

# АНОМАЛЬНЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭФФЕКТЫ В СЛАБОИОНИЗИРОВАННОЙ ПЛАЗМЕ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ СИЛЬНОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ

Я. В. Тряскин

Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург

Изучены закономерности воздействия сильной стационарной ударной волны на плазменную компоненту слабоионизированного неизотермического газа. Для плазменной компоненты использована ионнозвуковая идеализация. Компьютерное исследование проведено на основе использования гипотезы о пренебрежении воздействием возмущений плазменной компоненты на нейтральную компоненту газа. Показано, что имеют место сильные аномальные нелинейные эффекты. Совместное конкурирующее воздействие нелинейности, дисперсии и диссипации проявляется в формировании специфических плазменных «сгустков» и «разрежений». В узком диапазоне скорости ударной волны реализуется аномальная релаксация плазменных осцилляций позади фронта. По существу, это проявляется в амбиполярном полном увлечении плазменных компонент ударной волной. При большей скорости ударной волны реализуется режим, когда в области фронта создается наибольший градиент концентрации ионной компоненты. Такая ситуация наиболее благоприятна для возможности аномально сильного воздействия плазменных компонент на нейтральную компоненту. Интересным эффектом является возможность проявления сильного нелинейного резонансного (относительно скорости ударной волны) возмущения в области перед фронтом [1]. При дальнейшем увеличении скорости ударной волны происходит «сглаживание» возмущений. Это плазменный аналог гидродинамического эффекта «лошади Хьюстона» [1].

Исследуем воздействие плоской сильной ударной волны (нейтральной компоненты) на плазменную компоненту слабоионизированного газа. Модель газа следующая: считаем, что нейтральная компонента состоит из одинаковых молекул, ионы однократно ионизированы. Для выяснения основных закономерностей ограничимся рассмотрением одномерного стационарного процесса (все поля зависят от одной переменной  $\xi = x - ct$ , ( $x, t$  – декартова координата и время,  $c = \text{const}$  – скорость движения фронта сильной ударной волны нейтральной компоненты трехкомпонентной среды). Делается дополнительное ограничение приближением неизотермической плазмы, когда электронная температура гораздо больше температуры тяжелых частиц:  $T_e \gg T_i \approx T_n$ . Здесь и ниже индексы  $e, i, n$  относятся к электронам, ионам и нейтральным частицам,  $T$  – температура.

Учтем диссипацию за счет упругих столкновений между ионами и нейтральными частицами, процессы опишем уравнениями динамики (1):

$$\begin{cases} \frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial(n_i u_i)}{\partial x} = 0, & \frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{\partial(n_e u_e)}{\partial x} = 0, \\ m_i \left( \frac{\partial}{\partial t} + u_i \frac{\partial}{\partial x} \right) u_i = |e| E - m_i v_{in}(\xi)(u_i - u_n), \\ |e| E + k T_{0e} \frac{\partial \ln(n_e)}{\partial x} = 0, \\ \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial x} + |e|(n_e - n_i) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где  $n, u, m, e, E$  – концентрация, скорость, масса, заряд электрона и электрическое поле,  $v_{in}(\xi), k, \epsilon_0$  – частота упругих столкновений, постоянная Больцмана и диэлектрическая проницаемость вакуума.

Граничные условия в области  $\xi \rightarrow \infty$  выбираются из требования перехода полей в невозмущенное состояние:  $u_i = 0$ ,  $E = 0$ ,  $n_e = n_i = n_0$ . Функция  $m_i v_{in}(\xi) u_n$  в уравнении движения ионной компоненты описывает сторонний стационарный источник. Возмущение полей заряженных компонент будет создаваться стационарной сильной ударной волной в виде ступеньки, описываемой соотношениями (2):

$$\begin{cases} \frac{\rho_{n1}}{\rho_{n0}} = \frac{n_{n1}}{n_{n0}} \approx \frac{\gamma+1}{\gamma-1}, & \frac{u_{n1}}{c} \approx \frac{2}{\gamma+1} \approx 1 - \frac{\rho_{n0}}{\rho_{n1}}, \\ u_n \equiv u_n(\xi) = u_{n1} \eta_0(-\xi), \\ \rho_n \equiv \rho_n(\xi) = \rho_{n0} + (\rho_{n1} - \rho_{n0}) \eta_0(-\xi), \end{cases} \quad (2)$$

