

### Литература

1. Моряков А. В. Алгоритм решения линейной задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений большой размерности с использованием параллельных вычислений // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Физика ядерных реакторов. 2015. Вып. 2. С. 4–14.
2. Моряков А. В., Пылев С. С., Седов А. А., Лубина А. С. Метод решения линейной задачи Коши с использованием параллельных вычислений // Математическое моделирование (в печати).
3. ANSYS, Release 12.1 // ANSYS Inc., Southpointe 275 Technology Drive, Canonsburg, PA 15317, November 2009, ISO 9001:2008, <http://www.ansys.com>.
4. Hageman L. A., Yasinsky J. B. Comparison of Alternating-Direction Time-Differencing Methods with Other Implicit Methods for the Solution of the Neutron Group-Diffusion Equations // Nuclear Science and Engineering. 1969. Vol. 38. P. 8–33
5. Moryakov A. V. The *LUCKY* program for solving the transport equation for neutrons and gamma radiation with the use of parallel technologies // Physics of Atomic Nuclei. 2011. Vol. 74, N 14. P. 1891.
6. Моряков А. В. Программа *LUCKY\_TD* для решения нестационарного уравнения переноса с использованием параллельных вычислений // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Физика ядерных реакторов. 2015. Вып. 2. С. 15–19.
7. Boyarinov V. F., Kondrushin A. E., Fomichenko P. A. Surface harmonic method for two-dimensional time-dependent neutron transport problems of square-lattice nuclear reactors // Proceeding of M&C 2013, Sun Valley, Idaho, USA, May 5–9, 2013.
8. Tyobeka B., Pautz A., Ivanov K. Application of Time-Dependent Neutron Transport Theory to High-Temperature Reactors of Pebble Bed Type // Nuclear Science and Engineering. 2011. Vol. 168. P. 93–114.
9. Tsujita K., Endo T., Yamamoto A. Application of the Multigrid Amplitude Function Method for Time-dependent Transport Equation using MOC // Proceeding of M&C 2013, Sun Valley, Idaho, USA, May 5–9, 2013.
10. Shengyi Si. Algorithm Development and Verification of UASCM for Multi-dimension and Multi-group Neutron Kinetics Model // PHYSOR 2012, Knoxville, Tennessee, USA, April 15–20, 2012.
11. [Electronic resource] Mode of Access: <https://www.jscc.ru>.

## О ПРЕДСТАВЛЕНИИ СКВАЖИН В ЧИСЛЕННЫХ МОДЕЛЯХ ФИЛЬТРАЦИИ

*А. И. Никифоров, Р. В. Садовников, З. Э. Хайруллин*

Институт механики и машиностроения Казанского научного центра РАН, г. Казань

### Введение

В сеточных моделях продуктивные пласты обычно представляются в виде набора блоков, размеры которых значительно больше характерного размера скважин (радиуса скважин), и которые характеризуются некоторыми средними параметрами: пористостью, проницаемостью, нефтенасыщенностью и т. д. Эффективность численных моделей фильтрации в нефтяных пластах во многом определяется способом интерпретации работы скважин. Существуют два основных способа – это моделирование скважины точечным источником с введением поправки к сеточному давлению для блока, содержащего скважину, которая вычисляется с использованием предположения об осерадиальности течения к скважине (рис. 1,а) [1–6], и локальное сгущение сетки в окрестности скважины с явным выделением ее контура (рис. 1,б) [7, 8].

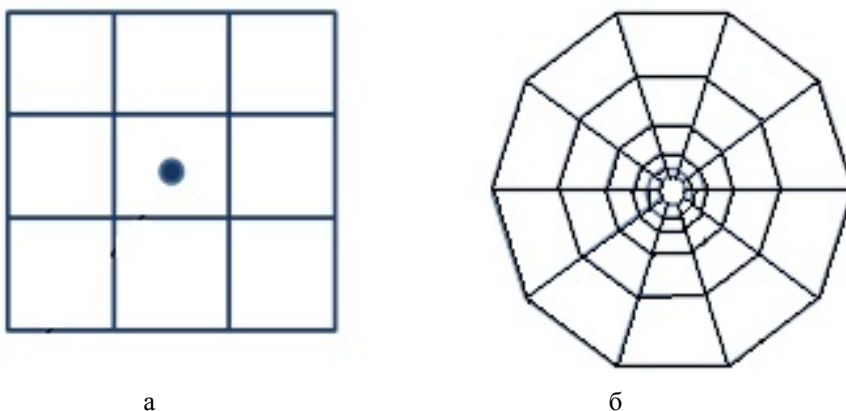


Рис. 1. Два возможных способа моделирования скважины

В настоящей работе, в рамках первого подхода, получена поправка к сеточному давлению при численном решении задач фильтрации на неструктурированной сетке в плоскость  $(x, y)$ , представляющей собой диаграмму Вороного, построенной на основе триангуляции Делоне.

