

3. Янилкин Ю. В., Шмелев В. А., Колобянин В. Ю., Беляев С. П. Монотонный метод частиц для моделирования двумерных газодинамических течений // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2012. Вып. 3. С. 3–14.

4. Янилкин Ю. В., Шанин А. А., Ковалев Н. П. и др. Методика ЭГАК для расчетов двумерных течений многокомпонентной среды // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1993. Вып. 4. С. 69–75.

5. Дарова Н. С., Дибиров О. А., Жарова Г. В., Шанин А. А., Янилкин Ю. В. Методика ЭГАК. Лагранжево-эйлерова методика расчета двумерных газодинамических течений многокомпонентной среды // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1994. Вып. 2. С. 51–58.

6. Морозов В. Г., Карпенко И. И., Куратов С. Е. и др. Теоретическое обоснование феноменологической модели ударно-волновой чувствительности ВВ на основе ТАТБ // Химическая физика. 1995. Т. 14, № 2–3.

7. Морозов В. Г., Дмитриева Л. В., Карпенко И. И., Корепова Н. В. Численное моделирование по методике Д возбуждения детонации в ВВ на основе ТАТБ ударом тонкой летящей пластины // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1999. Вып. 2.

8. Торопова Т. А., Янилкин Ю. В. Методика расчета двумерных течений многокомпонентной среды с учетом прочностных свойств среды // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1994. Вып. 4. С. 58–66.

9. Код ЭГИДА-2D для моделирования двумерных задач: Учебное пособие. В 2 томах. Том 1 / Под ред. Ю. В. Янилкина. Саров: ФГУП «РФЯЦ ВНИИЭФ», 2008.

## АЛГОРИТМЫ ПОСТРОЕНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ НЕСТРУКТУРИРОВАННЫХ СЕТОК НА ОСНОВЕ ПОВЕРХНОСТНОЙ СЕТКИ ДЛЯ МЕТОДИКИ ТИМ

*А. К. Шмелева, А. А. Воропинов*

Российский Федеральный Ядерный Центр –  
Всероссийский НИИ экспериментальной физики, г. Саров

При решении трехмерных задач механики сплошной среды в областях сложной формы начальная геометрия часто задается в виде поверхностной сетки, а возмущения в системе – в виде граничных условий. В связи с этим наиболее важно построение качественной расчетной сетки, особенно вблизи границ. В данной работе описаны два подхода к построению трехмерных неструктурированных сеток на основе поверхностной сетки, реализованные в рамках методики ТИМ [1]:

1. Построение сетки приграничного слоя.
2. Построение сетки на основе диаграммы Вороного с расстановкой центров от поверхности.

### Построение сетки приграничного слоя

Для построения каждого слоя требуется определять положение новых узлов сетки при заданном отступе  $h$ . Для этого для каждого узла поверхностной сетки  $Vert_i$  делается смещение на величину  $h_i = h\delta_i$  по направлению нормали узла. Здесь используется коэффициент сдвига узла  $\delta_i$  – величина, определяющая, на какое расстояние переместится новый узел относительно положения

старого узла в зависимости от углов между нормальными граней старого узла. Если брать коэффициент сдвига постоянным, то на изломах поверхности может получиться сетка плохого качества. Пример показан на рис. 1.

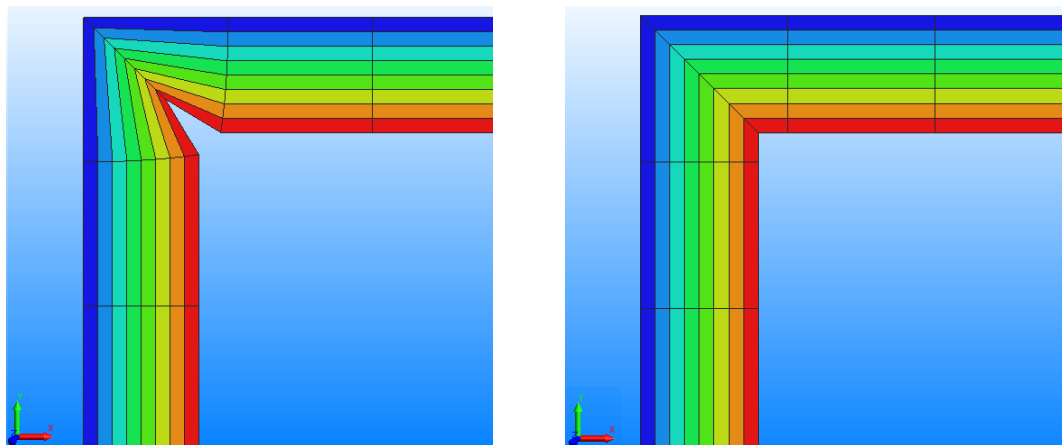


Рис. 1. Сечение сетки при постоянном(слева) и переменном коэффициенте сдвига узлов

Для определения коэффициента сдвига в двумерном случае была выбрана формула:

$$\delta_i = \left( \cos \frac{\alpha_i}{2} \right)^{-1}, \quad (1)$$

где  $\alpha_i$  – угол между нормальными.

