# ВОКРУГ ХАНОЙСКОЙ БАШНИ

С. В. ФАДЕЕВ, гимназия № 2
Научный руководитель В. В. Вавилов

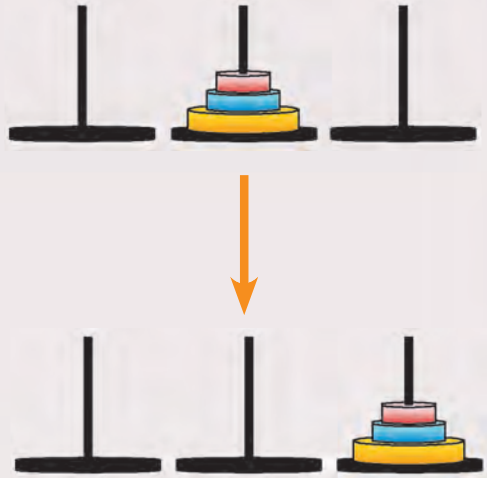
Существует древнеиндийская легенда, согласно которой в городе Бенаресе под куполом главного храма, в том месте, где находится центр Земли, на бронзовой площадке стоят три алмазных стержня. В день сотворения мира на один из этих стержней было надето 64 кольца. Бог поручил жрецам перенести кольца с одного стержня на другой, используя третий стержень в качестве вспомогательного. Жрецы были обязаны соблюдать следующие условия: переносить можно за один ход только одно кольцо; кольцо можно переносить на другой стержень, если оно имеет меньший диаметр, чем находящееся на стержне верхнее кольцо, или стержень свободен. Согласно легенде, когда, соблюдая все условия, жрецы перенесут все 64 кольца, наступит конец света.

*Модель Ханойской башни с восемью дисками*

Познакомившись с некоторыми научными и популярными материалами, я пришел к выводу о том, что найти разгадку данной легенды и выяснить, когда же наступит конец света, можно, решив математическую задачу, сформулированную Эдуардом Люком в 1883 г.

В классическом случае даны три стержня, на один из которых нанизаны восемь колец. Кольца отличаются размером диаметра и лежат друг на друге по мере уменьшения диаметра. Задача состоит в том, чтобы перенести кольца с одного стержня на другой за наименьшее число ходов. За один ход разрешается переносить только одно кольцо, причем нельзя класть кольцо большего диаметра на кольцо меньшего диаметра.

Рассмотрим решение задачи в общем виде. Начнем со случая, когда на стержне расположены 3 кольца.



Три кольца можно переложить на другой стержень за 7 ходов.

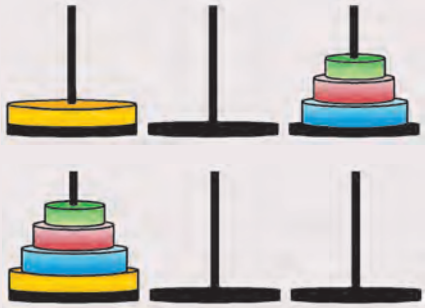
Рассмотрим случай для четырех колец. Очевидно, что первые 7 ходов будут такими же, как и в случае с тремя кольцами. После седьмого хода, кольца на стержнях располагаются следующим образом (см. рисунок).

Далее перекладывается нижнее кольцо на другой стержень и за 7 ходов перекладываются три кольца на самое большое кольцо.

Таким образом, 4 кольца можно перенести с одного стержня на другой за 15 ходов. Для переноса 5 колец потребуется 31 ход, а для переноса 6 колец — 63 хода. Рассмотрев задачу для разного количества колец, мы получили следующую числовую последовательность: 1 (для одного кольца), 3 (для двух колец), 7, 15, 31, 63... Можно заметить, что данная последовательность чисел удовлетворяет функциональной зависимости:

$$S_n = 2n1,$$

где: $n$ — количество колец, $S_n$ — наименьшее количество ходов для перекладывания $n$ колец с одного стержня на другой.



