

7. Куропатенко В. Ф. Новые модели механики сплошных сред // Инженерно-физический журнал. 2011. Т. 84, № 1. С. 74–92.
8. Бахвалов Н. С., Эглит М. Э. Эффективные уравнения с дисперсией для распространения волн в периодических средах // Докл. РАН. 2000. Т. 370, № 1. С. 7–10.
9. Бахвалов Н. С., Эглит М. Э. Исследование эффективных уравнений с дисперсией, описывающих распространение волн в стратифицированных средах и тонких пластинах // Там же. 2002. Т. 383, № 6. С. 742–746.
10. Бахвалов Н. С., Эглит М. Э. Вариационные свойства осредненных моделей периодических сред // Тр. матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1990. Т. 192. С. 5–19.
11. Сердюкова С. И. Экзотическая асимптотика для линейного гиперболического уравнения // Докл. РАН. 2003. Т. 389, № 3. С. 305–309.
12. Сердюкова С. И. Развал бризера для эффективного уравнения с дисперсией. Асимптотика на границе корректности // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 2010. Т. 50, № 7. С. 1276–1284.
13. Бондаренко Ю. А., Янилкин Ю. В. Расчет термодинамических параметров смешанных ячеек в газовой динамике // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2000. Вып. 4. С. 12–25.
14. Гончаров Е. А., Колобянин В. Ю., Янилкин Ю. В. Метод замыкания уравнений лагранжевой газодинамики в смешанных ячейках, основанный на равенстве скоростей компонентов // Там же. 2006. Вып. 4. С. 100–105.
15. Гончаров Е. А., Колобянин В. Ю., Садчиков В. В., Янилкин Ю. В. Сравнение различных методов расчета термодинамического состояния смешанных ячеек в лагранжевой газодинамике // Труды РФЯЦ-ВНИИЭФ. 2009. Вып. 14. С. 54–71.

СОГЛАСОВАНИЕ СЕТКИ И ТОЧНОСТЬ СЧЕТА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЗВУКА С ГРАНИЦАМИ МЕЖДУ ВЕЩЕСТВАМИ В РАЗНОСТНЫХ СХЕМАХ ОДНОМЕРНОЙ ЛАГРАНЖЕВОЙ ГАЗОДИНАМИКИ

Ю. А. Бондаренко, В. Н. Софронов

Российский федеральный ядерный центр –
Всероссийский НИИ экспериментальной физики, г. Саров

Введение

Основные погрешности разностного счета уравнений газовой динамики возникают при наличии разрывов в решении или в параметрах газов. Особенно ярко это проявляется при взаимодействии ударных волн с контактными разрывами. И даже без ударных волн точность ухудшается именно на границах веществ. Величина погрешности зависит от характера согласования сетки на границах. Это было впервые отмечено в статье С. К. Годунова [1]. В этой статье анализом кусочно-линейных непрерывных решений показано, что в схеме Годунова один из видов численных ошибок уменьшается, если разностная сетка согласована по акустической толщине. Позднее В. Ф. Куропатенко [2] показал, что обобщение этого критерия (при использовании скорости ударной волны вместо скорости звука) уменьшает энтропийные следы в разностной схеме типа «крест» с искусственной вязкостью.

Расчеты прохождения слабой (и сверхслабой) ударной волны по периодической многослойной среде [3] показали, что при использовании сеток, согласованных по акустической толщине, точность расчетов может быть улучшена в несколько раз (по сравнению с сеткой, равномерной по массе). Доклад инициирован потребностью объяснить эти результаты.

К сожалению, классические методы исследования точности (вычисление ошибок аппроксимации и норм погрешностей энергетическим методом) мало наглядны и плохо работают в случае разрывных коэффициентов. Поиск точных решений разностных уравнений и их сравнение с точными решениями дифференциальных задач предпочтительнее, результат такого сравнения можно представить в наглядной и физически понятной форме. В докладе представлены точные решения разностных уравнений в одномерном линейном случае, описывающие отражение монохроматической звуковой волны заданной частоты от границы разных веществ. Явно вычислены разностные коэффициенты отражения и прохождения (ослабления) звука, дано их сравнение с точными.

