

2. Выполнена работа по верификации разработанных программных средств на основе сравнения результатов численных решений ряда задач модального анализа типовых элементов конструкций с точными аналитическими решениями. Результаты верификации показали, что программные средства и основанная на их использовании расчетная технология позволяют решать задачи с приемлемой для инженерных расчетов точностью.

3. Возможность практического применения таких программных средств в составе ПП ЛОГОС-ПРОЧНОСТЬ подтверждена результатами решения задачи определения основных собственных частот и форм колебаний транспортной упаковки для элементов телескопа с учетом контактного взаимодействия и преднапряженного состояния деталей от действия сборочных усилий и собственного веса. Показано, что учет напряженно-деформированного состояния упаковки приводит к существенному изменению значений собственных частот ее колебаний.

Литература

1. Спиридонов В. Ф., Рябов А. А., Циберев К. В. и др. Пакет программ ЛОГОС. Модуль решения квазистатических задач прочности и модального анализа / Под ред. Р. М. Шагалиева. // Труды XIII Международного семинара «Супервычисления и математическое моделирование». Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2012. С. 493–502.

2. Воробьев Ю. С., Шепель А. И., Романенко Л. Г. и др. Конечно-элементный анализ собственных колебаний статически напряженных лопаток турбомашин // Проблемы прочности. 1990. № 7. С. 88–94.

3. Вибрации в технике: Справочник / Под ред. В. Н. Челомей. М.: Машиностроение, 1980. Т.3. Колебания машин, конструкций и их элементов / Под ред. Ф. М. Диментберга, К. С. Колесникова. 1980.

4. Timoshenko S. Vibration Problems in Engineering. New York: D. Van Nostrand Company, Inc., 1937.

5. Lindberg. B. Berechnung der ersten Eigenfrequenz eines Balkens in Fliehkraftfeld mit Rayleigh Quotient, Internal report NTGE-ST-0051, Brown Boveri & Cie., Baden, Switzerland, 1986.

6. Прочность, устойчивость, колебания: Справочник / Под ред. И. А. Биргера, Я. Г. Пановко. М.: Машиностроение, 1968.

7. Спиридонов В. Ф., Циберев К. В., Дьянов Д. Ю. и др. Пакет программ ЛОГОС. Функциональные возможности для решения задач статической прочности конструкций с учетом физической и геометрической нелинейностей / Под ред. Р. М. Шагалиева // Труды XIV Международного семинара «Супервычисления и математическое моделирование». Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2013.

8. [Electronic resource]. Mode of access: http://www.cad.dp.ua/stats/FEMAP/FEMAPv102_Pr5.pdf.

О СХЕМАХ ТИПА MUSCL И РАЗРЫВНОМ МЕТОДЕ ГАЛЕРКИНА

А. В. Родионов

Российский федеральный ядерный центр –
Всероссийский НИИ экспериментальной физики, г. Саров

Введение

Схемы типа MUSCL появились в результате развития схемы Годунова [1], основная идея которой заключается в следующем. Если перед началом расчета нового шага по времени сделать пред-

положение о постоянстве параметров внутри каждой ячейки (т. е. известные осредненные величины распространить на всю ячейку), то вычислить значение потоковых величин на гранях ячейки можно точно – для этого нужно воспользоваться решением задачи Римана (задачи о распаде разрыва). Схема Годунова является исключительно надежной, гибкой и универсальной схемой, однако она имеет только первый порядок точности, как по пространству, так и по времени.

В модификациях схемы Годунова второй порядок точности по пространству обеспечивается использованием линейной аппроксимации параметров внутри ячейки [2–7]. Кроме того, в схемах типа MUSCL второй порядок точности по времени достигается переходом от решения классической задачи Римана к решению т. н. обобщенной задачи Римана, когда по обе стороны от разрыва параметры имеют линейные распределения (в общем случае – полиномиальные). Для уравнений газовой динамики решение обобщенной задачи Римана находится приближенно – в рамках той или иной аппроксимации [3–7].

Считается, что в схемах типа Годунова получение более высокого, третьего порядка точности требует привлечения кусочно-параболической аппроксимации, как это делается в известном методе PPM [8]. Однако оказывается, что существуют алгоритмы, позволяющие достигать третьего порядка точности и при использовании кусочно-линейной аппроксимации.

