

УДК 519.6

РЕШАТЕЛЬ РИМАНА HLL_{EM} ДЛЯ ТРЕХМЕРНОЙ МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ СОСТОЯНИЯ

И. В. Глазырин, А. В. Ершова, Н. А. Михайлов
(ФГУП "РФЯЦ-ВНИИТФ им. академ. Е. И. Забабахина",
г. Снежинск Челябинской области)

Предложено обобщение решателя Римана HLL_{EM} на трехмерный многокомпонентный случай с произвольными уравнениями состояния компонентов для произвольной неструктурированной сетки. Выведены правые и левые собственные векторы матрицы Якоби для трехмерной многокомпонентной газодинамической системы уравнений с произвольным уравнением состояния. Предложенный решатель реализован в рамках трехмерной эйлеровой методики "Фокус", использующей метод конечных объемов. Тестирование проведено на двух плоских задачах Римана на трехмерных кубической и неструктурированной сетках с уравнением состояния идеального газа и двучленным уравнением состояния. Тестирование показало эффективность предложенного подхода.

Ключевые слова: многокомпонентная газовая динамика, решатель Римана, HLL_{EM}, собственные векторы, произвольное уравнение состояния, трехмерная неструктурированная сетка.

Введение

Впервые решатель Римана HLL_{EM} для системы уравнений одномерной однокомпонентной газовой динамики с произвольным уравнением состояния (УРСом) был описан в работе [1]. Применение данного решателя позволяет повышать разрешение контактных границ по сравнению с решателем HLL [2].

В данной работе предложено обобщение решателя Римана HLL_{EM} на трехмерный многокомпонентный случай для произвольной неструктурированной сетки, при этом УРСы компонентов могут быть также произвольными. Контактный разрыв (КР) "размазывается" на некотором количестве вычислительных ячеек, и в этой области используется модель смесей на основе массовых концентраций [3]. Трехмерная система уравнений многокомпонентной газовой динамики решается в эйлеровых переменных в декартовой системе координат. Система уравнений моделируется в консервативном виде с изотермическим условием замыкания, т. е. предполагается равенство температур компонентов.

Для реализации схемы HLL_{EM} были выведены правые и левые собственные векторы матрицы Якоби для трехмерной многокомпонентной газодинамической системы уравнений с произвольным УРСом.

Предложенный решатель Римана HLL_{EM} был реализован в рамках трехмерной эйлеровой методики "Фокус", использующей метод конечных объемов [4]. Потoki консервативных величин через грани ячеек вычисляются по формуле средних [5]. Значения потоков консервативных величин в центрах граней ячеек определяются из рассмотрения одномерных задач Римана вдоль нормалей к граням ячеек. Реконструкция величин на гранях ячеек выполняется с применением подхода TVD-ограничителей наклона (Total Variation Diminishing) [6]. Решение по времени производится по двухстадийной схеме Рунге—Кутты.

Тестирование проведено на двух плоских задачах Римана на трехмерной неструктурированной сетке с УРСом идеального газа и двучленным УРСом. Тестирование показало эффективность предложенного подхода.

Постановка задачи

Газовая динамика описывается уравнениями неразрывности, движения и энергии, выражающими законы сохранения массы, импульса и полной энергии.

Трехмерная система уравнений многокомпонентной газовой динамики в виде законов сохранения в эйлеровых переменных в декартовой системе координат имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{u}) = 0. \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{u} = (\rho, \rho v_x, \rho v_y, \rho v_z, \rho E, \rho Y_1, \dots, \rho Y_M)^T$ — вектор консервативных переменных, где ρ — плотность, $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ — скорость, Y_1, \dots, Y_M — массовые доли M компонентов смеси веществ, подчиняющиеся условию нормировки $\sum_{k=1}^M Y_k \equiv 1$; $\bar{\mathbf{f}} = (\mathbf{f}_x, \mathbf{f}_y, \mathbf{f}_z)$ — тензор, состоящий из векторов физических потоков в каждом из направлений:

$$\bar{\mathbf{f}}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \rho v_x & \rho v_y & \rho v_z \\ \rho v_x^2 + p & \rho v_x v_y & \rho v_x v_z \\ \rho v_y v_x & \rho v_y^2 + p & \rho v_y v_z \\ \rho v_z v_x & \rho v_z v_y & \rho v_z^2 + p \\ (\rho E + p) v_x & (\rho E + p) v_y & (\rho E + p) v_z \\ \rho Y_1 v_x & \rho Y_1 v_y & \rho Y_1 v_z \\ \dots & \dots & \dots \\ \rho Y_M v_x & \rho Y_M v_y & \rho Y_M v_z \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где p — давление, $\rho E = \rho \varepsilon + 0,5 \rho (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$ — полная энергия среды, ε — удельная внутренняя энергия. Зависимости удельной внутренней энергии и давления от плотности и температуры определяются УРСом.

Описание численной схемы

Дискретизация пространственной и временной частей системы уравнений газовой динамики проводится отдельно в соответствии с методом линий [7]. Для временной дискретизации используется метод Рунге—Кутты из класса SSP (Strong Stability Preserving) [8] второго порядка аппроксимации. Для пространственной дискретизации используется конечно-объемная схема типа Годунова [2, 9] второго порядка аппроксимации. Метод конечных объемов заключается в интегрировании уравнений по ячейкам вычислительной сетки [10] и последующей дискретизации интегральных членов.

В методике "Фокус" [4] используется трехмерная неструктурированная вычислительная сетка, состоящая из ячеек с произвольным количеством граней. Количество вершин каждой грани не фиксировано. Все величины относятся к центрам ячеек. Любая внутренняя грань разделяет только две ячейки, одна из которых назначается *ячейкой-хозяином*, другая — *ячейкой-соседом*, как показано

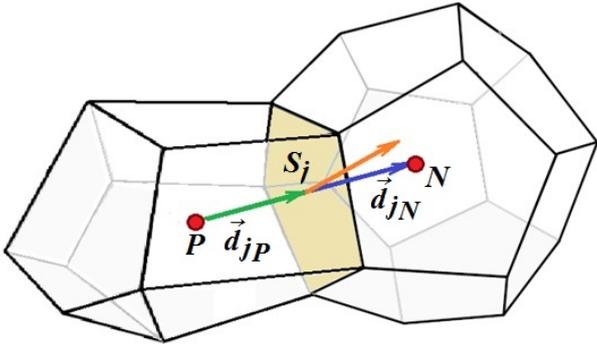


Рис. 1. Ячейки сетки

на рис. 1. Индекс P обозначает ячейку-хозяина грани, индекс N — ячейку-соседа; \vec{d}_{jP} — вектор, соединяющий центр ячейки-хозяина грани j и центр этой грани; \vec{d}_{jN} — вектор, соединяющий центр грани j и центр ее ячейки-соседа. Нормаль к грани направлена от ячейки-хозяина к ячейке-соседу.

