

ПРОГРАММНАЯ ПЛАТФОРМА НИМФА-2 НА СТРУКТУРЕ ДАННЫХ ЛОГОС ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ МНОГОФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В ГЕОЛОГИЧЕСКИХ СРЕДАХ

*О. И. Бутнев, И. В. Горев, Ю. Н. Дерюгин, П. А. Машенькин, С. С. Колесников,
М. Л. Сидоров, В. А. Пронин, В. Ю. Кузнецов, А. Д. Яруллин*

Российский федеральный ядерный центр –
Всероссийский НИИ экспериментальной физики, г. Саров

Введение

Задачи моделирования многофазной фильтрации в геологических пластах актуальны для многих отраслей промышленности:

– для ГК «Росатом» – это задачи расчетного обоснования выбора площадок для АЭС, прогноза последствий штатной эксплуатации и аварийного воздействия ядерных радиационноопасных объектов на подземное пространство, оценки эффективности мер по предотвращению загрязнения подземных вод и т. д.;

– для организаций Министерства природных ресурсов и экологии – создание постоянно действующих моделей техногенно нагруженных территорий для ведения мониторинга и прогноза изменения ресурсов и качества водных объектов, выработки рекомендаций по защитным сооружениям;

– для горнодобывающей отрасли – моделирование извлечения больших объемов подземных вод для хозяйственно-питьевого водоснабжения и водопонижения при добыче полезных ископаемых, расчет ущерба поверхностному и подземному стоку; оценка эффективности мероприятий по снижению водопритоков к горным выработкам;

– для Министерства чрезвычайных ситуаций – выработка рекомендаций по предотвращению техногенных катастроф;

– для нефтегазового сектора – моделирование методов повышения нефтеотдачи пластов, моделирование больших месторождений для выявления остаточных запасов, возникших в процессе эксплуатации и т. д.

Указанные потребители отличаются друг от друга финансовыми возможностями, опытом численного моделирования, практической потребностью в моделировании, применяемыми пакетами программ (как правило, импортными), требованиями по учету физических процессов, стандартами входной и выходной информации. В связи с этим возникают проблемы создания универсального комплекса программ, удовлетворяющего потребностям всех пользователей. Поэтому возникает потребность в формировании программной платформы для сборки специализированных пакетов программ, ориентированных на возможности и запросы конкретных пользователей.

В настоящее время для численного моделирования задач гидрогеологии и распространения загрязнений в подземных водах активно используются пакеты программ ModFlow [1] и TOUGH2 [2], ориентированные на использование ПЭВМ в скалярном режиме. В нефтегазовой отрасли обычно применяют программные продукты корпорации Шлюмберже [3] (ряд программ ECLIPSE), компании CMG [4] (CMG-STARS) и др. Эти программы отличает высокая лицензионная цена и ограниченность применения суперкомпьютерных технологий.

Для задач подземной гидродинамики зачастую характерны большие пространственные размеры (до десятков и сотен километров по латерали), длительность изучаемых процессов (годы и десятилетия), сложность и неопределенность структуры, емкостных и фильтрационных свойств пластов. Свойство неопределенности или недостаточной достоверности этих свойств требует проведения большого количества (иногда десятков и сотен) калибровочных расчетов с целью уточнения фильтрационной модели. В связи с этим для решения данного класса задач необходимо применять технологии параллельных вычислений. Как правило, геологическая модель изучаемой территории

составляет десятки и сотни квадратных километров, а период исследования – несколько десятилетий. При этом геологическая модель объекта задается, как правило, с шагом 25 м в плоскости горизонта. При глубине исследуемого объекта в несколько десятков метров, для построения математической модели требуются десятки и сотни миллионов счетных ячеек, что приводит к необходимости применения либо процедуры апскейлинга (огрубления) геологической модели, приводящей к потере точности, либо разбиения территории на мелкие участки и пообластного моделирования, что может приводить к потере информации по перетокам между областями.

В докладе представлена программная платформа НИМФА-2 на структуре данных ЛОГОС для моделирования многофазной фильтрации в геологических средах. Разрабатываемые на основе данной платформы специализированные пакеты программ позволяют решать многие задачи подземной гидродинамики на основе параллельных вычислений с применением полностью неструктурированных сеток, адаптированных к особенностям структуры пластов, гидрологическим объектам и скважинам.