В трехмерном случае вычисления усложняются: надо знать все грани, содержащие данный узел и попарно рассматривать формулу (1) для нормалей граней, имеющих общее ребро (рис. 2). Эту формулу надо применять в плоскости, ортогональной их общему ребру – то есть нужно найти проекцию нормали на эту плоскость:

$$\delta_i = \frac{k}{\sum_{m=1}^k \text{Pr}_{\pi_m} \bar{n} \cos \frac{\alpha_{im}}{2}},$$

где  $k$  – количество ребер, сходящихся в узле;  $\pi_m$  – плоскость, ортогональная ребру  $Edge_m$ .

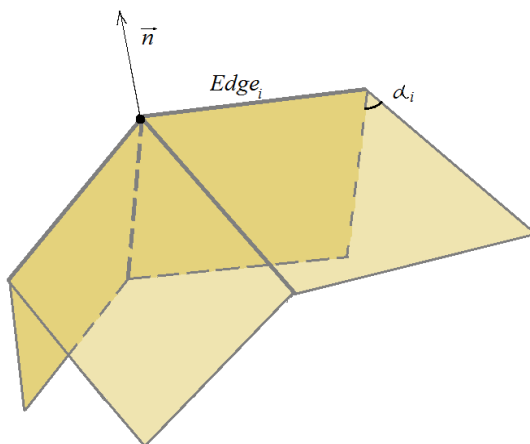


Рис. 2. Определение коэффициента сдвига узла

После вычисления всех коэффициентов  $\delta_i$  формируется первый слой сетки. Для построения следующих слоев определяются грани трехмерной сетки, по которым производится дальнейшее наращивание. Эти грани объединяются в новую поверхность. Далее, аналогично построению первого слоя, для узлов полученной поверхности определяются нормали и коэффициенты  $\delta_i$ ; к текущей трехмерной сетке добавляется новый слой, сформированный от полученной поверхности.

Следует отметить, что на каждом шаге производится проверка сетки на предмет самопересечений. Если возникают самопересечения граней, то последний слой не учитывается и построение сетки прекращается.

На рис. 3 изображена сетка, построенная для поверхности куба со стороной 1 с использованием данного алгоритма при  $h = 0,01$ . Слева показан фрагмент сетки с постоянным коэффициентом сдвига узлов, справа – с коэффициентом сдвига, зависящим от угла.

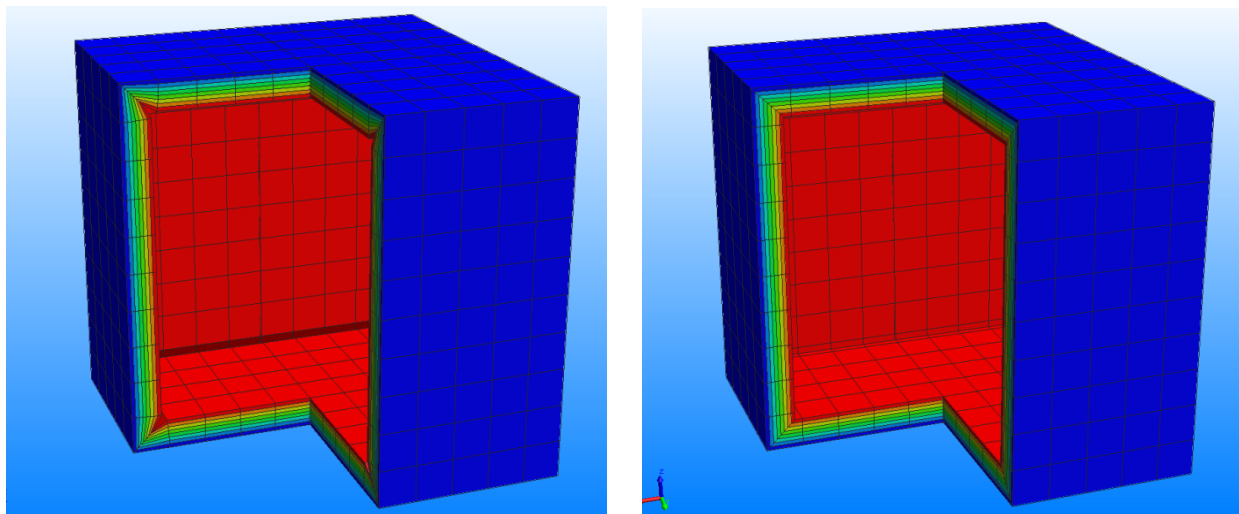


Рис. 3. Фрагмент сетки, полученной с постоянным коэффициентом сдвига узлов (слева) и коэффициентом сдвига узлов, зависящим от угла

На рис. 4 показан вид исходной поверхности (габаритные размеры:  $254 \times 255 \times 254$ ). Для данной поверхности была построена сетки приграничного слоя, состоящая из 10 слоев с шириной слоя  $h = 0,01$ , фрагменты которой показаны на рис. 5.