Объектом исследования являются четыре разностные схемы одномерной газовой динамики в переменных Лагранжа. Рассмотрены две схемы на разнесенных пространственных сетках, это схема «крест» и схема с искусственной антидисперсией (СИАД) [4], и две разностные схемы на неразнесенных пространственных сетках, это схема Годунова [1] и балансно-характеристическая схема (БХС) типа Кабаре [5]. Все сделано для линейного случая без учета искусственных вязкостей и иных дополнительных диссипативных механизмов.

1. Коэффициенты отражения и прохождения звука в дифференциальных уравнениях

Рассмотрим для малых возмущений уравнения акустики с разрывными коэффициентами

$$\frac{\partial \delta \eta}{\partial t} = \frac{\partial \delta u}{\partial m}, \quad \frac{\partial \delta u}{\partial t} = -\frac{\partial \delta p}{\partial m}, \quad \delta p = -[c(m)\rho(m)]^2 \delta \eta = \begin{cases} -(c_1 \rho_1)^2 \delta \eta, & m < 0; \\ -(c_2 \rho_2)^2 \delta \eta, & m > 0. \end{cases}$$

Из этих уравнений следует закон сохранения акустической энергии

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\delta u^2}{2} + \frac{1}{2} \left[\frac{\delta p}{\rho(m)c(m)} \right]^2 \right\} = -\frac{\partial Q}{\partial m}, \quad Q = \delta p \delta u.$$

При вычислении коэффициентов отражения и ослабления используются энергетические соотношения.

Решение задачи о взаимодействии волны с границей веществ обычно ищется в виде суммы решений для падающей, проходящей и отраженной волн (они помечены индексами (1+), (2+) и (1-))

$$\delta u(t, m) = \begin{cases} \delta u_{(1+)}(t - m/\rho_1 c_1) + \delta u_{(1-)}(t + m/\rho_1 c_1), & m < 0; \\ \delta u_{(2+)}(t - m/\rho_2 c_2), & m > 0. \end{cases}$$

$$\delta p(t, m) = \begin{cases} \delta p_{(1+)}(t - m/\rho_1 c_1) + \delta p_{(1-)}(t + m/\rho_1 c_1), & m < 0; \\ \delta p_{(2+)}(t - m/\rho_2 c_2), & m > 0. \end{cases}$$

Из уравнений акустики и условий непрерывности скорости и давления на границе $m = 0$ отраженная и проходящая волны выражаются через падающую волну (пример точного решения для монохроматической волны показан на рис. 1). Коэффициенты прохождения и отражения определяют как отношения энергии проходящей и отраженной звуковой волны к энергии падающей волны. Они равны

$$K_{\text{отраж}} = \sqrt{\frac{Q_{(1-)}}{Q_{(1+)}}} = \frac{|\rho_2 c_2 - \rho_1 c_1|}{\rho_2 c_2 + \rho_1 c_1}, \quad K_{\text{прох}} = \sqrt{\frac{Q_{(2+)}}{Q_{(1+)}}} = \frac{2\rho_1 c_1 \rho_2 c_2}{\rho_2 c_2 + \rho_1 c_1}. \quad (1)$$

Уравнение баланса потоков энергии сводится к равенству $K_{\text{отраж}}^2 + K_{\text{прох}}^2 = 1$.

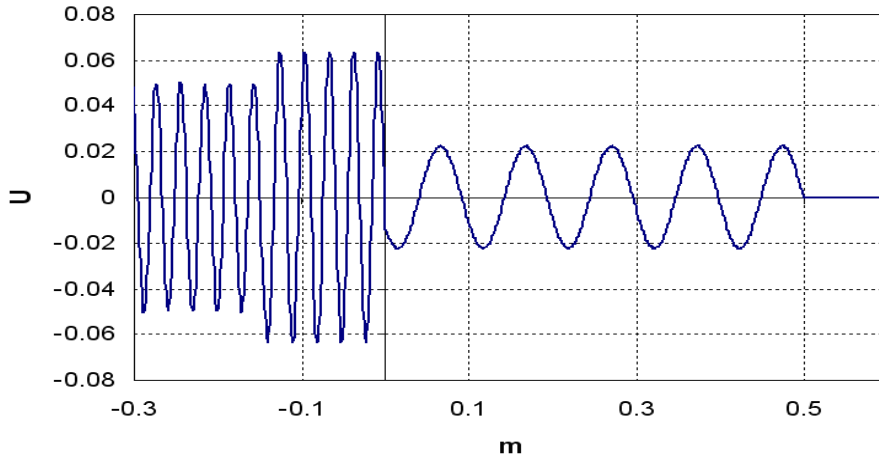


Рис. 1. Профиль массовой скорости в задаче о взаимодействии монохроматической волны с границей разных веществ $\rho_1 c_1 = 9, 1$, $\rho_2 c_2 = 32, 5$

