

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ АЭРОДИНАМИКИ ВИНТА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КВАЗИОДНОМЕРНЫХ СХЕМ НА НЕСТРУКТУРИРОВАННЫХ СЕТКАХ

И. В. Абалакин, В. Г. Бобков, Т. К. Козубская, В. А. Аникин

Федеральный исследовательский центр
Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, г. Москва

Введение

В докладе приводятся результаты численного моделирования аэродинамических характеристик винта вертолета в режиме зависания. Для моделирования используются высокоточные и имеющие низкую вычислительную стоимость методы решения уравнений газовой динамики на неструктурированных сетках.

Разработка современного несущего винта вертолета требует оптимизации его аэродинамических свойств. При этом важно иметь максимально полную информацию о формируемом вокруг винта воздушном течении и его возможном влиянии на конструкцию. Такая информация нужна для различных режимов полета, которые не всегда легко реализовать в условиях наземного эксперимента, а проведение серийных летных экспериментов ограничено их высокой стоимостью. В этой ситуации численное моделирование на высокопроизводительных вычислительных комплексах стало одним из эффективных инструментов, предоставляющих возможность получения предварительных результатов для различных геометрических конструкций винта и режимов полета, необходимых для оптимизации конструкции несущего винта и последующего его производства.

Основной конструктивной составляющей винта является лопасть. Форма лопасти определяется вариацией таких элементов, как базовые аэродинамические профили с круткой по радиусу лопасти и законцовками. Для дискретизации сложной изменяемой геометрии лопасти численно эффективным методом представляется использование неструктурированных сеток. Для осуществления соответствующих вычислений с использованием численных алгоритмов высокой точности за разумный период времени необходимы эффективные параллельные алгоритмы для многопроцессорных вычислительных систем.

В докладе представлен численный метод для моделирования аэродинамики винта. Эта методика применима ко всему семейству математических моделей на основе уравнений Навье–Стокса, а именно, RANS, LES и гибриднему RANS-LES подходам, используемым для расчета сжимаемых турбулентных течений. Однако результаты моделирования, приводимых в настоящем докладе, основываются только на решении систем уравнений Эйлера и Навье–Стокса, записанных во вращающейся неинерциальной системе отсчета.

Особенностью представленного численного метода является использование вершинно-центрированных схем EBR (Edge Based Reconstruction) [1–3], на неструктурированных сетках. Эти схемы, имеющие теоретически второй порядок точности на произвольных неструктурированных сетках, обеспечивают точность выше, чем большинство схем второго порядка с точки зрения значений ошибок и имеют меньшие вычислительные затраты по сравнению с полиномиальными алгоритмами высокого порядка. Однако при использовании однородных решетчатых сеток EBR-схемы обладают точностью 5-го порядка. Повышенная точность схемы обеспечивается за счет квазиодномерной реконструкции переменных, участвующих в расчетах потоков. Интегрирование по времени осуществляется неявной схемой второго порядка и методом BiGSStab для решения систем линейных алгебраических уравнений. Указанная численная методика реализована в коде NOISEtte [4] для решения задач аэродинамики и аэроакустики на неструктурированных сетках. Гибридная

MPI/OpenMP параллельная модель кода NOISEtte обеспечивает его эффективную производительность на десятках тысяч CPU-ядер.

Эффективность предложенной численной методики демонстрируется на примере решения двух модельных задач по нахождению аэродинамических характеристик винта в режиме зависания.

В работе рассматриваются две задачи: моделирование конфигурации «винта в кольце» и моделирование несущего винта в режиме работы на месте.

Данная работа проведена в рамках проекта РФФ 15-11-30039.

1. Постановка задач о течении около винта

1.1. Задача о вязком обтекании четырехлопастного винта в кольце

Геометрия исследуемой модели построена на основе реальной экспериментальной установки, представляющей собой четырехлопастной рулевой винт вертолета в кольце. В канале присутствует одиночный винт без деталей механизации винта, канал (кольцо), в котором вращается винт, представляет собой осесимметричное тело вращения. При этом центральное тело имеет форму цилиндра со скругленными торцами.

Как было упомянуто выше, в силу симметрии такой постановки при нулевом внешнем потоке задача решается для сектора с раствором угла $2\pi/N$, $N = 4$, содержащим одну лопасть ротора (рис. 1) с постановкой периодических граничных условий на боковых плоскостях сектора в азимутальном направлении.