Интегрирование системы (1) по объему i -й вычислительной ячейки дает

$$\frac{\partial \langle \mathbf{u} \rangle_i}{\partial t} + \frac{1}{|V_i|} \int_{V_i} \nabla \cdot \bar{\bar{f}}(\mathbf{u}) dV = 0, \quad (3)$$

где $\langle \mathbf{u} \rangle_i \equiv \int_{V_i} \mathbf{u} dV / |V_i|$ — среднеинтегральное значение \mathbf{u} по i -й ячейке; V_i — объем i -й ячейки. С применением теоремы Гаусса—Остроградского уравнение (3) записывается в виде

градского уравнение (3) записывается в виде

$$\frac{\partial \langle \mathbf{u} \rangle_i}{\partial t} + \frac{1}{|V_i|} \int_{S_i} \bar{\bar{f}}(\mathbf{u}) \cdot \vec{d}\vec{S} = 0,$$

где S_i — площадь поверхности i -й ячейки; $\vec{d}\vec{S} \equiv \vec{n} dS$ — вектор внешней нормали к поверхности, имеющей площадь dS . Поскольку вычислительная ячейка является многогранником, то можно перейти от интеграла по всей поверхности ячейки к сумме интегралов по ее граням:

$$\frac{\partial \langle \mathbf{u} \rangle_i}{\partial t} + \frac{1}{|V_i|} \sum_j \int_{S_j} \bar{\bar{f}}(\mathbf{u}) \cdot \vec{d}\vec{S} = 0, \quad (4)$$

где j — индекс грани i -й ячейки. Поверхностные интегралы по граням ячеек аппроксимируются со вторым порядком точности по формуле средних [5]:

$$\int_{S_j} \bar{\bar{f}}(\mathbf{u}) \cdot \vec{d}\vec{S} \approx S_j \left(\bar{\bar{f}}(\mathbf{u})_j \cdot \vec{n}_j \right) = S_j \mathbf{f}_n(\mathbf{u})_j,$$

где S_j — площадь j -й грани; \vec{n}_j — нормаль к j -й грани; $\mathbf{f}_n(\mathbf{u})_j$ — нормальный поток в центре j -й грани.

Проекция (2) на единичную нормаль $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$ к грани ячейки вычисляется как

$$\mathbf{f}_n(\mathbf{u}) = (\rho v_n, \rho v_x v_n + n_x p, \rho v_y v_n + n_y p, \rho v_z v_n + n_z p, (\rho E + p) v_n, \rho Y_1 v_n, \dots, \rho Y_M v_n)^T, \quad (5)$$

где $v_n = n_x v_x + n_y v_y + n_z v_z$ — нормальная составляющая скорости.

Для аппроксимации нормальных потоков $\mathbf{f}_n(\mathbf{u})_j$ используется тот или иной решатель Римана [2]: $\mathbf{f}_n(\mathbf{u})_j \approx \mathbf{F}_n(\mathbf{u}_j^P, \mathbf{u}_j^N)$. В настоящей работе будут рассматриваться решатели HLL и HLLM. В методике "Фокус" используется реконструкция плотности, температуры, скорости и массовых долей на гранях ячеек с применением подхода TVD-ограничителей наклона [6], в частности minmod или vanLeer [4].

Методы Рунге—Кутты из класса SSP обладают свойством сохранения устойчивости решения в смысле

$$\|u^{n+1}\| \leq \|u^n\| + K_1 \Delta t, \quad K_1 = \text{const},$$

если этим свойством обладает метод Эйлера первого порядка. Таким образом, если после некоторой пространственной дискретизации (4) и дискретизации по времени методом Эйлера полученная схема будет обладать, например, свойством неувеличения полной вариации решения TVD [11], то этим же свойством будет обладать и схема с той же пространственной дискретизацией, но с методом SSP Рунге—Кутты для дискретизации по времени.

В методике "Фокус" используется явный двухстадийный метод SSP Рунге—Кутты второго порядка аппроксимации

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{u} + \Delta t^n L(\mathbf{u}^n); \quad \mathbf{u}^{n+1} = 0,5\mathbf{u}^n + 0,5\mathbf{u}^* + 0,5\Delta t^n L(\mathbf{u}^*),$$

где L — оператор пространственной дискретизации; Δt^n — шаг по времени с n -го временного слоя на $(n+1)$ -й.

Шаг по времени Δt^n определяется из условия Куранта

$$\Delta t^n \max_j \left(\frac{\max \left\{ |a_j^{+,n}|, |a_j^{-,n}| \right\}}{|\vec{d}_{jP}| + |\vec{d}_{jN}|} \right) \leq C,$$

где $a_j^{+,n}$, $a_j^{-,n}$ — оценки для максимальной и минимальной скоростей распространения волн от распада произвольного разрыва на j -й грани на n -м временном слое; C — число Куранта, которое задается исходя из условия устойчивости и обеспечения неосциллирующих свойств схемы. Также накладывается ограничение на скорость изменения шага по времени $\Delta t^{n+1} < K_2 \Delta t^n$; типичное значение постоянной $K_2 = 1,1$.

Решатель Римана HLL

С помощью решателя HLL находится состояние, усредненное по всем волнам, возникающим в результате распада разрыва [12]. Потоки консервативных величин в точке начального разрыва определяются с использованием данного состояния. Выражение для потоков при произвольной ориентации грани можно получить, подставив в выражение для случая координатного направления вектор нормального к грани физического потока (5). Численные потоки HLL в центре грани j имеют вид

$$\mathbf{f}_{n,j}^{\text{HLL}} = \begin{cases} \mathbf{F}_n(\mathbf{u}_j^P), & \text{если } a_j^- > 0; \\ \frac{a_j^+ \mathbf{F}_n(\mathbf{u}_j^P) - a_j^- \mathbf{F}_n(\mathbf{u}_j^N)}{a_j^+ - a_j^-} + \frac{a_j^+ a_j^-}{a_j^+ - a_j^-} (\mathbf{u}_j^N - \mathbf{u}_j^P), & \text{если } a_j^- \leq 0 < a_j^+; \\ \mathbf{F}_n(\mathbf{u}_j^N), & \text{если } a_j^+ \leq 0; \end{cases}$$

$$a_j^- = \min \left\{ \lambda_1 \left(\frac{\partial \mathbf{F}_n}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}_j^P) \right), \lambda_1 \left(\frac{\partial \mathbf{F}_n}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}_j^N) \right) \right\};$$

$$a_j^+ = \max \left\{ \lambda_{M+5} \left(\frac{\partial \mathbf{F}_n}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}_j^P) \right), \lambda_{M+5} \left(\frac{\partial \mathbf{F}_n}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}_j^N) \right) \right\},$$

где $\lambda_1 \left(\frac{\partial \mathbf{F}_n}{\partial \mathbf{u}} \right) = v_n - c$, $\lambda_{M+5} \left(\frac{\partial \mathbf{F}_n}{\partial \mathbf{u}} \right) = v_n + c$ — минимальное и максимальное собственные значения гиперболической системы

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_n(\mathbf{u})}{\partial n} = 0; \quad (6)$$

c — скорость звука, определяемая используемым УРСом.

Решатель Римана HLLEM

Решатель HLLEM является модификацией решателя HLL с дополнительным слагаемым в численном потоке, учитывающим КР. Численные потоки HLLEM в центре грани j , соответственно, имеют вид

$$\mathbf{f}_{n,j}^{\text{HLLEM}} = \begin{cases} \mathbf{F}_n(\mathbf{u}_j^P), & \text{если } a_j^- > 0; \\ \mathbf{f}_{n,j}^{\text{HLL}} - \varphi \frac{a_j^+ a_j^-}{a_j^+ - a_j^-} R_*(\mathbf{u}) \delta(\mathbf{u}) L_*(\mathbf{u}) (\mathbf{u}_j^N - \mathbf{u}_j^P), & \text{если } a_j^- \leq 0 < a_j^+; \\ \mathbf{F}_n(\mathbf{u}_j^N), & \text{если } a_j^+ \leq 0, \end{cases}$$

где $\varphi \in [0; 1]$ — множитель перехода от решателя HLL (при $\varphi = 0$) к решателю HLLEM; $R_*(\mathbf{u})$ и $L_*(\mathbf{u})$ — матрицы *правых* и *левых* собственных векторов, соответствующих собственным значениям $\lambda_2 = \dots = \lambda_{M+4} = v_n$; $\delta(\mathbf{u})$ — диагональная матрица с элементами вида $\frac{a_j^+ - a_j^-}{a_j^+ - a_j^- + 2|v_n|}$.