Предположим, что данное утверждение верно для $n$ колец. Докажем, что оно верно и для $(n+1)$ колец. На примере 4 колец можно заметить, что после того, как мы сделали $7=2^3-1$ ходов, перемещая 3 кольца с одного стержня на другой, перекладываем последнее кольцо на свободный стержень (т. е. делаем еще один ход) и повторяем еще раз $(2^3-1)$ ходов. Таким образом, имеем 15 ходов. Возьмем $(n+1)$ колец. За $(2n-1)$ ходов переложим на другой стержень все кольца, кроме последнего. Затем перекладываем нижнее кольцо на свободный стержень. Далее за $(2n-1)$ ходов переложим все остальные кольца на нижнее, самое большое кольцо. Всего получится $2(2^n-1)+1$ ходов или $(2^{n+1}-2+1) = (2^{n+1}-1)$ ходов, что и требовалось доказать.

Таким образом, с помощью метода математической индукции доказано, что $n$ колец можно переложить с одного стержня на другой за $(2n-1)$ ходов при условии, что за один ход разрешается переносить только одно кольцо и нельзя класть кольцо большего диаметра на кольцо меньшего диаметра.

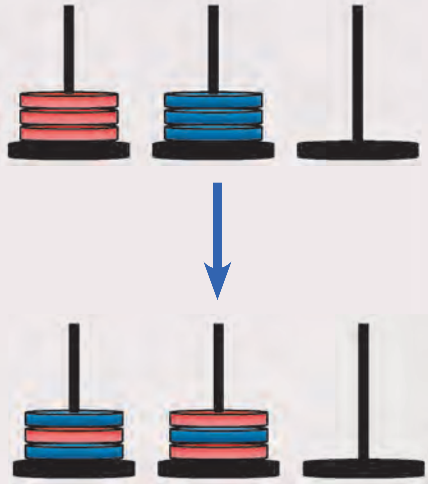
По легенде требовалось переложить 64 кольца. По формуле $S_n = 2^n - 1$ для этого нужно сделать 18 446 744 073 709 551 615 ходов. Если предположить, что для перекладывания одного кольца необходимо затратить одну секунду, то 64 кольца монахи будут перекладывать 584 942 417 355 лет, то есть апокалипсис наступит не скоро.

Однако, решив классическую задачу о Ханойской башне, я заинтересовался, а какие еще задачи с использованием «детских пирамидок» можно придумать и решить?!

Вот, например, еще одна задача:

На столе находятся три стержня. На первый стержень стопкой надели $n$ красных колец, на второй — $n$ синих, третий стержень пуст. Все кольца имеют одинаковый диаметр. За один ход разрешается снять верхнее кольцо с любого стержня и надеть его на любой другой стержень поверх имеющихся на нем колец. На стержень можно помещать любое количество колец. Требуется переложить кольца так, чтобы они снова лежали на первых двух стержнях, но чтобы их цвета чередовались. При этом на первом стержне чередование должно начинаться с синего кольца, считая снизу, а на втором — с красного.

Решение данной задачи для 3-х колец приведет нас к ответу: за 10 ходов.



Количество ходов $S_3 = 10$. Для четырех колец потребуется 14 ходов.

Рассмотрев решение задачи для большего количества колец, я получил следующие результаты: для $n = 5$ число ходов равно 17, для $n = 6$ – 21 ход. Мы получили ряд чисел: 3, 7, 10, 14, 17, 21... Можно заметить, что эти числа удовлетворяют следующей функциональной зависимости:

$$S_n = 3n + [n/2].$$

С помощью метода математической индукции можно доказать, что это минимальное количество ходов, за которое можно переложить диски так, чтобы они снова лежали на первых двух стержнях, но чтобы их цвета чередовались.

Меня также заинтересовала другая задача о двойной Ханойской башне. Двойная ханойская башня состоит из $2n$ колец $n$ различных размеров — по два кольца каждого диаметра. Как и в классической задаче о Ханойской башне разрешается за один ход перекладывать только одно кольцо и нельзя класть кольцо большего диаметра на кольцо меньшего диаметра.

а) Сколько перекладываний необходимо для перемещения двойной башни с одного стержня на другой, если кольца одинаковых размеров неотличимы друг от друга?

b) Сколько перекладываний необходимо совершить, если в окончательном расположении колец требуется воспроизвести исходный порядок всех одинаковых колец снизу доверху?