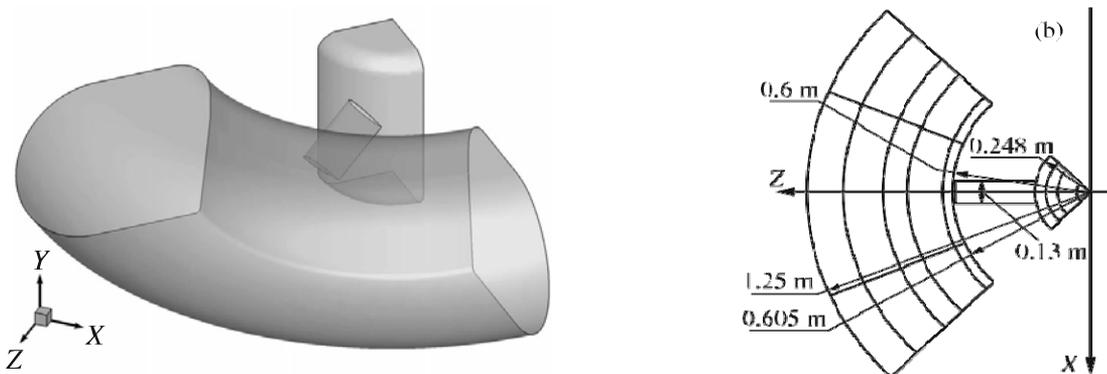


Рис. 1. Сектор с одной лопастью: геометрия (слева) и размеры (справа)

Радиус центрального тела, к которому крепится лопасть, в соответствии с конфигурацией экспериментальной установки, взят равным $0,248$ м при радиусе винта $R = 0,6$ м. Хорда лопасти составляет $b = 0,13$ м. При этом в основе поверхности лопасти лежит профиль ЦАГИ СВ-11 с линейной круткой $\varphi_{sw} = 40(0,7 - r/R)/3$, где r – расстояние от оси вращения винта. Внешний радиус канала составляет $1,25$ м, внутренний радиус канала в плоскости вращения винта – $0,605$ м, что соответствует зазору 5 мм между торцом лопасти и внутренней поверхностью канала (рис. 1 справа). Рассматривается режим вращения винта с частотой $19,44$ Гц, что соответствует угловой скорости $\omega = 122,17$ Рад/с и линейной скорости конца лопасти $V_{blade} = \omega R = 73,3$ м/с, при этом угол установки лопасти φ принимает значения $10^\circ, 15^\circ, 20^\circ, 30^\circ, 40^\circ$. Число Рейнольдса в расчете определяется как $Re = \rho_0 V_{blade} b / \mu_0$, где значения $\rho_0 = 1,204$ кг/м³ и $\mu_0 = 1,827 \cdot 10^{-5}$ Н·с/м² соответствуют плотности и динамической вязкости воздуха при температуре 20°C , и принимает значение $Re = 6,28 \cdot 10^5$.

1.2. Задача о вязком обтекании несущего винта

Геометрия данной задачи определяется параметрами реальной экспериментальной установки, представляющей собой модель четырехлопастного несущего винта с радиусом $R = 1,952$ м. Поверхность лопасти построена на основе пяти различных профилей ЦАГИ с кусочно-линейной круткой и имеет стреловидную законцовку сложной формы. Длина хорды лопасти имеет величину $b = 0,18$ м. (рис. 2).

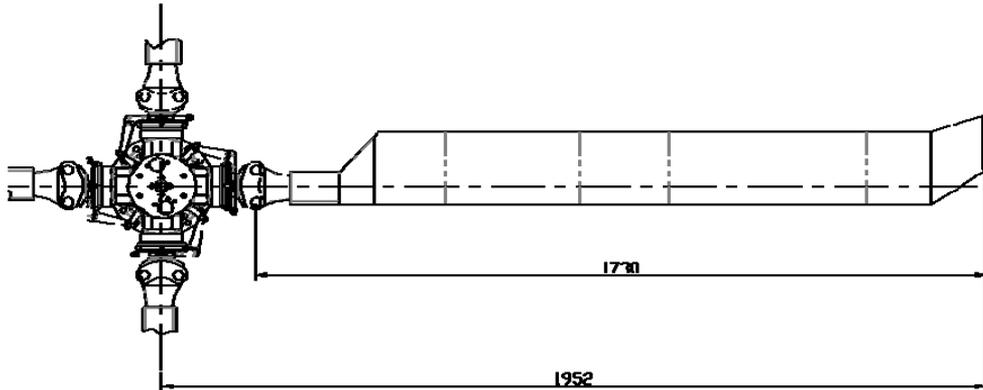


Рис. 2. Геометрия несущего винта

Рассматривается режим вращения винта со скоростью 650 оборотов в минуту, что соответствует линейной скорости конца лопасти $V_{blade} = 136,63$ м/с. Угол шага лопасти φ принимает значения 5° , 10° , 15° и 20° . Число Рейнольдса определяется аналогично предыдущей задаче и равно $Re = 1,6 \cdot 10^6$.

