7. Конюхов В. М., Конюхов И. В. Численное моделирование нестационарных процессов тепломассопереноса при движении газоводонефтяной смеси в каналах центробежного электронасоса // Вопросы атомной пауки и техники. Сер. Матем. моделирование физ. процессов. 2012. Вып. 4. С. 60–69.

8. Конюхов В. М., Конюхов И. В., Краснов С. В. Математическое обеспечение программно-технического комплекса ИСКЕНДЕР // Вопросы атомной пауки и техники. Сер. Матем. моделирование физ. процессов. 2012. Вып. 3. С. 34–44.

9. Ляпков П. Д. Способ пересчета характеристики погружного центробежного насоса с воды на эмульсию // Нефтяное хозяйство. 1979. № 5. С. 38–40.

10. Ляпков П. Д. Подбор установки погружного центробежного насоса: Справочное руководство по проектированию разработки и эксплуатации нефтяных месторождений. Добыча нефти / Под ред. Ш. К. Гиматудинова. М.: Недра, 1983. С. 237–293.

11. Технологический регламент ОАО «САМАРАНЕФТЕГАЗ» по эксплуатации УЭЦН. Версия 4.0. Самара, 2007.

ВЛИЯНИЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ НА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ КОНТАКТНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ПЛАСТИН С ЖЕСТКИМИ ТЕЛАМИ

С. А. Кузнецов, Г. Г. Зиганшина, Э. Р. Лотфуллина,
О. В.Старожилова[1]*, А. Н. Хусаинова*

Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань,
[1]Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики, г. Самара

На основе математически корректной постановки контактной задачи получено аналитическое решение для прямоугольной пластины, взаимодействующей с жестким телом в условиях цилиндрического изгиба при несимметричном расположении области контакта. Предполагается, что контакт между пластиной и телом осуществляется только по нормали к поверхности. Задача ставится в рамках линейной теории пластин с учетом поперечного обжатия в зоне контакта $b \le x \le c$. Проведено систематическое исследование и установлено существенное влияние условий закрепления пластины на распределение контактных напряжений. Ранее, в работе [1] исследовалось влияние краевых условий на амплитудно-частотные характеристики при цилиндрическом изгибе прямоугольной пластины жестким штампом, а в работе [2] изучалось влияние ориентации прямоугольного штампа при контакте с круглой пластиной.

Постановка задачи. Как известно, постановка контактных задач для тонкостенных элементов конструкций на основе классической теории Кирхгофа-Лява приводит к интегральным уравнениям контакта Фредгольма 1-го рода, задача отыскания решения которых является математически некорректной. Эта некорректность проявляется в различных механических противоречиях. Так, при изгибе пластины параболическим штампом напряжения под штампом отсутствуют, а на границах они настолько велики, что сосредоточены в двух граничных точках, хотя из простых физических соображений понятно, что при гладкой форме взаимодействующих тел как раз на границе не должно быть нагрузок. Зависимость прижимающей штамп силы P от величины области контакта $2a$ имеет две особые точки: $a = 0$ и L. В нулевой точке решение дает конечное значение силы P, т. е. бесконечно малому приращению длины области контакта $2a$ соответствует конечное приращение прижимающей штамп силы P. А для того, чтобы область контакта распространилась на всю длину пластины, требуется бесконечно большое значение силы P.

Учет в области контакта сжимаемости нормали к срединной поверхности позволяет получить контактные напряжения, мало отличающиеся от напряжений, вычисляемых по точным уравнениям теории упругости [3]. Согласно математически корректной постановке контактных задач для тонкостенных элементов конструкций на основе теории Кирхгофа – Лява с учетом местного обжатия, условия контакта поверхности тела и пластины записываются [4] в виде интегрального уравнения Фредгольма второго рода

$$k_0\sigma(x)+\int_b^c G(x,\xi)\sigma(\xi)d\xi=\alpha-f(x),\quad b\le x\le c, \tag{1}$$

где $k_0=h(1+\nu)(1-2\nu)/(2E(1-\nu))$ – коэффициент обжатия, $\sigma(x)$ – неизвестное контактное давление, $f(x)$ – функция формы подошвы штампа, α – жесткое смещение штампа (штамп движется поступательно, без поворота). Функция влияния $G(x,\xi)$ является прогибом пластинки под действием сосредоточенной силы, приложенной в произвольной точке $-L<\xi<L$, L – полуширина пластины, и должна быть найдена из уравнения

$$G^{\mathrm{IV}}(x,\xi)=\delta(x-\xi)/D, \tag{2}$$

при соответствующих граничных условиях. Здесь $\delta(x-\xi)$ – δ-функция Дирака, D – цилиндрическая жесткость пластины.