2. Коэффициенты отражения и прохождения звука в разностной схеме «крест»

Схема «Крест» в акустическом приближении имеет вид

$$\frac{\delta p_{j+1/2}^{n+1} - \delta p_{j+1/2}^n}{\Delta t} = -\left(c_{j+1/2} \rho_{j+1/2}\right)^2 \frac{\delta u_{j+1}^{n+1/2} - \delta u_j^{n+1/2}}{\Delta m_{j+1/2}},$$

$$\frac{\delta u_j^{n+1/2} - \delta u_j^{n-1/2}}{\Delta t} = -\frac{\delta p_{j+1/2}^n - \delta p_{j-1/2}^n}{\Delta m_j}.$$

Массы ячеек сетки и волновые сопротивления определены формулами

$$\Delta m_{j+1/2} = \begin{cases} \Delta m_{(1)}, & j = -1, -2, -3, \dots \\ \Delta m_{(2)}, & j = 0, 1, 2, 3, \dots \end{cases}, \quad \rho_{j+1/2} c_{j+1/2} = \begin{cases} \rho_1 c_1, & j = -1, -2, -3, \dots \\ \rho_2 c_2, & j = 0, 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Смотрим взаимодействие монохроматической волны с границей веществ. Решение разностных уравнений представим в виде суммы падающей, отраженной и проходящей волн

$$\delta p_{j+1/2}^n = \begin{cases} \delta p_{(1+)} e^{i(\omega n \Delta t - \xi_{(1)}(j+1/2)\Delta m_{(1)})} + \delta p_{(1-)} e^{i(\omega n \Delta t + \xi_{(1)}(j+1/2)\Delta m_{(1)})}, & j = -1, -2, -3, \dots; \\ \delta p_{(2+)} e^{i(\omega n \Delta t - \xi_{(2)}(j+1/2)\Delta m_{(2)})}, & j = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

$$\delta u_j^{n+1/2} = \begin{cases} \delta u_{(1+)} e^{i(\omega(n+1/2)\Delta t - \xi_{(1)} j \Delta m_{(1)})} + \delta u_{(1-)} e^{i(\omega(n+1/2)\Delta t + \xi_{(1)} j \Delta m_{(1)})}, & j = -1, -2, -3, \dots; \\ \delta u_{(2+)} e^{i(\omega(n+1/2)\Delta t - \xi_{(2)} j \Delta m_{(2)})}, & j = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

$$\delta P_{j+1/2}^{n+1/2} = \begin{cases} \delta P_{(1+)} e^{i(\omega(n+1/2)\Delta t - (j+1/2)\xi_{(1)}\Delta m_{(1)})} + \delta P_{(1-)} e^{i(\omega(n+1/2)\Delta t + (j+1/2)\xi_{(1)}\Delta m_{(1)})}, & j < 0, \\ \delta P_{(2+)} e^{i(\omega(n+1/2)\Delta t - (j+1/2)\xi_{(2)}\Delta m_{(2)})}, & j \geq 0. \end{cases}$$

$$\delta u_j^{n+1/2} = \begin{cases} \delta U_{(1+)} e^{i(\omega(n+1/2)\Delta t - j\xi_{(1)}\Delta m_{(1)})} + \delta U_{(1-)} e^{i(\omega(n+1/2)\Delta t + j\xi_{(1)}\Delta m_{(1)})}, & j < 0, \\ \delta U_{(2+)} e^{i(\omega(n+1/2)\Delta t - j\xi_{(2)}\Delta m_{(2)})}, & j \geq 0. \end{cases}$$

Считаем выполненными естественные ограничения на длины волн и частоту $0 < \xi_{(k)}\Delta m_{(k)} \leq \pi$, $k = 1, 2$, $0 < \omega\Delta t < \pi$.

