

просы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2013. Вып. 2. С. 3–18.

2. Benek J. A., Buning P. G., Steger J. L. A 3-D Chimera Grid Embedding Technique // AIAA Paper. 1985. N 85–1523.

3. Benek J. A., Donegan T. L., Suhs N. E. Extended Chimera Grid Embedding Scheme With Application to Viscous Flow // Ibid. 1987. N 87–1126.

4. Препарата Ф., Шеймос М. Вычислительная геометрия: Введение: пер. с англ. М.: Мир, 1989.

5. Thomas P. D., Lombard C. K. Geometric conservation law and its application to flow computations on moving grids // AIAA Journal. 1979. Vol. 17, N 10. P. 1030–1037.

6. Mavriplis D. J., Yang Z. Construction of the discrete geometric conservation law for high-order time-accurate simulations on dynamic // J. of Comp. Phys. 2006. 213. P. 557–573.

7. Lesoinne M., Farhat Ch. Geometric conservation laws for flow problems with moving boundaries and deformable meshes, and their impact on aeroelastic computations // Computer methods in applied mechanics and engineering. 1996. 134. P. 71–90.

8. Fox. J. H. 23. Generic Wing, Pylon and Moving Finned Store, Verification and Validation Data for Computational Unsteady Aerodynamics, RTO-TR-26, October 2000, St. Joseph Ottawa/Hill, Canada.

ПАКЕТ ПРОГРАММ ЛОГОС. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ СВЯЗАННЫХ ЗАДАЧ ПРОЧНОСТИ И ГИДРОДИНАМИКИ СГЛАЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

*Д. Ю. Дьянов, А. В. Казанцев, С. В. Морозов, С. В. Стародубов,
К. В. Циберев, А. А. Челаков*

Российский федеральный ядерный центр –
Всероссийский НИИ экспериментальной физики, г. Саров

Введение

В настоящее время разрабатывается пакет программ ЛОГОС для решения широкого круга задач, в том числе механики деформируемого твердого тела на многопроцессорных вычислительных ресурсах [1]. Одной из составных частей данного пакета программ является модуль решения задач по расчету напряженно-деформированного состояния конструкций при динамических термосиловых воздействиях, основанный на методе конечных элементов.

При численном расчете конструкций встречаются ситуации, где решения имеют области больших деформаций и разрушений, сопровождающихся разлетом вещества. Численное решение такого рода задач сеточными методами в лагранжевой постановке сопряжено с некоторыми трудностями, которые касаются поддержания качества расчетной сетки. В эйлеровой же постановке трудности связаны с точным расчетом контактных границ. Альтернативным подходом к решению такого класса задач является метод сглаженных частиц SPH (сокращенно от *Smoothed Particle Hydrodynamics* – *гидродинамика сглаженных частиц*). К плюсам этого метода стоит отнести простоту реализации и возможность моделировать разлет вещества без применения специальных техник.

SPH-метод является бессеточным лагранжевым численным методом для решения широкого класса задач. Данный метод основан на моделировании сплошной среды набором частиц постоянной массы. Численное решение во всей области интегрирования получается с помощью интерполяционных функций, для которых эти частицы являются интерполяционными узлами, в соответствии с чем, каждая SPH-частица является точкой интерполяции, в которой известны параметры дефор-

мируемой среды. Производные, входящие в уравнения, которыми описывается движение рассматриваемой среды, вычисляются с помощью тех же интерполяционных функций. Таким образом, вычисление градиентов сводится к аналитическому дифференцированию гладких функций.

В модуле решения задач динамической прочности пакета программ ЛОГОС реализована технология проведения расчетов деформирования конструкций, представленных подобластями из структурных конечных элементов (объемных элементов сплошной среды и оболочечных конечных элементов) и SPH-частиц с возможностью расчета контактного взаимодействия между ними. Эта технология обеспечивает возможность проведения расчетов динамического деформирования конструкций, в которых присутствуют области больших деформаций и разрушения, сопровождающихся разлетом вещества. В докладе представлено описание базовых процедур и алгоритмов реализованного метода; представлены результаты тестовых расчетов; проведено сравнение результатов с эталонными решениями.

1. Описание расчетной методики

Основы методологии метода SPH были описаны Монаганом [2]. Данный метод основан на моделировании сплошной среды набором сглаженных частиц постоянной массы m_i и применяется для решения широкого класса задач с большими деформациями среды в газодинамическом и упругопластическом приближении.