Вывод собственных значений и векторов

В решателе Римана HLLEM используются собственные значения и собственные векторы решаемой гиперболической системы уравнений (6). Для их нахождения составляется матрица Якоби из частных производных всех компонент вектора \mathbf{F}_n по всем компонентам вектора \mathbf{u} . Элементы матрицы Якоби обозначим $A_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial u_j}$.

Распишем компоненты гиперболической системы уравнений (6):

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_0 = \rho \\ u_1 = \rho v_x \\ u_2 = \rho v_y \\ u_3 = \rho v_z \\ u_4 = \rho E \\ u_{k+4} = \rho Y_k = \rho_k \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_n = \begin{pmatrix} F_0 = \rho v_n \\ F_1 = \rho v_x v_n + n_x p \\ F_2 = \rho v_y v_n + n_y p \\ F_3 = \rho v_z v_n + n_z p \\ F_4 = (\rho E + p) v_n \\ F_{k+4} = \rho Y_k v_n = \rho_k v_n \end{pmatrix},$$

где $k = \overline{1, M}$, M — число компонентов смеси с условием нормировки их долей $\sum_{k=1}^M Y_k = 1$. Общее число уравнений в системе получается равным $M + 5$.

Выразим компоненты вектора \mathbf{F}_n через компоненты вектора \mathbf{u} :

$$\begin{aligned} F_0 &= u_1 n_x + u_2 n_y + u_3 n_z; \\ F_1 &= u_0^{-1} u_1^2 n_x + u_0^{-1} u_1 u_2 n_y + u_0^{-1} u_1 u_3 n_z + n_x p; \\ F_2 &= u_0^{-1} u_1 u_2 n_x + u_0^{-1} u_2^2 n_y + u_0^{-1} u_2 u_3 n_z + n_y p; \\ F_3 &= u_0^{-1} u_1 u_3 n_x + u_0^{-1} u_2 u_3 n_y + u_0^{-1} u_3^2 n_z + n_z p; \\ F_4 &= u_0^{-1} u_4 (u_1 n_x + u_2 n_y + u_3 n_z) + u_0^{-1} (u_1 n_x + u_2 n_y + u_3 n_z) p; \\ F_{k+4} &= u_0^{-1} u_{k+4} (u_1 n_x + u_2 n_y + u_3 n_z). \end{aligned}$$

Давление p вычисляется из УРСа и зависит от плотностей компонентов ρ_k и удельной внутренней энергии ε , которую, в свою очередь, тоже можно выразить через компоненты вектора \mathbf{u} : $\varepsilon = u_0^{-1} u_4 - 0,5 u_0^{-2} (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)$.

Частные производные давления по компонентам вектора \mathbf{u} будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial u_0} &= (v^2 - E) p'_{\rho E}; & \frac{\partial p}{\partial u_1} &= -v_x p'_{\rho E}; & \frac{\partial p}{\partial u_2} &= -v_y p'_{\rho E}; & \frac{\partial p}{\partial u_3} &= -v_z p'_{\rho E}; \\ \frac{\partial p}{\partial u_4} &= p'_{\rho E}; & \frac{\partial p}{\partial u_{k+4}} &= p'_{\rho Y_k}, \end{aligned}$$

где введены обозначения: $p'_{\rho E} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \varepsilon}$; $p'_{\rho Y_k} = \frac{\partial p}{\partial (\rho Y_k)}$. Производные давления по удельной внутренней энергии и плотностям компонентов вычисляются из УРСов.

Приведем ненулевые элементы матрицы A :

$$\begin{aligned} A_{01} &= n_x; & A_{02} &= n_y; & A_{03} &= n_z; & A_{10} &= -v_x v_n + n_x (v^2 - E) p'_{\rho E}; & A_{11} &= v_x n_x + v_n - v_x n_x p'_{\rho E}; \\ A_{12} &= v_x n_y - v_y n_x p'_{\rho E}; & A_{13} &= v_x n_z - v_z n_x p'_{\rho E}; & A_{14} &= n_x p'_{\rho E}; & A_{1,k+4} &= n_x p'_{\rho Y_k}; \\ A_{20} &= -v_y v_n + n_y (v^2 - E) p'_{\rho E}; & A_{21} &= v_y n_x - v_x n_y p'_{\rho E}; & A_{22} &= v_y n_y + v_n - v_y n_y p'_{\rho E}; \\ A_{23} &= v_y n_z - v_z n_y p'_{\rho E}; & A_{24} &= n_y p'_{\rho E}; & A_{2,k+4} &= n_y p'_{\rho Y_k}; & A_{30} &= -v_z v_n + n_z (v^2 - E) p'_{\rho E}; \\ A_{31} &= v_z n_x - v_x n_z p'_{\rho E}; & A_{32} &= v_z n_y - v_y n_z p'_{\rho E}; & A_{33} &= v_z n_z + v_n - v_z n_z p'_{\rho E}; & A_{34} &= n_z p'_{\rho E}; \\ A_{3,k+4} &= n_z p'_{\rho Y_k}; & A_{40} &= -v_n H + v_n (v^2 - E) p'_{\rho E}; & A_{41} &= n_x H - v_x v_n p'_{\rho E}; \\ A_{42} &= n_y H - v_y v_n p'_{\rho E}; & A_{43} &= n_z H - v_z v_n p'_{\rho E}; & A_{44} &= v_n + v_n p'_{\rho E}; & A_{4,k+4} &= v_n p'_{\rho Y_k}; \\ A_{k+4,0} &= -Y_k v_n; & A_{k+4,1} &= Y_k n_x; & A_{k+4,2} &= Y_k n_y; & A_{k+4,3} &= Y_k n_z; & A_{k+4,k+4} &= v_n, \end{aligned}$$

где $H = E + p/\rho$ — удельная полная энтальпия; $E = \varepsilon + 0,5v^2$ — удельная полная энергия.

Собственные значения λ квадратной матрицы A с размерами $(M+5) \times (M+5)$ находятся из условия $|A - \lambda I| = 0$, где I — единичная диагональная матрица. После некоторого ряда действий над строками и столбцами определителя, не меняющих его значения, можно привести определитель к блочному виду:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} B_1 & B_2 \\ 0 & B_3 \end{vmatrix}.$$

Здесь B_1 и B_3 — квадратные матрицы с размерами 5×5 и $M \times M$ соответственно:

$$B_1 = \begin{pmatrix} v_n - \lambda & n_x & n_y & n_z & 0 \\ n_x c^2 & v_n - \lambda - v_x n_x p'_{\rho E} & -v_y n_x p'_{\rho E} & -v_z n_x p'_{\rho E} & n_x p'_{\rho E} \\ n_y c^2 & -v_x n_y p'_{\rho E} & v_n - \lambda - v_y n_y p'_{\rho E} & -v_z n_y p'_{\rho E} & n_y p'_{\rho E} \\ n_z c^2 & -v_x n_z p'_{\rho E} & -v_y n_z p'_{\rho E} & v_n - \lambda - v_z n_z p'_{\rho E} & n_z p'_{\rho E} \\ v_n c^2 & -v_x v_n p'_{\rho E} & -v_y v_n p'_{\rho E} & -v_z v_n p'_{\rho E} & v_n - \lambda + v_n p'_{\rho E} \end{pmatrix};$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} v_n - \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & v_n - \lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & v_n - \lambda \end{pmatrix}; \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ n_x p'_{\rho Y_1} & n_x p'_{\rho Y_2} & \dots & n_x p'_{\rho Y_M} \\ n_y p'_{\rho Y_1} & n_y p'_{\rho Y_2} & \dots & n_y p'_{\rho Y_M} \\ n_z p'_{\rho Y_1} & n_z p'_{\rho Y_2} & \dots & n_z p'_{\rho Y_M} \\ v_n p'_{\rho Y_1} & v_n p'_{\rho Y_2} & \dots & v_n p'_{\rho Y_M} \end{pmatrix},$$

где квадрат скорости звука c^2 для адиабатического случая при изэнтропическом движении вычисляется по формуле

$$c^2 = \sum_{k=1}^M Y_k \frac{\partial p}{\partial (\rho Y_k)} + \frac{p}{\rho^2} \frac{\partial p}{\partial \varepsilon}.$$

Тогда из теории блочных матриц [13]

$$|A - \lambda I| = |B_1| |B_3| = (v_n - \lambda)^{M+3} \left[(v_n - \lambda)^2 - c^2 \right].$$

Собственные значения матрицы A будут соответственно (по возрастанию) равны $\lambda_1 = v_n - c$; $\lambda_2 = \dots = \lambda_{M+4} = v_n$; $\lambda_{M+5} = v_n + c$.