1.3. Аэродинамические силы винта

В задачах описанного типа одними из важных свойств, характеризующих винт, являются коэффициенты силы тяги и крутящего момента.

Для определения аэродинамических сил введем систему координат, ось y которой совпадает с осью вращения. Пусть $p(x, y, z)$ есть распределение давления по поверхности лопасти S , а n_x , n_y , n_z – компоненты внешней к поверхности S единичной нормали. Тогда сила тяги винта F_T^{rotor} из N лопастей складывается из нормальной к плоскости вращения силы F_y^{blade} , действующей на каждую единичную лопасть:

$$T^{rot} = NF_y^{blade} = N \int_S p n_y ds.$$

Момент силы винта определяется проекциями сил на оси координат и радиус-вектором (рычагом) координат лопасти $\mathbf{r} = (0, 0, z)$. Откуда следует выражение для аэродинамического крутящего момента винта:

$$M_k^{rot} = M_y = N \int_S z p n_x ds.$$

При определении силы тяги и крутящего момента кольца в первой задаче давление на поверхности кольца $p(x, y, z)$ заменяется на среднее по азимутальному углу значение для давления

$\langle p(x, y, z) \rangle = \tilde{p}(r, z)$. Следовательно, сила тяги и крутящий момент кольца определяются формулами:

$$T^{ring} = N \int_S \tilde{p} n_y ds, \quad M_k^{ring} = N \int_S \tilde{p} (zn_x - xn_z) ds.$$

Коэффициент силы тяги C_T и коэффициент аэродинамического крутящего момента m_k вычисляются обезразмериванием силы тяги и крутящего момента на величины $\rho_0 A (\omega R)^2 / 2$ и $\rho_0 R A (\omega R)^2 / 2$, соответственно:

$$C_T^{rot/ring} = \frac{2T^{rot/ring}}{\rho_0 A (\omega R)^2}, \quad m_k^{rotor/ring} = \frac{2M_k^{rot/ring}}{\rho_0 R A (\omega R)^2},$$

где ρ_0 – плотность невозмущенного воздуха, $A = \pi R^2$ – площадь диска лопасти, R – радиус лопасти, ω – модуль угловой скорости лопасти.

Значения рассчитанных аэродинамических коэффициентов сравниваются с результатами, полученными в натурных экспериментах.

2. Математическая модель

2.1. Уравнения Навье-Стокса в неинерциальной системе координат

Для расчета течения вокруг вращающейся лопасти в кольце используется система уравнений Навье–Стокса, записанная для сжимаемого газа в неинерциальной вращающейся системе координат, в которой обтекаемая потоком газа лопасть неподвижна, а кольцо вращается.

Обозначим через \mathbf{u} вектор абсолютной скорости в исходной неподвижной системе координат и введем подвижную систему координат, вращающуюся с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)^T$ вокруг оси, неподвижной в исходной системе координат. Определим векторы относительной скорости и линейной скорости вращения

$$\mathbf{u}' = \mathbf{u} - \mathbf{V}, \quad \mathbf{V} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

и запишем систему уравнений Эйлера во вращающейся системе координат в виде законов сохранения относительно абсолютной скорости \mathbf{u} :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho (\mathbf{u} - \mathbf{V}) &= 0, \\ \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \operatorname{div} \rho (\mathbf{u} - \mathbf{V}) \otimes \mathbf{u} + \nabla p &= \operatorname{div} \mathbf{S} - \rho (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}), \\ \frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div} (\mathbf{u} - \mathbf{V}) E + \operatorname{div} \mathbf{u} p &= \operatorname{div} \mathbf{q} + \operatorname{div} \mathbf{S} \mathbf{u}. \end{aligned} \quad (1)$$

В системе уравнений (1) через \mathbf{S} обозначен тензор скоростей деформации, а через \mathbf{q} – поток внутренней энергии.

С точки зрения наблюдателя, находящегося в неподвижной системе координат, система уравнений (1) описывает изменение консервативных переменных за счет их переноса во вращающейся со скоростью \mathbf{V} среде, градиента давления и поворота вектора скорости на угол, равный $|\boldsymbol{\omega}|t$. При численной реализации данной системы скорость вращения можно интерпретировать как скорость подвижной сетки.