Основная суть метода заключается в том, что все характеристики течения $a(\vec{r})$ аппроксимируются в частицах интегралами по области течения R :

$$\bar{a}(\vec{r}) = \int_R a(\vec{r}') W(\vec{r} - \vec{r}', h) d\vec{r}', \quad (1)$$

где $W(\vec{r} - \vec{r}', h)$ – весовая функция, называемая также интерполяционным или сглаживающим ядром. Данная функция должна удовлетворять следующим условиям:

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(\vec{r}, h) d\vec{r}' = 1 \text{ и } W(\vec{r}, h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} \delta(\vec{r}), \quad (2)$$

где $\delta(\vec{r})$ – функция Дирака. Кроме того, функция W должна быть положительно определенной и иметь гладкую первую производную. В данной работе в качестве сглаживающего ядра использовался B -сплайн третьей степени, который для трехмерного случая имеет вид:

$$W_3 = \frac{1}{\pi h^3} \begin{cases} 1 - \frac{3}{2}u^2 + \frac{3}{4}u^3, & 0 \leq u \leq 1, \\ \frac{1}{4}(2-u)^3, & 1 \leq u \leq 2, \\ 0, & u > 2, \end{cases} \quad (3)$$

где $u = \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{h}$, при этом величина h имеет размерность длины и является параметром интерполяции или сглаживающей длиной.

Теперь рассмотрим численную аппроксимацию уравнений механики деформируемого тела, построенную с помощью метода SPH. Предполагалось, что среда разбита на маленькие, по сравнению с характерными размерами рассчитываемой модели, элементы. Каждый такой элемент имеет свое значение аппроксимируемого параметра $a(\vec{r})$ равное a_i . Также считались известными: его плотность – ρ_i , местоположение – \vec{r}_i , а также масса – m_i . Заменой интегрирования суммированием

по частицам-соседям мы получим (здесь и далее верхние индексы α, β мы будем относить к пространственным координатам, а нижние i, k – к номеру частицы):

$$\bar{a}(\bar{r}) = \int_R a(\bar{r}') W(\bar{r} - \bar{r}', h) d\bar{r}' \approx \sum_i \frac{m_i a_i}{\rho_i} W(\bar{r}_i - \bar{r}, h). \quad (4)$$

Использование такой аппроксимации существенно упрощает вычисление градиента $\frac{\partial \bar{a}(\bar{r})}{\partial \bar{r}^{-\alpha}}$, так как достаточно аналитически продифференцировать ядро сглаживания, что даст:

$$\frac{\partial \bar{a}(\bar{r})}{\partial \bar{r}^{-\alpha}} = \sum_i \frac{m_i a_i}{\rho_i} \frac{\partial W(\bar{r}_i - \bar{r}, h)}{\partial \bar{r}^{-\alpha}}. \quad (5)$$

Таким образом, вычисление градиентов сводится к дифференцированию аналитических функций. Однако стоит отметить, что данное выражение не является единственной формой аппроксимации производной $\frac{\partial \bar{a}(\bar{r})}{\partial \bar{r}^{-\alpha}}$.

Более того, в большинстве случаев более удобными и качественными аппроксимациями являются другие формы. В частности, в данной работе аппроксимация производной $\frac{\partial \bar{a}(\bar{r})}{\partial \bar{r}^{-\alpha}}$ используется в следующем виде [3]:

$$\frac{\partial \bar{a}(\bar{r})}{\partial \bar{r}^{-\alpha}} = \frac{1}{\rho} \sum_i m_i (a(\bar{r}_i) - a(\bar{r})) \frac{\partial W(\bar{r}_i - \bar{r}, h)}{\partial \bar{r}^{-\alpha}}. \quad (6)$$

В данной работе используется упругопластическая модель вещества. Законы сохранения массы, импульса и удельной внутренней энергии записываются в виде (здесь и далее для упрощения записи знак вектора у векторных величин опущен) [3]:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial v^\alpha}{\partial r^\alpha} = 0, \quad (7)$$

$$\frac{dv^\alpha}{dt} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma^{\alpha\beta}}{\partial r^\beta} = 0, \quad (8)$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{1}{\rho} \sigma^{\alpha\beta} \varepsilon^{\alpha\beta}, \quad (9)$$