Представленное решение в виде суммы гармонических волн должно удовлетворять разностным уравнениям. После подстановки находятся амплитуды отраженной и проходящей волн и дисперсионные соотношения, связывающие длины этих волн с частотой. Разностные коэффициенты отражения и прохождения зависят от длин волн звуковых возмущений

$$K_{\text{отраж}}^{(\text{крест})} = \left| \frac{\rho_1 c_1 \cos(\xi_{(1)}\Delta m_{(1)}/2) - \rho_2 c_2 \cos(\xi_{(2)}\Delta m_{(2)}/2)}{\rho_2 c_2 + \rho_1 c_1} \right| < 1;$$

$$K_{\text{прох}}^{(\text{крест})} = \frac{2\sqrt{c_1 \rho_1 \cos(\xi_{(1)}\Delta m_{(1)}/2) c_2 \rho_2 \cos(\xi_{(2)}\Delta m_{(2)}/2)}}{c_1 \rho_1 \cos(\xi_{(1)}\Delta m_{(1)}/2) + c_2 \rho_2 \cos(\xi_{(2)}\Delta m_{(2)}/2)} \leq 1.$$

Длины волн зависят от частоты через дисперсионные уравнения

$$c_1 \rho_1 \frac{\sin(\xi_{(1)}\Delta m_{(1)}/2)}{\Delta m_{(1)}} = c_2 \rho_2 \frac{\sin(\xi_{(2)}\Delta m_{(2)}/2)}{\Delta m_{(2)}} = \frac{\sin(\omega\Delta t/2)}{\Delta t}.$$

Из этих формул сразу получается следующее утверждение.

В схеме «крест» разностные коэффициенты отражения и прохождения совпадают с точными значениями (1) тогда и только тогда, когда сетка согласована по акустической толщине (независимо ни от длины волн, ни от частоты)

$$\frac{\Delta m_{(1)}}{c_1 \rho_1} = \frac{\Delta m_{(2)}}{c_2 \rho_2}. \quad (2)$$

Из полученных формул еще вытекает, что если сетка согласована по акустической толщине и число Куранта $\chi_k = \frac{\Delta t \rho_k c_k}{\Delta m_{(k)}}$ равно единице, то дисперсия отсутствует, то есть длина волны разностного решения совпадает с длиной волны дифференциальной задачи. Этот результат давно известен (но точный источник указать затрудняемся) в следующей форме: *когда во всех ячейках число Куранта равно единице, то разностная схема «крест» дает точное решение.*

3. Коэффициенты отражения и прохождения звука в разностной схеме с искусственной антидисперсией

Схема СИАД [4] отличается от схемы «крест» наличием антидисперсионной добавки к давлению. При отсутствии вязкостей и других искусственных диссипаторов в линейном приближении эта схема имеет вид

$$\frac{\delta p_{j+1/2}^{n+1} - \delta p_{j+1/2}^n}{\Delta t} = -\left(c_{j+1/2} \rho_{j+1/2}\right)^2 \frac{\delta u_{j+1}^{n+1/2} - \delta u_j^{n+1/2}}{\Delta m_{j+1/2}};$$

$$\frac{\delta u_j^{n+1/2} - \delta u_j^{n-1/2}}{\Delta t} = -\frac{(\delta p_{j+1/2}^n + \delta q_{j+1/2}^n) - (\delta p_{j-1/2}^n + \delta q_{j-1/2}^n)}{\Delta m_j},$$

$$\delta q_{j+1/2}^n = -(\chi_{j+1/2})^2 \Delta m_{j+1/2} \left(\zeta_{j+1} \frac{\delta p_{j+3/2}^n - \delta p_{j+1/2}^n}{\Delta m_{j+1}} - \zeta_j \frac{\delta p_{j+1/2}^n - \delta p_{j-1/2}^n}{\Delta m_j} \right).$$

На явном виде коэффициентов антидисперсии ζ останавливаться не будем ввиду их громоздкости. Дисперсионные уравнения СИАД имеют вид

$$(\chi_{(k)})^2 \sin^2(\xi_{(k)} \Delta m_{(k)}/2) = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 16\zeta_{(k)} \sin^2(\omega \Delta t/2)}}{8\zeta_{(k)}}, \quad k = 1, 2.$$

Это уравнение имеет как мнимые, так и вещественные решения для волновых чисел. Вещественные волновые числа определяют длину периодической волны

$$\xi_{(k)} = \frac{2\chi_{(k)}}{\Delta t c_k \rho_k} \arcsin \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{1 + 16\zeta_{(k)} \sin^2(\omega \Delta t/2)}}{8\zeta_{(k)} (\chi_{(k)})^2}}, \quad k = 1, 2.$$

Комплексные решения дисперсионного уравнения определяют осциллирующие экспоненциально (и быстро) затухающие при удалении от границы (погранслойные) функции (на самом деле появление таких паразитных решений дисперсионного уравнения есть общее свойство разностных схем для гиперболических задач с увеличенным пространственным шаблоном). Эти погранслойные функции необходимо учитывать при построении точного решения разностной задачи взаимодействия звука с границей веществ, что очень сильно усложняет формулы, которые опустим. Поэтому и коэффициенты отражения и прохождения звука в СИАД имеют чрезвычайно громоздкий вид.