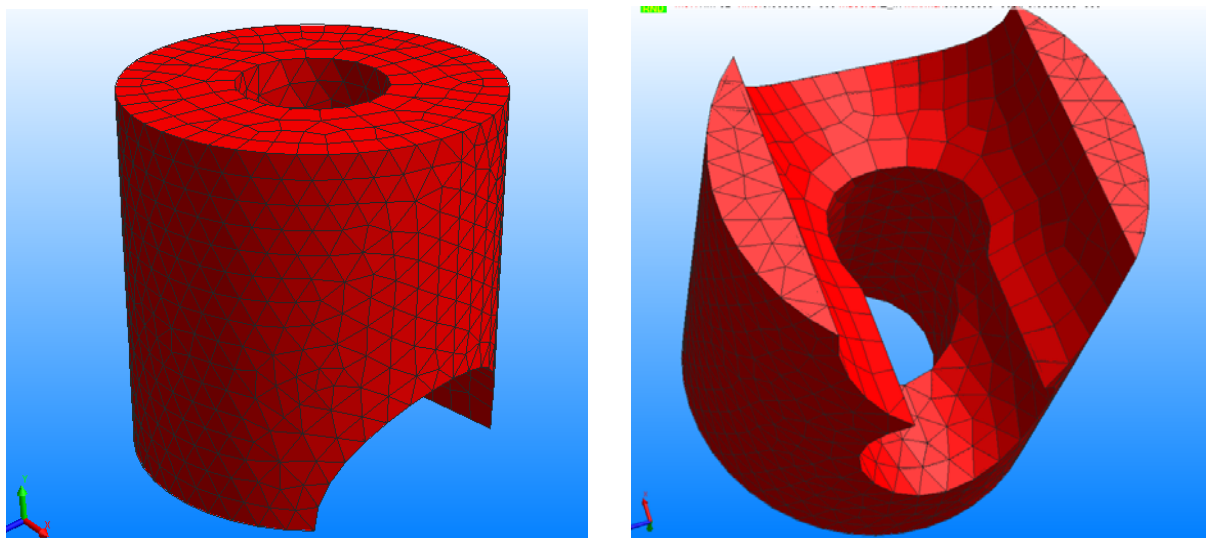


Рис. 4. Вид исходной поверхности с различных углов обзора

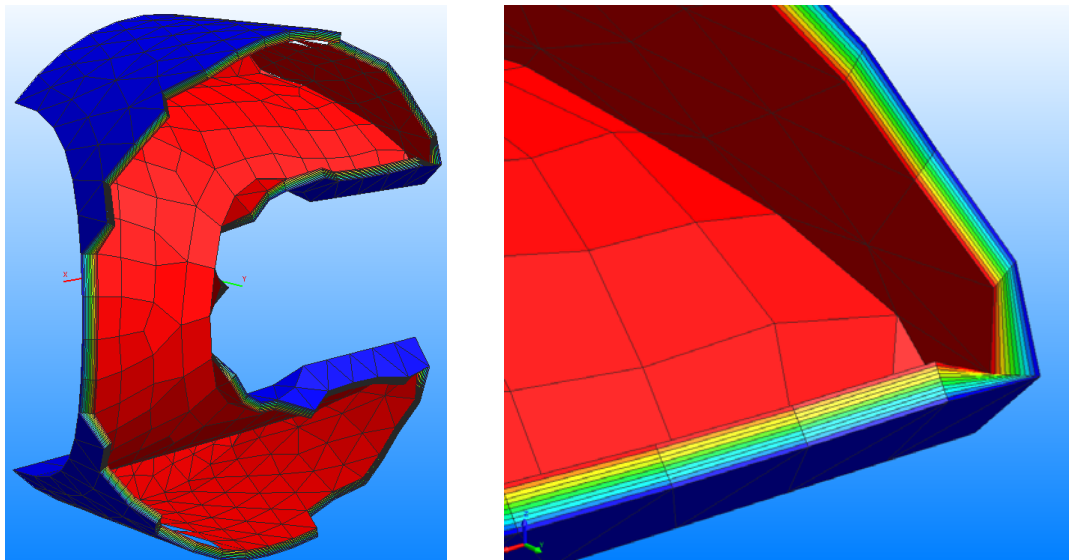


Рис. 5. Фрагменты полученной сетки

### Сетка на основе диаграммы Вороного с расстановкой центров от поверхности

Напомним, что диаграмма Вороного [2] определяется следующим образом:

Пусть задано множество  $S$  из  $n$  точек  $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  в пространстве  $R^3$ . Диаграммой Вороного  $V(S)$  множество  $S$  называется разбиение пространства на  $n$  ячеек Вороного  $V(i)$ , каждая из которых характеризуется тем, что внутренние точки ячейки  $V(i)$  лежат ближе к точке  $p_i$ , чем к любой точке из  $S$ , отличной от  $p_i$ :

$$V(p_i) = V(i) = \{r : r \in R^3, d(r, p_i) \leq d(r, p_j), j \neq i\}.$$

Таким образом, в данной постановке  $V(i)$  – выпуклый многогранник, являющийся пересечением полупространств  $H(p_i, p_j)$ , которые определяются плоскостью, такой, что отрезок  $[p_i, p_j]$  делится пополам и эта плоскость перпендикулярна отрезку.

Основываясь на этих свойствах диаграммы Вороного можно корректно описать границу будущей сетки, расставляя центры ячеек парами на одинаковом расстоянии  $\delta$  от поверхности во внешнем и внутреннем направлении.

Тогда общий алгоритм построения сетки следующий:

1. Анализ качества исходной поверхности и ее последующее изменение.
2. Формирование списка основных центров (полученных с использованием данных о поверхности).
3. Формирование списка дополнительных центров (полученных с помощью распределений).
4. Построение диаграммы Вороного по набору полученных центров.
5. Удаление внешнего слоя ячеек.
6. Преобразования полученной сетки.

Рассмотрим подробнее каждый из этапов построения сетки.

1. Качество исходной сетки напрямую влияет на качество получаемой, а в некоторых случаях даже на саму возможность ее построения. На этапе анализа проводится проверка поверхностной сетки на предмет самопересечений, удаление «двойных» узлов, определение списка граней для измельчения (границы на узких участках сетки, границы большой площади и т. д.) и дробление таких граней на четырехугольники, переход к плоским граням. Также проводится определение линии излома

поверхности (совокупности всех ребер поверхностной сетки, разделяющих грани, двугранный угол между которыми превосходит  $\pi/3$ ) и вычисление нормалей для граней.

Рис. 6 и 7 иллюстрируют необходимость проведения данных процедур. На рис. 6 слева показана поверхностная сетка в исходном виде, слева – то, что получилось после ее изменения. Габаритные размеры:  $10 \times 12,9 \times 6,5$ .

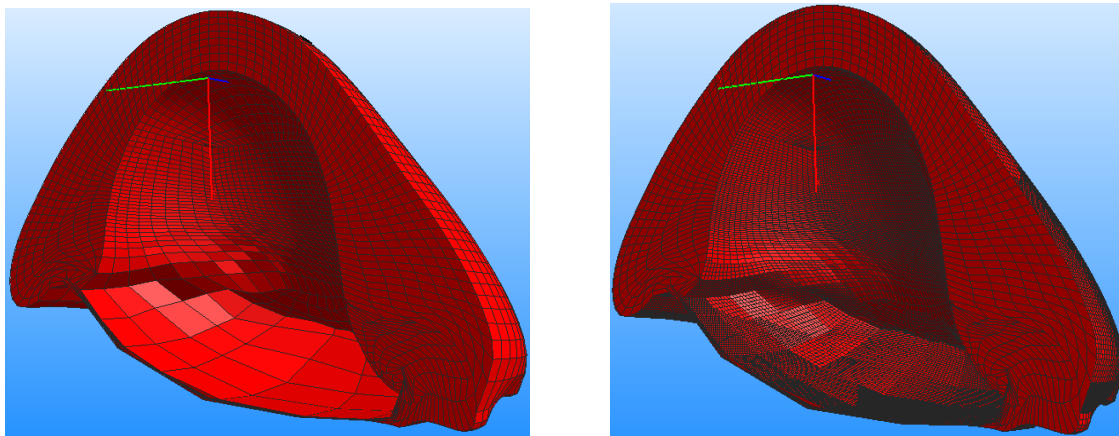


Рис. 6. Исходная (слева) и измененная поверхности

На рис. 7 показаны сетки на основе диаграммы Вороного, которые были получены для поверхностей с рис. 6 с отступом  $\delta = 10^{-4}$ . Слева показана сетка для исходной поверхности, справа – для измененной. Из рисунков видно, что без дробления поверхности построить корректно сетку на узких участках геометрии невозможно.

