

АНИЗОТРОПНАЯ МОДЕЛЬ ЗАМЫКАНИЯ В СМЕШАННЫХ ЯЧЕЙКАХ

Ю. В. Янилкин, О. О. Топорова, В. Ю. Колобянин

Российский федеральный ядерный центр –
Всероссийский НИИ экспериментальной физики, г. Саров

В работе представлена новая анизотропная модель замыкания уравнений лагранжевой газодинамики и упругопластики в смешанных ячейках, содержащих несколько веществ. Модель реализована в методике ЭГАК, проведено численное исследование метода на тестовых задачах. Приводятся полные постановки двух одномерных и одной двумерной задач, а также описание методики обработки полученных результатов. Результаты численного моделирования сравниваются с другой моделью, имеющейся в методике ЭГАК, и аналитическими решениями. Приводятся анализ и обобщение результатов расчетов.

1. Введение

Смешанные ячейки в лагранжево-эйлеровых (ALE) или эйлеровых методах содержат в себе контактные границы (КГ) между различными веществами или же смесь веществ. Далее мы не будем делать разницу между этими двумя методами, имея в виду, что в обоих методах необходимо решать уравнение адвекции, в том числе и в окрестности смешанных ячеек. Многие из этих методов используют двухэтапный подход. На первом этапе рассматриваются уравнения газодинамики или упругопластики без конвективных членов, то есть аппроксимируются члены уравнений, содержащие давление и напряжения. Учет конвективного переноса осуществляется на втором этапе. Из множества подобных методов ниже будем рассматривать лишь ALE методы, содержащие лагранжеву газодинамику и упругопластику в чистом виде, и именно проблема смешанных ячеек на этом этапе и является объектом исследования в данной работе. Отметим, что смешанные ячейки могут содержаться даже в чисто лагранжевых методиках и проблемы, связанные с их наличием, должны решаться и в этом случае. Второе замечание касается того факта, что при использовании неподвижных сеток ALE метод фактически становится эйлеровым.

Далее мы будем, как правило, употреблять термин лагранжева газодинамика (далее просто газодинамика), имея в виду, что в случае упругопластики сюда включаются члены уравнений, связанные с девиатором тензора напряжений. Имеется несколько подходов к решению проблемы смешанных ячеек в газодинамике. При этом мы рассматриваем только односкоростную модель среды. Исторически рассматривались несколько подходов для выделения веществ в смешанных ячейках. Основной подход, который стал главенствующим в настоящее время, основан на полном термодинамическом выделении веществ (далее мы будем использовать термин «компонент», имея в виду, что КГ математически может быть и между одинаковыми веществами, кроме того, одним из компонентов могут быть вакуум и (или) абсолютно твердое тело).

В газодинамике термодинамическими параметрами являются плотность, внутренняя энергия и давление. Если моделируются другие процессы, то количество параметров увеличивается, например, для упругопластики это компоненты девиатора тензора напряжений. Кроме термодинамических параметров в каждой смешанной ячейке вводятся объемные доли (концентрации) компонентов, которые позволяют определять объемы, занимаемые в ячейке тем или иным компонентом. Кроме того, по полю объемных концентраций может быть определено положение КГ внутри смешанной ячейки, которое используется в некоторых моделях.

Данный подход выделения компонентов среды позволяет моделировать смешанные ячейки, содержащие как смеси компонентов, так и КГ между ними. Этот подход является объектом исследований данной работы, далее речь пойдет только о нем, поэтому мы не будем его как-то выделять своим названием.

При использовании смешанных ячеек для уравнений газодинамики необходимы дополнительные замыкающие соотношения, которые, по сути, определяют внутриячеечные (подсеточные) движения компонентов. Большинство известных моделей не требуют информации о положении КГ в ячейке, достаточно информации об объемных (или массовых) концентрациях компонентов и их термодинамическом состоянии [1–15]. Эти модели можно разделить на два класса по количеству вычислительных этапов.

Первый из них основан на одноэтапном введении модели замыкания, **второй**, по сути, является дополнением к первому, и заключается в том, что на этом этапе осуществляется подсеточное взаимодействие компонентов внутри смешанной ячейки.

Основные одноэтапные модели основаны на следующих предположениях: 1 – равенство дивергенций скорости компонентов [16], 2 – равенство давлений компонентов [17], 3 – равенство приращений давлений компонентов [9], 4 – равенство массовых скоростей компонентов после прохождения слабой волны [18], 5 – решение задачи о распаде разрыва в акустическом приближении [10], 6 – метод Типтона [1].

Второй (подсеточный) этап в моделях замыкания 3 и 4 был введен в работе [18]. В этой работе на втором этапе осуществляется релаксация давлений компонентов.