## 1. Метод геометризации моделируемого объекта

Полагается, что моделируемый объект сложен из нескольких пропластков, которые могут быть разобщены, разделены слабопроницаемой перемычкой или смыкаться между собой. Скважины могут вскрывать все или отдельно взятые пропластки. Резервуар может иметь либо непроницаемую границу, либо проточную.

### 1.1. Схематизация объекта

Резервуар представляется в виде набора блоков. Для этого по напластованию залежь представляется в виде набора из  $N$  слоев. Слои могут совпадать с реальными пластами, представлять отдельные пласты в виде набора слоев или объединять схожие по строению пласты в один слой. Область течения в плане разбивается на  $M$  подобластей (блоков, ячеек), ограниченных ломанными линиями (в зависимости от геологических условий залегания коллектора и его свойств, от системы размещения скважин).

### 1.2. Построение расчетной сетки

Подобласти в плане представляют собой неструктурированную сетку, образованную многоугольниками. Моделирование с использованием неструктурированных сеток требует большего машинного времени, чем моделирование с применением структурированных сеток, однако, возможность учесть структурные особенности потоков в отдельных зонах коллектора компенсирует этот недостаток.

Разбиение на подобласти производится с применением триангуляции Делоне и диаграммы Вороного.

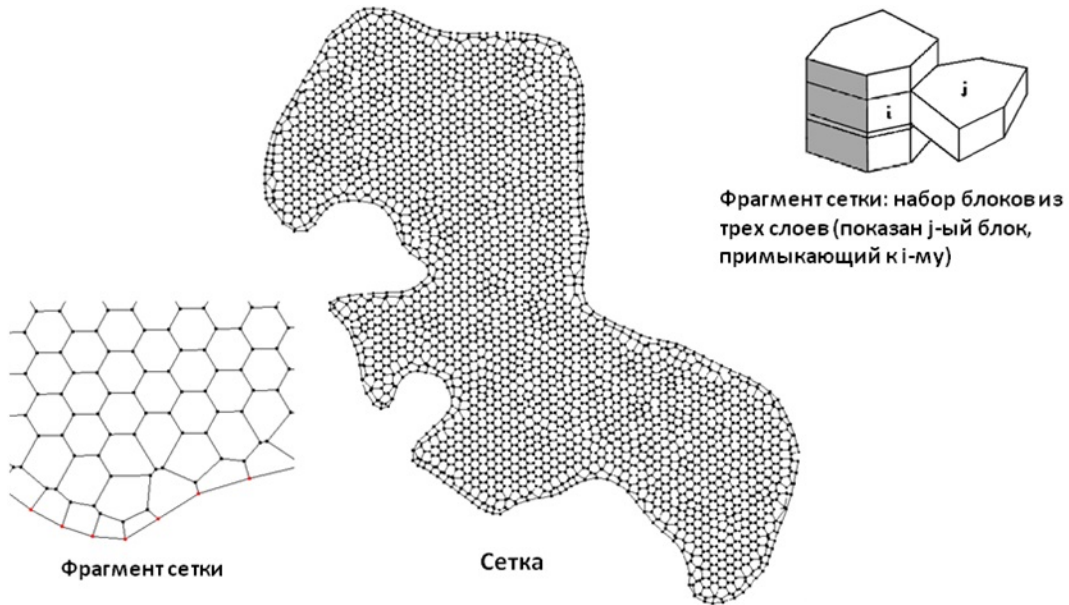


Рис. 2. Пример неструктурированной сетки

Триангуляция Делоне имеет тесную связь и взаимно однозначное соответствие с диаграммой Вороного – если соединить ребрами точки, области Вороного которых граничат друг с другом, полученный граф будет являться триангуляцией Делоне.