Если обратиться к истории, то первая версия MUSCL-схемы для расчета течений идеального сжимаемого газа была описана ван Лиром в статье [3], завершившей серию его публикаций под общим заголовком «Towards the ultimate conservative difference scheme». В предшествующей статье этой серии [9] ван Лир на примере решения линейного уравнения переноса рассмотрел и исследовал три варианта развития схемы Годунова с опорой на кусочно-линейную аппроксимацию; эти варианты он обозначил как схема I, схема II и схема III. Схема I стала потом базой для первой MUSCL-схемы [3], а схема II является прототипом для одной из ее последующих версий [5]. Наиболее сложная схема III долгое время оставалась невостребованной, хотя и обладает уникальным свойством – при решении линейных уравнений она демонстрирует третий порядок точности. Прошло более четверти века, прежде чем схема III нашла свое продолжение в качестве одного из вариантов разрывного метода Галеркина [10].

В данной работе на примере решения тестовых задач исследуется эффективность схемы III и приводятся данные ее сопоставления с другими схемами. Также рассказывается о связи схемы III с разрывным методом Галеркина и о возможных путях ее обобщения на случай решения нелинейных уравнений.

Постановка задачи, расчетная сетка и условные обозначения

Описание и анализ схем начнем со случая их применения к решению линейного уравнения переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

с постоянным коэффициентом $a \neq 0$. Будем решать задачу Коши, когда в области $t > 0$, $-\infty < x < \infty$ ищется функция $u(x, t)$, удовлетворяющая уравнению (1) и начальному условию $u(x, 0) = u_0(x)$, где $u_0(x)$ – заданная функция (начальный профиль функции). Численное решение данной задачи будет сравниваться с точным, которое есть $u(x, t) = u_0(x - at)$.

В качестве расчетной сетки будет использоваться равномерная пространственно-временная дискретизация расчетной области с шагами $h = L/N$, $\tau = T/M$, где N и M – целые числа. Консервативные величины, понимаемые как средние по ячейкам (то есть средние по интервалам $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] = [(i-1)h, ih]$, где $i = 1, 2, \dots, N$), будут обозначаться через u_i , а потоковые величины, относящиеся к границам $x_{i+1/2}$, будут обозначаться через $u_{i+1/2}$. Верхними индексами n , $n+1$ и $n+1/2$ будут

обозначаться, соответственно, значения величин на «нижнем», «верхнем» и «промежуточном» временных слоях одного расчетного шага (перехода от слоя $t = t^n = n\tau$ к слою $t = t^{n+1} = t^n + \tau$).

Число Куранта будем обозначать через $\nu \equiv |a|\tau/h$.

Схема Годунова

Запишем разностную аппроксимацию линейного уравнения переноса (1) в общем виде

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} + a \frac{u_{i+1/2}^{n+1/2} - u_{i-1/2}^{n+1/2}}{h} = 0. \quad (2)$$

Это уравнение позволяет рассчитывать консервативные величины на верхнем временном слое по их значению на нижнем слое и по потоковым величинам на границах ячейки. Поскольку в рамках одного расчетного шага консервативные величины на нижнем временном слое считаются известными, то именно алгоритм вычисления потоковых величин и определяет конкретную разностную схему.

Схемы типа MUSCL появились в результате развития схемы Годунова [1], основная идея которой заключается в следующем. Если перед началом расчета нового шага по времени сделать предположение о постоянстве параметров внутри каждой ячейки (т. е. известные осредненные величины распространить на всю ячейку), то вычислить значение потоковых величин на гранях ячейки можно точно – для этого нужно воспользоваться решением задачи Римана (задачи о распаде разрыва). Поскольку задача Римана является автомодельной (в ней отсутствует линейный масштаб), то полученные из ее решения параметры на боковой грани будут оставаться постоянными в пределах одного расчетного шага по времени. В рассматриваемом «линейном» случае решение задачи Римана тривиально, и для потоковых величин можно записать

$$u_{i+1/2}^{n+1/2} = \begin{cases} u_i^n, & \text{если } a > 0, \\ u_{i+1}^n, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

Кусочно-линейная аппроксимация параметров

Схема Годунова проявляет свои лучшие качества (такие, как надежность и универсальность) при расчете сложных течений с поверхностями разрывов. Однако на гладких решениях схема аппроксимирует исходные уравнения с первым порядком точности. Низкая точность схемы обусловлена грубостью кусочно-постоянной аппроксимации параметров по пространству. Первыми модификациями схемы Годунова, в которых кусочно-постоянная аппроксимация была заменена на кусочно-линейную аппроксимацию, были схема Колгана [2] и MUSCL-схема Ван Лира [3].