Для каждого собственного значения из решения матричного уравнения $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ можно найти вектор-столбец $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{M+5})^T$ — правый собственный вектор матрицы A .

Для случая $\lambda \neq v_n$ базисными переменными системы уравнений являются x_2, x_3, x_4, x_5 и все x_{k+5} ($k = \overline{1, M}$), зависящие от x_1 . При этом общее решение системы имеет вид

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 [v_x - (v_n - \lambda) n_x]; & x_3 &= x_1 [v_y - (v_n - \lambda) n_y]; & x_4 &= x_1 [v_z - (v_n - \lambda) n_z]; \\ x_5 &= x_1 [H - v_n (v_n - \lambda)]; & x_{k+5} &= x_1 Y_k. \end{aligned}$$

Пусть $x_1 = 1$, тогда собственному значению λ_1 соответствует вектор-столбец $\mathbf{x} = (1, v_x - cn_x, v_y - cn_y, v_z - cn_z, H - cv_n, Y_1, \dots, Y_M)^T$, а значению λ_{M+5} — $\mathbf{x} = (1, v_x + cn_x, v_y + cn_y, v_z + cn_z, H + cv_n, Y_1, \dots, Y_M)^T$.

Для случая $\lambda = v_n$ базисными переменными системы уравнений являются x_1 и x_5 , зависящие от x_2, x_3, x_4 и всех x_{k+5} ($k = \overline{1, M}$). Общее решение системы имеет вид

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{n_x}{v_n} x_2 + \frac{n_y}{v_n} x_3 + \frac{n_z}{v_n} x_4; \\ x_5 &= x_2 \left[v_x - \frac{n_x}{v_n} (v^2 - E) \right] + x_3 \left[v_y - \frac{n_y}{v_n} (v^2 - E) \right] + x_4 \left[v_z - \frac{n_z}{v_n} (v^2 - E) \right] + \sum_{k=1}^M X_k x_{k+5}, \end{aligned}$$

где введено обозначение $X_k = -\frac{p'_{\rho} Y_k}{p'_{\rho} E}$, $k = \overline{1, M}$.

Составим $M + 3$ линейно независимых вектора \mathbf{x} :

1. При $x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 0$ и всех $x_{k+5} = 0$ имеем $\mathbf{x} = \left(\frac{n_x}{v_n}, 1, 0, 0, v_x - \frac{n_x}{v_n} (v^2 - E), 0, \dots, 0 \right)^T$.
2. При $x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 0$ и всех $x_{k+5} = 0$ имеем $\mathbf{x} = \left(\frac{n_y}{v_n}, 0, 1, 0, v_y - \frac{n_y}{v_n} (v^2 - E), 0, \dots, 0 \right)^T$.
3. При $x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 1$ и всех $x_{k+5} = 0$ имеем $\mathbf{x} = \left(\frac{n_z}{v_n}, 0, 0, 1, v_z - \frac{n_z}{v_n} (v^2 - E), 0, \dots, 0 \right)^T$.

Остальные M векторов-столбцов получим, полагая $x_{k+5} = 1$ при фиксированном k ($k = \overline{1, M}$), а остальные независимые переменные — равными 0. Тогда $\mathbf{x} = (0, 0, 0, 0, X_k, \boldsymbol{\delta})^T$, где $\boldsymbol{\delta}$ — вектор, состоящий из нулей и единицы на $(k + 5)$ -м месте.

Для каждого собственного значения из решения матричного уравнения $\mathbf{y}A = \mathbf{y}\lambda$ можно найти вектор-строку $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_{M+5})$ — левый собственный вектор матрицы A .

Для случая $\lambda \neq v_n$ базисными переменными системы уравнений являются y_1, y_2, y_3, y_4 и все y_{k+5} ($k = \overline{1, M}$), зависящие от y_5 . Общее решение системы имеет вид

$$\begin{aligned} y_1 &= y_5 \left[\frac{v_n (v_n - \lambda)}{p'_{\rho} E} + v^2 - E \right]; \\ y_2 &= -y_5 \left(\frac{v_n - \lambda}{p'_{\rho} E} n_x + v_x \right); & y_3 &= -y_5 \left(\frac{v_n - \lambda}{p'_{\rho} E} n_y + v_y \right); & y_4 &= -y_5 \left(\frac{v_n - \lambda}{p'_{\rho} E} n_z + v_z \right); \\ y_{k+5} &= -X_k y_5. \end{aligned}$$

Пусть $y_5 = 1$, тогда значению λ_1 соответствует вектор-строка $\mathbf{y} = \left(\frac{cv_n}{p'_{\rho E}} + v^2 - E, -v_x - \frac{cn_x}{p'_{\rho E}}, -v_y - \frac{cn_y}{p'_{\rho E}}, -v_z - \frac{cn_z}{p'_{\rho E}}, 1, -X_1, \dots, -X_M \right)$, а значению $\lambda_{M+5} - \mathbf{y} = \left(-\frac{cv_n}{p'_{\rho E}} + v^2 - E, -v_x + \frac{cn_x}{p'_{\rho E}}, -v_y + \frac{cn_y}{p'_{\rho E}}, -v_z + \frac{cn_z}{p'_{\rho E}}, 1, -X_1, \dots, -X_M \right)$.

Для случая $\lambda = v_n$ базисными переменными системы уравнений являются y_1 и y_5 , зависящие от y_2, y_3, y_4 и всех y_{k+5} ($k = \overline{1, M}$). Общее решение системы имеет вид

$$y_1 = y_2 \left(\frac{n_x}{v_n} H - v_x \right) + y_3 \left(\frac{n_y}{v_n} H - v_y \right) + y_4 \left(\frac{n_z}{v_n} H - v_z \right) - \sum_{k=1}^M Y_k y_{k+5};$$

$$y_5 = -\frac{n_x}{v_n} y_2 - \frac{n_y}{v_n} y_3 - \frac{n_z}{v_n} y_4.$$

Составим $M + 3$ линейно независимых вектора \mathbf{y} :

1. При $y_2 = 1, y_3 = 0, y_4 = 0$ и всех $y_{k+5} = 0$ имеем $\mathbf{y} = \left(\frac{n_x}{v_n} H - v_x, 1, 0, 0, -\frac{n_x}{v_n}, 0, \dots, 0 \right)$.
2. При $y_2 = 0, y_3 = 1, y_4 = 0$ и всех $y_{k+5} = 0$ имеем $\mathbf{y} = \left(\frac{n_y}{v_n} H - v_y, 0, 1, 0, -\frac{n_y}{v_n}, 0, \dots, 0 \right)$.
3. При $y_2 = 0, y_3 = 0, y_4 = 1$ и всех $y_{k+5} = 0$ имеем $\mathbf{y} = \left(\frac{n_z}{v_n} H - v_z, 0, 0, 1, -\frac{n_z}{v_n}, 0, \dots, 0 \right)$.