При выполнении триангуляции обычно предъявляются следующие требования: треугольники должны быть близки к равносторонним (не должно быть острых углов) и соседние треугольники не должны сильно отличаться по площади. В двумерной области триангуляция Делоне разбивает плоскость на треугольники, по возможности избегая слишком острых и слишком тупых углов, при этом максимизирует минимальное значение углов треугольников. Для каждого треугольника все другие узлы лежат вне описанной окружности (рис. 3).

Многоугольник Вороного: для узла все точки внутри многоугольника лежат ближе к этому узлу, чем к любому другому. Сторона многоугольника Вороного – перпендикуляр к середине отрезка, соединяющего два соседних узла (две вершины треугольника в триангуляции Делоне) (рис. 4).

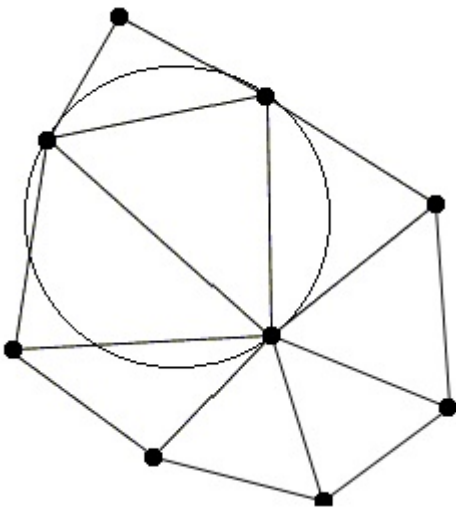


Рис. 3. Триангуляция Делоне

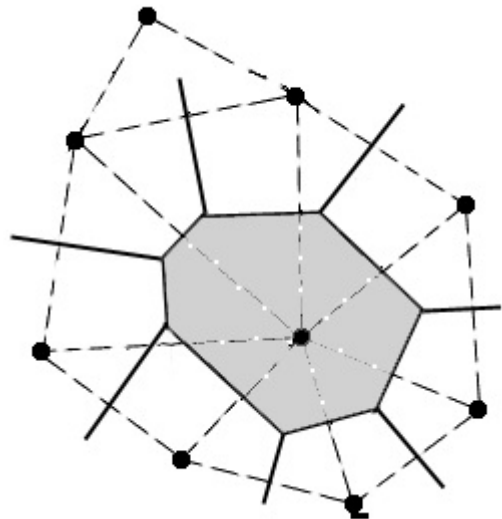


Рис. 4. Расчетная ячейка (вид сверху). Диаграмма Вороного

Параметры пластовой системы (толщины, коэффициенты пористости, проницаемости и нефтенасыщенности) считаются постоянными на каждой ячейке.

## 2. Аппроксимация скважины

### 2.1. Однофазное течение

При аппроксимации скважины на неструктурированной сетке используем подход Писмана [3]. Предположим, что в ближайшей окрестности скважины

- 1) среда несжимаемая;
- 2) пласт однородный, постоянной толщины  $H$  и имеет проницаемость  $k$ ;
- 3) жидкость однофазная;
- 4) течение к скважине осерадальное.

Уравнение для давления на  $i$ -м сеточном блоке можно представить в виде

$$\sum_{j=1}^M \frac{k_{ij}}{\mu} \frac{|A_{ij}|}{L_{ij}} (P_i - P_j) = q_i,$$

где  $q_i$  – дебит скважины с  $i$ -го блока,  $A_{ij}$  – площадь грани, разделяющей  $i$  и  $j$  блоки;  $L_{ij}$  – расстояние между центрами  $i$  и  $j$  блоков;  $M$  – количество блоков, примыкающих к  $i$ -му блоку. Будем считать, что давления на всех примыкающих блоках одинаковы, также одинаковы расстояния  $L_{ij}$  и площади проточных граней  $A_{ij}$  (рис. 1),