На рис. 1 показан пример кусочно-линейного распределения параметров на нижнем временном слое. Такое распределение определяется двумя наборами величин, u_i^n и Δu_i^n , и формулой

$$u(x, t^n) = u_i^n + \Delta u_i^n \frac{(x - x_i)}{h}, \quad \text{если } x \in [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}], \quad (3)$$

где u_i^n – консервативная величина (средняя по ячейке), а $\Delta u_i^n = u_{i+1/2}^n - u_{i-1/2}^n$ – приращение u внутри ячейки (производная $\partial u / \partial x$ внутри ячейки равна $\Delta u_i^n / h$).

В схеме Колгана, как и в наиболее распространенных вариантах MUSCL-схемы, приращения Δu_i^n вычисляются по известным величинам u_i^n перед началом очередного расчетного шага;

такую процедуру называют кусочно-линейной реконструкцией функции $u(x, t^n)$ по осредненным «сеточным» величинам.

Трехточечные реконструкции. В трехточечной реконструкции для вычисления Δu_i^n используются осредненные значения u в $(i-1)$ -й, i -й и $(i+1)$ -й ячейках. В областях гладкости решения, когда применения ограничителей не требуется, такую реконструкцию можно записать в общем виде

$$\Delta u_i^n = \frac{1}{2}(1+\omega)\Delta_{i-1/2} + \frac{1}{2}(1-\omega)\Delta_{i+1/2}, \quad (4)$$

где $\Delta_{i-1/2}$ и $\Delta_{i+1/2}$ – левая и правая разности, определяемые как $\Delta_{i-1/2} = u_i^n - u_{i-1}^n$, $\Delta_{i+1/2} = u_{i+1}^n - u_i^n$, а ω – свободный параметр, значения которого лежат в интервале $[-1, 1]$.

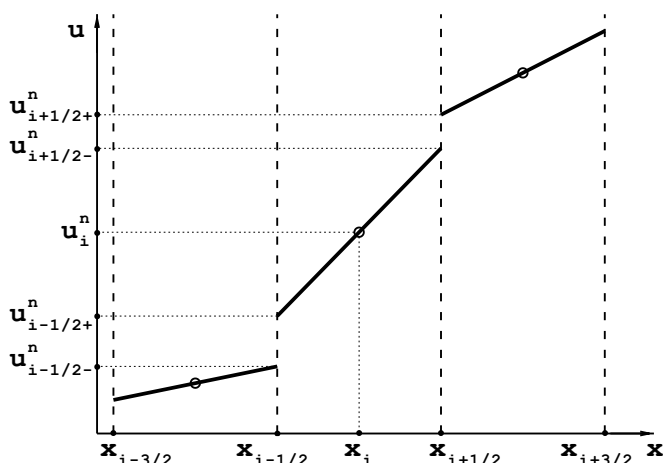


Рис. 1. Пример кусочно-линейной аппроксимации

Формула (4) охватывает три основных элемента кусочно-линейных реконструкций: использование левой разности ($\omega = 1$), правой разности ($\omega = -1$) и центральной разности ($\omega = 0$). Использование односторонних (левой и правой) разностей лежит в основе таких известных реконструкций-ограничителей, как *minmod* и *superbee*. В этих реконструкциях односторонние разности используются в областях гладкости решения, вдали от локальных экстремумов; выбор правой или левой разности зависит от локального поведения решения – знаков первой и второй производных. Центральная разность используется в известной реконструкции-ограничителе MC (monotonized central-difference limiter), предложенной Ван Лиром [9].

Обобщенная задача Римана

В модификациях схемы Годунова, когда вместо кусочно-постоянной аппроксимации параметров используется кусочно-полиномиальная аппроксимация (в общем случае), говорят об обобщенной задаче Римана (GRP = generalized Riemann problem). Применительно к рассматриваемому случаю обобщенную задачу Римана можно сформулировать следующим образом.

Пусть в момент времени $t = t^n$ задана функция

$$u(x, t^n) = \begin{cases} p_i(x), & \text{если } x < x_{i+1/2}, \\ p_{i+1}(x), & \text{если } x > x_{i+1/2}, \end{cases}$$

где $p_i(x)$ и $p_{i+1}(x)$ – известные полиномы. Требуется найти решение уравнения (1) в области $t > t^n$ с такими начальными данными.