Оставшиеся M векторов-строк получим при фиксированном k ($k = \overline{1, M}$): $y_{k+5} = 1$, а остальные независимые переменные равны 0. Тогда $\mathbf{y} = (-Y_k, 0, 0, 0, 0, \delta)$, где δ — вектор, состоящий из нулей и единицы на $(k + 5)$ -м месте.

Из найденных правых собственных векторов составляется матрица R , из левых — матрица L . Матрицы R и L должны обладать следующими свойствами: 1) $LAR = \Lambda$ или $A = R\Lambda L$, где Λ — диагональная матрица, составленная из собственных значений; 2) выполняется условие нормировки: $LR = I$ — единичная матрица.

Полученные матрицы R и L условию нормировки не удовлетворяют. После некоторого ряда действий над строками матрицы левых собственных векторов и столбцами матрицы правых собственных векторов получен итоговый вид матриц R и L , удовлетворяющих указанным свойствам:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ v_x - cn_x & 2v_x & 0 & -n_z & 0 & \dots & 0 & v_x + cn_x \\ v_y - cn_y & 2v_y & n_z & 0 & 0 & \dots & 0 & v_y + cn_y \\ v_z - cn_z & 2v_z & -n_y & n_x & 0 & \dots & 0 & v_z + cn_z \\ H - cv_n & 2 \left(H - \frac{c^2}{p'_{\rho E}} \right) & v_y n_z - v_z n_y & v_z n_x - v_x n_z & X_1 & \dots & X_M & H + cv_n \\ Y_1 & 2Y_1 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & Y_1 \\ \dots & \dots \\ Y_M & 2Y_M & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & Y_M \end{pmatrix};$$

$$L = \begin{pmatrix} \frac{v_n}{2c} + (v^2 - E) \xi & -v_x \xi - \frac{n_x}{2c} & -v_y \xi - \frac{n_y}{2c} & -v_z \xi - \frac{n_z}{2c} & \xi & -X_1 \xi & \dots & -X_M \xi \\ \frac{1}{2} - (v^2 - E) \xi & v_x \xi & v_y \xi & v_z \xi & -\xi & X_1 \xi & \dots & X_M \xi \\ \frac{v_n n_y - v_y}{n_z} & -\frac{n_x n_y}{n_z} & \frac{1 - n_y^2}{n_z} & -n_y & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{v_x - v_n n_x}{n_z} & \frac{n_x^2 - 1}{n_z} & \frac{n_x n_y}{n_z} & n_x & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -Y_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots \\ -Y_M & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\frac{v_n}{2c} + (v^2 - E) \xi & -v_x \xi + \frac{n_x}{2c} & -v_y \xi + \frac{n_y}{2c} & -v_z \xi + \frac{n_z}{2c} & \xi & -X_1 \xi & \dots & -X_M \xi \end{pmatrix},$$

где введено обозначение $\xi = p'_{\rho E} / (2c^2)$.

Таким образом, получено обобщение матриц правых и левых собственных векторов на трехмерный многокомпонентный случай с произвольными УРСами веществ. В литературе можно встретить примеры вывода собственных векторов для других случаев, которые можно считать частными. При допущении соответствующих упрощений векторы, полученные в данной работе, совпадают с приведенными в других источниках. Например, для УРСа идеального газа есть согласие результатов в одномерных однокомпонентном [14] и двухкомпонентном [15] случаях, а также для x -направления трехмерного однокомпонентного случая [2, 16]. Для произвольного УРСа есть согласие в одномерном двухкомпонентном случае [17].

Численные результаты

В качестве тестов для проверки эффективности описанного решателя Римана HLLLEM по сравнению с решателем HLL рассматриваются две задачи о распаде произвольного разрыва с УРСом идеального газа и двухчленным УРСом. Задачи моделируют одномерное течение в трехмерном пространстве. По оси Ox расчетная область разделена на две половины с разными параметрами веществ. Задачи сформулированы так, что движение за счет повышенного давления в левой половине области компенсируется заданной скоростью, поэтому КР остается на месте. Такая формулировка задач позволяет оценивать диффузионные свойства разностных схем на КР.

Постановка задачи 1 (с УРСом идеального газа). Расчетная область: $x \in [0; 1]$, $y \in [0; 0,1]$, $z \in [0; 0,1]$; время счета $t \in (0; 0,008]$.

Начальные условия ($t = 0$):

$$(\rho, (v_x, v_y, v_z), p, Y_1, Y_2) = \begin{cases} (1; (-19,59745; 0; 0); 1\,000; 1; 0), & x \in [0; 0,5], \\ (1; (-19,59745; 0; 0); 0,01; 0; 1), & x \in (0,5; 1]. \end{cases}$$

Граничные условия: при $x = 0$, $x = 1$ — свободные границы (нулевой градиент всех величин), остальные границы — жесткие стенки со скольжением (нулевые градиенты всех величин, кроме нормальной компоненты скорости, которая сама имеет нулевое значение).

УРС для обоих веществ — как для идеального газа: $p = (\gamma - 1) \rho \varepsilon$, $\varepsilon = c_V T$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 1,4$, $c_{V1} = c_{V2} = 0,833$.

Эталонное решение задачи 1 — аналитическое решение задачи о распаде произвольного разрыва на конечный момент времени.

Постановка задачи 2 (с двухчленным УРСом). Расчетная область: $x \in [0; 1]$, $y \in [0; 0,1]$, $z \in [0; 0,1]$; время счета $t \in (0; 0,01]$.

Начальные условия ($t = 0$):

$$(\rho(v_x, v_y, v_z), p, Y_1, Y_2) = \begin{cases} (3; (-9,7875; 0; 0); 1\,000; 1; 0), & x \in [0; 0,5], \\ (3; (-9,7875; 0; 0); 0,01; 0; 1), & x \in (0,5; 1]. \end{cases}$$

Граничные условия совпадают с условиями задачи 1.

Для обоих веществ (газов) взят УРС в форме Ми–Грюнайзена, $p = p_T + p_X$:

$$\begin{aligned} p_T &= (\gamma - 1) \rho \varepsilon_T, \quad \varepsilon_T = c_V T, \quad \gamma_1 = \gamma_2 = 2, \quad c_{V1} = c_{V2} = 12,3888; \\ p_X &= \frac{\rho_{0k} c_{0k}^2}{n} (\delta^n - 1), \quad \varepsilon_X = \frac{c_{0k}^2}{\delta n (n - 1)} (\delta^n - n\delta + n - 1), \\ \delta &= \frac{\rho}{\rho_{0k}}, \quad \rho_{0k} = 2,7, \quad c_{0k} = 0,0575, \quad n = 3. \end{aligned}$$

Эталонное решение задачи 2 — решение задачи по одномерному коду "Волна" [18] на лагранжевой сетке с 1 000 ячеек.

Все численные расчеты выполнены с использованием ограничителя minmod и числа Куранта $C = 0,1$. Расчеты проводились на следующих сетках:

1) кубические: сетка 1 — $100 \times 10 \times 10$ ячеек; сетка 2 — $200 \times 20 \times 20$; сетка 3 — $400 \times 40 \times 40$; сетка 4 — $800 \times 80 \times 80$;

2) неструктурированные из треугольных и четырехугольных пирамид: сетка 1 — 53 081 ячеек; сетка 2 — 574 969; сетка 3 — 2 820 472. В одномерном разрезе вдоль x -направления неструктурированная сетка 1 соответствует равномерной сетке 1 со 100 ячейками; сетка 2 — равномерной сетке 2 с 200 ячейками; сетка 3 — равномерной сетке 3 с 400 ячейками.