Перепишем систему (1) в псевдовекторном потоковом виде:

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_x^I}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_y^I}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{F}_z^I}{\partial z} - \frac{\partial \mathbf{F}_x^{NI}}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{F}_y^{NI}}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{F}_z^{NI}}{\partial z} = \mathbf{H},$$

$$\mathbf{Q} = (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, E)^T, \quad (2)$$

$$\mathbf{H} = (0, -v\omega_z + w\omega_y, u\omega_z - w\omega_x, -u\omega_y + v\omega_x, 0)^T,$$

где $\mathbf{F}_x^I, \mathbf{F}_y^I, \mathbf{F}_z^I$ – потоки уравнений Эйлера в инерциальной (неподвижной) системе координат, $\mathbf{F}_x^{NI} = V_x \mathbf{Q}, \mathbf{F}_y^{NI} = V_y \mathbf{Q}, \mathbf{F}_z^{NI} = V_z \mathbf{Q}$ – добавки к потокам, определяемые неинерциальной системой координат или скоростью движения сетки.

Матрицы Якобианы потоков, инициируемых скоростью вращения, имеют диагональный вид

$$\frac{\partial \mathbf{F}_{x,y,z}^{NI}}{\partial \mathbf{Q}} = V_{x,y,z} \mathbf{I},$$

следовательно, матрицы Якоби полного потока можно записать как

$$\frac{\partial (\mathbf{F}_{x,y,z}^I - \mathbf{F}_{x,y,z}^{NI})}{\partial \mathbf{Q}} = S_{x,y,z} \text{diag}(\lambda_{x,y,z}^i - V_{x,y,z}) S_{x,y,z}^{-1}, \quad i = 1, \dots, 5,$$

где $\lambda_{x,y,z}^i$ – собственные значения, $S_{x,y,z} (S_{x,y,z}^{-1})$ – матрица правых (левых) собственных векторов матриц Якоби $\partial (\mathbf{F}_{x,y,z}^I - \mathbf{F}_{x,y,z}^{NI}) / \partial \mathbf{Q}$ соответствующих потоков уравнений Эйлера в инерциальной системе координат. Таким образом, отличие системы (2), записанной в неподвижной системе координат от уравнений Эйлера, заключено только в изменении характеристических скоростей и наличии источника в правой части. Поэтому при дальнейшей численной реализации системы (2) методы аппроксимации, в частности, схемы гудуновского типа, останутся теми же самыми, что и при решении уравнений в неподвижной системе координат.

2.2. Граничные условия

Для системы уравнений Навье–Стокса на твердой поверхности ставились граничные условия прилипания, заключающиеся в задании нулевых компонент относительных (во вращающейся неинерциальной системе координат) скоростей на границе. В случае применения системы уравнений (1), записанной относительно вектора абсолютной (в неподвижной системе координат) скорости, условия прилипания для вращающейся лопасти – $\mathbf{u} - \mathbf{V} = 0$ и $\mathbf{u} = 0$ для неподвижного кольца.

Так как численное моделирование данной задачи проводится в ограниченной области, на границе расчетной области необходимо ставить искусственные граничные условия. Эти граничные условия определяются потоками, связывающими значения газодинамических параметров внутри расчетной области ρ_i, U_i, p_i и их значения в удаленном потоке $\rho_\infty, U_\infty, p_\infty$, расщепленными по направлениям их характеристических скоростей. Значения газодинамических величин $\rho_\infty, U_\infty, p_\infty$ во внешнем потоке определяются характеристическими соотношениями для изоэнтропического газа

$$\rho_\infty = \rho_i \left(\frac{p_\infty}{p_i} \right)^{1/\gamma}, \quad p_\infty = p_0, \quad \mathbf{U}_\infty = \mathbf{U}_i + \frac{2}{\gamma - 1} \left[\left(\gamma \frac{p_i}{\rho_i} \right)^{1/2} - \left(\gamma \frac{p_\infty}{\rho_\infty} \right)^{1/2} \right] \mathbf{n},$$

где величина p_0 – постоянное давление невозмущенного газа и \mathbf{n} – вектор внешней единичной нормали к границе расчетной области.

3. Численная реализация

3.1. Численная методика расчета

Методика расчета ближнего поля течения основана на решении системы уравнений Навье–Стокса в неинерциальной системе координат (2). Для пространственной аппроксимации конвективных потоков этой системы уравнений на тетраэдральных сетках используется схема на основе квазиодномерной реконструкции переменных вдоль ребра сетки (EBR-схемы). Подробно этот класс схем описан в [1–3], [5]. Отметим, что пространственная дискретизация базируется на вершинно-центрированной формулировке – все искомые переменные определены в узлах сетки, вокруг которых построены расчетные ячейки (дуальная сетка).