Поскольку в точном решении уравнения (1) значения функции u сохраняются вдоль характеристик $x - at = \text{const}$, то для решения GRP можно записать $u(x, t) = u(x - a\Delta t, t^n)$, где $\Delta t = t - t^n$. Соответственно, для потоковой величины на границе $x_{i+1/2}$ получим

$$u(x_{i+1/2}, t^n + \Delta t) = \begin{cases} p_i(x_{i+1/2} - |a|\Delta t), & \text{если } a > 0, \\ p_{i+1}(x_{i+1/2} + |a|\Delta t), & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

Для случая кусочно-линейной аппроксимации (3) можно записать

$$u_{i+1/2}^{n+1/2} = \begin{cases} u_i^n + \frac{(1-\nu)}{2} \Delta u_i^n, & \text{если } a > 0, \\ u_{i+1}^n - \frac{(1-\nu)}{2} \Delta u_{i+1}^n, & \text{если } a < 0. \end{cases} \quad (5)$$

Кусочно-линейная реконструкция и третий порядок точности

Давайте зададимся следующим вопросом. Возможно ли построение схемы типа MUSCL, использующей представление о кусочно-линейном распределении параметров и имеющей третий порядок точности?

В случае решения линейного уравнения переноса такую схему легко построить. Для этого трехточечную реконструкцию (4) нужно сделать зависимой от числа Куранта и знака a , рассчитывая ее свободный параметр ω по формуле

$$\omega = -\text{sgn}(a) \frac{(1-2\nu)}{3}. \quad (6)$$

При $\nu < 1$ значения параметра ω будут лежать в интервале $[-1/3, 1/3]$.

Итак, для линейного уравнения переноса можно построить MUSCL-схему третьего порядка точности с использованием кусочно-линейного распределения параметров. Однако непонятно, как обобщить такую схему на случай решения многомерных нелинейных задач.

Начальные версии схемы MUSCL

Применительно к решению линейного уравнения переноса существует еще один способ построения MUSCL-схемы третьего порядка точности на базе кусочно-линейного представления параметров. Его можно найти в ранних работах Ван–Лира, положивших начало схемам типа MUSCL.

Первый вариант MUSCL-схемы, разработанной для решения уравнений движения идеального сжимаемого газа, был предложен Ван Лиром в статье [3], которая завершила серию его публикаций под общим заголовком «Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme». В основу нового метода была положена одномерная схема расчета на лагранжевой («привязанной» к веществу, подвижной) сетке, дополненная специальным алгоритмом пересчета результатов на эйлерову (неподвижную) сетку. Применительно к более простому случаю решения линейного уравнения переноса такая схема была исследована Ван Лиром в предшествующей статье [9] из вышеупомянутой серии публикаций. Рассмотрим некоторые тезисы этой статьи, используя в качестве иллюстрации рис. 2.

Пусть на нижнем временном слое определена кусочно-линейная функция вида (3). Применительно к решению уравнения (1), расчетный шаг в лагранжевых координатах есть простой сдвиг

распределения $u(x, t^n)$ на расстояние $\Delta x = a\tau$ (вправо или влево в зависимости от знака a); для него можно записать