где ρ – плотность, v – вектор скорости, $\sigma^{\alpha\beta}$ – тензор напряжений, e – удельная внутренняя энергия, P – давление, $\frac{d}{dt}$ – субстанциональная производная по времени. Тензор скоростей деформации $\varepsilon^{\alpha\beta}$ и тензор вращения $R^{\alpha\beta}$, необходимые для вычисления девиаторатензора напряжений $S^{\alpha\beta}$, определяются следующими соотношениями:

$$\varepsilon^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v^\alpha}{\partial r^\beta} + \frac{\partial v^\beta}{\partial r^\alpha} \right), \quad (10)$$

$$R^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v^\alpha}{\partial r^\beta} - \frac{\partial v^\beta}{\partial r^\alpha} \right). \quad (11)$$

Численная аппроксимация уравнений закона сохранения массы, импульса и удельной внутренней энергии, построенная с помощью метода SPH, имеет вид:

$$\frac{d\rho_i}{dt} = -\sum_k m_k (v_k^\alpha - v_i^\alpha) \frac{\partial W_{ik}}{\partial r^\alpha}, \quad (12)$$

$$\frac{dv_i^\alpha}{dt} = \sum_k m_k \left(\frac{\sigma_i^{\alpha\beta}}{\rho_i^2} + \frac{\sigma_k^{\alpha\beta}}{\rho_k^2} + q_{ik} \delta^{\alpha\beta} \right) \frac{\partial W_{ik}}{\partial r^\beta}, \quad (13)$$

$$\frac{de_i}{dt} = \frac{1}{2} \sum_k m_k (v_i^\alpha - v_k^\alpha) \left(\frac{\sigma_i^{\alpha\beta}}{\rho_i^2} + \frac{\sigma_k^{\alpha\beta}}{\rho_k^2} + q_{ik} \delta^{\alpha\beta} \right) \frac{\partial W_{ik}}{\partial r^\beta}. \quad (14)$$

Аппроксимация тензора скоростей деформации $\varepsilon^{\alpha\beta}$ и тензора вращения $R^{\alpha\beta}$:

$$\varepsilon_i^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \sum_k \frac{m_k}{\rho_k} \left[(v_k^\alpha - v_i^\alpha) \frac{\partial W_{ik}}{\partial r^\beta} + (v_k^\beta - v_i^\beta) \frac{\partial W_{ik}}{\partial r^\alpha} \right], \quad (15)$$

$$R_i^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \sum_k \frac{m_k}{\rho_k} \left[(v_k^\alpha - v_i^\alpha) \frac{\partial W_{ik}}{\partial r^\beta} - (v_k^\beta - v_i^\beta) \frac{\partial W_{ik}}{\partial r^\alpha} \right]. \quad (16)$$

Для устранения нефизичных осцилляций, возникающих при решении задач с интенсивными взаимодействиями, использован подход Монагана, основанный на введении искусственной вязкости q_{ik} в уравнениях (13) и (14). Искусственная вязкость определяется следующим образом [3]:

$$q_{ik} = \frac{2}{\rho_i + \rho_k} \left(-a\mu_{ik} \frac{c_i + c_k}{2} + b\mu_{ik}^2 \right),$$

где δ^{ik} – символ Кронекера. Здесь a и b – коэффициенты линейной и квадратичной вязкости соответственно, а μ_{ik} определяется следующим выражением:

$$\mu_{ik} = \begin{cases} h \frac{(v_i - v_k)(r_i - r)_i}{|r_i - r_k|^2 + \eta^2}, & (v_i - v_k)(r_i - r_i) < 0, \\ 0, & (v_i - v_k)(r_i - r_i) > 0. \end{cases} \quad (17)$$

где $\eta^2 = 0,01h^2$.

Для дифференцирования по времени мы используем классическую явную одношаговую схему, значение шага для которой определяется следующим образом[3]:

$$\Delta t = C \min_i \left(\frac{h_i}{Q_i + \sqrt{Q_i^2 + c_i^2}} \right), \quad (18)$$

где C – числовая константа, а Q_i определяется следующим выражением:

$$Q_i = \begin{cases} ac_i + bh_i \left| \frac{\partial v^\alpha}{\partial r^\alpha} \right|, & \frac{\partial v^\alpha}{\partial r^\alpha} < 0, \\ ac_i, & \frac{\partial v^\alpha}{\partial r^\alpha} \geq 0. \end{cases} \quad (19)$$

