

13. Старченко А. В., Ибраев Г. М. Опыт создания вычислительного метакластера на базе кластерных систем Томского научного центра / Под ред. Старченко // IV Сибирская школа-семинар по параллельным вычислениям. Томск, 9–11 октября 2007 г. С. 61–78.

14. Minty E., Davey R., Simpson A., Henty D. Decomposing the Potentially Parallel – The Edinburgh Parallel Computing Centre. [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://www.epcc.ed.ac.uk>.

15. Трунов А. А., Старченко А. В., Турчановский И. Ю., Шкляев В. А. Параллельная реализация алгоритма решения задачи транспортировке пучка заряженных частиц / Под ред. Старченко // IV Сибирская школа-семинар по параллельным вычислениям. Томск, 9–11 октября 2007 г. С. 234–241.

16. Хокни Р., Иствуд Дж. Численное моделирование методом частиц. М.: Мир, 1987.

17. Берендеев Е. А., Ефимова А. А. Реализация эффективных параллельных вычислений при моделировании больших задач физики плазмы методом частиц в ячейках // Труды Международ. научной конф. «Параллельные вычислительные технологии» (ПаВТ-2012). Новосибирск, 2012. Р. 380–385.

18. Андрианов А. Н., Ефимкин К. Н. Подход к параллельной реализации метода частиц в ячейках: Препринт № 9. М.: ИПМ им. М. В. Келдыша, 2009. [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2009-9>.

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ РАЗДЕЛЕННОГО И СОВМЕЩЕННОГО ПОДХОДОВ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ – СТОКСА В ЗАДАЧАХ ГИДРОДИНАМИКИ

С. В. Лашкин, А. С. Козелков, А. В. Ялозо, Н. В. Тарасова

Российский федеральный ядерный центр –
Всероссийский НИИ экспериментальной физики, г. Саров

Эффективность решения большинства задач вычислительной гидродинамики зависит от выбора алгоритма решения системы уравнений Навье–Стокса, который может быть основан на решении полной системы уравнений Навье–Стокса без расщепления или на алгоритме расщепления по физическим процессам, подразумевающим решение отдельного уравнения для давления.

Аспекты выбора того или иного подхода рассмотрены в многочисленных статьях и монографиях, и существенно зависят от физики моделируемого течения, необходимой точности расчета и имеющихся вычислительных ресурсов. Однако всем алгоритмам присуща одна и та же проблема, а именно скорость сходимости зависит от количества ячеек вычислительной сетки. Даже несмотря на успешное решение некоторых проблем, связанных с решателями систем линейных уравнений (введение многосеточных технологий), параллельными вычислениями, геометрической инициализации и декомпозицией расчетной области), проблемы сходимости все еще решены не полностью. Это касается обоих подходов к дискретизации системы уравнений Навье–Стокса.

Последние успехи в этом направлении связаны с разработкой совмещенного алгоритма, основанного на алгоритме расщепления системы уравнений Навье–Стокса с последующим формированием общей системы алгебраических уравнений [1, 2]. Совмещение уравнений для компонент вектора скорости и давления осуществляется за счет введения неявных слагаемых для градиента давления и массового потока в уравнения сохранения количества движения и неразрывности. Получаемые таким образом неявные коэффициенты суммируются в связанную диагонально-доминантную матрицу. В немногочисленных работах, посвященных разработке и сравнению совмещенного и разделенного алгоритмов, показывается впечатляющая скорость сходимости совмещенного решателя и почти одинаковое время расчета одного контрольного объема, не зависящего от размера сетки, что для разделенного решателя недостижимо. Однако преимущество разделенного решателя показано на простых тестовых задачах и при решении промышленно-ориентированных задач, где опре-

деляющим фактором является турбулентность, расчет которой проводится независимо (отщепляется) от скорости и давления, важным становится вопрос о целесообразности применения совмещенного подхода.

Метод контрольного объема

Основные уравнения (законы) сохранения массы и импульса течения вязкой ламинарной стационарной несжимаемой жидкости имеют вид:

$$\nabla(\rho\mathbf{v}) = 0, \quad (1)$$

$$\nabla(\rho\mathbf{v}\mathbf{v}) = \nabla(\mu\nabla\mathbf{v}) - \nabla(\rho I). \quad (2)$$

Запишем общий вид уравнения сохранения для скалярной величины ϕ :

$$\nabla(\rho\mathbf{v}\phi) = \nabla(\Gamma\nabla\phi) + q_\phi, \quad (3)$$

где Γ – эффективный коэффициент диффузионного переноса, q_ϕ – источниковый член.