Но оказывается, что *если сетка согласована по акустической толщине (выполнено требование (2)), то для любых частот и длин волн коэффициенты отражения и прохождения звука в СИАД равны коэффициентам отражения и прохождения дифференциальной задачи.*

4. Коэффициенты отражения и прохождения звука для разностной схемы Кабаре

Для схемы Кабаре [5] в линейном случае и без диссипаторов коэффициенты отражения и прохождения звука не зависят от того, выполнено или нарушено условие согласования сетки (2). На всех сетках коэффициенты отражения и прохождения звука равны соответствующим коэффициентам (1) дифференциальной задачи.

В принципе это не удивительно, так как в эквивалентной балансно-характеристической конструкции этой схемы явно используются характеристические соотношения и условия непрерывности скоростей и давлений.

5. О непрерывности экстраполяции потоковых переменных на границе разных веществ в разностных схемах Годунова и Кабаре

Решением дисперсионного уравнения для схемы Годунова

$$e^{i\omega \Delta t} - 1 + \chi_{(k)} - \chi_{(k)} e^{i\xi_{(k)} \Delta m_{(k)}} = 0, \quad k = 1, 2$$

являются комплексные значения волнового числа. Действительная часть определяет длину волны $\lambda_k = 2\pi / \text{Re}(\xi_{(k)})$, а мнимая часть – коэффициент затухания

$$\sin\left(\operatorname{Re}\left(\xi_{(k)}\right)\Delta m_k - \omega\Delta t\right) = (1 - \chi_k)\sin\left(\operatorname{Re}\left(\xi_{(k)}\right)\Delta m_k\right), \quad k = 1, 2;$$

$$e^{-\operatorname{Im}\left(\xi_{(k)}\right)\Delta m_k} = \frac{\sin(\omega\Delta t)}{\chi_k \sin\left(\operatorname{Re}\left(\xi_{(k)}\right)\Delta m_k\right)}, \quad k = 1, 2.$$

Оказывается, что для схемы Годунова (в линейном случае) отношения потоков акустической энергии равны произведению двух сомножителей. Одни сомножители не зависят от номеров узлов сетки и условий согласования, их естественно назвать разностными коэффициентами отражения и прохождения, а вторые сомножители, определяющие затухание в зависимости от пройденного волной пути, можно назвать коэффициентами затухания или диссипации.

В схеме Годунова на границах разных веществ так определенные разностные коэффициенты отражения и прохождения звука всегда равны соответствующим коэффициентам (1) дифференциальной задачи.

На первый взгляд это утверждение в каком-то смысле противоречит результатам С. К. Годунова, согласно которым для улучшения точности схемы Годунова требуется согласование сетки по акустической толщине. В статье Годунова [1] рассмотрена задача о формировании в разностном решении линейных профилей давления и скорости вблизи границы раздела двух сред. Уменьшение точности расчетов проявлялось в том, что экстраполяция сеточных функций на контактную границу из левого и правого вещества приводила к разным значениям. Разность двух этих экстраполяций в [1] трактуется как мера погрешности. Эта мера погрешности отражает совсем другие свойства решений, чем погрешности коэффициентов отражения и прохождения звука, что снимает противоречие.

Рассмотрим с этой точки зрения поведение сеточных функций вблизи контактной границы в рассмотренных нами решениях линейных разностных уравнений. Относительная ошибка консервативных величин на границе двух веществ равна

$$\varepsilon^{\text{Годунов}} = e^{i(\xi_{(1)}\Delta m_{(1)} - \xi_{(2)}\Delta m_{(2)})/2} - 1.$$

Из дисперсионных уравнений схемы Годунова получим

$$\varepsilon^{\text{Годунов}} = \sqrt{\frac{e^{i\omega\Delta t} - 1 + \chi_{(1)}}{e^{i\omega\Delta t} - 1 + \chi_{(2)}} \cdot \frac{\chi_{(2)}}{\chi_{(1)}}} - 1 = \frac{i\omega}{2} \left(\frac{\Delta m_{(1)}}{c_1\rho_1} - \frac{\Delta m_{(2)}}{c_2\rho_2} \right) + O\left((\omega\Delta t)^2\right).$$

Вывод: в разностной схеме Годунова разностные коэффициенты отражения и прохождения звуковых волн равны точным значениям при любом отношении размеров ячеек сетки, однако, разностное решение, описывающее взаимодействие звуковой волны с границей разных веществ, содержит **другие** ошибки первого порядка малости, главные члены которых прямо пропорциональны разности акустических толщин ячеек.