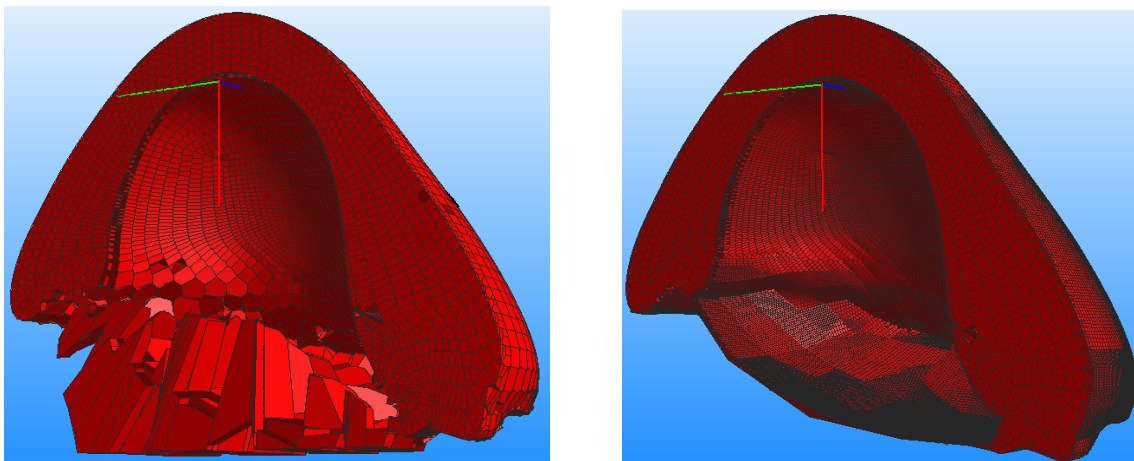


Рис. 7. Полученные сетки для исходной (слева) и измененной поверхности

2. Основные центры вводятся попарно и откладываются на одинаковом расстоянии от какой-либо точки исходной поверхности по направлению нормали грани, которой принадлежит эта точка. Такую точку можно выбрать несколькими способами. Лучше всего себя зарекомендовал способ вычисления координат основных центров через арифметические центры граней поверхности. Однако для построения сеток в существенно трехмерных геометриях таких центров не всегда бывает достаточно. В случае, если на изломах геометрии поверхностная сетка имеет сильно вытянутые вдоль излома грани, необходимо добавить центры вдоль этой грани, иначе сетка не будет описывать геометрию корректно. Если в одном узле поверхностной сетки сходится большое число ребер, то есть возможность центры будущей сетки откладывать и от этого узла.

3. Чтобы вычислить координаты дополнительных центров, вначале генерируются координаты точек в параллелепипеде, обрамляющем поверхность. Далее нужно избавиться от центров, мешающих построению сетки. Во-первых, все центры должны находиться внутри поверхности. Во-вторых, дополнительные центры не должны оказывать влияние на границу будущей сетки, поэтому центры должны располагаться на некотором расстоянии от границы (поверхности). Следует отметить, что для сортировки центров применяется быстрый геометрический поиск с разбиением пространства на кубы [3].

4. Определившись окончательно с расположением центров, строим сетку диаграммы Вороного в минимальном координатном параллелепипеде, в который можно вписать набор имеющихся центров. Для построения применяется инкрементный алгоритм, основанный на последовательном добавлении центров в текущую диаграмму.

5. После этого удаляются все ячейки, лежащие снаружи относительно исходной поверхности.

На рис. 8 слева показан фрагмент диаграммы Вороного для исходной поверхности в виде эллипсоида. Справа показан тот же фрагмент сетки после удаления слоя внешних относительно поверхности ячеек.

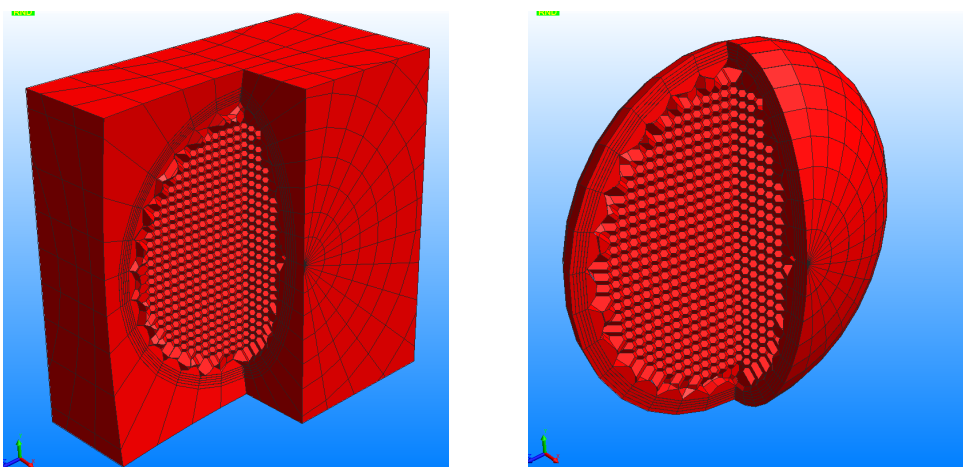


Рис. 8. Фрагмент сетки до (слева) удаления слоя внешних ячеек

6. Отдельное внимание хочется уделить вопросу улучшения качества сетки на границе.