На тетраэдральных сетках, для которых дуальная сетка имеет одинаковую форму расчетных ячеек (аналог равномерной декартовой сетки), схема на основе квазиодномерной реконструкции вдоль ребра сетки может достигать пятого/шестого порядка пространственной аппроксимации при соответствующей реконструкции потоковых переменных [2], [5]. В случае произвольной неструктурированной тетраэдральной сетки формально имеется только второй порядок аппроксимации при той же реконструкции. Но данная схема обеспечивает повышенную точность (в смысле разности численного и точного решений в сеточной норме) в сравнении с другими схемами второго порядка аппроксимации [1], [3].

Для пространственной аппроксимации вязких членов в системе уравнений Навье–Стокса используется конечно-элементный метод Галеркина на основе линейных базисных функций.

Интегрирование по времени проводится по неявной трехслойной схеме 2-го порядка аппроксимации с последующей линеаризацией по Ньютону разностной по пространству системы уравнений. На каждой ньютоновской итерации применяется стабилизированный метод бисопряженных градиентов (BiCGSTAB) для решения системы линейных уравнений.

Данная методика реализована в комплексе программ NOISEtte [4].

3.2. Расчетная сетка

Как было упомянуто в п. 1, расчетная область задачи «винт в кольце» представляет собой сектор с одной лопастью. Внешняя граница расчетной области построена таким образом, чтобы описать область течения, формируемую ротором как непосредственно под винтом (по оси вращения), так и в области формирования течения над винтом. Размер расчетной области вне кольца выбран так, чтобы иметь возможность анализировать характеристики течения вне кольца и обеспечивать достаточную удаленность от центра возмущений для корректной постановки граничных условий в дальнем поле (рис. 3 слева).

В расчетной области строится неструктурированная тетраэдральная сетка. Сетка измельчается в областях, требующих подробного моделирования аэродинамических эффектов. Так, наиболее подробная сетка строится на передней и хвостовой (по хорде профиля) частях поверхности лопасти и на торце лопасти. На поверхностях лопасти, центрального тела и кольца сетка измельчается в нормальном к поверхности направлении для разрешения пограничного слоя.

Далее поверхностная и объемная сетка строится методом продвинутого фронта таким образом, чтобы размер сеточных элементов гладко изменялся (рис. 3 справа). Наиболее подробная сетка строится в области зазора между торцом лопасти и внутренней поверхностью кольца. Также вводятся ограничения сверху на максимальные размеры элементов вблизи лопасти и центрального тела.

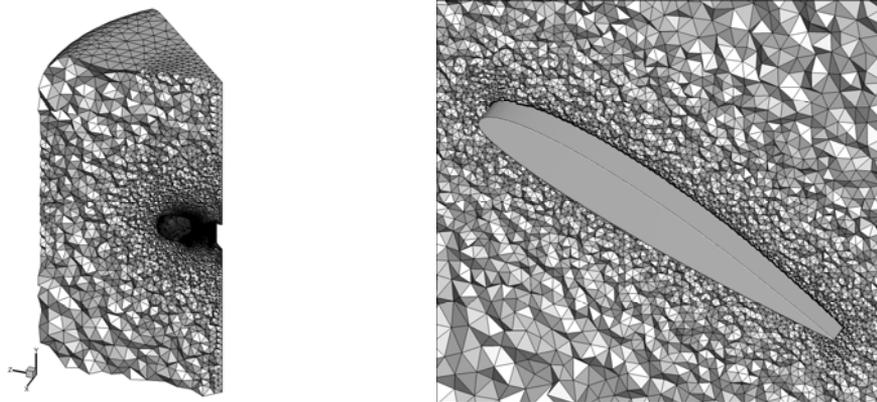


Рис. 3. Общий вид объемной сетки: объемная сетка в продольном сечении (слева), сетка вблизи лопасти (справа)

На твердых поверхностях ротора, центрального тела и кольца сетка измельчается для разрешения пограничного слоя в соответствии с числом Рейнольдса так, чтобы на толщину пограничного слоя приходилось не менее 10 ячеек.

В результате было построено пять расчетных сеток (для углов установки лопасти 10, 15, 20, 30, 40°) с размерами, приведенными в табл. 1.

Таблица 1

Размерность сетки для задачи «винт в кольце»

Угол установки лопасти φ	Число узлов	Число элементов
10°	2326941	13589791
15°	2371707	13859009
20°	2511582	14669900
30°	2555652	14936402
40°	2592469	15154418

Для расчета аэродинамических характеристик несущего винта были построены четыре сетки для каждого угла шага лопасти. Структура сетки и метод ее построения аналогичны методике построения сетки для первой задачи, описанной выше (рис. 4).