Для получения балансных соотношений метода конечных объемов проинтегрируем уравнение

$$\nabla(\rho\mathbf{v}\phi) = \nabla(\Gamma\nabla\phi) + q_\phi, \quad (3)$$

по объему Ω ячейки P (рис. 1) и перейдем от объемных интегралов к интегралам по поверхности S :

$$\int_s (\rho\mathbf{v}\phi) dS = \int_s (\Gamma\nabla\phi) dS + \int_\Omega (q_\phi d\Omega). \quad (4)$$

В основе дискретизации объемных и поверхностных интегралов лежит теорема о среднем. В качестве среднего значения по объему принимаем значение в центре ячейки, а в качестве среднего значения на грани – значения в геометрическом центре грани f :

$$\phi_P = \frac{1}{\Omega} \int_\Omega \phi d\Omega, \quad (5)$$

$$\phi_f = \frac{1}{S_f} \int_f \phi dS. \quad (6)$$

В результате интегралы сводятся к выражению:

$$\sum_f (\rho\mathbf{v}\phi)_f = \sum_f (\Gamma\nabla\phi)_f S_f + (q_\phi)_P \Omega, \quad (7)$$

где Ω – объем ячейки, S_f – вектор площади грани. Здесь суммирование осуществляется по всем граням контрольного объема. Нижние индексы P , N соответствуют значениям в центрах контрольных объемов P и N , индекс f соответствует значениям на грани, соединяющей контрольные объемы P и N . Вектор нормали грани направлен от рассматриваемого центра контрольного объема (рис. 1), от P к N .

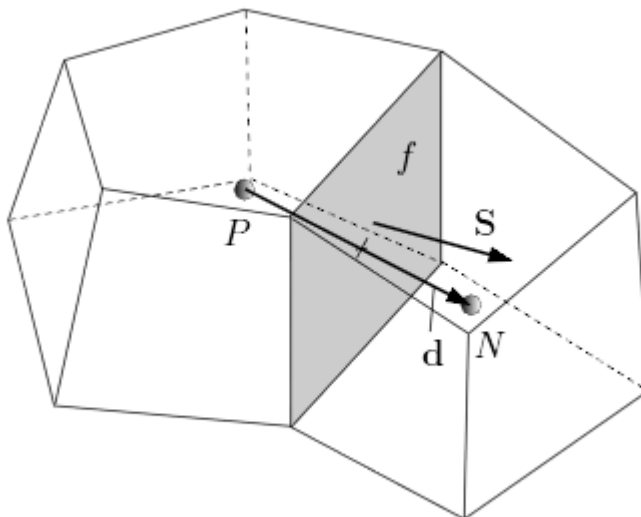


Рис. 1. Контрольный объем

В результате дискретизации уравнения (7) получаем систему линейных алгебраических уравнений с матрицей из коэффициентов a_f , диагональным коэффициентом a_P и правой частью b_P :

$$a_P^\phi \phi_P + \sum_{f=nb(P)} a_f^\phi \phi_f = b_P^\phi. \quad (8)$$

Тогда уравнение сохранения импульсов с явным вычислением градиента давления запишется в виде:

$$a_P \mathbf{v}_P + \sum_{f=nb(P)} a_f^\phi \mathbf{v}_f = b_P^\phi - \Omega_P \nabla p, \quad (9)$$

а уравнение сохранения массы (уравнение неразрывности):

$$\sum_{f=nb(P)} m_f = 0, \text{ где } m_f = \rho \mathbf{v}_f S_f. \quad (10)$$

Алгоритм SIMPLE на совмещенных сетках

Одна из основных трудностей при разработке численных алгоритмов на базе сеточных методов для уравнения Навье – Стокса – определение связи поля давления с полем скорости. Давление в исходные дифференциальные уравнения (9) входит как параметр и не выражается явным образом в виде искомой полевой величины. В приближении несжимаемой среды нет прямой связи скорости с полем давления. В случае сжимаемых течений такая связь осуществляется через поле плотности, зависящей явным образом от давления. Процедура согласования поля давления с полем скорости в приближении несжимаемого течения должно приводить к одновременному удовлетворению уравнений движения и неразрывности (1, 2).