При построении сетки возникает два вида проблем – некорректное построение сетки на участках излома поверхности и «ступенчатость» на гладких участках. Эти проблемы возникают из-за неравномерного расположения центров граней исходной поверхности.

Чтобы избавиться от проблемы «ступенчатости», производится сжатие малых граней полученной сетки в узел, ребро или совокупность ребер в зависимости от формы грани.

На рис. 9 показан фрагмент границы сетки до и после применения этих алгоритмов.

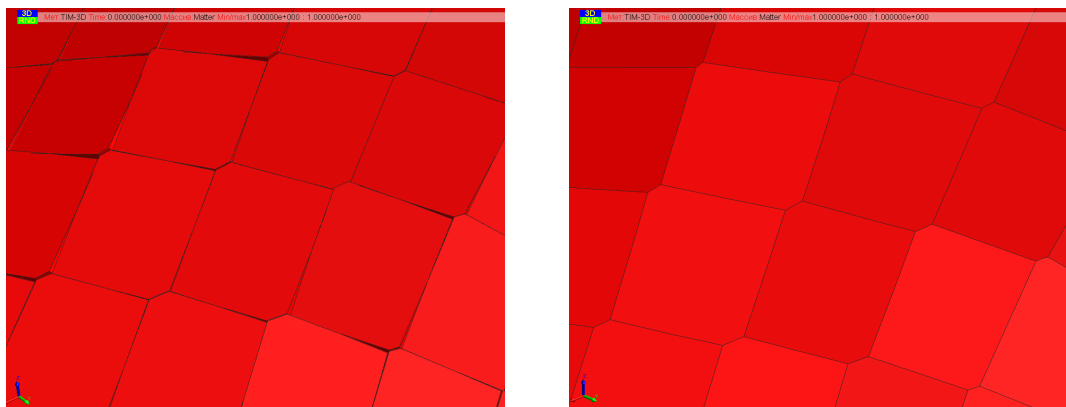


Рис. 9. Граница сетки до (слева) и после сжатия граней

На рис. 10 слева показан фрагмент сетки, построенной на изломе исходной поверхности. Видно, что появляются зубчики и впадины. Чтобы избавиться от этого эффекта, производится описание линии излома на этапе анализа поверхности и дальнейшее отсечение или добавление фрагментов ячеек в сетку. Данный этап преобразования сетки выполняется после построения диаграммы Вороного.

На рис. 10 справа показан фрагмент сетки после преобразований.

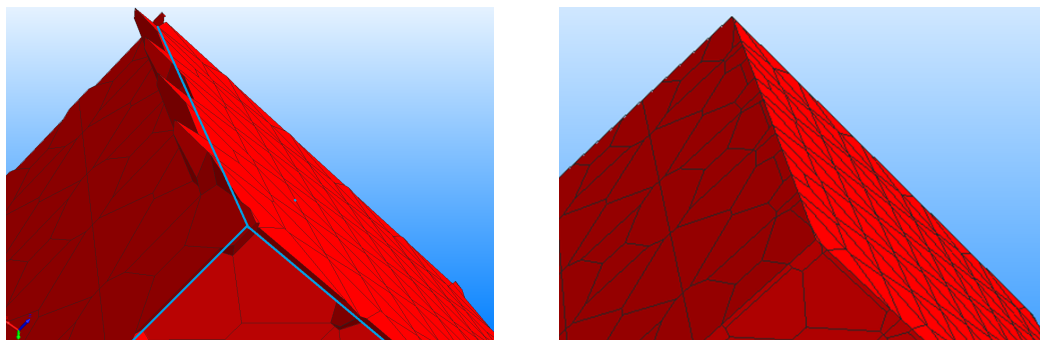


Рис. 10. Сетка до (слева) и после преобразования

С помощью вышеописанного алгоритма были построены трехмерные сетки для ряда поверхностей.

1. Поверхность «трехмерного» креста (рис. 11, слева).

Габаритные размеры области:  $3 \times 3 \times 3$ , отступ:  $\delta = 0,01$ .

Справа на рис. 11 показан фрагмент сетки, полученной для данной поверхности.