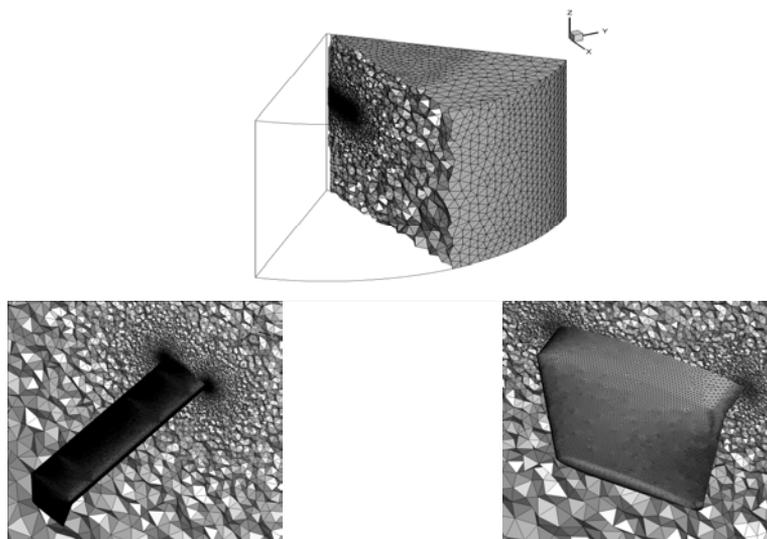


Рис. 4. Общий вид объемной сетки для расчета несущего винта

Размерность сетки для различных углов установки приведена в табл. 2.

Таблица 2

Размерность сетки для задачи о несущем винте

Угол установки лопасти ϕ	Число узлов	Число элементов
5°	4145399	24137856
10°	4146578	24180511
15°	4144917	24134870
20°	4144431	24132036

Расчетные сетки строились средствами ICEM CFD из программного пакета ANSYS.

4. Результаты расчетов

4.1. Общая характеристика течения

В результате расчетов было получено стационарное решение, т. е. решение, не зависящее от угла вращения.

На рис. 5 представлена картина течения в неподвижной системе координат для конфигурации с углом установки лопасти 30°. При построении изображения на этом рисунке полная картина течения получена продолжением решения, рассчитанного в одном секторе, с соответствующим поворотом координат каждого сектора и вектора скоростей в секторе на угол $2\pi k/4$, где значение k изменялось от 0 до 3.

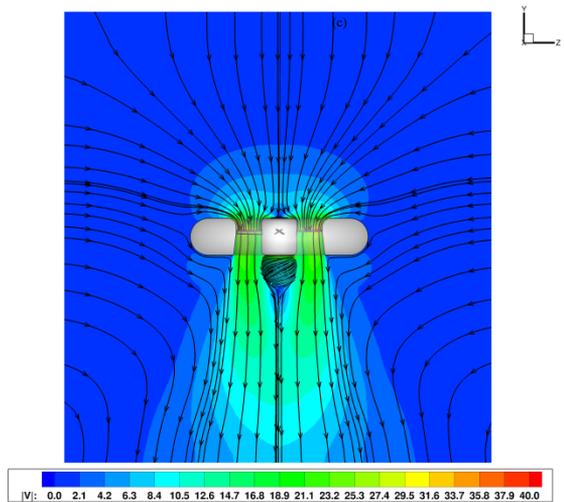


Рис. 5. Общий вид течения: линии тока (в неподвижной системе координат) и поле модуля скорости в меридиональном сечении при угле установки лопасти 30°

Как видно на рис. 5, в потоке перед винтом линии тока направлены вдоль оси внутрь кольца, постепенно искривляясь ближе к кольцу, т. е. наблюдается эффект всасывания окружающего неподвижного воздуха в канал, образуемый кольцом. Причем скорость всасывания падает вдоль радиуса кольца, становясь пренебрежимо малой на внешней поверхности кольца. В потоке за винтом наблюдаются существенное ускорение осевой скорости течения на цилиндрической поверхности порядка радиуса кольца и его закрутка по направлению вращения винта. С уменьшением радиуса и увеличением расстояния осевая скорость уменьшается и, как следствие, возрастает величина закрутки течения. Особенно четко можно видеть скручивание линий тока в жгут под центральным телом, где осевая скорость практически нулевая. Это означает образование спиралевидных вихрей в нижней части потока в окрестности оси вращения.

На рис. 6 приведены линии тока и поля модуля абсолютной скорости в меридиональном сечении вдоль оси лопасти винта при разных углах установки лопасти. Как видно из рисунков, наибольшая скорость потока наблюдается в струе непосредственно под диском винта, при этом скорость потока быстро убывает с удалением от кольца. Также наблюдается увеличение скорости и ширины струи за винтом с увеличением угла установки лопасти, хотя общий характер течения существенно не меняется: в верхней полуплоскости над кольцом формируется зона всасывания,

в нижней полуплоскости, непосредственно под диском винта – зона истечения струи, а в удалении от оси вращения зона спутного потока, вызванного струйным течением.

