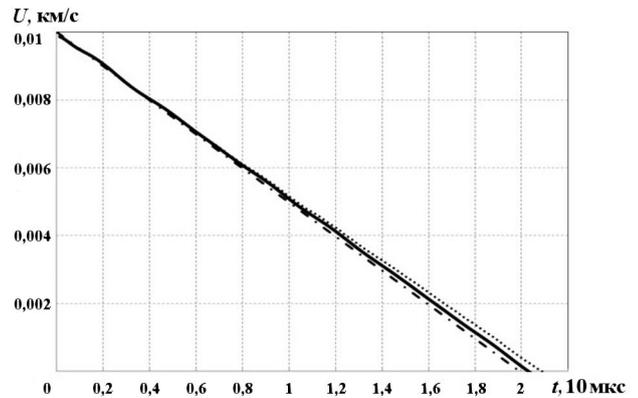


Рис. 11. Задача 3. Зависимости скорости центра масс пластины от времени в расчетах с цилиндрической геометрией на прямоугольной счетной сетке с различными условиями замыкания:  $\cdots$  — метод 7;  $—$  — метод 8;  $- \cdot - \cdot -$  — теория

Таблица 5

Задача 3. Расчетные значения скорости продольной упругой волны  $c_w$  в пластине (плоский случай)

Метод замыкания, тип сетки	Расчет, км/с	Погрешность, %	Теория, км/с
Метод 1, прямоугольная сетка	5,38	+1,51	5,3
Метод 4, прямоугольная сетка	4,7	-11,32	
Метод 7, прямоугольная сетка	5,13	-3,21	
Метод 8, прямоугольная сетка	5,26	-0,75	
Метод 1, косоj сетка	5,26	-0,75	
Метод 4, косоj сетка	4,92	-7,17	
Метод 7, косоj сетка	5,18	-2,26	
Метод 8, косоj сетка	5,26	-0,75	

Таблица 6

Задача 3. Расчетные значения скорости продольной упругой волны  $c_w$  в пластине (цилиндрический случай)

Номер метода замыкания	Расчет, км/с	Погрешность, %	Теория, км/с
1	5,0	-0,4	5,02
4	4,43	-11,75	
7	4,8	-4,38	
8	4,94	-1,59	

кой геометрией, за исключением метода 1 (который является идеальным для этой задачи). Однако метод 1 оказывается наиболее неточным в других задачах (см. подразд. 3.1 и [29]). Таким образом, метод 8 может быть рекомендован в качестве универсального метода для упругопластических задач.

### Заключение

В работе предложен новый анизотропный метод замыкания уравнений упругопластики в смешанных ячейках, который является модификацией ранее разработанного авторами анизотропного метода АСМ-1. В случае газодинамических течений новый метод совпадает с методом АСМ-1 и результаты расчетов будут идентичны. Отличия имеются лишь при моделировании упругопластических течений.

В работе проведены численные исследования нового метода в сравнении с другими методами замыкания. Из результатов моделирования видно, что новый метод дает наиболее точный результат в упругопластических задачах и близкий к лучшим методам результат в газодинамических задачах, поэтому он может быть рекомендован в качестве универсального метода для расчетов двумерных газодинамических и упругопластических задач.