$$u(x, t^{n+1}) = u(x - a\tau, t^n). \quad (7)$$

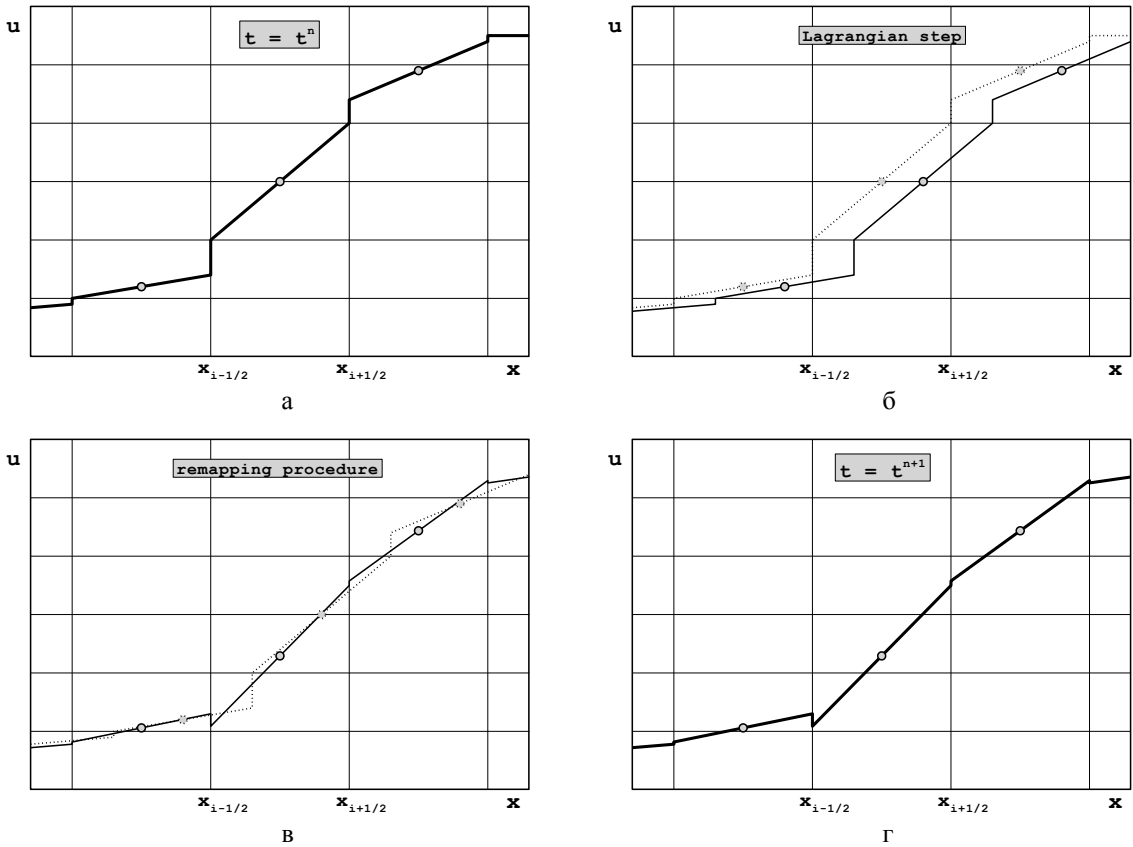


Рис. 2. Расчетный цикл в начальной версии схемы MUSCL: а – кусочно-линейное распределение $u(x)$ на нижнем временном слое $t = t^n$; б – шаг в лагранжевых координатах – сдвиг $u(x)$ на расстояние $\Delta x = a\tau$; в – процедура пересчета на эйлерову сетку; г – кусочно-линейное распределение $u(x)$ на верхнем временном слое $t = t^{n+1}$

Далее «лагранжевы» величины на верхнем временном слое пересчитываются на эйлерову сетку с использованием процедуры осреднения. Для потоковых величин получается следующий результат

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} &= \frac{1}{h} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x, t^{n+1}) dx = \\ &= \frac{1}{h} \left[\int_{x_{i-1/2} + a\tau}^{x_{i+1/2} + a\tau} u(x, t^{n+1}) dx - \int_{x_{i+1/2}}^{x_{i+1/2} + a\tau} u(x, t^{n+1}) dx + \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i-1/2} + a\tau} u(x, t^{n+1}) dx \right] = \\ &= u_i^n - \frac{1}{h} \left[\int_{x_{i+1/2}}^{x_{i+1/2} + a\tau} u(x, t^{n+1}) dx - \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i-1/2} + a\tau} u(x, t^{n+1}) dx \right] = \\ &= u_i^n - \frac{a\tau}{h} (u_{i+1/2}^{n+1/2} - u_{i-1/2}^{n+1/2}). \end{aligned} \quad (8)$$

Видно, что выражение (8) совпадает с выписанной ранее формулой (2), соответствующей расчету на эйлеровой сетке с использованием решения GRP. Заметим, что при решении нелинейных уравнений начальная версия MUSCL-схемы (Lagrangian step + remapping) уже не эквивалентна последующим версиям с чисто «эйлеровым» счетом (direct Eulerian MUSCL).

Что касается расчета приращений u_i^{n+1} на новом временном слое, то в работе [9] были рассмотрены три различных алгоритма, приводящих к трем индивидуальным схемам.

Схема I. В этой схеме приращения рассчитываются по формуле (4) с $\omega = 0$, т. е. схема I совпадает со схемой Фромма.

Схема II. В этой схеме приращения рассчитываются с опорой на «лагранжево» распределение (7) по формуле $\Delta u_i^{n+1} = u(x_{i+1/2}, t^{n+1}) - u(x_{i-1/2}, t^{n+1})$.

В эйлеровой версии MUSCL-схемы это выражение соответствует использованию решения GRP на боковой грани в момент $t = t^n + \tau$, т. е.

$$\Delta u_i^{n+1} = u_{i+1/2}^{n+1} - u_{i-1/2}^{n+1}, \quad u_{i+1/2}^{n+1} = \begin{cases} u_i^n + \left(\frac{1}{2} - v\right) \Delta u_i^n, & \text{если } a > 0, \\ u_{i+1}^n - \left(\frac{1}{2} - v\right) \Delta u_{i+1}^n, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

Применительно к решению уравнений движения идеального сжимаемого газа такой вариант MUSCL-схемы был впервые реализован в работе [5].