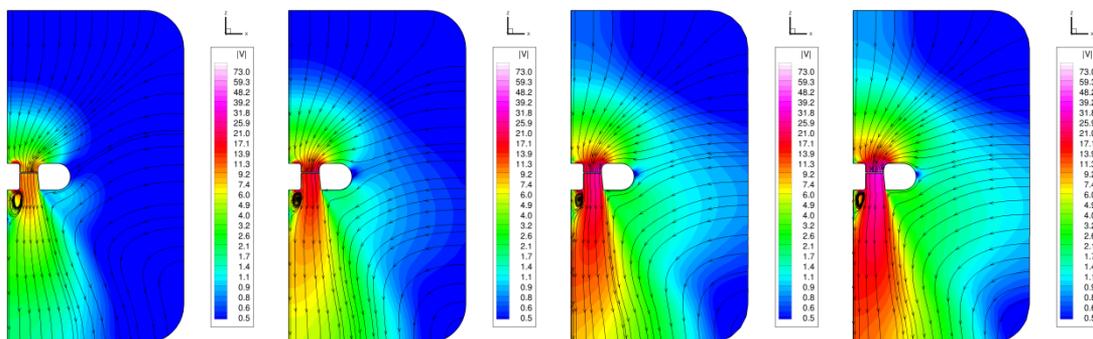


Рис. 6. Поле модуля абсолютной скорости и линии тока в меридиональном сечении при угле установки лопасти (слева направо) 10° , 20° , 30° и 40°

4.2. Аэродинамические силы

На рис. 7 приведены коэффициенты силы тяги (рис. 7,а) и крутящего момента винта (рис. 7,б) в зависимости от угла установки лопасти, полученные в расчете и в эксперименте. Очевидно, что с увеличением угла установки лопасти винта осевая скорость вытесняемой массы воздуха за ротором увеличивается и понижается давление в области над лопастью. В силу этого сила тяги и коэффициент крутящего момента возрастают. Можно видеть, что численно полученные коэффициенты близки к экспериментальным при всех вариантах угла установки лопасти, для которых были проведены расчеты. Такое же хорошее согласование с экспериментом наблюдается и на рис. 7,в, где представлена поляра винта (зависимость коэффициента тяги от коэффициента крутящего момента). Видно, что рассчитанные данные хорошо ложатся на экспериментальную кривую.

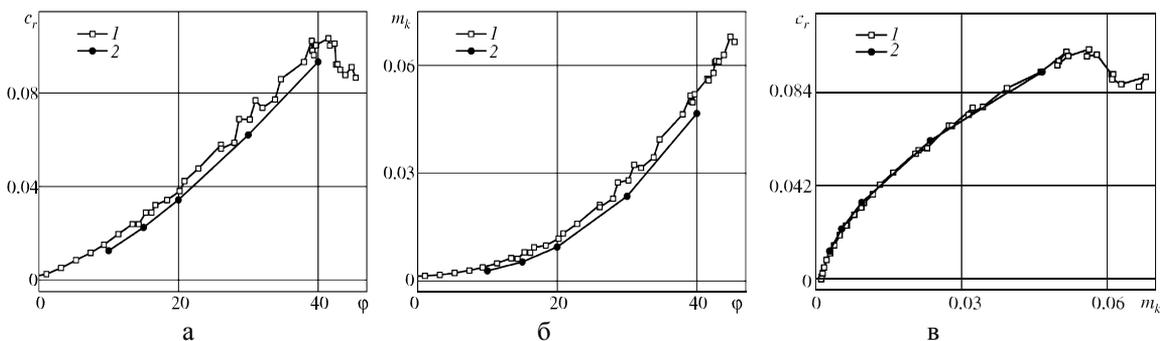


Рис. 7. Коэффициенты силы тяги (а), крутящего момента (б) и поляра винта (в) в расчете задачи «винт в кольце»

На рис. 8 приведены результаты расчетов коэффициентов силы тяги, крутящего момента и поляры в сравнении с экспериментальными данными для несущего винта. Как и в предыдущем расчете, численные результаты близки к эксперименту.

Расчеты на приведенных сетках производились на вычислительных мощностях МСЦ РАН (кластер МВС-10П). Вычисления производились с использованием комплекса программ NOISEtte в параллельном режиме с использованием от 200 до 480 вычислительных ядер, при этом использовалось двухуровневое распараллеливание MPI + OpenMP. Расчет одной конфигурации для фиксированного угла установки лопасти и фиксированной скорости вращения ротора занимал порядка одних суток машинного времени.