Структура платформы НИМФА-2 и основные технические решения

Главной особенностью платформы является использование суперкомпьютерных технологий на всех основных стадиях моделирования. Ее архитектура основана на технологии клиент-сервер и выполнении в параллельном режиме всех стадий обработки больших объемов данных на суперЭВМ, начиная с этапа генерации неструктурированных сеток и заканчивая стадией обработки результатов счета. Созданные на ее основе пакеты программ позволяют проводить расчеты на сетках с количеством счетных блоков более 1 млрд. с использованием тысяч вычислительных ядер.

В качестве препроцессора специализированного пакета выступает Windows – приложение, созданное на основе динамических структур данных, адаптируемое под прикладную задачу на основе разработанной XSD-схемы. Оно позволяет в диалоговом режиме импортировать геологическую модель, строить на ее основе фильтрационную и математическую модель, видоизменять модель с помощью встроенного 2D-редактора, визуализировать модель в 3D-режиме, строить предварительные сетки в режиме Preview и осуществлять пробные запуски на ПЭВМ.

Серверная часть приложения может функционировать в параллельном режиме как на ПЭВМ под ОС Windows, так и на СуперЭВМ под ОС Linux. В серверной части сосредоточены все модули и приложения, требующие больших вычислительных ресурсов:

1. Построение всех типов сеток с использованием универсальной структуры хранения: структурированные, блочно-структурированные, неструктурированные, блочно-неструктурированные, с адаптацией к геологическим особенностям и скважинам.
2. Передекомпозиция данных после формирования начальной сетки с целью статической балансировки вычислений.
3. Средства сохранения контрольных разрезов задачи.
4. Библиотека решателей систем линейных уравнений с возможностью адаптивного выбора решателя и его параметров под конкретную задачу.
5. Счетные модули для широкого набора физических процессов.
6. Моделирование скважин.
7. Динамическая балансировка вычислений.
8. Сбор зависимостей от времени заданного набора интегральных и дифференциальных характеристик.
9. 3D-визуализация распределенного набора данных для конкретного времени.
10. Диалоговая графическая система управления в режиме реального времени расчета.

При создании программной платформы были применены следующие основные технические решения:

1. Архитектура пакета основана на технологии клиент-сервер с использованием «тонкого» клиента на стадии подготовки данных (препроцессор), взаимодействие клиента и сервера – на основе файла формата XML.

2. Распараллеливание счетных модулей основано на геометрической декомпозиции данных с наложением на 1 слой, для межпроцессорных обменов используется стандарт MPI [5].
3. Сохранение распределенных данных в контрольных точках расчета выполняется на основе стандарта ЕФР-3 [6].
4. Используется параллельная библиотека решателей систем линейных уравнений LparSol [7].
5. Структура данных для неструктурированных сеток основана на стандарте пакета программ ЛОГОС [8].
6. Сбор данных о расчете в параллельном режиме выполняется на основе библиотеки HOPC [9].
7. Для 3D-визуализации распределенных данных используется программа Scientific View [10].
8. Для декомпозиции данных используется библиотека MATRUZ (разработка ННГУ им. Н. И. Лобачевского) и методы собственной разработки.
9. Управление в режиме реального времени расчета с рабочего места пользователя осуществляется на основе СУБД MySQL.

В настоящее время на основе данной платформы созданы 2 специализированных пакета программ: НИМФА-Экология и НИМФА-Нефтегаз.

НИМФА-Нефтегаз: Модель «черной нефти»

Модель «черной нефти» является одной из самых используемых моделей в области математического моделирования нефтяных месторождений. Модель «черной нефти» (модель нелетучей нефти) предполагает наличие трех фаз: нефть (o), вода (w) и газ (g). Вода и нефть не смешиваются между собой и не обмениваются массами. Газ предполагается растворимым в воде и нефти. «Черная нефть» позволяет описывать основные этапы разработки нефтяных месторождений, а также вторичные методы.