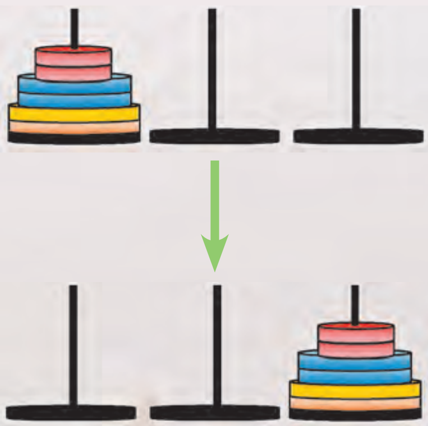
а) Рассмотрим случай для 6 колец 3 различных размеров ($n = 3$).

Очевидно, что для двойного количества колец мы пользуемся тем же самым алгоритмом, что и для обычной ханойской башни. Перемещаем вначале двойную ($n - 1$) — башню, затем перекладываем (с изменением порядка) два самых больших кольца, а на них снова помещаем двойную ($n - 1$) — башню. Таким образом, количество ходов в данном случае равно $A_n = 2A_{n-1} + 2$. Количество ходов для двойной башни в два раза больше, чем для обычной.

$$A_n = 2(2^n - 1) = 2^{n+1} - 2,$$

где $A_n$ — число перекладываний двойной башни; $n$ — количество колец разных размеров. Это решение меняет местами два самых больших кольца, но сохраняет исходный порядок других $2n - 2$ колец.

b) Теперь рассмотрим случай для трех пар колец, но так, чтобы порядок расположения одинаковых колец был таким же, каким был изначально.



Определимся с алгоритмом перекладываний для данного случая.

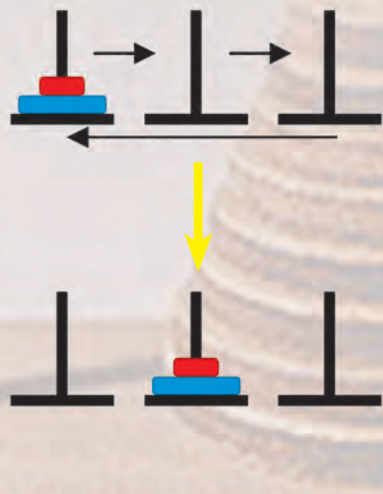
Сначала мы перекладываем $2(n - 1)$ колец, затем совершаем 1 ход, перекладывая одно из двух оставшихся колец. Далее мы перекладываем $2(n - 1)$ колец, а затем кладем последнее кольцо на свободный стержень. Затем опять перекладываем $2(n - 1)$ колец и кладем предпоследнее кольцо на последнее кольцо того же размера (сохраняя начальный порядок расположения этих колец). И в конце снова перекладываем $2(n - 1)$ колец на стержень, где лежат два оставшихся кольца. Эти кольца так же не поменяют свое положение относительно исходного, так как число их перекладываний четное, а каждое второе перекладывание двух колец приводит их в тоже положение относительно друг друга, что и изначально. Обозначим через $B_n$ минимальное число перекладываний. $B_1 = 3$,

$$B_n = A_{n-1} + 1 + A_{n-1} + 1 + A_{n-1} + 1 + A_{n-1} =$$
$$= 4(2^n - 2) + 3;$$
$$\mathrm{B}_n = 2^{n+2} - 5.$$

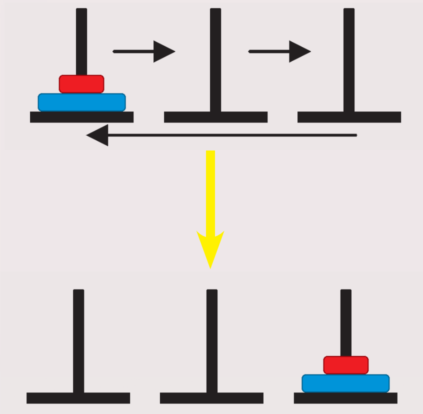
При решении некоторых задач достаточно сложно получить окончательную точную формулу для подсчета количества ходов, однако можно найти алгоритм их решения и вывести зависимость общего члена от предыдущего, т. е. составить рекуррентные соотношения. Рекуррентность задается начальным значением и зависимостью общего члена от предыдущих. Она позволяет вычислить количество ходов для любого $n$. Рекуррентность дает только косвенную, локальную информацию. Один из способов решения рекуррентных соотношений состоит в угадывании правильного решения с последующим доказательством, что наша догадка верна.