Общая схема интегрирования для i -ой частицы производится по следующей схеме (n – индекс временного слоя) [3]: $v_i^{n+1} = v_i^n + \Delta t \frac{dv_i^n}{dt}$, $r_i^{n+1} = r_i^n + \Delta t v_i^n$, $\rho_i^{n+1} = \rho_i^n + \Delta t \frac{d\rho_i^n}{dt}$, $S_i^{n+1} = S_i^n + \Delta t \frac{dS_i^n}{dt}$,

$$e_i^{n+1} = e_i^n + \Delta t \frac{de_i^n}{dt}.$$

Значение производной девиатора тензора напряжений $\frac{dS_i^n}{dt}$ и давление P_i вычисляются исходя из используемой модели материала и уравнения состояния. В настоящее время для реализованной версии SPH доступны практически все имеющиеся в конечно-элементном модуле динамики ЛОГОС уравнения состояния и модели упругопластического деформирования и разрушения [1].

Расчет контактного взаимодействия между конечно-элементной и sph-расчетными подобластями производится на основе метода штрафа (*Penalty method* [3]) при стандартном для ЛОГОС подходе «узел-грань», где в качестве «узлов» рассматриваются наборы sph-частиц, а в качестве «граней» – граничные грани конечно-элементной части расчетной области. Подробнее описание алгоритмов расчета контактного взаимодействия, реализованных в пакете программ ЛОГОС можно найти в [4].

Для определения соседства частиц реализован LPOCA (LinearPositionCodeAlgorithm) [3] – глобальный линейный позиционный алгоритм. Алгоритм основан на построении регулярной опорной сетки с размером ячеек $2h$ и определении для каждой частицы, какой ячейке опорной сетки она принадлежит. При таком разбиении пространства для каждой частицы соседние для нее будут находиться либо в этой же ячейке, либо в соседних с ней. Такой подход значительно сокращает количество вычислений расстояния между частицами, а, следовательно, и временные затраты.

2. Описание структур данных и организация параллельного счета

При разработке принципов расположения данных о частицах на процессорах необходимо было учесть, что на поведение частицы влияют ее частицы-соседи, которые в процессе счета могут меняться.

В отличие от обычных конечных элементов, информация о соседстве между которыми определена топологией модели и не меняется в процессе счета, у SPH-частиц соседство определяется взаимным геометрическим расположением, поэтому при изменении координат частицы соседи меняются. В связи с этим, декомпозиция частиц должна отличаться от декомпозиции обычных элементов, чтобы избежать многочисленных межпроцессорных обменов для случая, в котором частицы перемешались в процессе счета так, что соседи каждой частицы стали лежать в памяти, соответствующей другому процессору. Кроме того, «перехлест», то есть набор частиц одного процессора, соседних к частицам другого процессора, должен быть динамическим.

Чтобы учесть эти факторы, было принято решение располагать частицы на процессорах в соответствии с геометрической декомпозицией, при которой каждому процессору ставится в соответствие частицы «своей» части пространства. Эта декомпозиция отличается от декомпозиции обычных конечных элементов, в которой каждому процессору ставится в соответствии свой набор элементов, который не меняется в процессе счета. Для случая с частицами, когда в процессе счета слишком много частиц скапливается в области памяти одного из процессоров, декомпозиция была сделана динамической, т. е. способной запускаться заново и сбалансировать разбиение пространства на процессоры так, чтобы в памяти каждого процессора количество частиц было примерно одинаковым.

В качестве метода декомпозиции частиц использовалась рекурсивная координатная бисекция, делящая пространство на параллелепипеды, пропорциональные количеству частиц внутри.

Если частица в процессе счета меняет свои координаты так, что попадает в пространство другого процессора, то она должна быть удалена с этого процессора и добавлена в память, соответствующую другому процессору. Так как необходимы частые операции вставки и удаления частиц из массивов, то массивы с информацией о частицах реализовали в виде «списков», в котором каждая частица знает об адресе памяти следующей частицы.

В результате, кроме обмена «перехлестом», типичного для задач с обыкновенными конечными элементами, в задачах с SPH потребовался еще обмен частиц вне «перехлеста», которые «пере-

летели» из пространства своего процессора в пространство другого. Для проверки перелета каждый счетный шаг вызывается функцией синхронизации расположения частиц на процессорах.