Все указанные выше модели не используют положение КГ внутри смешанной ячейки. Однако имеются модели, в которых информация о положении КГ используется существенным образом, одна из них (IA-SSD) описана в [14]. Подробное изложение этого метода с некоторыми дополнениями дано в работе [19]. В ней предложена двухэтапная модель, на первом этапе которой используется модель 1 о равенстве дивергенций компонентов. На втором этапе происходит движение КГ между компонентами по нормали к ней под действием индивидуальных давлений компонентов с учетом их реальных масс и расстояний между центрами масс. При этом положение КГ восстанавливается по объемным концентрациям, а ее движение осуществляется на основе решения задачи о распаде разрыва в акустическом приближении (фактически это обобщенный метод из работы [10]).

Метод, разработанный на основе этой модели, довольно сложный для реализации и имеет существенное ограничение в случае малых концентраций одного из компонентов (так же, как и метод [10]). Физически это связано с тем, что при расчете задачи о распаде разрыва распространение волн происходит на определенное расстояние, которое должно быть меньше или равно размеру области, занимаемой каждым из компонентов. Так как выбор счетного шага осуществляется исходя из условия Куранта, то необходимое условие может быть нарушено, что приводит к нефизическим результатам (например, к отрицательному значению нового объема компонента). Для устранения этого недостатка авторы разработали дополнительные ограничители для приращений объемов.

Отметим одно общее свойство (вследствие принятых в моделях предположениях) всех указанных выше моделей замыкания. В них движение КГ (определенной или воображаемой) происходит по нормали к КГ, по сути, они являются одномерными и изотропными в том смысле, что сжатия (растяжения) компонентов полагаются одинаковыми во всех направлениях. Данное свойство моделей вполне приемлемо в большинстве приложений, однако имеются задачи (см. ниже), когда оно приводит к существенной погрешности при моделировании.

В настоящей работе предлагается анизотропная модель замыкания (далее модель 7 или модель АСМ – anisotropic closure model), являющаяся дальнейшим развитием моделей 1, 3, 4. Она обладает всеми достоинствами моделей 3, 4, являющихся основными моделями методики ЭГАК [20] при моделировании течений, в которых приемлемо предположение об изотропности, и имеет существенное преимущество перед ними при моделировании более сложных течений. В нашем исследовании мы ограничимся случаем КГ в смешанной ячейке. Случай смеси предполагается рассмотреть в следующей работе авторов.

Ниже мы употребляем термины «модель» и «метод», зачастую не делая между ними разницы. Здесь надо иметь в виду, что под методом мы понимаем алгоритм, реализованный в виде программы, в основе которого лежит та или иная физико-математическая модель.

2. Исходные уравнения

Исходная система уравнений, решаемая на лагранжевом этапе, для упругопластических течений имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{T}, \\ \frac{d\rho_\xi}{dt} &= -\rho_\xi \nabla \cdot \mathbf{u}_\xi, \\ \frac{d\beta_\xi}{dt} &= \beta_\xi (\nabla \cdot \mathbf{u}_\xi - \nabla \cdot \mathbf{u}), \\ \frac{de_\xi}{dt} &= \frac{1}{\rho_\xi} \text{Sp}(\mathbf{T}_\xi \mathbf{D}_\xi), \\ \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \mathbf{u}. \end{aligned} \quad (1)$$

В системе (1) обозначено: $\mathbf{u}(u_x, u_y)$ – скорость, ρ – плотность, $\mathbf{T}(T_{ij})$ – тензор напряжений, $\mathbf{D}(d_{ij})$ – тензор скоростей деформации, e – удельная внутренняя энергия, β – объемная доля (концентрация) вещества ($\beta_\xi = V_\xi/V$), $\mathbf{r}(x, y)$ – радиус-вектор. Индекс ξ означает номер вещества (компонента), отметим также, что в выражении для дивергенции скорости (далее просто дивергенции) он относится не к скорости, а к дивергенции в целом. Компонентами могут быть как различные материалы, так и вакуум, а также абсолютно твердое тело.

Тензор напряжений $T_{ij} = S_{ij} - \delta_{ij}P$ представляется суммой шаровой части (давление P) и девиатора $\mathbf{S}(S_{xx}, S_{yy}, S_{xy}, S_\varphi)$. Для компонентов среды определяются уравнения состояния (УРС)

$$P_\xi = P_\xi(\rho_\xi, e_\xi), \quad (2)$$

и уравнения, выражающие зависимость \mathbf{S}_ξ от \mathbf{D}_ξ

$$f_\xi(\mathbf{S}_\xi, \mathbf{D}_\xi) = 0. \quad (3)$$

Конкретный вид формулы (3) определяется принятой моделью среды.

Используется метод расщепления по физическим процессам, в котором члены, связанные с P , аппроксимируются в лагранжевой газодинамике, а члены, связанные с \mathbf{S}_ξ , – на другом этапе вычислений. В разностной схеме скорость определена в узлах сетки, а остальные величины – в центрах ячеек и для каждого компонента в отдельности. При программной реализации вместо P используется сумма P и искусственной вязкости q, q_ξ , соответственно, для среды в целом и для компонентов.