Уравнения нелетучей нефти представляют собой систему уравнений, объединяющую уравнения сохранения массы и уравнения движения Дарси [11]–[14]. Движение среды описывается с точки зрения Эйлера. Система дифференциальных уравнений сохранения массы, описывающая трехфазное трехмерное течение жидкости в пористой среде, имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi S_o}{B_o} \right) = -B_o \nabla \left(\frac{\vec{W}_o}{B_o} \right) + B_o q_o, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi S_w}{B_w} \right) = -B_w \nabla \left(\frac{\vec{W}_w}{B_w} \right) + B_w q_w, \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi S_g}{B_g} + \frac{\phi R_{so} S_o}{B_o} + \frac{\phi R_{sw} S_w}{B_w} \right) = -\nabla \left(\frac{R_{so} \vec{W}_o}{B_o} + \frac{R_{sw} \vec{W}_w}{B_w} + \frac{\vec{W}_g}{B_g} \right) + q_o R_{so} + q_w R_{sw} + q_g. \quad (3)$$

Уравнения движения (скорость фильтрации) описываются на основе закона Дарси:

$$\vec{W}_o = -\lambda_o (\nabla p_o - \gamma_o \nabla h), \quad (4)$$

$$\vec{W}_w = -\lambda_w (\nabla p_w - \gamma_w \nabla h), \quad (5)$$

$$\vec{W}_g = -\lambda_g (\nabla p_g - \gamma_g \nabla h). \quad (6)$$

Здесь $\lambda_o, \lambda_w, \lambda_g$ – коэффициенты проводимости соответствующей фазы – имеют вид:

$$\lambda_o = \frac{k_{ro}K_a}{\mu_o}; \lambda_w = \frac{k_{rw}K_a}{\mu_w}; \lambda_g = \frac{k_{rg}K_a}{\mu_g}.$$

Для замыкания системы уравнений (1–6) необходимы следующие соотношения:

$$p_o - p_w = P_{cow}(S_o, S_w), \quad (7)$$

$$p_g - p_o = P_{cog}(S_o, S_g), \quad (8)$$

$$S_o + S_w + S_g = 1. \quad (9)$$

Отношения (7–8) выражают зависимости капиллярных давлений в системе вода-нефть и газ-нефть, используются для пересчета давления воды p_w и давления газа p_g соответственно. Уравнение (9) используется для пересчета насыщенностей.

Для полной формулировки математической модели исходная система уравнений (1–9) должна быть дополнена уравнениями состояния (данными PVT), а также начальными и краевыми условиями.

Под начальными условиями понимается начальное распределение искомых значений давления и насыщенностей на момент времени $t = 0$.

Под краевыми условиями понимается задание граничных условий (режимов работы) на границе моделируемой области и на каждом из источников, представляющих скважины.

В системе уравнений (1–9) 17 неизвестных:

p_o	p_w	p_g
s_o	s_w	s_g
B_o	B_w	B_g
ρ_o	ρ_w	ρ_g
k_{ro}	k_{rw}	k_{rg}
R_{so}	R_{sw}	

для которых требуется 17 уравнений:

– 3 уравнения состояния или таблицы (PVT), позволяющие вычислить $\rho_o, \rho_w, \rho_g = f(P)$;

– 3 уравнения или таблицы PVT, задающие $B_o, B_w, B_g = f(P)$;

– 2 уравнения или таблицы PVT, задающие $R_{so}, R_{sw} = f(P)$;

– 3 таблицы относительных фазовых проницаемостей, задающих $k_{ro} = f(s_o), k_{rw} = f(s_w),$

$$k_{rg} = f(s_g);$$

– 1 уравнение для насыщенностей, дающее $s_g = 1 - s_w - s_o$;

– 2 таблицы капиллярных давлений, дающие $p_w = p_o - P_{cow}, p_g = p_o + P_{cog}$;

Таким образом, для нахождения оставшихся переменных: p_o, s_w, s_o требуется 3 уравнения (1–3).

В основном для решения системы уравнений (1–9) используют общий подход:

– суммированием уравнений (1–3) и с учетом (4–6) получают уравнение, описывающее распределение давления в одной из фаз;

– полученное уравнение и уравнения (1–2) решают методом конечных объемов с использованием блочноцентрированной сетки.

Параллельный генератор сеток

Разрабатываемая в данный момент программная платформа НИМФА-2 в первую очередь ориентирована на проведения расчетов сверхбольших задач (несколько тысяч км² с числом ячеек

несколько млрд.) в гиперпараллельном режиме с использованием десятков тысяч процессорных ядер. Распараллеливание производится на основе геометрической декомпозиции данных с применением интерфейсов MPI, а также с использованием графических ускорителей NVidia.