Связь между прижимающей штамп силой и жестким смещением штампа выражается очевидным условием статического равновесия штампа

$$P=\int_a^b \sigma(x)dx. \tag{3}$$

Метод решения. Для решения уравнения (1) применим разработанный ранее в Казанском университете Ю. П. Артюхиным метод сведения интегрального уравнения контактных задач к краевой задаче для вспомогательной функции, связанной с искомым контактным давлением простым дифференциальным соотношением.

Суть метода заключается [5] в следующем. Пусть функция влияния удовлетворяет некоторому уравнению $LG(x,\xi)=L_1\delta(x-\xi)$, вид дифференциальных в общем случае операторов определяется теорией оболочек, используемой в каждом конкретном случае.

Подействуем оператором L на уравнение (1)

$$k_0L\sigma(x)+\int_b^c LG(x,\xi)\sigma(\xi)d\xi=L(\alpha-f(x)). \tag{4}$$

Используя фильтрующие свойства δ-функции приведем (4) к виду

$$k_0L\sigma(x)+L_1\sigma(x)=L(\alpha-f(x)). \tag{5}$$

Введем новую неизвестную функцию

$$L_1U(x)=\alpha-f(x)-k_0\sigma(x). \tag{6}$$

Тогда $L_1\sigma(x)=LL_1U(x)$. Отсюда

$$\sigma(x)=LU(x). \tag{7}$$

Подставим полученное соотношение в уравнение (5) $k_0LLU(x)+L_1LU(x)=L(\alpha-f(x))$ и, окончательно, получим дифференциальное уравнение для $U(x)$

$$(k_0L+L_1)U(x)=\alpha-f(x). \tag{8}$$

Подставляя (7) и (6) в (1), имеем $\int_b^c G(x,\xi)LU(\xi)d\xi=L_1U(x)$.

Здесь оператор L берется по переменной интегрирования ξ. Применяя обобщенное интегрирование по частям, получим $\int_b^c LG(x,\xi)U(\xi)d\xi+\Psi(G,U)\Big|_{\xi=b}^{\xi=c}=L_1U(x)$, где $\Psi(G,U)$ – дифференциальное выражение, конкретный вид которого определяется оператором L.

Функция влияния в контактных задачах симметрична по переменным x и ξ. Поэтому интеграл в левой части тождественно равен $L_1U(x)$ и у нас остается краевое условие для $U(x)$

$$\Psi(G,U)\Big|_{\xi=b}^{\xi=c}=0. \tag{9}$$

Таким образом, проблема решения интегрального уравнения (1) сведена к решению краевой задачи (8), (9).

В нашем случае, т. е. при $L=d^4/dx^4$

$$\Psi(G,U)=G(x,\xi)U'''(\xi)-G'_{\xi}(x,\xi)U''(\xi)+G''_{\xi\xi}(x,\xi)U'(\xi)-G'''_{\xi\xi\xi}(x,\xi)U(\xi).$$

Реализация метода. Не останавливаясь подробно на процессе построения функции влияния, отметим, что в настоящей работе представлены результаты решения контактной задачи при трех различных вариантах закрепления пластины:

1) оба края жестко защемлены

$$G(\pm L,\xi)=G'_x(\pm L,\xi)=0,$$

$$G(x,\xi)=\frac{(L+x)^2(L-\xi)^2\left(L^2-2Lx+2L\xi-x\xi\right)+4L^3(x-\xi)^3\,\mathrm{H}(x-\xi)}{24DL^3},$$

2) оба края шарнирно оперты

$$G(\pm L,\xi)=G''_{xx}(\pm L,\xi)=0,$$

$$G(x,\xi)=\frac{(L+x)(L-\xi)\left(2L^2-2Lx-x^2+2L\xi-\xi^2\right)+2L(x-\xi)^3\,\mathrm{H}(x-\xi)}{12DL},$$

3) левый край шарнирно оперт, а правый – жестко защемлен,

$$G(\pm L,\xi)=G'_x(L,\xi)=G''_{xx}(-L,\xi)=0,$$

$$G(x,\xi)=\frac{(L+x)(L-\xi)^2(7L^3-x^2\xi-Lx(5x+2\xi)-L^2(10x-11\xi)+16L^3(x-\xi)^3\,\mathrm{H}(x-\xi)}{96DL^3}.$$

В случае плоского штампа $f(x)=0$, и общее решение уравнения (8) может быть записано в балочных функциях Крылова

$$U(x)=\sum_{k=1}^{4}A_kY_k(\lambda x)+\alpha/(k_0D),\quad \lambda=(4K_0D)^{-0,25},$$

$$V_1(x)=\operatorname{ch}x\cos x,\ V_2(x)=\operatorname{sh}x\sin x,\ V_3(x)=\operatorname{sh}x\cos x,\ V_4(x)=\operatorname{ch}x\sin x.$$