где  $\rho_n$ ,  $u_n$  – плотность и скорость нейтральной компоненты,  $\gamma$  – отношение удельных теплоемкостей, здесь индексы 0,1 относятся к состояниям перед фронтом при  $\xi \rightarrow \infty$  и позади фронта при  $\xi \rightarrow -\infty$ ,  $\eta_0(\xi)$  – функция ступеньки:

$$\eta_0(\xi) = 1 / (1 + \exp(-\xi/\xi_*)), \quad (3)$$

где  $\xi_*$  – пространственный масштаб, который характеризует «сглаженность» ступеньки. При предельном переходе  $\xi_* \rightarrow 0$ , функция  $\eta_0(\xi)$  – описывает «резкий» скачок.

Нелинейная система уравнений в частных производных (1) для стационарного процесса  $\xi = x - ct$  приводится к неавтономной системе трех обыкновенных дифференциальных уравнений с переменным коэффициентом  $v_{in}(\xi)$  для безразмерных функций и двух алгебраических соотношений:

$$\begin{cases} \frac{dw}{ds} = F(w, \Pi, s), & w(w_1, w_2, w_3), \\ w_4 = 1 - 1/w_1, & w_5 = 1 - 1/w_2, \end{cases} \quad (4)$$

где введены обозначения  $s$ ,  $w_1$ ,  $w_2$ ,  $w_3$ ,  $w_4$ ,  $w_5$  – безразмерная координата, безразмерные концентрации ионов и электронов, безразмерное электрическое поле, безразмерные скорости ионов и электронов. Безразмерный вектор  $\Pi$  характеризует набор безразмерных определяющих параметров:

$$\Pi = \begin{cases} \Pi_1 = cu_s^{-1}, \\ \Pi_2 = D_e v_0 u_s^{-1}, \\ \Pi_3 = v_{in} v_0, \end{cases} \quad (5)$$

где  $D_e = \sqrt{\epsilon_0 k T_0 e^{-2} n_0^{-1}}$  – радиус Дебая. Параметры  $\Pi_1$  – ионно-звуковое число Маха,  $\Pi_2$  – безразмерный радиус Дебая,  $\Pi_3$  – определяет безразмерную частоту столкновений ионов  $\Pi_3 \equiv \Pi_3(s) = 1 + 2/(\gamma-1)\eta(-s)$  с нейтральными частицами. Для безразмерных параметров «сглаженная» функция ступеньки (3) определена соотношением (6), параметр  $s_*$  – задает масштаб сглаживания функции  $\eta(s)$ .

$$\eta(s) = 1 / (1 + \exp(-s/s_*)), \quad (6)$$

Функции  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$  имеют представление:

$$\begin{cases} F_1 = -s_0 w_1^2 (w_1 w_3 + \Pi_3 / \Pi_1), \\ F_2 = -s_0 \Pi_1^2 w_2 w_3, \\ F_3 = -s_0 (w_2 - w_1) / (\Pi_1 \Pi_2)^2. \end{cases} \quad (7)$$

Связь с размерными параметрами определяется по следующим формулам:

$$\begin{cases} w_1 = n_i n_{i0}^{-1}, \quad w_2 = n_e n_{e0}^{-1}, \quad w_3 = E \tilde{E}^{-1}, \\ w_4 = u_i c^{-1}, \quad w_5 = u_e c^{-1}, \\ \tilde{E} = v_0 m_i c^2 |e|^{-1} u_s^{-1}, \\ s = \xi v_0 u_s^{-1} s_0^{-1}, \quad s_* = \xi_* v_0 u_s^{-1} s_0^{-1}, \end{cases} \quad (8)$$