Параллельный генератор неструктурированной сетки необходим для качественного описания сложных геологических структур на площадях размером нескольких тысяч квадратных километров. В алгоритме генерации призматической неструктурированной сетки можно выделить два основных этапа:

- построение планарной неструктурированной сетки в параллельном режиме;
- построение объемной сетки в параллельном режиме из созданной планарной сетки первого этапа.

В основу разрабатываемого сеточного генератора заложены следующие принципы:

- формирование данных производится в распределенном виде;
- используется интерфейс MPI;
- для построения планарной сетки используется параллельный фронтальный метод сфер [15]–[19];
- для построения трехмерной сетки используется обобщенный параллельный метод «угловой точки»;
- в процессе построения может использоваться адаптация к различным типам трехмерных объектов: кривым (скважины сложной траектории), поверхностям (разломы и т. п.) и объемам (пласты, различные породы и источники).

Результаты по эффективности распараллеливания приведены ниже.

Тестовые расчеты и результаты

Рассмотрим несколько тестовых задач, на которых проверялась работоспособность программного комплекса НИМФА-Нефтегаз.

В первой модельной задаче рассчитывается однофазная фильтрация. Данная задача предназначена для демонстрации работоспособности блока расчета диффузии в параллельном режиме, внедренного в комплекс программ НИМФА-Нефтегаз. Основная нагрузка вычислительной работы в данной задаче приходится на решение СЛАУ.

Однородный изотропный резервуар ($1000 \times 1000 \times 10$ м), сложен песчаником (проницаемость 277 мДарси, пористость 0,2) в форме параллелепипеда, насыщен водой (плотность 999 кг/м^3 , вязкость 0,36 сПуаза), литологически ограничен по кровле, подошве и тектонически экранирован по граням с четырех сторон непроницаемыми породами (сжимаемость при давлении 100 атм. составляет 10^{-14}). В резервуаре пробурены две вертикальных скважины диаметром 0,2 м, добывающая (дебит 100 м^3) и нагнетательная (100 м^3). Требуется рассчитать изменение поля давлений (начальное давление 100 атм.). Расчетный период – 100 дней. В [20] приведен анализ полученных результатов и сравнение с результатами, полученными по коммерческим программным продуктам.

Расчеты проводились на трех видах сеток: призмы с многоугольными основаниями (сетка 1), призмы с треугольными основаниями (сетка 2) и призмы с прямоугольными основаниями (сетка 3). На рис. 2–4 приведены фрагменты используемых сеток.

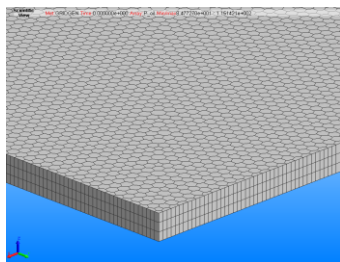


Рис. 2. Сетка 1 в виде призм с многоугольными основаниями

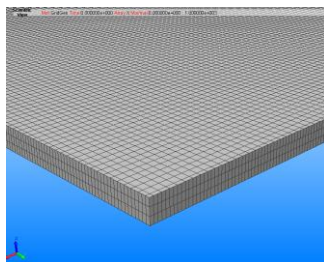


Рис. 3. Сетка 2 в виде призм с треугольными основаниями

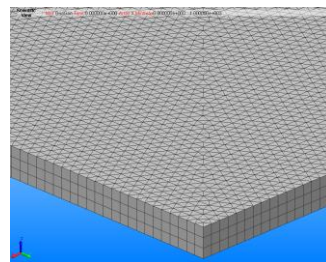


Рис. 4. Сетка 3 в виде призм с прямоугольными основаниями

В табл. 1 приведено описание количества используемых ячеек в задаче на трех расчетных сетках.

Таблица 1

Дискретизация расчетной области

Тип сетки	Общее число ячеек	Число ячеек по X	Число ячеек по Y	Число ячеек по Z
Сетка 1	303426	318	318	3
Сетка 2	254007	290	290	3
Сетка 3	604872	449	449	3

Координаты нагнетающей скважины: $x = 200$ м, $y = 500$ м, $z = 990$ м, координаты добывающей скважины: $x = 800$ м, $y = 500$ м, $z = 990$ м.

Для подтверждения работоспособности разработанного параллельного кода были проведены расчеты на сходимость. Максимальное число ячеек составило 115 млн., процессоров – 360. Общее время счета 360 шагов на самой подробной сетке составило около 11 мин. В табл. 2 приведено общее время счета задачи.