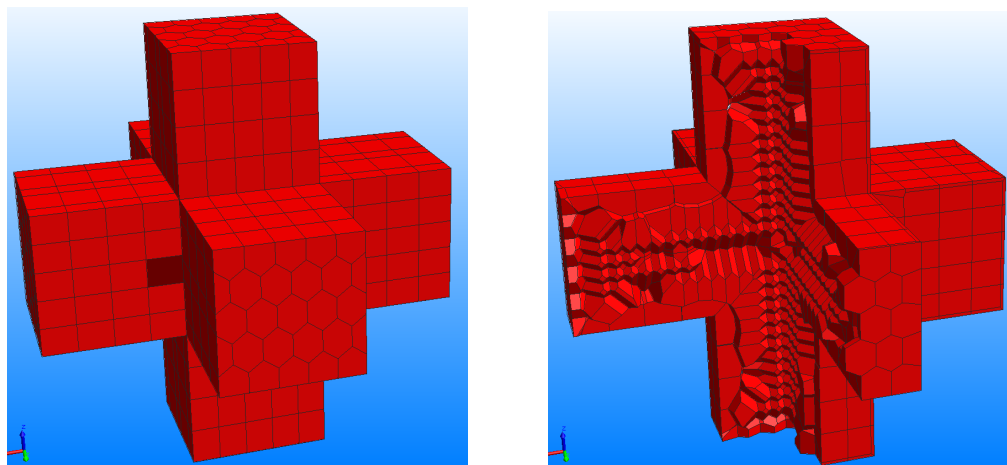


Рис. 11. Поверхность «трехмерного креста» и фрагмент полученной сетки

Из рис. 11 видно, что в приграничном слое получены ячейки большого объема. Это произошло из-за того, что грани поверхности имеют достаточно большие площади.

Информация о том, как изменялась топология сетки, приводится в табл. 1.

Таблица 1

*Информация о топологии полученной сетки*

Информация о топологии сетки	После построения диаграммы Вороного	После деления ячеек на новой границе	После удаления слоя внешних ячеек	После коррекции граничных ячеек
Число ячеек	2660	2919	2046	2046
Число граней	14939	16307	12520	12505
Число узлов	10622	10874	9485	9470

## 2. Поверхность несферической оболочки.

Габаритные размеры области:  $475 \times 276 \times 236$ . Отступ:  $\delta = 1,31$ .

На рис. 12 слева показана исходная поверхность, справа – фрагмент полученной сетки. В табл. 2 приводится информация о топологии сетки и о времени ее построения.

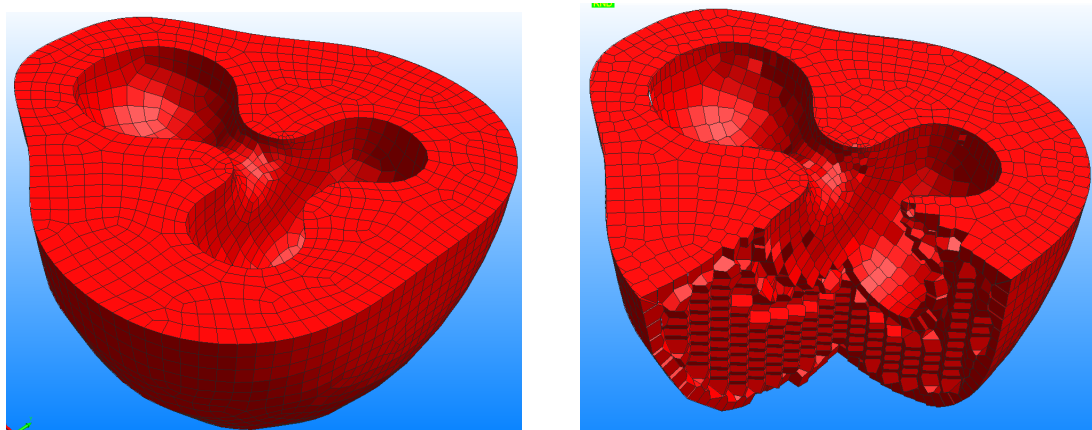


Рис. 12. Поверхность несферической оболочки и фрагмент полученной сетки

Таблица 2

### *Информация о топологии полученной сетки*

Данные о сетке		После построения диаграммы Вороного	После деления ячеек на новой границе	После удаления слоя внешних ячеек	После коррекции граничных ячеек
Информация о топологии сетки	Число ячеек	9083	9586	6283	6283
	Число граней	65506	68822	53525	42243
	Число узлов	55378	57462	49426	39843
Время построения, с		28,66	0,28	0,05	0,31

## 3. Поверхность цилиндра с вырезанными фрагментами.

Габаритные размеры:  $254 \times 255 \times 254$ , отступ  $\delta = 1,8$ . Поверхность показана на рис. 13 (слева) и рис. 4.