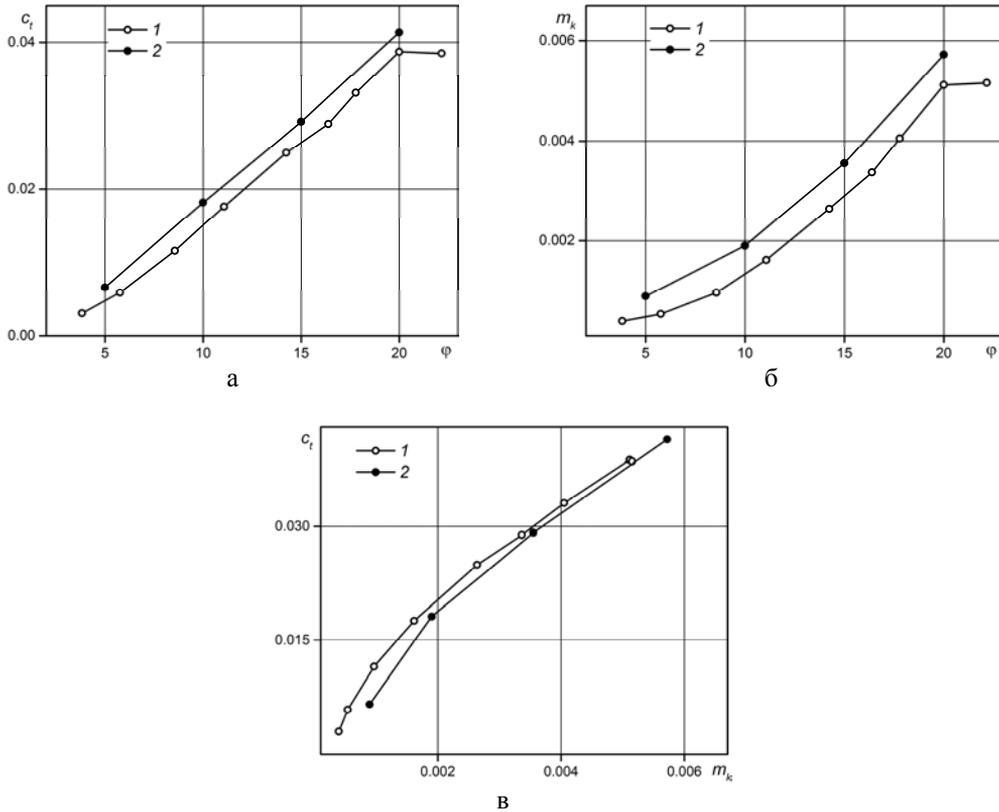


Рис. 8. Коэффициенты силы тяги (а), крутящего момента (б) и поляра винта (в) в расчете несущего винта

5. Заключение

Проведено численное исследование течения вязкого газа, формируемого вокруг модельной конфигурации винт в кольце рулевого винта вертолета. Валидация разработанной численной методики осуществлена путем сравнения численных и экспериментальных данных по аэродинамическим характеристикам винта в отсутствие внешнего потока (в режиме работы на месте). Показано, что реализованный метод применим для моделирования аэродинамических свойств винта.

Литература

1. Абалакин И. В., Козубская Т. К. Схема на основе реберно-ориентированной квазиодномерной реконструкции переменных для решения задач аэродинамики и аэроакустики на неструктурированных сетках // Математическое моделирование. 2013. Т. 25, № 8. С. 109–136.
2. Abalakin I., Bakhvalov P., Kozubskaya T. Edge-Based Reconstruction Schemes for Prediction of Near Field Flow Regions in Complex Aeroacoustics Problems // Int. J. Aeroacoustics. 2014. Vol. 13, N 3–4. P. 207–233.
3. Abalakin I., Bakhvalov P., Kozubskaya T. Edge-Based Reconstruction Schemes for Unstructured Tetrahedral Meshes // Int. J. Num. Meth in Fluids. 2016. Vol. 81, N 6. P. 331–356.
4. Абалакин И. В., Бахвалов П. А., Горобец А. В., Дубень А. П., Козубская Т. К. Параллельный программный комплекс NOISETTE для крупномасштабных расчетов задач аэродинамики и аэроакустики // Вычислительные методы и программирование. 2012. Т. 13, № 2. С. 110–125.
5. Бахвалов П. А. Схема с квазиодномерной реконструкцией переменных на сетках из выпуклых многоугольников для решения задач аэроакустики // Математическое моделирование. 2013. Т. 25, № 9. С. 95–108.