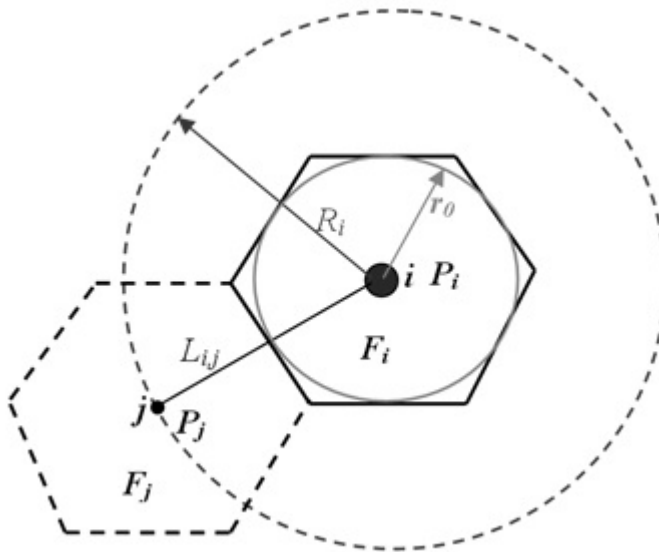


Рис. 5. Схема для аппроксимации скважины

тогда

$$M \frac{k_{ij}}{\mu} \frac{|A_{ij}|}{L_{ij}} (P_i - P_j) = q_i. \quad (1)$$

Чтобы исключить давление в точке  $j$ , воспользуемся аналитическим решением для давления в круговом пласте с центрально расположенной скважиной радиуса  $r_c$ :

$$P(r) = P_z - q_i \frac{\mu \ln(r/r_c)}{2\pi k_{ij} H},$$

где  $P_z$  – забойное давление.

Полагая  $r = R_i = L_{ij}$ , получим

$$\frac{2\pi k_{ij} H}{\mu \ln(R_i/r_c)} (P_z - P_j) = q_i$$

и

$$P_j = P_z - q_i \frac{\mu \ln(R_i/r_c)}{2\pi k_{ij} H}.$$

Подставляя  $P_j$  в (1), получим

$$M \frac{k_{ij}}{\mu} \frac{|A_{ij}|}{R_i} \left( P_i - P_z + q_i \frac{\mu \ln(R_i/r_c)}{2\pi k_{ij} H} \right) = q_i,$$

откуда

$$q_i = \frac{2\pi H k_{ij}}{\mu \left[ \frac{2\pi H R_i}{M |A_{ij}|} - \ln(R_i/r_c) \right]} (P_i - P_z).$$

В случае правильного четырехугольника:  $M = 4$ ,  $R_i = \Delta x$ ,  $|A_{ij}| = H \Delta x$

$$q_i = \frac{2\pi H k_{ij}}{\mu \left[ \frac{\pi}{2} - \ln(R_i/r_c) \right]} (P_i - P_z),$$

а это формула Писмана в случае блока, имеющего форму квадрата в плане.

Длина стороны правильного многоугольника равна  $a_{ij} = 2r_0 \operatorname{tg}(\pi/M)$ , где  $r_0 = \sqrt{\frac{F_i}{M \operatorname{tg}(\pi/M)}}$  – радиус вписанной окружности,  $F_i$  – площадь многоугольника. При сделанных предположениях площадь боковой грани  $|A_{ij}| = a_{ij} H$ , тогда

$$q_i = \frac{2\pi H k_{ij}}{\mu \left[ \frac{\pi R_i}{M r_0 \operatorname{tg}(\pi/M)} - \ln(R_i/r_c) \right]} (P_i - P_z)$$

или

$$q_i = \frac{2\pi H k_{ij}}{\mu \left[ \ln(R_i/r_c) - \frac{\pi R_i}{\sqrt{M F_i \operatorname{tg}(\pi/M)}} \right]} (P_z - P_i).$$

Если скважина вскрывает  $n$  блоков, то ее дебит определится суммой дебитов с этих блоков:

$$q = \sum_i^n \frac{2\pi H k_{ij}}{\mu \left[ \ln(R_i/r_c) - \frac{\pi R_i}{\sqrt{M F_i \operatorname{tg}(\pi/M)}} \right]} (P_z - P_i).$$

Последнее уравнение может быть модифицировано с целью учета скинфактора  $s$ :

$$q = \sum_i^n \frac{2\pi H k_{ij}}{\mu \left[ \ln(R_i/r_c) - \frac{\pi R_i}{\sqrt{M F_i} \operatorname{tg}(\pi/M)} + s_i \right]} (P_z - P_i).$$

## 2.2. Многофазное течение

В случае многофазного будем считать справедливыми допущения, сделанные для однофазного течения, которые дополним предположением, что насыщенность блока фазами зависит только от времени. Тогда уравнение для давления для  $l$ -й фазы на  $i$ -м сеточном блоке будет иметь вид:

$$\sum_{j=1}^M \frac{k_{ij} f_{l,i}}{\mu_l B_{l,i}} \frac{|A_{ij}|}{L_{ij}} (P_{l,i} - P_{l,j}) = q_{l,i},$$