Таблица 2

Основные результаты времени счета

Число ячеек, млн	Число процессоров	Общее время счета, с
1,2	96	44
11,5	96	585
26,0	288	668
115,0	360	4963

В табл. 3 приведены результаты счета задачи на суперкомпьютере.

Таблица 3

Эффективность распараллеливания в режиме умножения

Количество процессоров	Количество ячеек на процессоре	Время счета, с	Средняя скорость счета, млн/с	Общее количество ячеек, млн	Эффективность распаралел., %
1	117110	174	0,25	0,11	100,0
2	115980	177	0,48	0,23	98,1
4	116220	196	0,86	0,46	88,9
8	115300	232	1,45	0,92	75,0
12	115600	306	1,65	1,39	56,8
24	115760	350	2,89	2,78	49,7
36	115630	385	3,94	4,16	45,2
48	115730	417	4,85	5,56	41,7
96	115680	533	7,60	11,11	32,6
192	96670	621	10,90	18,56	28,0
288	90277	668	14,20	26,00	26,0

Рассмотрим теперь двухфазную задачу. В прямоугольном параллелепипеде ($400 \times 200 \times 80$ м) решается задача фильтрации двухфазной жидкости (нефть-вода). В пласте действуют две вертикальные скважины. Вязкость воды 1 мПа·с, вязкость нефти $9,25$ мПа·с, плотность воды 1000 кг/м³, плотность нефти 850 кг/м³, степени фазовых проницаемостей воды и нефти 3 , коэффи-

коэффициенты объемного расширения воды и нефти 0, давление 100 атм, пористость породы 0,2, упругость 10^{-6} 1/Па, коэффициенты проницаемости $k_{xx} = k_{yy} = k_{zz} = 0,5$ Дарси, насыщенность верхней границы 0,8, насыщенность нижней границы 0,2. В табл. 4 приведены параметры добывающей и нагнетательной скважин.

Таблица 4

Параметры скважин

Параметры	Скважина 1	Скважина 2
Режим работы	Добывающая	Нагнетательная
Координаты центра, м	(100,0; 100,0)	(300,0; 100,0)
Диаметр, м	0,2	0,2
Участки перфорации, м	(0, 80)	(0, 80)
Дебит, м ³ /сут	-800	800
Длительность работы, сутки	50	50

Расчет задачи проводился в параллельном режиме. Исследование параметров эффективности распараллеливания, ускорения и скорости счета проводилось в режиме дробления. Количество ячеек расчетной области составляет 280 тысяч. Результаты расчетов приведены в табл. 5.

Таблица 5

Результаты расчетов в режиме дробления

Кол-во проц-ров	Число шагов	Время счета, с	Скорость счета, млн. ячеек/с	Ускорение	Эффективность, %
1	5000	7190	0,18	1	100
12	5000	805	1,59	9	74
24	5000	389	3,29	20	76
36	5000	259	4,92	27	77
48	5000	202	6,34	35	74
96	5000	126	10,15	57	60

Рассмотрим третью задачу. Это трехфазная задача, известная как SPE1. Расчет осуществляется на трехмерной пластовой модели [21]. На рис. 4 представлена моделируемая область с нанесенной на ней сеткой. На рис. 5 приведены свойства пласта. Все исходные данные по PVT-свойствам представлены в [21].

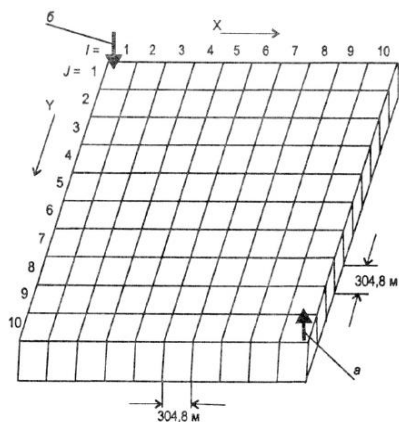


Рис. 4. Область моделирования: а – добывающая скважина; б – нагнетательная скважина