Рассмотрим предложенную в книге Р. Грэхема, Д. Кнута, О. Поташника «Конкретная математика» задачу, в которой сформулировано следующее условие: пронумеруем стержни цифрами 1, 2, 3. На первом стержне нанизаны кольца в правильном порядке в виде башни. Нужно перенести кольца с одного стержня на другой, но проводить перекладывания можно по заранее заданному графу. Например, рассмотрим такой граф: можно перекладывать кольца с 1-го стержня на 2-й, со 2-го на 3-й и с 3-го стержня на 1-й стержень, другими способами перекладывать кольца нельзя. В этом случае нас будут интересовать минимальные числа перекладываний: с 1-го стержня на 2-й и с 1-го на 3-й.

Рассмотрим случай для двух колец.



Чтобы переложить два кольца на 2-й стержень, необходимо сделать 5 ходов.



Но чтобы переложить два кольца с первого стержня на третий, нужно совершить 7 ходов.

Так же я рассмотрел случай для трех колец. Чтобы переложить 3 кольца с первого стержня на второй, мы сначала перекладываем два кольца с первого стержня на третий (7 ходов). Потом совершаем еще один ход, перекладывая третье, самое большое кольцо на соседний стержень. И снова перекладываем два кольца с третьего на 2-й стержень, что также займет 7 ходов, т. е. всего необходимо 15 ходов. Для перекладывания 3-х колец с первого стержня на третий потребуется сделать 21 ход.

Алгоритм перекладываний $n$ колец с первого стержня на второй будет следующим: перекладываем $(n-1)$ колец на третий стержень, затем переносим самое большое кольцо на второй стержень, и снова перекладываем $(n-1)$ колец на второй стержень с третьего.

Алгоритм перекладывания $n$ колец с первого стержня на третий будет следующим: перекладываем $(n-1)$ кольцо с первого стержня на третий, затем $n$-ное кольцо кладем на второй стержень, снова перекладываем $(n-1)$ кольцо, но уже на первый стержень с третьего, после чего совершаем еще 1 ход для переноса самого большого кольца со второго стержня на третий, а потом перекладываем оставшиеся $(n-1)$ кольцо с первого стержня на третий.

Таким образом, мы получаем следующее рекуррентные соотношение: $Q_n = 2R_{n-1} + 1$; $R_n = Q_n + Q_n - 1$ , если $n > 0$, $Q_n$ и $R_n$ минимальное число перекладываний для перемещения башни из $n$ колец с 1-го стержня на 2-й и с 1-го стержня на 3-й соответственно.

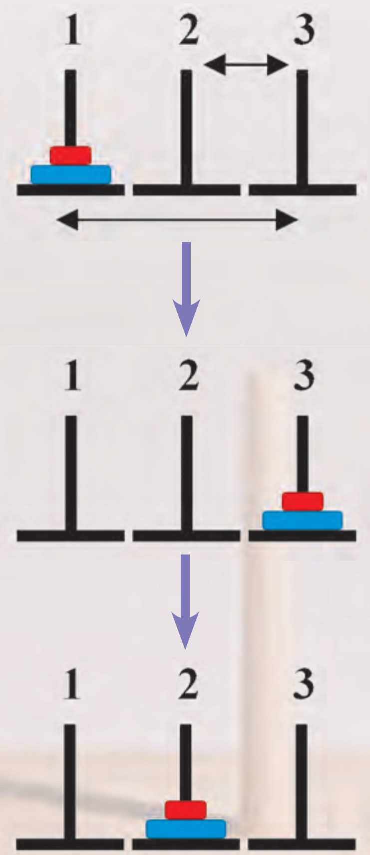
Решение рекуррентных соотношений взято из книги Р. Грэхема, Д. Кнута, О. Поташника «Конкретная математика» и имеет вид:

$$Q_n = \frac{\left(\left(1+\sqrt{3}\right)^{n+1} - \left(1-\sqrt{3}\right)^{n+1}\right)}{2\sqrt{3}} - 1;$$