### Список литературы

1. *Tipton R.* CALE Mixed Zone Pressure Relaxation. Technical Report. Lawrence Livermore National Laboratory, 1989.
2. *Miller D., Zimmerman G.* An Algorithm for Time Evolving Volume Fractions in Mixed Zones in Lagrangian Hydrodynamics Calculations. Technical Report UCRL-PRES-223908. Lawrence Livermore National Laboratory, 2006.
3. *Baer M., Nunziato J.* A two-phase mixture theory for the deflagration-to-detonation transition (ddt) in reactive granular materials // *Int. J. Multiphase Flow.* 1986. Vol. 12. P. 861–889.
4. *Murrone A., Guillard H.* A five equation reduced model for compressible two phase flow problems // *J. Comp. Phys.* 2005. Vol. 202. P. 664–698.
5. *Kamm J., Shashkov M., Fung J., Harrison A., Canfield T.* A comparative study of various pressure relaxation closure models for one-dimensional two-material Lagrangian hydrodynamics // *Int. J. Numer. Meth. Fluids.* 2010. Vol. 65(11–12). P. 1311–1324.
6. *Shashkov M.* Closure models for multimaterial cells in arbitrary Lagrangian-Eulerian hydrocodes // *Ibid.* 2007. Vol. 56. P. 1497–1504.
7. *Francois M., Shashkov M., Dendy E., Lowrie R.* Mixture Models for Multimaterial Eulerian and Lagrangian Hydrocodes. Technical Report LAUR-10-03391. Los Alamos National Laboratory, 2010.
8. *Yanilkin Yu., Goncharov E., Kolobyanin V., Sadchikov V., Kamm J., Shashkov M., Rider W.* Multi-material pressure relaxation methods for Lagrangian hydrodynamics // *Computers & Fluids.* 2013. Vol. 83. P. 137–143.
9. *Bondarenko Yu., Yanilkin Yu.* Computation of the thermodynamic parameters in the mixed cells in gas dynamics // *Mathematical Modeling.* 2002. Vol. 14. P. 63–81.
10. *Делов В. И., Садчиков В. В.* Сравнение некоторых моделей для расчета термодинамических параметров неоднородных по составу лагранжевых ячеек // *Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов.* 2005. Вып. 1. С. 57–70.  
*Delov V. I., Sadchikov V. V.* Sravnenie nekotorykh modeley dlya raschyeta termodinamicheskikh parametrov neodnorodnykh po sostavu lagranzhevyykh yacheek // *Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov.* 2005. Vyp. 1. S. 57–70.
11. *Гончаров Е. А., Янилкин Ю. В.* Новый метод расчета термодинамического состояния веществ в смешанных ячейках // *Там же.* 2004. Вып. 3. С. 16–30.  
*Goncharov E. A., Yanilkin Yu. V.* Novyy metod raschyeta termodinamicheskogo sostoyaniya veshchestv v smeshannykh yacheykakh // *Tam zhe.* 2004. Vyp. 3. S. 16–30.

12. *Barlow A. A.* New Lagrangian scheme for multimaterial cells // Proc. ECCOMAS Computational Fluid Dynamics Conference. Swansea, Wales, U.K., 2001. P. 235–294.
13. *Despres B., Lagoutiere F.* Numerical solution of two-component compressible fluid model with interfaces // Progress in Computational Fluid Dynamics. 2007. Vol. 7. P. 295–310.
14. *Hill R. N., Barlow A., Shashkov M.* Interface-aware sub-scale dynamics closure model. Technical Report LAUR-12-21959. Los Alamos National Laboratory, 2012.
15. *Grove J. W.* Pressure-velocity equilibrium hydrodynamic models // Acta Mathematica Scientia. 2010. Vol. 30B(2). P. 563–594.
16. Бахрах С. М., Спиридонов В. Ф., Шанин А. А. Метод расчета двумерных осесимметричных газодинамических течений неоднородной среды в лагранжево-эйлеровых переменных // Докл. АН СССР. 1984. Т. 276, № 4. С. 829–833.  
*Bakhrakh S. M., Spiridonov V. F., Shanin A. A.* Metod raschyeta dvumernykh osesimmetrichnykh gazodinamicheskikh techeniy neodnorodnoy sredy v lagranzhevo-eylerovykh peremennykh // Dokl. AN SSSS. 1984. T. 276, № 4. S. 829–833.
17. Харлоу Ф. Х. Численный метод частиц в ячейках для задач гидродинамики // Вычислительные методы в гидродинамике. М.: Мир, 1967.  
*Kharlou F. Kh.* Chislennyy metod chastits v yacheykakh dlya zadach gidrodinamiki // Vychislitelnye metody v gidrodinamike. M.: Mir, 1967.
18. Гончаров Е. А., Колобянин В. Ю., Янилкин Ю. В. Метод замыкания уравнений лагранжевой газодинамики в смешанных ячейках, основанный на равенстве скоростей компонентов // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2006. Вып. 4. С. 100–105.  
*Goncharov E. A., Kolobyenin V. Yu., Yanilkin Yu. V.* Metod zamykaniya uravneniy lagranzhevoy gazodinamiki v smeshannykh yacheykakh, osnovannyu na ravenstve skorostey komponentov // Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov. 2006. Vyp. 4. S. 100–105.
19. *Barlow A., Ryan Hill, Shashkov M.* Constrained optimization framework for interface-aware sub-scale dynamics closure model for multimaterial cells in Lagrangian and arbitrary Lagrangian-Eulerian hydrodynamics // J. Comp. Phys. 2014. Vol. 276, P. 92–135.
20. Янилкин Ю. В., Топорова О. О., Колобянин В. Ю. Анизотропная модель замыкания в смешанных ячейках // Математическое моделирование. 2017. Т. 29, № 8. С. 44–58.  
*Yanilkin Yu. V., Toporova O. O., Kolobyenin V. Yu.* Anizotropnaya model zamykaniya v smeshannykh yacheykakh // Matematicheskoe modelirovanie. 2017. T. 29, № 8. S. 44–58.
21. Янилкин Ю. В., Беляев С. П., Бондаренко Ю. А., Гаврилова Е. С., Гончаров Е. А., Горбенко А. Д., Городничев А. В., Губков Е. В., Гужова А. Р., Дегтяренко Л. И., Жарова Г. В., Колобянин В. Ю., Софронов В. Н., Стадник А. Л., Ховрин Н. А., Чернышова О. Н., Чистякова И. Н., Шемяков В. Н. Эйлеровы численные методики ЭГАК и ТРЭК для моделирования многомерных течений многокомпонентной среды // Труды РФЯЦ-ВНИИЭФ. 2008. Вып. 12. С. 54–65.  
*Yanilkin Yu. V., Belyaev S. P., Bondarenko Yu. A., Gavrilova E. S., Goncharov E. A., Gorbenco A. D., Gorodnichev A. V., Gubkov E. V., Guzhova A. R., Degtyarenko L. I., Zharova G. V., Kolobyenin V. Yu., Sofronov V. N., Stadnik A. L., Khovrin N. A., Chernyshova O. N., Chistyakova I. N., Shemyakov V. N.* Eylerovy chislennyye metodiki EGAK i TREK dlya modelirovaniya mnogomernykh techeniy mnogokomponentnoy sredy // Trudy RFYaTs-VNIIEF. 2008. Vyp. 12. S. 54–65.
22. Янилкин Ю. В. Модели замыкания уравнений лагранжевой газодинамики и упругопластики в многокомпонентных ячейках. Часть 1. Изотропные модели // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2017. Вып. 3. С. 3–21.  
*Yanilkin Yu. V.* Modeli zamykaniya uravneniy gazodinamiki i uprugoplastiki v mnogokomponentnykh yacheykakh. Chast 1. Izotropnyye modeli // Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov. 2017. Vyp. 3. S. 3–21.