Такое динамичное расположение частиц в памяти наложило отпечаток на другие структуры данных. Так, например, массивы узлов, на которые накладываются граничные условия, являются распределенными между процессорами, т. е. каждый процессор знает о граничных условиях только своих узлов. Но поскольку частицы могут перемещаться с процессора на процессор, то информацию о принадлежности частицы к спискам узлов решено было сделать также в виде «списка» и пересылать между процессорами вместе с остальной информацией о частице.

В результате, под частицы была написана отдельная структура данных, основанная на «списках», была написана динамическая геометрическая декомпозиция и функция распределения частиц по памяти процессоров. Кроме того, потребовалось несколько функций синхронизации «перехлеста» между процессорами (каждая функция синхронизирует свой набор параметров частицы).

3. Расчет попадания птицы в вентилятор газотурбинного двигателя

В качестве иллюстрации работоспособности реализованных в пакете программ ЛОГОС алгоритмов решения связанных задач прочности и гидродинамики сглаженных частиц в данном разделе представлено решение практической задачи, в которой моделируется попадание птицы в вентилятор двигателя самолета [5]. Геометрия расчетной модели приведена на рис. 1.

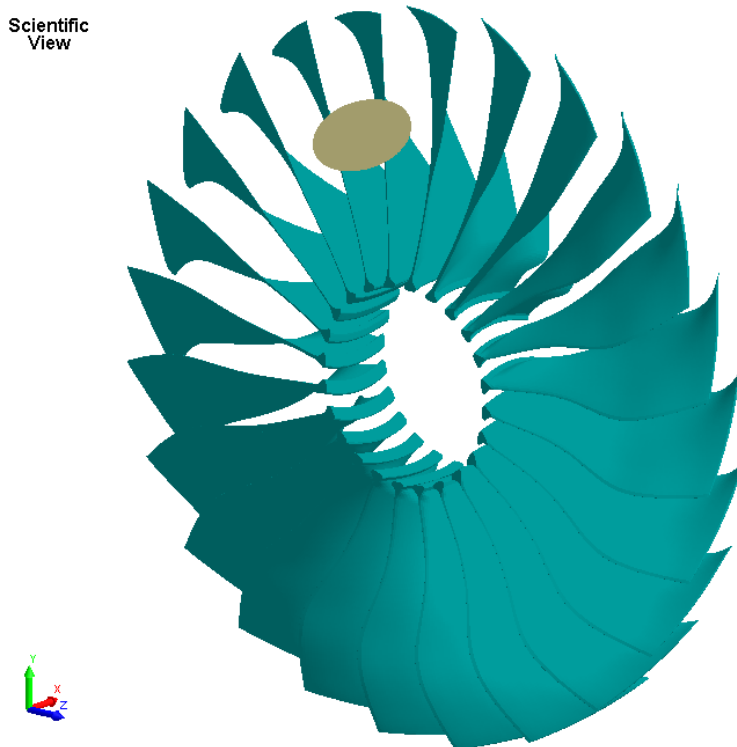


Рис. 1. Геометрия расчетной модели

Птица моделируется sph-подобластью (90367 частиц), а вся остальная расчетная область представлена элементами сплошной среды (438000 конечных элементов).

Для поставленной задачи использовались следующие модели материала:

1. Модель недеформируемого тела с плотностью $\rho = 4,45 \cdot 10^{-6}$ кг/мм³. Данная модель используется для моделирования лопаток.
2. Птица моделируется газодинамической моделью с уравнением состояния Грюнайзена в форме

$$p = \frac{\rho_0 C^2 \mu \left[1 + \left(1 - \frac{\gamma_0}{2} \right) \mu - \frac{a}{2} \mu^2 \right]}{\left[1 - (S_1 - 1) \mu - S_2 \frac{\mu^2}{\mu + 1} - S_3 \frac{\mu^3}{(\mu + 1)^2} \right]^2} + (\gamma_0 + a \mu) \rho e, \text{ где } \mu = \frac{\rho}{\rho_0} - 1.$$

Далее приведены входные параметры уравнения состояния:

начальная плотность: $\rho_0 = 10^{-6}$ кг/мм³,

начальная скорость звука: $C = 1500$ мм/мс,

начальная внутренняя энергия: $e_0 = 0$,

$S_1 = 2,5599999$, $S_2 = -1,9859999$, $S_3 = 0,2268$, $\gamma_0 = 0,5$, $a = 0$.

Расчет проводился в MPI-режиме с использованием 24 вычислительных ядер. Время расчета в ЛОГОС составило 4 ч.