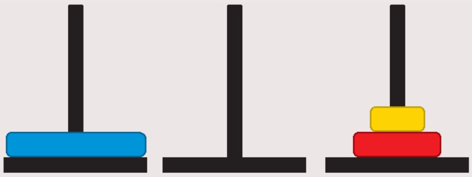
$$R_n = \frac{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt{3}\right)^n - \left(2-\sqrt{3}\right)\left(1-\sqrt{3}\right)^n}{2\sqrt{3}} - 1.$$

Не менее интересной, на мой взгляд, является следующая задача. Пронумеруем стержни цифрами 1, 2, 3. На первом стержне нанизаны кольца в правильном порядке в виде башни. Нужно перенести кольца с первого стержня на другой стержень, но проводить перекладывания можно по заранее заданному графу: перекладывать кольца можно с 1-го стержня на 3-й и обратно, с 3-го стержня на 2-й и обратно, но нельзя перекладывать кольца с 1-го стержня на 2-й и обратно. В этом случае нас будут интересовать минимальные числа перекладываний колец: с 1-го стержня на 2-й и с 1-го стержня на 3-й.

Начнем решение с рассмотрения случая для двух колец. Чтобы переложить 2 кольца с первого стержня на третий, нам необходимо сделать 4 хода. А чтобы переложить кольца с первого стержня на второй требуется 8 ходов.

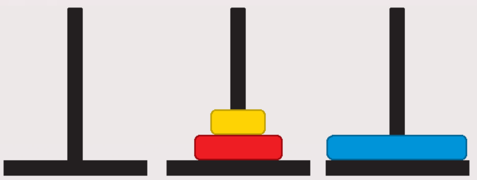


Рассмотрим краткий алгоритм перекладывания 3-х колец.



1–4

5–8



9

10–13

На этом примере видно, что для $n$ колец перекладывания будут проходить следующим образом. Сначала мы перекладываем $(n-1)$ кольцо на второй стержень, затем мы делаем еще один ход, перекладывая $n$-ное кольцо на 3-й стержень. Далее перекладываем $(n-1)$ кольцо также на третий стержень. Таким образом, количество ходов $Q_n$, необходимых для перекладывания $n$ колец с первого на третий стержень, выражается следующим рекуррентным соотношением: $Q_n = R_{n-1} + 1 + Q_{n-1}$, если $n > 0$, где $R_{n-1}$ и $Q_{n-1}$ — количество ходов, необходимых для перекладывания $(n-1)$ колец с первого стержня на второй и с первого стержня на третий соответственно.

Количество же ходов $R_n$, необходимых для перекладывания $n$ колец с первого на второй стержень, можно найти, действуя по следующему алгоритму: перекладываем $(n-1)$ кольцо на второй стержень; затем переместим самое большое кольцо на третий стержень; снова переложим $(n-1)$ кольцо обратно на первый стержень; и, наконец, перекладываем последнее кольцо и оставшиеся $(n-1)$ кольца на второй стержень.

*На IX школьных Харитоновских чтениях, 2009 г. Слева направо: В. Т. Пунин и лауреат IX школьных Харитоновских чтений по математике С. В. Фадеев МОУ «Гимназия № 2» г. Саров*

Таким образом, мы можем записать выражение, позволяющее найти число ходов, необходимых для перекладывания $n$ колец с первого стержня на второй: $R_n = 3R_{n-1} + 2$.

В данной задаче решение реккурентных соотношений даст нам следующие результаты:

$$Q_n = \left(3^n - 1\right)/2;$$

$$R_n = 3^n - 1.$$

Разобрав и решив множество различных задач о Ханойской башне, я пришел к выводу, что, несмотря на внешнюю схожесть, каждая из этих задач уникальна и интересна для решения. Даже малейшие изменения в условии классической задачи приводят к полному изменению алгоритма перекладывания колец и как следствие к абсолютно разным ответам. Рассмотренные в работе задачи, на мой взгляд, показывают, что даже из, казалось бы, ненавязчивой детской задачи о перекладывании колец с одной пирамидки на другую, можно получить серьезную и достаточно сложную математическую задачу, развивающую логику и основные математические навыки учащихся.

«Ходя» вокруг Ханойской башни, можно обнаружить много новых и интересных задач, что я и стремился показать в своей работе.