Одним из основных и доминирующих в настоящее время подходов к построению численных алгоритмов для уравнений Навье – Стокса является подход с использованием методики расщепления алгоритма SIMPLE.

В расщепленном SIMPLE-алгоритме решение строится итеративным методом: сначала последовательно решается уравнение для трех компонент скоростей, затем уравнение для приращения давления, которое выводится из уравнения сохранения массы. Цикл повторяется до тех пор, пока поля давления и скорости не будут удовлетворять уравнению неразрывности.

Для простоты вывода формул не будем учитывать неортогональные коррекции в уравнениях сохранения импульса и массы, но в реализованном коде неортогональные слагаемые конечно же используются.

Запишем поля скорости и давления с использованием соответствующих корректирующих полей:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^* + \mathbf{v}', \quad (11)$$

$$p = p^n + p', \quad (12)$$

где \mathbf{v}' и p' поля коррекции скорости и давления соответственно. Таким образом, на первом шаге вычисляется предварительное поле скорости с использованием градиента давления с предыдущего шага:

$$a_P \mathbf{v}_P^* + \sum_{f=nb(P)} a_f^v \mathbf{v}_f^* = b_P^v - \Omega_P \nabla p_P^n, \quad (13)$$

при этом система линейных уравнений для скорости, удовлетворяющей закону сохранения массы запишется в следующем виде:

$$a_P \mathbf{v}_P + \sum_{f=nb(P)} a_f^v \mathbf{v}_f = b_P^v - \Omega_P \nabla p_P. \quad (14)$$

Вычитая два последних уравнения друг из друга, получаем уравнение для поправки скорости:

$$a_P \mathbf{v}'_P + \sum_{f=nb(P)} a_f^\phi \mathbf{v}'_f = \Omega_P \nabla p'_P. \quad (15)$$

Градиент давления в центре контрольного объема вычисляется по значениям давления в узлах, удаленных друг от друга на два шага сетки. В результате связь полей скорости и давления, заданных в центрах контрольных объемах, оказывается нечувствительной к составляющей колебаний давления с полупериодом, равным шагу сетки. Подобное рассогласование полей приводит к «шахматным» осцилляциям решения.

Для устранения колебаний используется подход, предложенный в работе (Rhie and Chow, 1983). Для нахождения суммарного массового потока в ячейке необходимо знать значения скоростей на границах контрольного объема. Поскольку скорость определена и рассчитывается в центрах контрольных объемов, возникает задача интерполяции значений скорости из центров на грани. Чтобы избежать возникновения «шахматных» осцилляций, величина скорости на грани должна быть получена с использованием градиента давления на грани, рассчитанным по значениям давления в соседних ячейках:

$$\mathbf{v}'_f = \overline{\mathbf{v}'_f} - \frac{\Omega_f}{a_f} (\nabla p_f - \overline{\nabla p_f}), \quad (16)$$

$$\sum_{f=nb(P)}^* m_f + \sum_{f=nb(P)} (\rho \mathbf{v}')_f S_f = 0. \quad (17)$$

Черта сверху означает значение на грани, полученное осреднением величин и центров контрольных объемов.

Подставляя \mathbf{v}' из уравнения (16) в уравнение сохранения (17) и не учитывая второе слагаемое в уравнение (15), получаем уравнения для поправки давления p' :

$$\sum_{f=nb(P)} \left(\rho_f \frac{\Omega_f}{a_f} \nabla p'_f \right)_f S_f = \sum_{f=nb(P)}^* m_f. \quad (18)$$

Таким образом, SIMPLE алгоритм можно записать в виде последовательности шагов:

1. Решаем уравнение сохранения импульса с использованием явного слагаемого градиента давления с предыдущей итерации.
2. Решаем уравнение для поправки давления.
3. Корректируем поля скорости и давления (\mathbf{v} и p).

4. Решаем уравнения для остальных скаляров (температура, турбулентность и т. д.).
5. Возвращаемся к первому шагу и так до сходимости.

Совместный алгоритм решения уравнений импульса и давления

Скорость сходимости метода SIMPLE напрямую зависит от явных слагаемых:

- градиента давления в уравнении сохранения импульса (13).
- массового потока в уравнении неразрывности (18).