На рис. 2 показано распределение плотности на конечный момент времени на $1/4$ части неструктурированной сетки 1 для задачи 1.

Распределения плотности на конечный момент времени вдоль одномерного среза для кубической сетки в $200 \times 20 \times 20$ ячеек и неструктурированной сетки в 574 969 ячеек показаны на рис. 3. В расчетах варьировались значения величины φ с шагом 0,1. На кубической сетке расчеты выполнялись для всех значений φ , на неструктурированной сетке — для всех, кроме $\varphi = 1$ (в ходе расчета с $\varphi = 1$ появились нефизические осцилляции, не позволившие досчитать задачу до конечного момента времени). На рис. 3 представлены результаты с максимальным для сетки значением φ . Можно видеть, что решатель HLLM дает решение, которое по описанию КР ближе к эталонному, чем полученное с помощью решателя HLL.

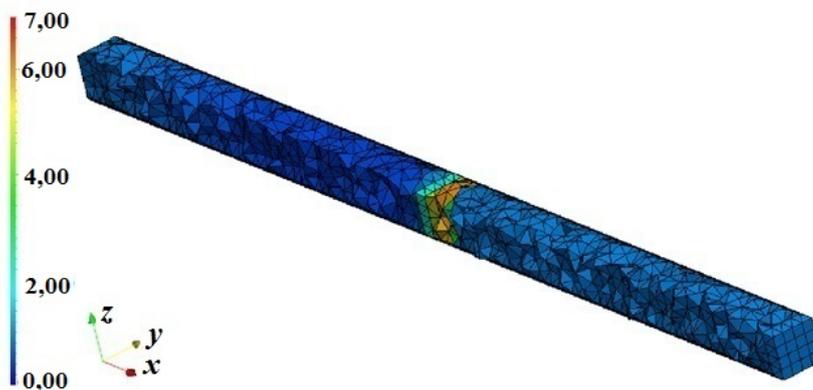


Рис. 2. Задача 1. Распределение плотности на конечный момент времени на $1/4$ части области неструктурированной сетки 1

На рис. 4 для задачи 1 показано распределение плотности на конечный момент времени вдоль одномерного разреза на кубической сетке 4 с 800 ячейками. Представлены графики по обе стороны от КР. Видно, что решение по HLLEM ближе к эталонному, чем решение по HLL. Также можно видеть, что есть небольшая немонотонная область в решении по HLLEM при $\varphi = 1$.

На рис. 5 показан график для температуры. На увеличенном изображении видно, что есть небольшой "бугорок" в решении по HLLEM при $\varphi = 1$. Там же добавлены результаты при $\varphi = 0,3, 0,6$

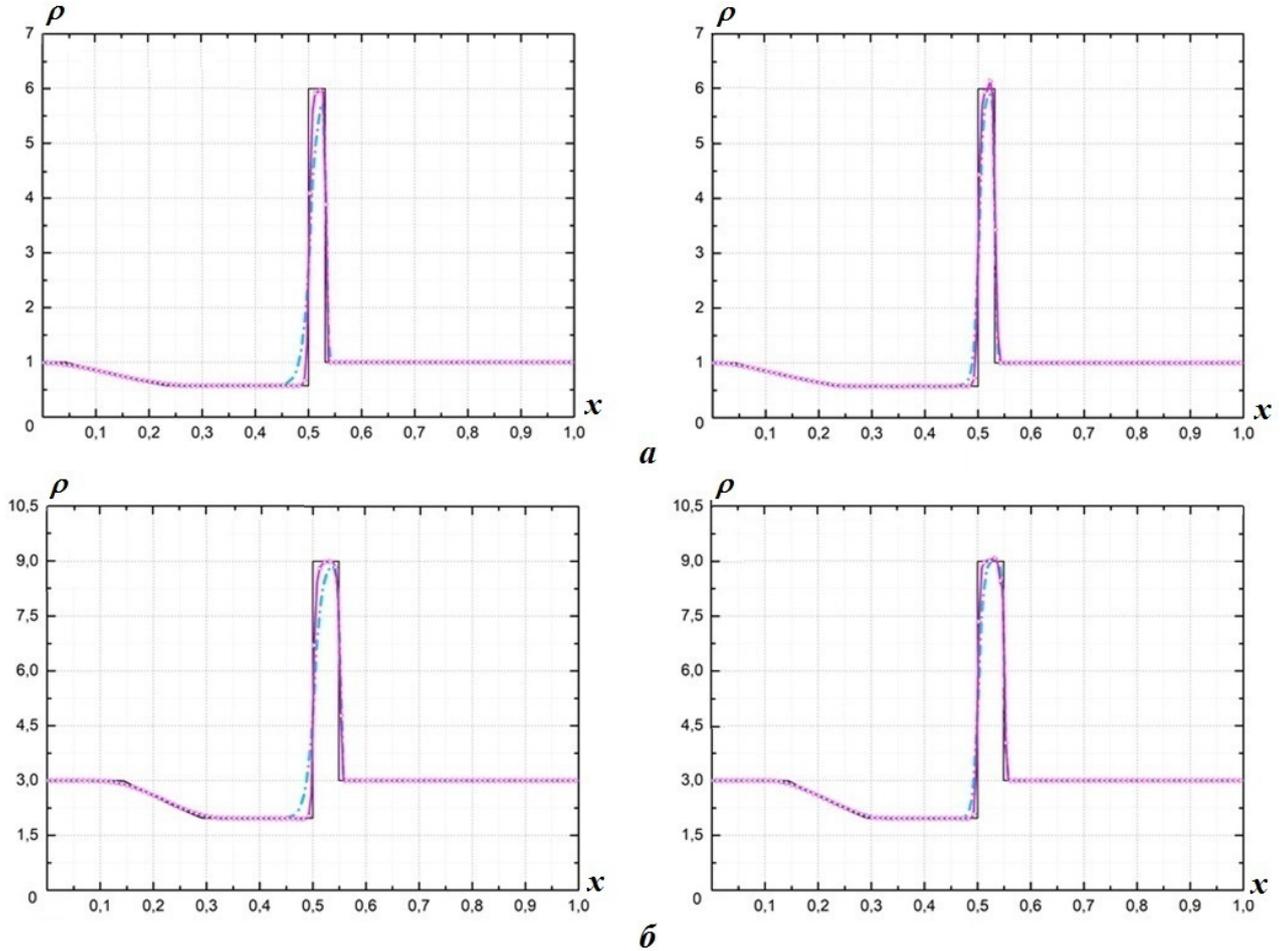


Рис. 3. Плотность вдоль одномерного разреза на сетках 2: *a* — задача 1; *б* — задача 2; слева — равномерная сетка, справа — неструктурированная; — — эталон; - - - HLL; —○— HLLEM

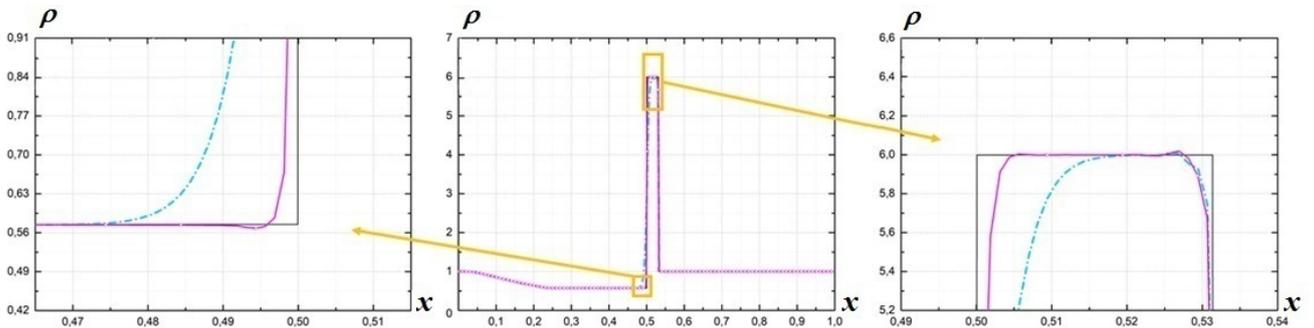


Рис. 4. Задача 1. Плотность вдоль одномерного разреза на равномерной сетке 4: слева — область слева от КР; справа — область справа от КР; — — эталон; - - - HLL; —○— HLLEM, $\varphi = 1$