Аналогичные вычисления для схемы Кабаре дают следующую относительную ошибку консервативных величин на границе двух веществ

$$\varepsilon^{\text{Кабаре}} = \frac{\omega^2}{8} \left[\left(\frac{\Delta m_{(1)}}{\rho_1 c_1} - \Delta t \right)^2 - \left(\frac{\Delta m_{(2)}}{\rho_2 c_2} - \Delta t \right)^2 \right] + O\left((\omega\Delta t)^4\right).$$

Вывод: в разностной схеме Кабаре разностные коэффициенты отражения и прохождения звуковых волн равны точным значениям при любом отношении размеров ячеек сетки, в то же время разностное решение, описывающее взаимодействие звуковой волны с границей разных веществ, содержит ошибки второго порядка малости, главные члены которых прямо пропорциональны разности акустических толщин ячеек.

6. Влияние способа согласования сетки на точность счета задачи прохождения слабой ударной волны по многослойной периодической среде

Примером, ярко демонстрирующим роль правильного согласования сетки на границах разных веществ, оказались задачи взаимодействия слабых ударных волн с многослойной периодической средой, рассмотренные в докладе [3].

Постановка задачи взята из работы В. Ф. Куропатенко [6]. Рассматривается многослойная периодическая среда, образованная двумя веществами – вольфрамом и парафином. Геометрия одномерная плоская, $0 \leq x \leq X_{\text{правое}}$, с одинаковой толщиной вольфрама и парафина $L_1 = L_2 = 0,05$ на каждом периоде толщиной $L = 0,1$. Уравнение состояния в обоих веществах имеет одинаковый вид с параметрами из таблицы

$$p = P_k(\rho, E) = (\gamma_k - 1)\rho E + \frac{\rho_{0k}(c_{0k})^2}{n_k} \left[\frac{n_k - \gamma_k}{n_k - 1} \left(\frac{\rho}{\rho_{0k}} \right)^{n_k} + \frac{(\gamma_k - 1)n_k}{n_k - 1} \cdot \frac{\rho}{\rho_{0k}} - \gamma_k \right].$$

На левой лагранжевой границе задана скорость $u|_{X_{\text{левое}}} = u_{\text{гран}} = 10^{-4}$, правая граница неподвижная.

Параметры уравнения состояния и начальные данные

k	ρ_{0k}	c_{0k}	n_k	γ_k	$\rho^{\text{нач}}$	$p^{\text{нач}}$
1	19,35	4,051	3,6	2,67	19,2	10^{-4}
2	0,93	3,357	3,5	1,66666	0,91	10^{-4}

Структура газодинамических профилей в такой задаче формируется многократными отражениями слабых ударных волн и очень коротких волн разрежения. В этом процессе происходит очень быстрое размножение числа скачков, приходящихся на один период, смотри рисунок 2. Количество скачков, приходящееся в среднем на один период, оценивается как $J \sim (tCL^{-1})^{-1} 2^{atCL^{-1}}$, где C – характерная скорость звука, $a = \text{const} \sim 1$. Уже после прохождения 15 периодов $J \sim 2000$. После прохождения основной волной тридцати и более периодов профили давления и скорости приобретают характерную (для волнового уравнения с дисперсией) структуру с крупномасштабными осцилляциями большой амплитуды, с длиной волны порядка нескольких периодов (после фронта основной волны) и с экспоненциально затухающим профилем на фронте основной волны, смотри примеры на рис. 3 и 4.