Подставляя $U(\xi)$ и $G(x,\xi)$ в условие (9), приведем его к виду

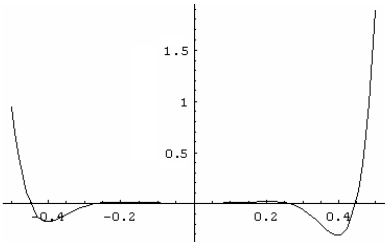
$$\sum_{k=0}^{3}F_k(A_1,A_2,A_3,A_4,b,c)x^k=0.$$

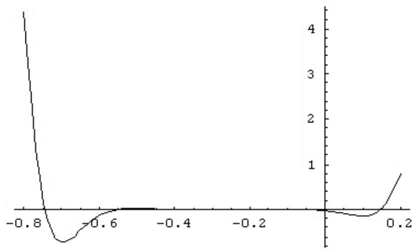
Так как это соотношение должно выполняться при любом $x\in(b,c)$, то коэффициенты многочлена должны равняться нулю. Таким образом, произвольные постоянные $A_1,\ldots,A_4$ есть решение системы линейных алгебраических уравнений

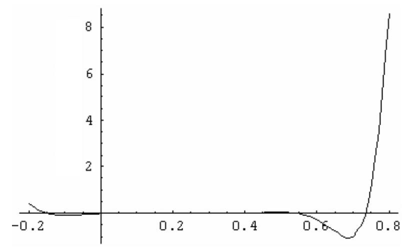
$$F_k(A_1,A_2,A_3,A_4,b,c)=0,\quad k=\overline{0,3}.$$

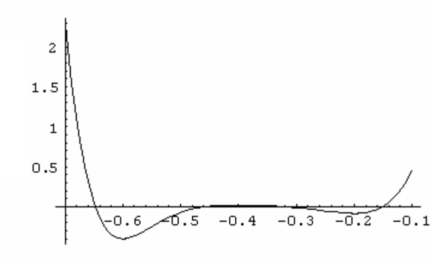
и может быть выписано в замкнутом виде. Конкретные выражения здесь не приводятся ввиду их громоздкости.

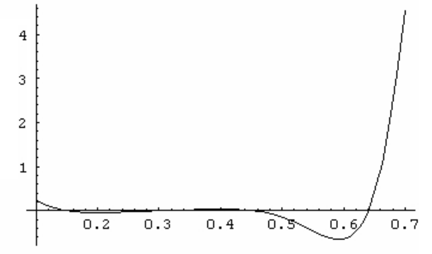
Численные результаты. Далее представлены некоторые результаты расчетов относительного контактного давления $\sigma_0(x) = 10^{-3}\sigma(x)/P$ в зависимости от x/L для пластины $L=1$, $h=0.05$ с третьим вариантом граничных условий при различных размерах штампа и его положениях относительно середины пластины.











Заключение

Получено точное аналитическое решение контактной задачи о взаимодействии пластины с плоским штампом. Анализ численных результатов показал существенную зависимость распределения контактных напряжений от условий закрепления пластины не только для больших относительных размеров штампа (что очевидно), но и для малых, при значительном удалении границ области контакта от краев пластины.

Результаты исследования могут быть использованы при верификации алгоритмов и программ численного решения задач контактного взаимодействия.

Литература

1. Кузнецов С. А., Точкасова М. А. Исследование влияния краевых условий на амплитудно-частотные характеристики прямоугольной пластины с жестким штампом при цилиндрическом изгибе // II Международ. конф. «Проблемы нелинейной механики деформируемого твердого тела»: Сб. трудов. Казань: Казанский государственный университет, 2009. С. 394–396.

2. Егоров Д. Л., Кузнецов С. А. Влияние ориентации прямоугольного штампа при контакте с круглой пластиной / Под ред. Р. М. Шагалиева // Труды XII Международного семинара «Супервычисления и математическое моделирование», Саров, 11–15 октября, 2010. Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2011. С. 173–181.

3. Карасев С. Н., Артюхин Ю. П. Влияние поперечного сдвига и обжатия на распределение контактных напряжений // Исследования по теории пластин и оболочек. № 12. Казань: Изд-во КГУ, 1976. С. 68–76.

4. Кузнецов С. А. Неосесимметричная контактная задача для тонкой пластины, лежащей на упругом основании, при наличии износа // Исследования по теории пластин и оболочек. № 17, Ч. II. Казань: Изд-во КГУ, 1984. С. 96–103.

5. Артюхин Ю. П. Одномерные контактные задачи для тонкостенных транверсально-изотропных элементов // Исследования по теории пластин и оболочек. № 13. Казань: Изд-во КГУ, 1978. С. 62–82.