В табл. 1–3 представлены результаты расчетов в сравнении с решением LS-DYNA [5] на ряд моментов времени моделирования. Из рисунков видно удовлетворительное согласие результатов.

Таблица 1

Кинограмма деформирования птицы (временные моменты 0,3, 0,6 и 0,9 мс)

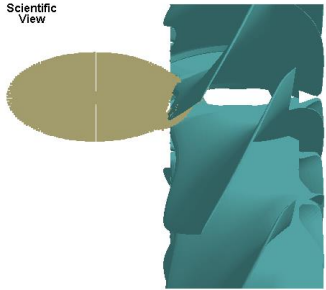
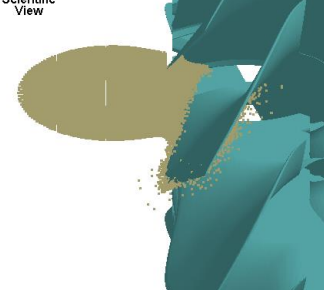
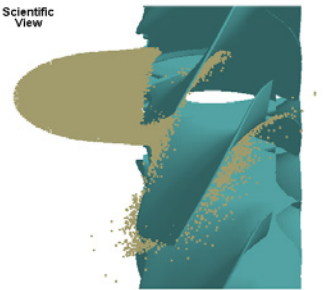
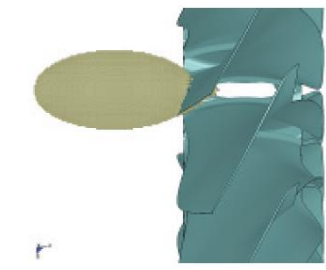
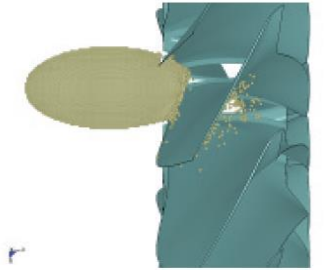
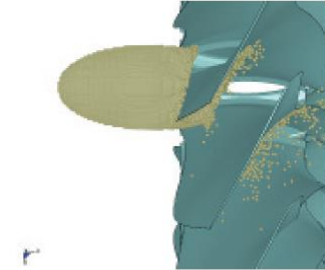
ЛОГОС			
LS-DYNA			
t, мс	0,3	0,6	0,9

Таблица 2

Кинограмма деформирования птицы (временные моменты 1,5, 1,8 и 2,1 мс)

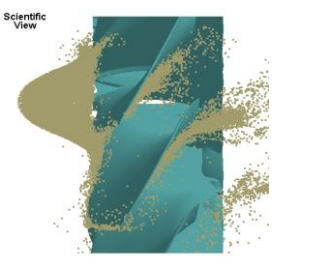
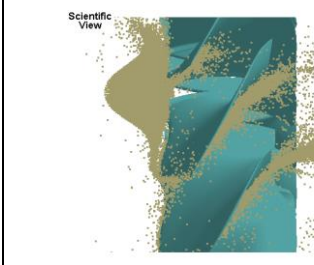
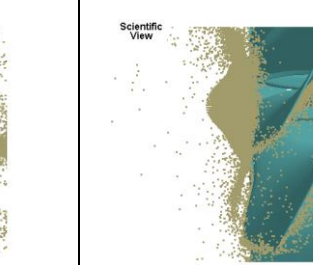
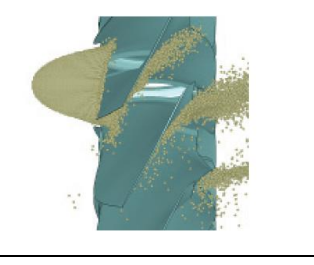

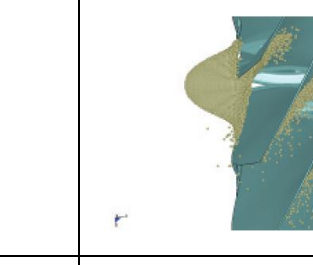

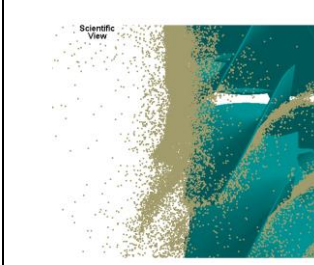
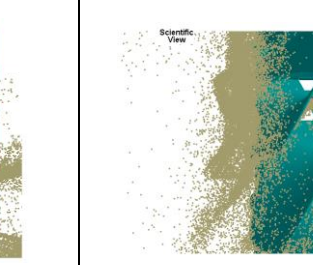