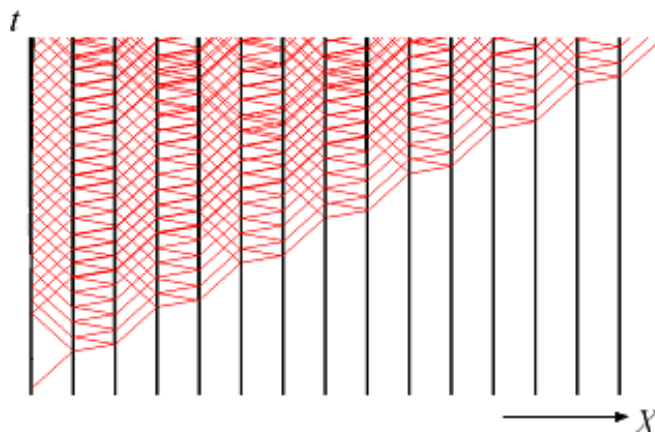


Рис. 2. Схема размножения числа скачков при их отражении от границ между разными веществами

Для выяснения точности были проведены расчеты на сходимость на сетках $N = A20, A40, A100, A200, A500$ и $A1000$, согласованных по акустической толщине (и равномерных в каждом из веществ), и на сетках $N = M40, M100, M200$ и $M500$, равномерных по массе, где N – число ячеек на одном периоде. Расчеты на сетках $N = A500, A1000, M200$ и $M500$ проведены до $t_{\text{кон}} = 2,0$, остальные расчеты до $t_{\text{кон}} = 30,0$. В качестве эталона на время $t = 2,0$ использовалось решение на сетке $N = A1000$, на время $t = 30,0$ за эталон взято решение на сетке $N = A200$. Крупномасштабное поведение численных решений с разными способами согласования сетки в целом одинаковое. Но при рассмотрении деталей оказывается, что результаты расчетов с сеткой, равномерной по массе, сильно отличаются по точности от результатов эталонного расчета.

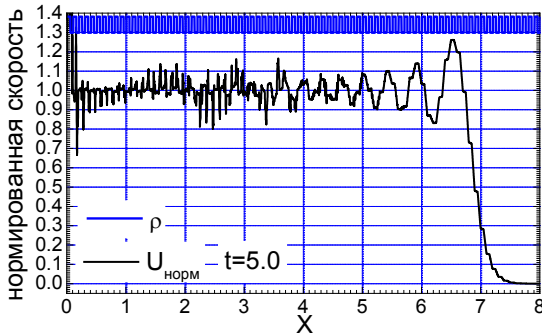


Рис. 3. Профиль нормированной скорости $U_{\text{норм}} = u/u_{\text{гран}}$ на время $t = 5,0$

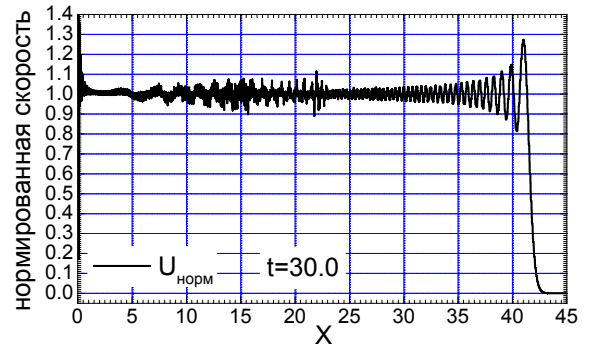


Рис. 4. Профиль нормированной скорости $U_{\text{норм}} = u/u_{\text{гран}}$ на время $t = 30,0$

Объективная картина лучше всего видна из сравнения норм погрешностей. Интегральные сеточные нормы погрешностей скорости и давления типа L_1 вычислялись после предварительной интерполяции сравниваемых численных решений (в том числе и эталонов) на самую грубую сетку $N = A20$. Полученные таким способом нормы погрешностей в зависимости от сетки приведены на рис. 5 и 6. Из рис. 5 хорошо видно, что погрешности расчета на сетке $M200$ больше, чем на сетке $A40$, а погрешности на сетке $M500$ в несколько раз больше, чем на сетке $A100$. Из рис. 6 следует, что на сетке $M100$ погрешности в несколько раз больше, чем на сетке $A20$.

Еще следует учесть, что в расчетах с одинаковым числом ячеек на периоде шаг по времени на равномерных по массе сетках более чем в два раза меньше, чем на сетках, согласованных по акустической толщине. Это еще больше ухудшает соотношение между точностью и временем счета на равномерных по массе сетках.