23. *Гончаров Е. А., Колобянин В. Ю., Янилкин Ю. В.* Об определении искусственной вязкости для компонентов смешанных ячеек // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2010. Вып. 2. С. 15–29.  
*Goncharov E. A., Kolobyanin V. Yu., Yanilkin Yu. V.* Ob opredelenii iskusstvennoy vyazkosti dlya komponentov smeshannykh yacheek // Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov. 2010. Vyp. 2. S. 15–29.
24. *Sod G.* A survey of several finite difference methods for systems of nonlinear hyperbolic conservation laws // J. Comp. Phys. 1978. Vol. 27. P. 1–31.
25. *Sharpe J. A.* The production of elastic waves by explosion pressures. I. Theory and empirical field observations // Geophysics. 1942. Vol. 7. P. 144–154.
26. *Blake F. G.* Spherical wave propagation in solid media // J. Acous. Soc. 1952. Am. 24. P. 211–215.
27. *Brock J. S.* Blake Test Problem Parameters. Technical Report LAUR-08-3005. Los Alamos National Laboratory.
28. *Краюхин А. А., Стадник А. Л., Янилкин Ю. В.* Нестационарные задачи для тестирования упругопластических методик // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2016. Вып. 2. С. 17–30.  
*Krayukhin A. A., Stadnik A. L., Yanilkin Yu. V.* Nestatsionarnye zadachi dlya testirovaniya uprugoplasticheskikh metodik // Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Ser. Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov. 2016. Vyp. 2. S. 17–30.
29. *Янилкин Ю. В., Бондаренко Ю. А., Гончаров Е. А., Гужова А. Р., Колобянин В. Ю., Софронов В. Н., Стаценко В. П.* Тесты для гидрокодов, моделирующих ударно-волновые течения в многокомпонентных средах. Т. 2. Упругопластика, детонация, теплопроводность, магнитная гидродинамика. Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ. 2018.  
*Yanilkin Yu. V., Bondarenko Yu. A., Goncharov E. A., Guzhova A. R., Kolobyanin V. Yu., Sofronov V. N., Statsenko V. P.* Testy gidrokodov, modeliruyushchikh udarnovolnovye techeniya v mnogokomponentnykh sredakh. T. 2. Uprugoplastics, detonatsiya, teploprovodnost, magnitnaya gidrodinamika. Sarov: RFYaTs-VNIIEF. 2018.

Статья поступила в редакцию 24.04.23.

---