Перенос этих двух слагаемых в неявную часть приводит к совместному уравнению для поля скорости и давления.

При дискретизации уравнения импульса описанным выше способом получаем:

$$\sum_{f=nb(P)} (\rho \mathbf{v} \mathbf{v} - \mu \nabla \mathbf{v})_f \mathbf{S}_f + \sum_{f=nb(P)} p_f \mathbf{S}_f = b_P \Omega_P, \quad (19)$$

где градиент давления интегрируется по всем граням контрольного объема и давление на грани вычисляется по формуле, использующей геометрический фактор сеточной модели:

$$p_f = \lambda_f p_P + (1 - \lambda_f) p_N, \quad (20)$$

где λ_f – геометрический фактор.

Объединяя уравнения (19) и (20), получаем окончательную алгебраическую форму для уравнения сохранения импульса:

$$\begin{aligned} a_P^{uu} u_P + a_P^{uv} v_P + a_P^{vw} w_P + a_P^{wp} p_P + \sum_{f=NB(P)} a_f^{uu} u_f + \sum_{f=NB(P)} a_f^{uv} v_f + \sum_{f=NB(P)} a_f^{vw} w_f + \sum_{f=NB(P)} a_f^{wp} p_f &= b_P^u, \\ a_P^{vv} v_P + a_P^{vu} u_P + a_P^{vw} w_P + a_P^{vp} p_P + \sum_{f=NB(P)} a_f^{vv} v_f + \sum_{f=NB(P)} a_f^{vu} u_f + \sum_{f=NB(P)} a_f^{vw} w_f + \sum_{f=NB(P)} a_f^{vp} p_f &= b_P^v, \\ a_P^{ww} w_P + a_P^{wu} u_P + a_P^{vw} v_P + a_P^{wp} p_P + \sum_{f=NB(P)} a_f^{ww} w_f + \sum_{f=NB(P)} a_f^{wu} u_f + \sum_{f=NB(P)} a_f^{vw} v_f + \sum_{f=NB(P)} a_f^{wp} p_f &= b_P^w, \end{aligned} \quad (21)$$

где коэффициенты матрицы вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned} a_f^{uu} = a_f^{vv} = a_f^{ww} &= \mu_f \frac{\mathbf{S}_f \mathbf{S}_f}{\mathbf{S}_f \mathbf{d}_{PN}} + \left\| \mathbf{m}_f, \mathbf{0} \right\|, \\ a_P^{uu} &= \sum_{f=NB(P)} a_f^{uu}, \quad a_P^{vv} = \sum_{f=NB(P)} a_f^{vv}, \quad a_P^{ww} = \sum_{f=NB(P)} a_f^{ww}, \\ a_f^{up} &= (1 - \lambda_f) \mathbf{S}_f^x, \quad a_f^{vp} = (1 - \lambda_f) \mathbf{S}_f^y, \quad a_f^{wp} = (1 - \lambda_f) \mathbf{S}_f^z, \\ a_P^{up} &= \sum_{f=NB(P)} \lambda_f \mathbf{S}_f^x, \quad a_P^{vp} = \sum_{f=NB(P)} \lambda_f \mathbf{S}_f^y, \quad a_P^{wp} = \sum_{f=NB(P)} \lambda_f \mathbf{S}_f^z, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} a_f^{up} &= (1 - \lambda_f) \mathbf{S}_f^x, \quad a_f^{vp} = (1 - \lambda_f) \mathbf{S}_f^y, \quad a_f^{wp} = (1 - \lambda_f) \mathbf{S}_f^z, \\ a_P^{up} &= \sum_{f=NB(P)} \lambda_f \mathbf{S}_f^x, \quad a_P^{vp} = \sum_{f=NB(P)} \lambda_f \mathbf{S}_f^y, \quad a_P^{wp} = \sum_{f=NB(P)} \lambda_f \mathbf{S}_f^z, \end{aligned} \quad (23)$$

Коэффициенты с индексами $uvwp$ определяют неявное слагаемое от градиента давления.

Для получения уравнения для давления в дискретной форме запишем уравнение неразрывности:

$$\sum_{f=nb(P)} (\rho \mathbf{v})_f \mathbf{S}_f = 0. \quad (24)$$

Используя поправку Рхи – Чоу, получаем:

$$\sum_{f=nb(P)} \rho_f \left[\overline{v}_f - \frac{\Omega_f}{a_f} (\nabla p_f - \overline{\nabla p}_f) \right] \mathbf{S}_f = 0. \quad (25)$$

где \overline{v}_f – величина скорости на грани вычисленная с использованием геометрического фактора.