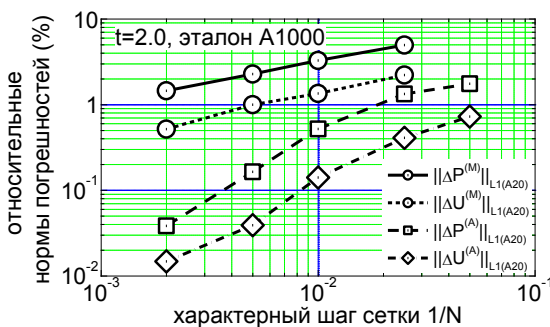


Рис. 5. Зависимость норм погрешностей от сетки на время $t = 2,0$, N – число ячеек на одном периоде

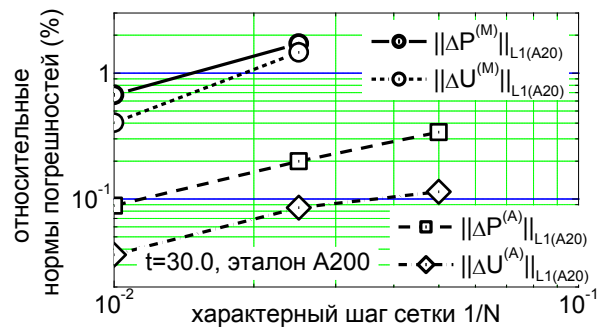


Рис. 6. Зависимость норм погрешностей от сетки на время $t = 30,0$, N – число ячеек на одном периоде

Для получения близких значений норм погрешностей на равномерных по массе сетках надо брать в 5–10 раз больше ячеек, чем расчетах на сетке, согласованной по акустической толщине. Время счета при этом увеличивается более чем в тридцать раз.

Заключение

Разработана техника построения точных решений конечно-разностных схем одномерной газовой динамики в переменных Лагранжа, описывающих взаимодействие малых звуковых возмущений с контактной границей.

Вычислены разностные коэффициенты отражения и прохождения звуковых волн при их взаимодействии с контактной границей для четырех разностных схем: для двух схем разного типа на разнесенных пространственных сетках (схема «крест» и СИАД) и для двух схем на неразнесенных пространственных сетках (схема «Кабаре» второго порядка аппроксимации и схема Годунова первого порядка аппроксимации).

В разностных схемах на разнесенных пространственных сетках разностные коэффициенты отражения и прохождения равны точным значениям коэффициентов отражения и прохождения тогда и только тогда, когда сетка согласована по акустической толщине ячеек.

В схемах «Кабаре» и Годунова для системы уравнений одномерной линейной акустики отсутствует зависимость коэффициентов отражения и прохождения от условий согласования сетки.

В схемах «Кабаре» и Годунова на границе разных веществ скачок экстраполяция консервативных переменных пропорционален разности акустических толщин ячеек, для схемы «Кабаре» этот скачок имеет второй порядок малости, а для схемы Годунова – первый порядок малости. Эти скачки равны нулю тогда и только тогда, когда сетка согласована по акустической толщине.

Расчеты прохождения слабой ударной волны по периодической многослойной среде показали, что при использовании сеток, согласованных по акустической толщине, точность расчетов может быть увеличена в несколько раз, а время счета при сохранении заданной точности уменьшено более чем на порядок по сравнению с сетками, равномерными по массе.

Литература

1. Годунов С. К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Мат. сборник. 1959. Т. 47, № 3. С. 271–306.
2. Куропатенко В. Ф. О разностных методах для уравнений гидродинамики // Тр. матем. ин-та им. В. А. Стеклова. АН СССР. 1966. Т. 74. С. 107–137.
3. Бондаренко Ю. А., Софронов В. Н. Прямое одномерное газодинамическое моделирование распространения волн в периодических двухслойных средах и волновые уравнения с дисперсией // XV Международ. конф. «Супервычисления и математическое моделирование»: Тез. докл. Саратов, 13–17 октября 2014 г.
4. Бондаренко Ю. А. Порядок аппроксимации, порядок численной сходимости и экономичность счета многомерной газовой динамики в переменных Эйлера на примере расчетов задачи «blast waves» // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2004. Вып. 4. С. 51–61.
5. Головизнин В. М., Зайцев М. А., Карабасов С. А., Короткин И. А. Новые алгоритмы вычислительной гидродинамики для многопроцессорных вычислительных комплексов. М.: Изд-во МГУ, 2013.
6. Куропатенко В. Ф. Скорость звука в многокомпонентной смеси // Докл. РАН. 2012. Т. 446, № 4. С. 401–403.