Схема III. В этой схеме пересчет на эйлерову сетку осуществляется с использованием метода наименьших квадратов. Ищется такое кусочно-линейное распределение на эйлеровой сетке, которое дает наименьшее среднеквадратическое отклонение от лагранжева распределения (7) (сравните сплошную и пунктирную линии на рис. 2,в). Условие минимальности отклонения выполняется, если выполняются два уравнения:

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \left[u_i^{n+1} + (x - x_i) \frac{\Delta u_i^{n+1}}{h} \right] dx = \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x, t^{n+1}) dx,$$

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \left[u_i^{n+1} + (x - x_i) \frac{\Delta u_i^{n+1}}{h} \right] (x - x_i) dx = \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x, t^{n+1}) (x - x_i) dx.$$

Поскольку $\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} (x - x_i) dx = 0$, то первое уравнение (уравнение сохранения) совпадает с уравнением (8), а второе уравнение (уравнение сохранения первых моментов) дает формулу для расчета приращений, а именно

$$\Delta u_i^{n+1} = h \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x, t^{n+1}) (x - x_i) dx / \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} (x - x_i)^2 dx = \frac{12}{h^2} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x, t^{n+1}) (x - x_i) dx =$$

$$= \begin{cases} 6v(1-v)(u_i^n - u_{i-1}^n) + (1-3v+2v^3) \Delta u_i^n - v(3-6v+2v^2) \Delta u_{i-1}^n, & \text{если } a > 0, \\ 6v(1-v)(u_{i+1}^n - u_i^n) + (1-3v+2v^3) \Delta u_i^n - v(3-6v+2v^2) \Delta u_{i+1}^n, & \text{если } a < 0. \end{cases} \quad (9)$$

Из трех рассмотренных схем, схема III обеспечивает наилучшую точность. Это обусловлено тем, что расчетный шаг в лагранжевых координатах не ухудшает решения, а процедура пересчета на эйлерову сетку с применением метода наименьших квадратов привносит в решение наименьшую диссипацию. В своей работе [9] Ван Лир с помощью Фурье-анализа показал, что схема III имеет свойства схемы третьего порядка точности. Однако в силу иных причин он называл ее схемой второго порядка.

О точности схем I, II и III

Продемонстрируем свойства схем I, II и III из работы ван Лиры [9] на примере решения уравнения (1) с начальным профилем вида «синусоида». Данные расчета этой задачи приведены на рис. 3,а (рассчитанные профили) и рис. 3,б (сходимость по сетке). Кроме трех схем из работы [9] на рис. 3,б приведены также данные расчета задачи по двум схемам третьего порядка: по схеме, в которой параметр ω рассчитывается по формуле (6) (схема I + var ω), и по схеме PPM (без ограничителей).

Как можно видеть, схема III заметно превосходит по точности схемы I и II. Более того, она имеет третий порядок точности, как и схемы I + var ω и PPM. Из схем третьего порядка она сопоставима по точности со схемой PPM и существенно превосходит в точности схему I + var ω .

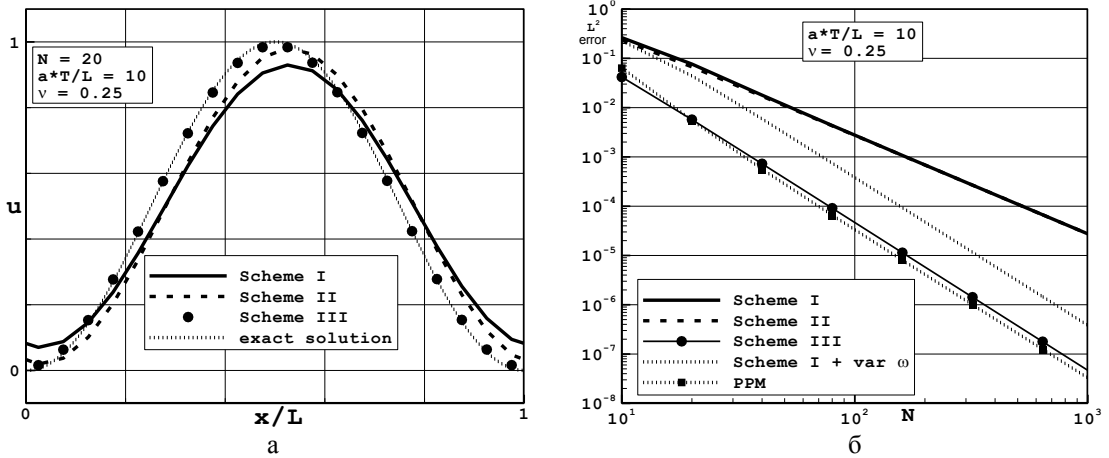


Рис. 3. Расчет линейной задачи с начальным профилем вида «синусоида» по различным схемам: а – рассчитанные профили $u(x)$; б – погрешность схем в зависимости от сеточного разрешения