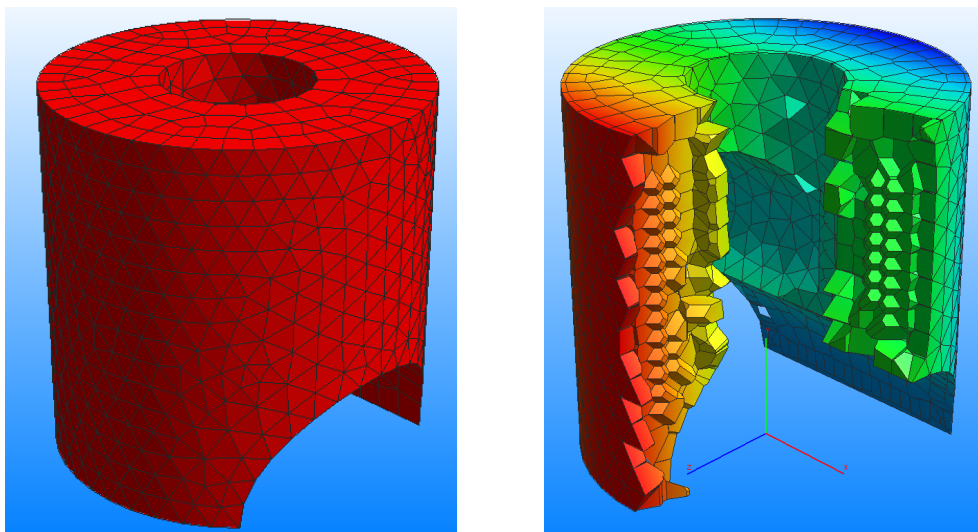


Рис. 13. Исходная поверхность (слева) и фрагмент полученной сетки



На рис. 13 справа показан фрагмент полученной сетки. Видно, что внутренние ячейки являются телами Вороного. Полученная сетка хорошо описывает границу области и линии ее излома.

В рамках данной работы были разработаны и реализованы алгоритмы построения трехмерных сеток на основе поверхностной сетки для методики ТИМ. С их помощью появилась возможность построения сеток в сложных трехмерных геометриях. В качестве перспектив развития можно рассмотреть вопрос улучшения качества сетки на основе диаграммы Вороного на границах, совместное применение обоих методов при построении сеток и распараллеливание этих алгоритмов.

### Литература

1. Соколов С. С., Панов А. И., Воропинов А. А., и др. Методика ТИМ расчета трехмерных задач механики сплошных сред на неструктурированных многогранных лагранжевых сетках // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2005, № 3. С. 37–52.
2. Вороной Г. Ф. Собрание сочинений. Т. 2. – Киев: Изд-во АН УССР, 1952.
3. Шмелева А. К., Воропинов А. А., Новиков И. Г., Шурыгин А. В. Алгоритмы построения неструктурированных сеток с использованием быстрого поиска геометрической близости точек для методики ТИМ // X научно-техническая конференция «Молодежь в науке»: сб. тез. Саров, 1–3 ноября 2011. С. 195.

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАБОТЫ ТОПЛИВНЫХ СИСТЕМ САМОЛЕТОВ

*А. В. Ялозо, И. Л. Матерова, В. В. Курулин, А. С. Козелков, В. Ю. Герасимов*

Российский Федеральный Ядерный Центр –  
Всероссийский НИИ экспериментальной физики, г. Саров

По мере того, как работа самолетов становится эффективнее, надежнее и безопаснее, их конструкция усложняется. Важную роль при разработке и совершенствовании систем самолета играет их экспериментальная отработка. Как правило, проведение экспериментов требует значительных денежных затрат, а в некоторых случаях испытания невозможны. Применение компьютерных технологий для моделирования работы систем в тех или иных режимах эксплуатации позволяет сократить количество проводимых экспериментов и тем самым уменьшить затраты.

В докладе «Математическое моделирование работы топливных систем самолетов» описывается разработанная методика, предназначенная для моделирования одномерных изотермических течений несжимаемой жидкости, которая используется для расчета топливных систем самолетов.

Топливная система обеспечивает подачу топлива из баков к двигателям в заданной последовательности на всех режимах работы самолета и при любом его положении в воздухе [1].

В настоящее время расчет работы топливных систем самолета производится с использованием инженерных приближений и математических пакетов программ.

При моделировании полномасштабных систем, трехмерное моделирование позволяет получить максимально точные результаты, но с точки зрения вычислительных ресурсов оно может оказаться невозможным. Оптимальный подход – использование одномерного моделирования для системы в целом, и трехмерного – для детализации результатов на критически важных компонентах.