где  $u_s = \sqrt{k T_{0e} m_i^{-1}}$  – скорость ионного звука. В системе (4) в области  $s \rightarrow \infty$  осуществляется предельный переход к невозмущенному состоянию (9):

$$w_k \approx a_k e^{-s}, \quad s \gg 0, \quad a_k = \text{const}, \quad k = 1, \dots, 5. \quad (9)$$

Поэтому, в области  $s \rightarrow \infty$  должно выполняться линейное дисперсионное уравнение (10):

$$\det(a + F_0(a, \Pi, 0)) = 0, \quad (10)$$

где  $F_0$  – линейное приближение функции  $F$  в системе (4). Пространственный параметр  $s_0$  – является деформирующим множителем, находится из условия существования линейной асимптотики (9) при решении дисперсионного уравнения (10).

Отметим типичное свойство любых стационарных решений в средах с нелинейностью и с диссипацией. Так как, в таких решениях нелинейность полностью компенсирует проявление диссипации, то эти решения обладают «дефектом». Такие решения описывают физически не реализуемую ситуацию, если их использовать во всей области изменения независимой переменной  $-\infty < s < \infty$ . Признаком «дефективности» является бесконечная площадь под профилем, описывающим стационарное решение. Такие волны могут быть созданы только с затратой бесконечно большой энергии. Такие стационарные решения приближенно описывают физический процесс только в окрестности фронта.

Для получения граничных условий при  $s \rightarrow -\infty$ . Решается алгебраическая система уравнений для  $w_1, w_2, w_3$ :

$$\begin{cases} w_1 (w_3 - 1) - \Pi_3 / \Pi_1 = 0, \\ w_2 w_3 = 0, \\ w_2 / w_1 - 1 = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Получение численных результатов вызвало серьезные компьютерные трудности для значений ионно-звукового числа Маха  $\Pi_1 > \Pi_1^b \approx 1,526$  при  $s_* \rightarrow 0$ . В такой ситуации возникают численные сложности, которые заключается в быстром экспоненциальном росте решения  $w_1$  при заданных параметрах  $\Pi$ . Это вносит значительные численные ошибки за счет машинного округления и малой точности численных схем дифференцирования. Для построения решения системы (4) проверены различные пакеты численного моделирования для решения краевых задач: Matlab, Comsol. Ни одним из стандартных инструментов не удалось получить удовлетворительные результаты. Для решения системы (4) реализован метод решения поставленной краевой задачи на языке программирования Python с использованием метода «BDF» (backward differentiation formula) для жестких систем [2] из библиотеки для научных вычислений «scipy». Метод «BDF» для численного интегрирования является не явным многошаговым. Он применяется для решения жестких систем обыкновенных диф-

ференциальных уравнений. Эффект аномальности соответствует амбиполярному полному увлечению заряженных компонент ударной волной. Для аномальной ситуации ( $\Pi_1 = \Pi_1^{cr}$ ,  $\Pi_2 = 0,2$ ) осцилляции ионной концентрации существуют только перед фронтом ударной волны  $s > 0$ . График безразмерной ионной концентрации  $w_1$  представлен на рис. 1 слева.