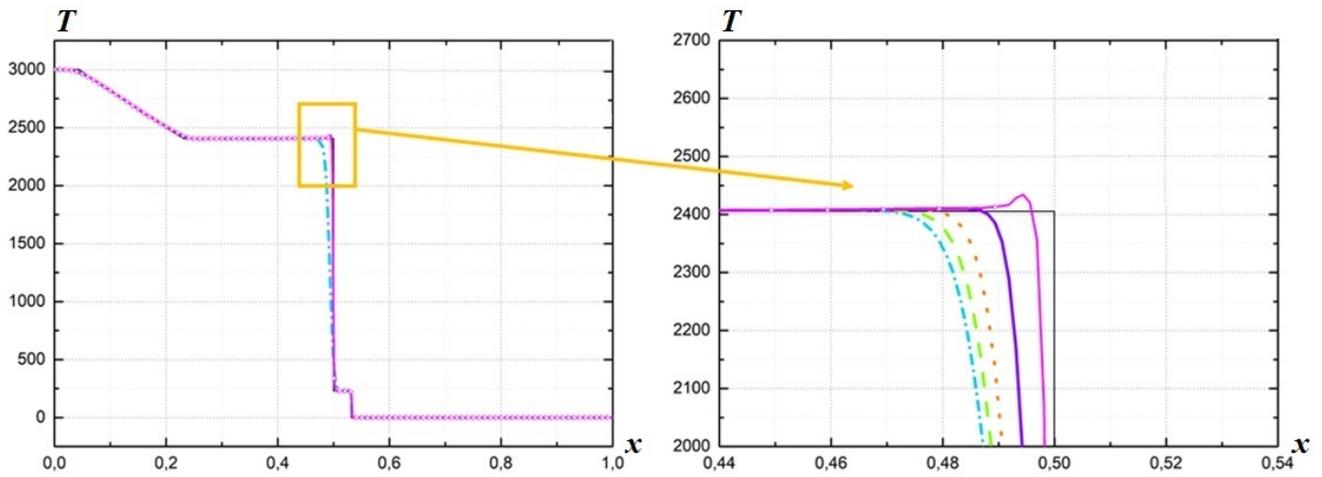


Рис. 5. Задача 1. Температура вдоль одномерного разреза на равномерной сетке 4: справа — увеличенная область слева от КР; —○— HLLEM, $\varphi = 1$; — HLLEM, $\varphi = 0,9$; - - - HLLEM, $\varphi = 0,6$; — HLLEM, $\varphi = 0,3$; - · - · - HLL; — — эталон

и 0,9. Видно, что при увеличении значения φ решение становится ближе к эталонному. При этом немонотонная область не наблюдается при значениях $\varphi < 1$.

Для каждой задачи исследовались относительная погрешность и порядок сходимости как на кубической, так и неструктурированной сетке.

Относительная погрешность в норме L_1 вычислялась вдоль x -направленного одномерного среза по формуле

$$\Delta f = \frac{\sum_i |\rho_i - \rho_i^{\text{э}}| h_i}{\sum_i \rho_i^{\text{э}} h_i},$$

где ρ_i , $\rho_i^{\text{э}}$ — расчетная и эталонная плотности в i -й ячейке; h_i — длина i -й ячейки вдоль одномерного среза.

Для вычисления порядка сходимости рассматривалась величина h — средняя длина ячеек сетки вдоль одномерного среза. Порядок сходимости для неструктурированных сеток 1–3 с соответствующими средними длинами ячеек $h_1 > h_2 > h_3$ определялся как [19]

$$\sigma = \log_{h_1/h_3} \frac{\Delta f_1}{\Delta f_3},$$

где Δf_1 и Δf_3 — относительные погрешности, полученные на сетках со средними длинами ячеек h_1 и h_3 соответственно. Порядок сходимости для равномерных сеток 1–4 со средними длинами ячеек $h_1 > h_2 > h_3 > h_4$ определялся аналогично: $\sigma = \log_{h_1/h_4} \frac{\Delta f_1}{\Delta f_4}$.

На рис. 6 показана относительная погрешность для обеих задач. Видно, что относительная погрешность убывает с увеличением числа ячеек сетки и увеличением значения φ .

В таблице представлены полученные порядки сходимости. Порядок сходимости численного решения к эталонному по HLLEM больше порядка сходимости по HLL примерно на 10–15%. При этом задача с УРСом в форме Ми–Грюнайзена оказалась более зависимой от типа сетки: порядок сходимости на неструктурированной сетке получился примерно на 15% меньше, чем на кубической.

Заключение

Предложено обобщение решателя Римана HLLEM на трехмерный многокомпонентный случай для произвольной неструктурированной сетки с произвольными УРСами компонентов. Предложенный решатель Римана HLLEM был реализован в рамках трехмерной эйлеровой методики "Фокус".