где  $f_l$ ,  $\mu_l$ ,  $B_l$  и  $q_{l,i}$  – относительная фазовая проницаемость, вязкость, объемный коэффициент и дебит скважины для  $l$ -й фазы. Видно, что отличие от однофазного случая только в проводимости блока и после замены  $\frac{k_{ij}}{\mu}$  на  $\frac{k_{ij} f_l}{\mu_l B_l}$  в многофазном случае вместо (6) будем иметь

$$q_l = \sum_i^n \frac{2\pi H k_{ij} f_{l,i}}{\mu B_{l,i} \left[ \ln(R_i/r_c) - \frac{\pi R_i}{\sqrt{M F_i} \operatorname{tg}(\pi/M)} + s_i \right]} (P_z - P_{l,i}).$$

## 3. Другие возможности аппроксимации скважины

Для установления связи между сеточным и забойным давлениями имеются и другие возможности. Две такие возможности приведены ниже.

### 3.1. Давление среднее на блоке со скважиной

Забойное давление можно определить из условия равенства сеточного давления среднему давлению, определяемому потенциалом, т. е.

$$P_i = \frac{\iint_{\Omega_i} P(r) d\Omega}{|\Omega_i|},$$

где  $|\Omega_i|$  – площадь блока со скважиной в плане.

### 3.2. Давление на границе блока со скважиной, полученное интерполяцией

Чтобы исключить давление  $P_j$ , вновь воспользуемся аналитическим решением для давления в круговом пласте с центрально расположенной скважиной. Потребуем, чтобы давление на границе, разделяющей  $i$ -й и  $j$ -й блоки, было равно давлению, полученному линейной интерполяцией сеточных давлений в этих блоках:

$$\frac{P_i(R_i - r_0) + P_j r_0}{R_i} = P_z - q_i \frac{\mu \ln(R_i/r_c)}{2\pi k_{ij} H},$$

откуда

$$P_j = \frac{P_z R_i - P_i(R_i - r_0)}{r_0} - q_i \frac{R_i \mu \ln(R_i/r_c)}{2r_0 \pi k_{ij} H}.$$

## Литература

1. Вахитов Г. Г. Эффективные способы решения задач разработки неоднородных нефтеводоносных пластов. М.: Гостоптехиздат, 1963.
2. Чекалин А. Н. Численное решение задач фильтрации в водонефтяных пластах. Казань: Изво Казанского университета, 1982.
3. Peaceman D. W. Interpretation of Well-Block Pressures in Numerical Reservoir Simulation // SPE Journal. 1978. Vol. 18. P. 183–194.
4. Peaceman D. W. Interpretation of well-block pressures in numerical reservoir simulation with nonsquare grid blocks and anisotropic permeability // SPE Journal. 1983. Vol. 23, N 3. P. 531–543.
5. Ding Yu, Renard G. A New Representation of Wells in Numerical Reservoir Simulation // SPE Reservoir Engineering. May 1994. P. 140–144.
6. Азиз Х., Сеттари Э. Математическое моделирование пластовых систем. М.: Недра, 1982.
7. Forsyth P. A. A Control-Volume, Finite-Element Method for Local Mesh Refinement in Thermal Reservoir Simulation // SPE Reservoir Engineering. November 1990. P. 561–566.
8. Губайдуллин Д. А., Никифоров А. И., Цапаев А. В. Алгоритмы распараллеливания на сгущающихся сетках в задаче трехфазной фильтрации // Вычислительные методы и программирование. 2007, № 8. С. 360–367.

## МОДУЛЯРНО-ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА ДЛЯ МАССОВЫХ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

*И. П. Осинин, В. С. Князьков, Т. В. Князькова*

Вятский государственный университет, г. Киров

### 1. Введение

Крупные задачи, критичные к скорости вычислений, возникают в самых разнообразных областях: в различных сферах промышленности, моделирования климата, в физике, космологии и многих других. Их решение с использованием средств вычислительной техники требует постоянного повышения скорости вычислений, что особенно актуально при создании систем рекордной производительности. На сегодняшний день большинство этих задач решается с использованием кластерных решений.

При этом известны такие традиционные пути повышения быстродействия, как совершенствование техпроцесса, например, создание трехмерных транзисторов, совершенствование алгоритмов выполнения программ, например, распараллеливание вычислений. Однако резерв повышения производительности заложен в ускорении выполнения самих вычислительных операций, например, при применении модулярной арифметики на базе системы остаточных классов (СОК). Естествен-