Таким образом, уравнение для давления в алгебраическом виде запишется в следующем виде:

$$a_p^{pp} p_p + a_p^{pu} u_p + a_p^{pv} v_p + a_p^{pw} w_p + \sum_{f=NB(P)} a_f^{pp} p_f + \sum_{f=NB(P)} a_f^{pu} u_f + \sum_{f=NB(P)} a_f^{pv} v_f + \sum_{f=NB(P)} a_f^{pw} w_f = b_p^p, \quad (26)$$

где коэффициенты матрицы вычисляются следующим образом:

$$a_f^{pp} = \sum_{f=nb(P)} \rho_f \frac{\left(\frac{\Omega_f}{a_f} S_f \right) S_f}{S_f d_{PN}} = 0, \quad a_p^{pp} = \sum_{f=NB(P)} a_f^{pp}, \quad (27)$$

$$a_f^{pu} = (1 - \lambda_f) \mathbf{S}_f^x, \quad a_f^{pv} = (1 - \lambda_f) \mathbf{S}_f^y, \quad a_f^{pw} = (1 - \lambda_f) \mathbf{S}_f^z, \\ a_p^{pu} = \sum_{f=NB(P)} \lambda_f \mathbf{S}_f^x, \quad a_p^{pv} = \sum_{f=NB(P)} \lambda_f \mathbf{S}_f^y, \quad a_p^{pw} = \sum_{f=NB(P)} \lambda_f \mathbf{S}_f^z. \quad (28)$$

Объединяя уравнения сохранения импульса и массы в одно, получаем систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{bmatrix} a_p^{pp} & a_p^{pu} & a_p^{pv} & a_p^{pw} \\ a_p^{up} & a_p^{uu} & a_p^{uv} & a_p^{uw} \\ a_p^{vp} & a_p^{vu} & a_p^{vv} & a_p^{vw} \\ a_p^{wp} & a_p^{wu} & a_p^{wv} & a_p^{ww} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_p \\ u_p \\ v_p \\ w_p \end{bmatrix} + \sum_{f=NP(P)} \begin{bmatrix} a_f^{pp} & a_f^{pu} & a_f^{pv} & a_f^{pw} \\ a_f^{up} & a_f^{uu} & a_f^{uv} & a_f^{uw} \\ a_f^{vp} & a_f^{vu} & a_f^{vv} & a_f^{vw} \\ a_f^{wp} & a_f^{wu} & a_f^{wv} & a_f^{ww} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_f \\ u_f \\ v_f \\ w_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_p^p \\ b_p^u \\ b_p^v \\ b_p^w \end{bmatrix}. \quad (28)$$

Литература

1. Darwish M., Sraj I., Moukalled F. A coupled finite volume solver for the solution of incompressible flows on unstructured grids // Journal of Computational Physics. 2009. Vol. 228. P. 180–201.
2. Chen Z. J., Przekwas A. J. A coupled pressure-based computational method for incompressible/compressible flows // Journal of Computational Phys. 2010. Vol. 229. P. 9150–9165.

ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ТЕЧЕНИЙ С ВИХРЯМИ ТЕЙЛОРА

Ф. А. Максимов

Институт автоматизации проектирования РАН, г. Москва

В [1] приведены результаты численного моделирования течений вязкого газа между вращающимися цилиндрами. При малых скоростях вращения сжимаемость проявляется незначительно, и результаты моделирования можно сопоставить с известными теоретическими и экспериментальными исследованиями течений несжимаемой жидкости. Наиболее интересным фактом, предсказанным теоретически и экспериментально подтвержденным, является неустойчивость плоского течения Куэтта при достаточно высоких числах Рейнольдса и образование вихрей Тейлора. В данной работе приведены результаты численного моделирования течений с вращающейся поверхностью. Для исследования течений с вихрями Тейлора разработан метод моделирования течения с периодическими граничными условиями на концах цилиндра. Это позволяет уменьшить требования к вычислительным ресурсам, так как в этом случае рассматривается небольшая часть течения. Проведено моделирование известных экспериментальных данных о течениях между пространственными формами.