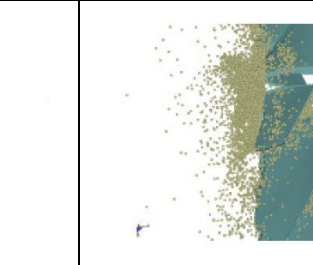
ЛОГОС			
LS-DYNA			
$t, \text{мс}$	1,5	1,8	2,1

Таблица 3

Кинограмма деформирования птицы (временные моменты 2,7, 3,0 и 3,3 мс)

ЛОГОС			
LS-DYNA			
$t, \text{мс}$	2,7	3,0	3,3

Заключение

В докладе представлено описание расчетной методики и результаты тестирования реализации метода сглаженных частиц в рамках пакета программ ЛОГОС. Важной особенностью реализованных алгоритмов является возможность расчета контактного взаимодействия между конечно-элементной частью расчетной области с расчетной областью, представленной набором sph-частиц.

Расчет описанного выше контактного взаимодействия происходит на основе метода штрафа и выполняется в рамках единого расчетного модуля. При этом, для моделирования sph-подобласти возможно использование как упругопластической, так и газодинамической модели материала. Сравнение результатов численного моделирования, полученных по ЛОГОС и эталонного решения, представленной тестовой задачи, позволяет сделать вывод об адекватности получаемых результатов в сравнении с эталонным решением. Что же касается эффективности, то при количестве частиц на вычислительном ядре не менее 10 тысяч, ЛОГОС считает с эффективностью ~63 %. Таким образом, показана общая работоспособность и эффективность реализованных подходов и алгоритмов решения задач динамической прочности с использованием метода сглаженных частиц в пакете прикладных программ ЛОГОС.

Литература

1. Циберев К. В., Авдеев П. А., Артамонов М. В. и др. Пакет программ ЛОГОС. Функциональные возможности для решения задач прочности / Под ред. Р. М. Шагалиева // Труды XIII Международ. семинара «Супервычисления и математическое моделирование». Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2011.
2. Gingold R. A., Monaghan J. J. Smoothed Particle Hydrodynamics: Theory and application to non-spherical stars // Month. Not. Royal Astr. Soc. 1977. Vol. 181. P. 375–389.
3. Hallquist J. O. LS-DYNA theoretical manual. Livermore Software Technology Corporation, 2006.
4. Казанцев А. В., Волков А. Ю., Корсакова Е. И. и др. Алгоритмы решения контактных задач в пакете программ ЛОГОС // XI научно-техническая конференция «Молодежь в науке»: Сб. докл. Саров, 2012.
5. Ryabov A. A., Romanov V. I., Kukanov S. S. et al. Fan Blade Bird Strike Analysis Using Lagrangian, SPH and ALE Approaches // 6th European LS-DYNA Users' Conference. [Electronic resource]. Mode of access: <http://www.dynalook.com/european-conf-2007/fan-blade-bird-strike-analysis-using-lagrangian.pdf>.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СОЧЕТАНИЯ ПОДВИЖНЫХ И НЕПОДВИЖНЫХ СЕТОК ПРИ РЕШЕНИИ ДВУМЕРНЫХ ЗАДАЧ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ И ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В МЕТОДИКЕ РАМЗЕС-КП

Д. В. Зубанов, А. Н. Быков, Б. Л. Воронин, А. М. Ерофеев

Российский федеральный ядерный центр –
Всероссийский НИИ экспериментальной физики, г. Саров

Введение

Сочетание подвижных и неподвижных сеток в рамках численного решения одной задачи имеет свою историю, начиная с классической работы 1967 года В. Ноха. Наиболее популярным на практике такой подход оказался в совместном расчете задач взаимодействия жидкости и твердого деформируемого тела (FSI – Fluid-Structure Interaction). Развиваются различные способы расчета такого взаимодействия. По способу взаимодействия тела и жидкости, их можно разбить на два класса – с явным выделением границы взаимодействия (контактной границы) и без явного выделения границы взаимодействия (с отслеживанием движения контактной границы по неподвижной сетке).

Подобные работы ведутся в математическом отделении ИТМФ в рамках методик ЛЭГАК [1], ЛОГОС [2] и ГЕПАРД [3]. В докладе представлена авторская версия такого подхода, разрабатываемая