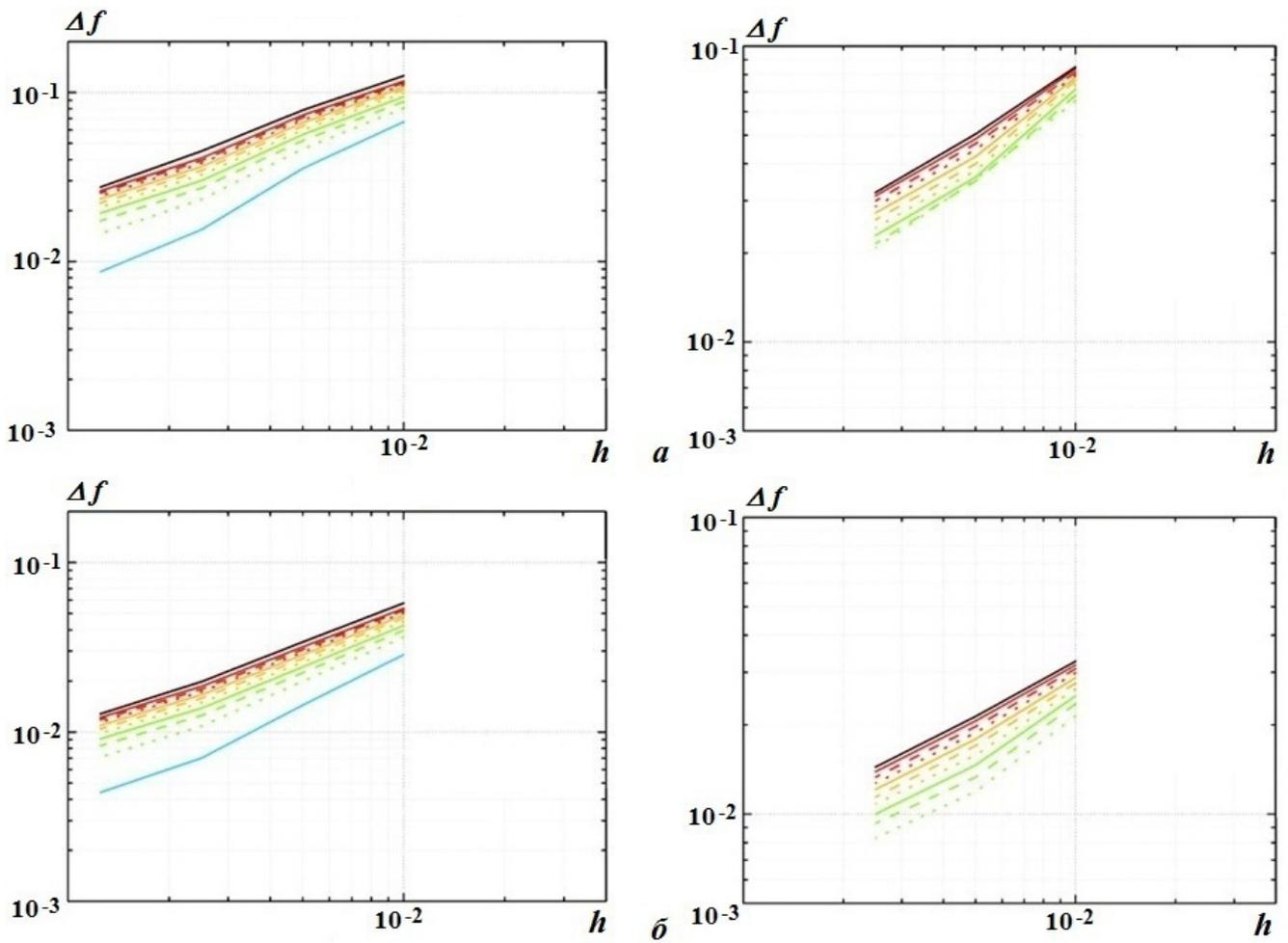


Рис. 6. Относительная погрешность для задачи 1 (а) и задачи 2 (б): слева — равномерная сетка, справа — неструктурированная; — HLLEM, $\varphi = 1$; ···· — HLLEM, $\varphi = 0,9$; - - - HLLEM, $\varphi = 0,8$; — HLLEM, $\varphi = 0,7$; ···· — HLLEM, $\varphi = 0,6$; - - - HLLEM, $\varphi = 0,5$; — HLLEM, $\varphi = 0,4$; ···· — HLLEM, $\varphi = 0,3$; - - - HLLEM, $\varphi = 0,2$; — HLLEM, $\varphi = 0,1$; — HLL

Порядок сходимости для каждой задачи, сетки и решателя Римана

Задача	Кубическая сетка		Неструктурированная сетка	
	HLL	HLLEM	HLL	HLLEM
1	0,73	0,82	0,71	0,83
2	0,72	0,78	0,59	0,68

Проведено тестирование схемы на двух плоских задачах Римана с УРСом идеального газа и УРСом в форме Ми–Грюнайзена на трехмерных кубических и неструктурированных сетках. Решатель Римана HLLEM качественнее описывает КР. Скорость убывания погрешности при решателе HLLEM больше, чем при HLL. Тестирование показало эффективность предложенного решателя Римана HLLEM.

Список литературы

1. *Dumbser M., Balsara D. S.* A new efficient formulation of the HLLEM Riemann solver for general conservative and non-conservative hyperbolic systems // J. Comp. Phys. 2016. Vol. 304. P. 276–319.
2. *Toro E. F.* Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics: a Practical Introduction. Third edition. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 2009.
3. *Abgrall R., Karniy S.* Computations of compressible multifluids // J. Comp. Phys. 2001. Vol. 169. P. 594–623.
4. *Глазырин И. В., Михайлов Н. А.* Конечно-объемная схема для многокомпонентных сжимаемых течений на неструктурированной сетке в трехмерной программе "Фокус" // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 2021. Т. 61, № 6. С. 1019–1033.
Glazyrin I. V., Mikhailov N. A. Konechno-obyemnaya skhema dlya mnogokomponentnykh szhimaemykh techeniy na nestrukturirovannoy setke v tryekhmernoy programme "Fokus" // Zhurnal vychisl. mat. i mat. fiz. 2021. T. 61, № 6. S. 1019–1033.
5. *Калиткин Н. Н.* Численные методы / Под ред. А. А. Самарского. М.: Наука, 1978.
Kalitkin N. N. Chislennye metody / Pod red. A. A. Samarskogo. M.: Nauka, 1978.
6. *Berger M., Aftosmis M. J., Murman S. M.* Analysis of Slope Limiters on Irregular Grids. NAS Technical Report NAS-05-007. May, 2005.
7. *Wouwer A. V., Saucedo Ph., Schiesser W. E.* Adaptive Method of Lines. Chapman & Hall/CRC, 2001.
8. *Gottlieb S., Shu C.-W., Tadmor E.* Strong stability-preserving high-order time discretization methods // SIAM Review. 2001. Vol. 43, No 1. P. 89–112.
9. *Godunov S. K.* A finite difference method for the computation of discontinuous solutions of the equations of fluid dynamics // Mat. Sb. 1959. No 47. P. 357–393.
10. *LeVeque R. J.* Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems. Cambridge Texts in Applied Mathematics. Cambridge University Press, 2004.
11. *Harten A.* High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // J. Comp. Phys. 1983. Vol. 49. P. 357–393.
12. *Harten A., Lax P. D., van Leer B.* On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws // SIAM Review. 1983. Vol. 25 (1). P. 35–61.
13. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1967.
Gantmakher F. R. Teoriya matrits. M.: Nauka, 1967.
14. *Галанин М. П., Савенков Е. Б.* Методы численного анализа математических моделей. М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2010.
Galanin M. P., Savenkov E. B. Metody chislennogo analiza matematicheskikh modeley. M.: MG TU im. N. E. Baumana, 2010.
15. *Chargy D., Abgrall R., Fezoui L., Larrouturou B.* Comparisons of Several Upwind Schemes for Multicomponent One-Dimensional Inviscid Flows. Inria-00075305. Version 1. May, 2006.
16. *Куликовский А. Г., Погорелов Н. В., Семёнов А. Ю.* Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001.
Kulikovskiy A. G., Pogorelov N. V., Semyenov A. Yu. Matematicheskie voprosy chislennogo resheniya giperbolicheskikh system uravneniy. M.: Fizmatlit, 2001.
17. *Allaire G., Clerc S., Kokh S.* A five-equation model for the simulation of interfaces between compressible fluids // J. Comp. Phys. 2002. Vol. 181. P. 577–616.
18. *Варфоломеев Д. А., Куропатенко В. Ф., Якимова М. Н.* Комплекс программ "Волна": модели и методы // Забабахинские науч. чтения: сб. тез. XIII Межд. конф. 16–20 апреля 2012.

Снежинск: РФЯЦ-ВНИИТФ, 2012. С. 316.

Varfolomeev D. A., Kuropatenko V. F., Yakimova M. N. Kompleks program "Volna": modeli i metody // *Zababakhinskie nauch. chteniya: sb. tez. XIII Mezhhhd. konf. 16–20 aprelya 2012.* Snezhinsk: RFYaTs-VNIIEF, 2012. S. 316.

19. *Янилкин Ю. В., Бондаренко Ю. А., Гончаров Е. А., Гужова А. Р., Колобянин В. Ю., Софронов В. Н., Стаценко В. П.* Тесты для гидрокодов, моделирующих ударно-волновые течения в многокомпонентных средах. Т. 1. Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2017.
Yanilkin Yu. V., Bondarenko Yu. A., Goncharov E. A., Guzhova A. R., Kolobyanin V. Yu., Sofronov V. N., Statsenko V. P. Testy dlya gidrokodov, modeliruyushchikh udarno-volnovye techeniya v mnogokomponentnykh sredakh. Т. 1. Sarov: RFYaTs-VNIIEF, 2017.

Статья поступила в редакцию 15.05.23.