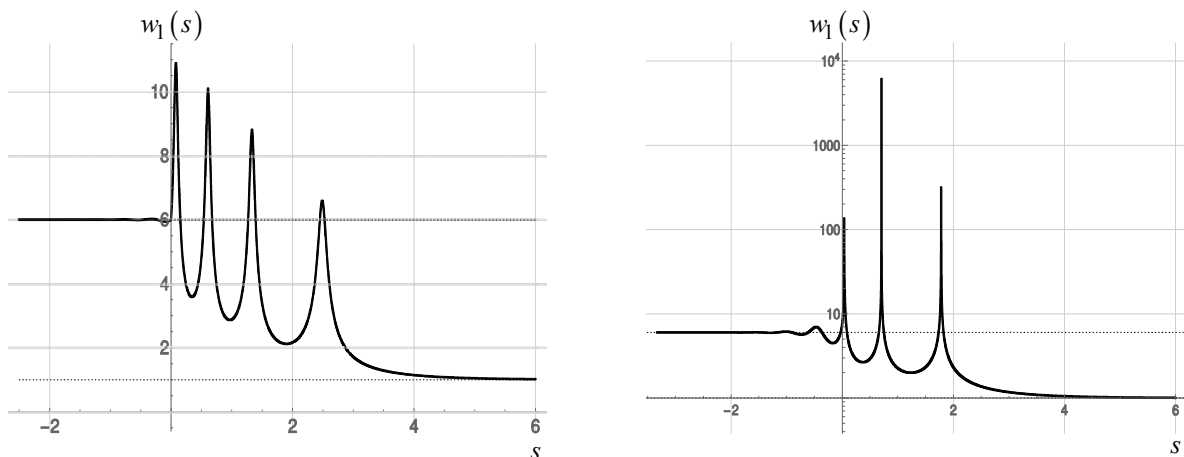


Рис. 1. Безразмерная ионная концентрация  $w_1$  в случае полного увлечения заряженных компонент ударной волной – слева,  $\Pi_1 = 1,3571$ . Безразмерная ионная концентрация  $w_1$  в отсутствие аномального эффекта. Плотность плазмы возрастает в десятки тысяч раз – рисунок справа,  $\Pi_1 = 1,532$ . Для обоих случаев  $\Pi_2 = 0,2$

Значение параметра  $\Pi_1^{cr}$  зависит от величины безразмерного радиуса Дебая  $\Pi_2$ . В зависимости от параметра  $\Pi_2$  область, где проявляется эффект аномальности, сдвигается в меньшие или большие значения ионно-звукового числа Маха  $\Pi_1$ . На рис. 1 справа представлена зависимость ионной концентрации  $w_1$  от координаты  $s$  в случае отсутствия аномального эффекта, но перед фронтом волны появляются локальные плотные сгустки плазмы имеющие значение концентрации, гораздо выше ( $> 10^4$  раз) чем в невозмущенном состоянии.

Для параметра ионно-звукового числа Маха  $\Pi_1 = 1,475$  и безразмерного радиуса Дебая  $\Pi_2 = 0,2$  безразмерная ионная концентрация  $w_1$  имеет максимумы как перед фронтом, так и позади фронта ударной волны, количество максимумов и значения их зависят от параметров  $\Pi_1, \Pi_2$ .

В области больших значений ионно-звукового числа Маха  $\Pi_1 \gg \Pi_1^{cr}$  реализуется второй аномальный эффект – реализация плазменного эффекта «лошади Хьюстона» [3–5]. Для описания поведения полей, где  $\Pi_1 > \Pi_1^b$  воспользуемся «сглаженной» ступенькой (6), где параметр  $s_* = 1,33$ , при таком условии сглаженности удастся построить профили для больших значений чисел Маха, вплоть до  $\Pi_1 = 9$  (рис. 2). Значение параметра  $\Pi_1 = \Pi_1^H \approx 9$  является «критическим». При  $\Pi_1^H$  реализуется монотонный профиль  $w_1(s)$  (рис. 2) – это и есть реализация плазменного эффекта «лошади Хьюстона».

В заключение перечислим основные результаты. Отмечено наличие двух аномальных эффектов. При некотором значении параметра  $\Pi_1 = \Pi_1^{cr}$  происходит первый эффект – аномальная резонансная (относительно скорости ударной волны) релаксация плазменных осцилляций позади фронта. При этом реализуется амбиполярное полное увлечение плазменных компонент ударной волной. Второй эффект – резонансное (относительно скорости ударной волны) возмущение концентрации ионов. Суть явления следующая. При некотором значении параметра  $\Pi_1 = \Pi_1^H$  происходит перестройка полей в плазменном предвестнике. Пропадает максимум ионной концентрации  $w_1$  зависи-

мость  $w_1(s)$  становится монотонной (рис. 2). Это аналог гидродинамического эффекта «лошади Хьюстона» на поверхности воды в узких мелких каналах.