Схема III и разрывный метод Галеркина

Формулу (9) удается расписать в виде некоторой схемы, похожей на элемент разрывного метода Галеркина (далее – метода DG). В этом методе для Δu записывается

$$\frac{\partial(\Delta u)}{\partial t} + \frac{6a}{h}(u_{i-1/2} + u_{i+1/2}) - \frac{12a}{h^2} \int_{-h/2}^{h/2} u(x_i + \xi) d\xi = 0. \quad (10)$$

Формула (9) получается, если уравнение (10) аппроксимировать следующим образом

$$\frac{(\Delta u)_i^{n+1} - (\Delta u)_i^n}{\tau} + \frac{6a}{h}(u_{i-1/2}^{n+1/2} + u_{i+1/2}^{n+1/2}) - \frac{12a}{h} \left(\frac{1}{2}u_i^n + \frac{1}{3}u_i^{n+1} + \frac{1}{6}\tilde{u}_i^{n+1} \right) = 0,$$

где $u_{j+1/2}^{n+1/2}$ уже была рассчитана ранее по формуле (5), а $u_j^{n+1/2}$ – полученные по формуле (2) новые осредненные значения (элементы MUSCL-схемы). Для расчета \tilde{u}_i^{n+1} нужно использовать другую формулу, а именно схему Колгана

$$\frac{\tilde{u}_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} + \frac{a}{h} \left[\left(u_i^n + \frac{1}{2}(\Delta u)_i^n \right) - \left(u_{i-1}^n + \frac{1}{2}(\Delta u)_{i-1}^n \right) \right] = 0,$$

или

$$\tilde{u}_i^{n+1} = (1-v)u_i^n + vu_{i-1}^n - \frac{v}{2} \left[(\Delta u)_i^n - (\Delta u)_{i-1}^n \right].$$

Применение ограничителя в схеме III

Если в схемах I, II или III после каждого расчетного шага применять ограничение

$$(\Delta u)_i^{n+1, \text{lim}} = \min \text{mod} \left[(\Delta u)_i^{n+1}, 2(u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}), 2(u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}) \right], \quad (11)$$

то получатся TVD-схемы, пригодные для расчета разрывных решений.

Продемонстрируем свойства схем I, II и III с TVD-ограничителем (10) на примере решения уравнения (1) с начальным профилем вида «ступенька». Данные расчета этой задачи приведены на рис. 4,а (рассчитанные профили) и рис. 4,б (сходимость по сетке). На рис. 4,б также приведены данные расчета задачи по схеме PPM с ограничителями [8]. Как можно видеть, схема III сопоставима по точности со схемой PPM и заметно превосходит схемы I и II.

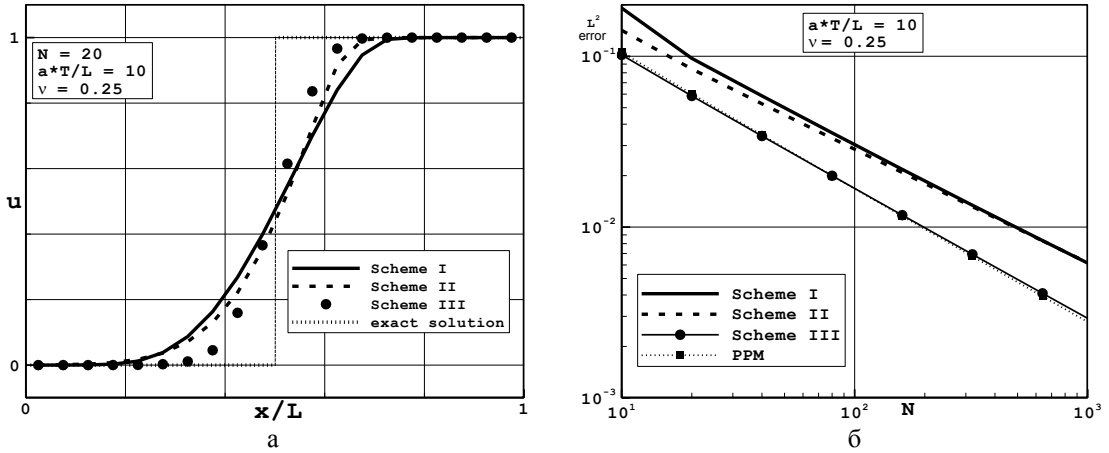


Рис. 4. Расчет линейной задачи с начальным профилем вида «ступенька» по различным схемам: а – рассчитанные профили $u(x)$; б – погрешность схем в зависимости от сеточного разрешения

Заключение

На примере решения тестовых задач исследована эффективность предложенной ван Лиром [9] схемы III и приведены данные ее сопоставления с другими схемами. Указывается на связь схемы III с разрывным методом Галеркина и показан возможный путь ее обобщения на случай решения нелинейных уравнений. На следующем этапе работы предполагается обобщить схему III на случай расчета многомерных задач и провести ее всестороннее тестирование.