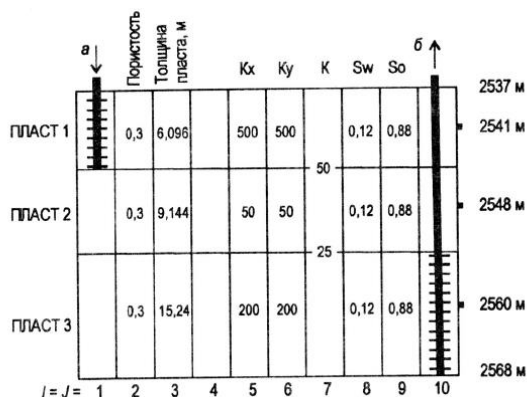


Рис. 5. Разрез пласта по диагонали: а – нагнетательная скважина; б – добывающая скважина

Коллектор представляет собой прямоугольный параллелепипед, длина которого совпадает с шириной и равна 3048 м. Кровля расположена на глубине 2537 м, подошва на глубине 2568 м. Моделируемый объект состоит из трех пропластков, с разными свойствами породы (рис. 7). Область покрывается прямоугольной сеткой с шагом 304,8 м по осям X и Y , по оси Z размеры сеточных блоков соответствуют высотам пропластков: 6, 9 и 15 м соответственно. Более подробно постановка и свойства флюидов описаны в [21].

Далее представлены результаты по следующим параметрам:

- давление в блоке с добывающей скважиной (рис. 6);
- давление в блоке с нагнетательной скважиной (рис. 7);
- газонефтяной фактор добывающей скважины (рис. 8).

На рис. 9 представлено поле насыщенности газа на момент времени 2 года.

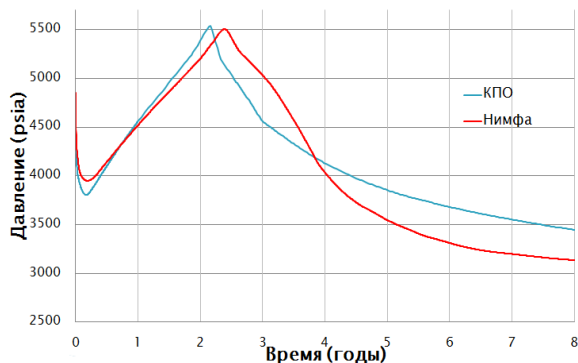


Рис. 6. Давление в блоке с добывающей скважиной

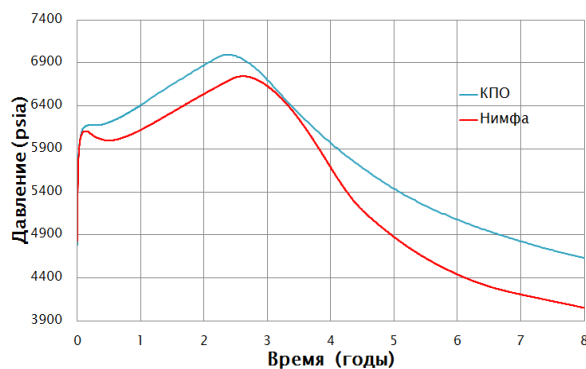


Рис. 7. Давление в блоке с нагнетательной скважиной

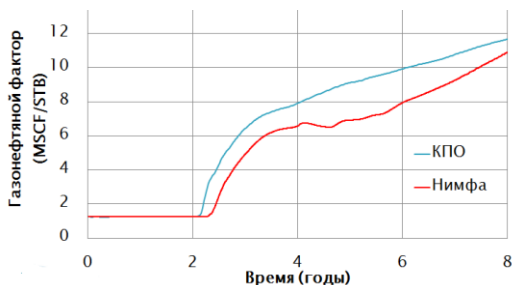


Рис. 8. Газонефтяной фактор

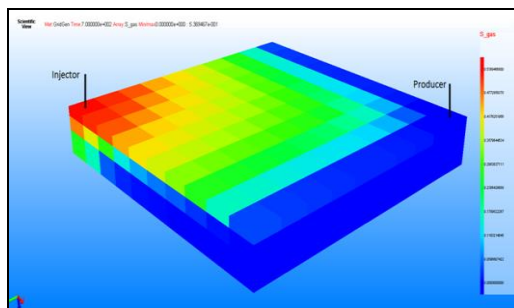


Рис. 9. Распределение насыщенности газа

По представленным результатам видно, что пакет программ НИМФА дает согласие с результатами, полученными по коммерческим программным продуктам [21].