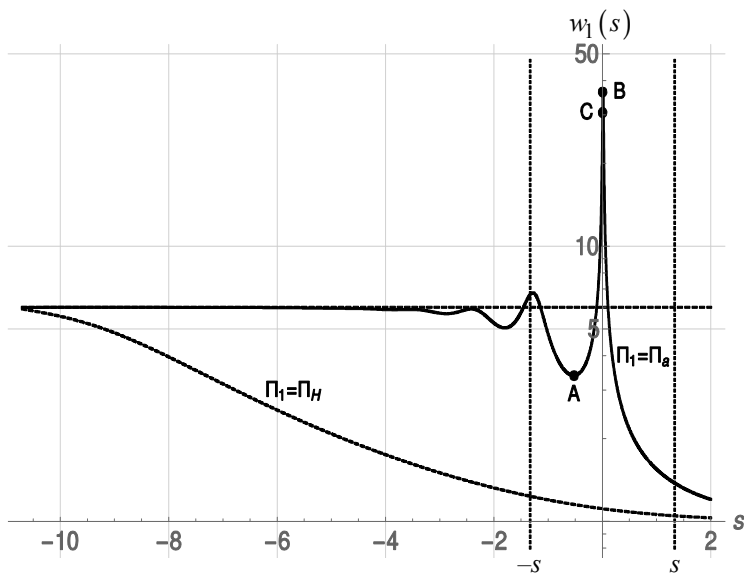


Рис. 2. Пунктирная линия соответствует реализации плазменного эффекта «лошади Хьюстона» при  $\Pi_1 = \Pi_1^H = 9$ . Сплошная линия соответствует максимальному значению  $w_1'(s)$  в точке перегиба  $C$  при  $\Pi_2 = 0,2$ ,  $\Pi_1 = \Pi_1^a \approx 2,32$ ,  $s_* \approx 1,33$

Можно сделать следующий прогноз (гипотезу) об ослаблении интенсивности сильной ударной волны на стадии, предшествующей проявлению второго эффекта. Такое ослабление должно происходить за счет специфического профиля ионной концентрации в окрестности фронта (рис. 2). В окрестности фронта возможно формирования профиля  $ABC$  концентрации ионной компоненты  $w_1$ , когда точка перегиба профиля  $C$  с максимальным значением градиента концентрации ионов оказывается на фронте при значении параметра  $\Pi_1 = \Pi_1^a$ . Если реализуется ситуация, когда точка  $C$  расположена на фронте  $s = 0$  (рис. 2), то ионная компонента должна создавать силу, уменьшающую концентрацию нейтральной компоненты. Происходит это за счет положительного градиента  $w_1'(s)$ . Конечно, величина этого эффекта должна оцениваться при рассмотрении нестационарной задачи о воздействии ударной волны на слабоионизированный газ, а также учет обратного воздействия плазменной компоненты на нейтральную. Имеются экспериментальные подтверждения [6] такого влияния.

На настоящем этапе исследование проведено при пренебрежении влиянием заряженных компонент на нейтральную компоненту и на профиль ударной волны. Вопрос: «имеется ли сильное влияние плазменных компонент на интенсивность ударной волны» пока еще остается без аргументированного ответа.

### Список литературы

1. Авраменко Р. Ф. Климов А. И., Серов Ю. Л., Явор И. П. и др. Эффект аномального обтекания тел плазмой // Открытие No 007. Приоритет 17.09.80. Зарегистрировано 25.12.86 в Гос. реестре открытий СССР.
2. Ascher U. M., Petzold, L. R. Computer Methods for Ordinary Differential Equations and Differential-Algebraic Equations // Ascher U. M., Petzold, L. R. SIAM, Philadelphia. 1998.

3. Павлов В. А. Ионно-звуковой эффект лошади Хьюстона // Физика плазмы. 2000. Т. 26, № 6. С. 543–547.
4. Pavalov V. A., Tryaskin Ya. V. Plasma effect of the Houston horse // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2015. Vol. 56, N 3. P. 361–368.
5. Павлов В. А. Слабоионизированная плазма в сверхзвуковом потоке // Физика плазмы. 2002. Т. 28, № 2. С. 522–526.
6. Серов Ю. Л. Резонансное сверх-ионно-звуковое обтекание высокоскоростных тел плазмой // Современная наука. 2012. Т. 2. Вып. 10. С. 101–107.