Литература

1. Годунов С. К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Мат. сборник. 1959. Т. 47, № 3. С. 271–306.
2. Колган В. П. Применение принципа минимальных значений производной к построению конечно-разностных схем для расчета разрывных решений газовой динамики // Ученые записки ЦАГИ. 1972. Т. 3, № 6. С. 68–77.
3. Van Leer B. Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second-order sequel to Godunov's method // J. Comput. Phys. 1979. Vol. 32. P. 101–136.
4. Van Leer B. On the relation between the upwind-differencing schemes of Godunov, Engquist-Osher and Roe // SIAM J. Sci. Stat. Comput. 1984. Vol. 5. P. 1–20.

5. Ben-Artzi M., Falcovitz J. A second-order Godunov-type scheme for compressible fluid dynamics // J. Comput. Phys. 1984. Vol. 55. P. 1–32.
6. Colella P. A direct Eulerian MUSCL scheme for gas dynamics // SIAM J. Sci. Stat. Comput. 1985. Vol. 6. P. 104–117.
7. Родионов А. В. Повышение порядка аппроксимации схемы С. К. Годунова // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 1987. Т. 27, № 12. С. 1853–1860.
8. Colella P., Woodward P. The piecewise parabolic method (PPM) for gas-dynamical simulations // J. Comput. Phys. 1984. Vol. 54. P. 174–201.
9. Van Leer B. Towards the ultimate conservative difference scheme. IV. A new approach to numerical convection // J. Comput. Phys. 1977. Vol. 23. P. 276–299.
10. Huynh H. T. An upwind moment scheme for conservation laws // Computational Fluid Dynamics. 2006. P. 761–766.
11. Cheng Y., Shu C.-W. Superconvergence and time evolution of discontinuous Galerkin finite element solutions // J. Comput. Phys. 2008. Vol. 227. P. 9612–9627.

О ПРИМЕНЕНИИ ИСКУССТВЕННОЙ ВЯЗКОСТИ В СХЕМАХ ТИПА ГОДУНОВА ДЛЯ БОРЬБЫ С «КАРБУНКУЛ»-НЕУСТОЙЧИВОСТЬЮ

А. В. Родионов, И. Ю. Тагирова

Российский федеральный ядерный центр –
Всероссийский НИИ экспериментальной физики, г. Саров

1. Введение

Эффективным инструментом численного решения многомерных задач газовой динамики являются методы сквозного счета. При их использовании газодинамические разрывы не выделяются специальным образом, а «размываются» на некоторое число ячеек расчетной сетки. Одна из основных трудностей сквозного счета связана с появлением нефизических осцилляций решения в окрестности разрывов, которые могут заметно исказить решение.

Первая схема сквозного счета была описана в 1950 году vonNeumann, Richtmyer [1]. Главная идея заключалась в добавлении специального члена «искусственной» вязкости, приводящего к принудительной диссипации ударной волны (УВ) на нескольких сеточных интервалах. При этом действие искусственной вязкости по своему характеру напоминает действие физической вязкости, но ее величина зависит от интенсивности скачка и размера счетной ячейки.

Одними из наиболее популярных методов сквозного счета являются схемы типа Годунова. В 1959 году С. К. Годунов опубликовал работу [2], в которой он предложил «наиболее точную» монотонную схему первого порядка, основанную на двух предположениях. Согласно первому предположению, пространственное распределение всех параметров газа на «нижнем» временном слое считается кусочно-постоянным. Второе предположение заключается в использовании решения задачи о распаде произвольного разрыва (задачи Римана) при вычислении потоков на границах ячеек.

В 1988 году Peery, Imlay [3] обнаружили серьезную проблему в применении методов типа Годунова к задачам гиперзвуковой аэродинамики; ее часто обозначают как «carbunclephenomenon». Постепенно эта проблема привлекла к себе внимание большого числа специалистов в области численного моделирования. Так, vanLeer в своем обзоре [4], посвященном истории развития численных методов в США и Канаде, выделил «карбункул»-проблему как одну из главных нерешенных проблем классических конечно-объемных схем.