Литература

1. Сайт программного продукта MODFLOW-USG. [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://www.swsotechnology.com/blog/modflow-usg-unstructured-grids-a-game-changer-for-groundwater-modeling>.
2. Официальный сайт компании Lawrence Berkeley National Lab. Earth Sciences Division. [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://esd.lbl.gov/research/projects/tough/software>.

3. Официальный сайт компании Schlumberger. [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://www.slb.ru/sis>
4. Официальный сайт компании Computer Modelling Group Ltd. [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://www.cmgroup.com/software/stars.htm>.
5. Корнев В. Д. Параллельное программирование в MPI. 2-е изд., испр. Новосибирск: ИВМиМГ СО РАН, 2002.
6. Волгин А. В., Красов А. В., Кузнецов М. Ю., Тарасов В. И. Библиотека ЕФР для универсального представления расчетных данных // Труды РФЯЦ-ВНИИЭФ. 2007. Вып. 11. С. 130–135.
7. Артемьев А. Ю., Бартенев Ю. Г., Басалов В. Г., Варгин А. М. Реализованные методы решения разреженных линейных систем в библиотеке линейной алгебры // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2002. Вып. 2. С. 43–53.
8. Козелков А. С., Дерюгин Ю. Н., Зеленский Д. К. и др. Многофункциональный пакет программ ЛОГОС для расчета задач гидродинамики и тепломассопереноса на многопроцессорных ЭВМ: базовые технологии и алгоритмы // XII Международ. семинар «Супервычисления и математическое моделирование»: Тез. докл. Саров, 11–15 октября 2010 г. Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2001. С. 215–230.
9. Бутнев О. И., Быков А. Н., Пронин В. А., Шумилина Н. В. Организация обработки результатов счета трехмерных задач газовой динамики с теплопроводностью на параллельных ЭВМ с распределенной памятью // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1999. Вып. 1.
10. Потехин А. Л., Тарасов В. И., Фирсов С. А. и др. ScientificView – параллельная система постобработки результатов, полученных при численном моделировании физических процессов // Там же. 2008. Вып. 4. С. 37–45.
11. Каневская Р. Д. Математическое моделирование гидродинамических процессов разработки месторождений углеводородов. Москва – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002.
12. Методические указания по созданию постоянно действующих геолого-технологических моделей нефтяных и газонефтяных месторождений. Ч. 2. Фильтрационные модели. Утв. Заместителем Министра энергетики РФ Шелеповым В. В. 22.01.2002 г. М.: ОАО «ВНИИОЭНГ», 2003.
13. Aziz K, Odeh A. S. Comparison of Solution to a Three-Dimensional Black-Oil Reservoir Simulation Problem // JPT. January 1981. Vol. 33. P. 13025.
14. Никитин К. Д. Нелинейный метод конечных объемов для задач двухфазной фильтрации // Математическое моделирование. 2010. Т. 22, № 11. С. 131–147.
15. Ito Y., Shih A. M., Soni B. K. Reliable Isotropic Tetrahedral Mesh Generation based on an Advancing front method // Proceedings of the 13th International meshing roundtable, Williamsburg, VA, September 19–22, 2004. P. 95–105
16. Shimada K., Yamakawa A., Itoh T. Anisotropic triangular meshing of parametric surfaces via close packing of ellipsoidal bubbles. // 6th International Meshing roundtable. Sandia National Laboratories, October 1997. P. 375–390.
17. Li X. Y., Teng S. H., Ungor A. Biting spheres in 3D // 8th International Meshing Roundtable. South Lake Tahoe, CA, U.S.A., October 1999. P. 85–95
18. Miller G. L., Talmor D., Teng S. H., Walkington N. A delaunay based numerical method for three dimensions: generation, formulation and partition // Proc 27th Annu.ACM Sympos.Theor. Comput. Las Vegas, NV, May, 1995. P. 683–692.
19. Сидоров М. Л. Модификация алгоритма Боуэра – Уотсона генерации топологически двумерных неструктурированных сеток в областях произвольной формы // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2011. Вып. 3
20. Яруллин А. Д. Методика расчета трехфазной фильтрации на многопроцессорных ЭВМ / Под ред. проф. А. А. Смагина // Ученые записки УлГУ. Сер. Математика и информационные технологии. 2013. Вып. 1(5). С. 144–164.
21. Chen Z., Huan G., Ma Y. Computational methods for multiphase flows in porous media. Dallas, Texas: Southern Methodist University, 2006.