В системе (1) не определены следующие величины: $q, P, S, q_\xi, \mathbf{S}_\xi, \nabla \cdot \mathbf{u}_\xi$.

Вязкости компонентов q_ξ определяются по формулам из работы [21]. Формулы для общего давления, вязкости и девиатора напряжений имеют следующий вид: $P^{n+1/2} = \sum_\xi \beta_\xi \lambda_\xi P_\xi^{n+1/2}$,

$q^n = \sum_\xi \beta_\xi \lambda_\xi q_\xi^n$, $S^n = \sum_\xi \beta_\xi \lambda_\xi S_\xi^n$, где коэффициент λ_ξ определяется принятой моделью замыкания [22, 23].

Для определения $\nabla \cdot \mathbf{u}_\xi$ и \mathbf{S}_ξ необходимы те или иные замыкающие соотношения, являющиеся следствием различных предположений относительно состояния компонентов в смешанных ячейках. Реализованные в методике ЭГАК модели описаны в [24].

При определении $\nabla \cdot \mathbf{u}_\xi$ необходимо выполнить условие аддитивности приращений объемов, которое имеет вид

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \sum_{\xi} \beta_{\xi} \nabla \cdot \mathbf{u}_{\xi}. \quad (4)$$

Естественным следствием соотношения (4) является $\mathbf{D} = \sum_{\xi} \beta_{\xi} \mathbf{D}_{\xi}$, которое выполняется при

$$\mathbf{D}_{\xi} = \mathbf{D} \cdot \nabla \cdot \mathbf{u}_{\xi} / \nabla \cdot \mathbf{u}. \quad (5)$$

Формула (5) используется для определения \mathbf{D}_{ξ} .

В настоящей работе предлагается анизотропная модель замыкания, являющаяся дальнейшим развитием уже существующих моделей.

3. Анизотропная модель замыкания

3.1. Идея и основы модели

Рассмотрим два предельных случая расположения КГ в ячейке (рис. 1), которая сжимается или растягивается, то есть имеет место не равная нулю дивергенция.

В первом случае (рис. 1,а) движение происходит по нормали к КГ, поэтому здесь пригодны все рассмотренные выше модели 1–6, каждая со своей точностью. Сразу же отметим, что, как показано в работах [9, 11, 18], наименьшей точностью среди всех моделей в этом случае обладает модель 1, основанная на равенстве сжимаемостей компонентов. Кроме того, в указанных работах и в работах [22, 23] показано, что наиболее приемлемой по совокупности большого количества задач является модель 4, основанная на предположении о равенстве массовых скоростей компонентов.

Во втором случае (рис. 1,б) движение происходит вдоль КГ. Это означает, что сжатия или растяжения компонентов происходят в тангенциальном к КГ направлении, таким образом, в этом случае более корректным может стать именно равенство сжимаемостей, то есть модель 1. Действительно, расчеты показывают, что, например, для упругопластической среды применяя модели 2–4 можно получить значительную погрешность, в то время как модель 1 обеспечивает хорошую точность.

Из вышесказанного проистекает неадекватность существующих моделей замыкания 2–6 для моделирования такого рода течений.

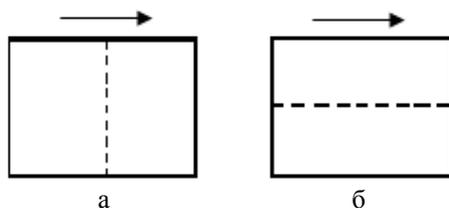


Рис. 1. Два случая расположения КГ по отношению к движению среды

Таким образом, для обеспечения приемлемой точности моделирования двух разных типов течений (в разных направлениях относительно КГ) должны использоваться разные замыкающие соотношения. Для этого предлагается следующая двухэтапная модель АСМ.

На первом этапе в любой смешанной ячейке осуществляется движение среды в целом, в котором все ее неоднородности (в том числе и КГ) полагаются вмороженными. Условие вмороженности с точки зрения замыкания в первом приближении означает равенство дивергенций компонентов.

Второй этап – релаксация давления (и напряжений) на фоне такого движения. В работе [19] для этого используется решение задачи Римана в акустическом приближении (данный подход ранее был реализован в работе [10]), при этом решение не зависит от положения КГ относительно общего движения. В настоящей работе вместо решения задачи Римана предлагается использовать алгоритм выравнивания давлений компонентов из работы [18], при этом степень выравнивания предлагается сделать зависимой от взаимной ориентации направлений движения среды и КГ. В частном случае движения по нормали к КГ релаксация давления наибольшая, а при движении вдоль КГ – наименьшая.

3.2. Описание метода замыкания

При реализации модели АСМ расчет $\nabla \cdot \mathbf{u}_\xi$ на временном шаге делается в два этапа, и общая дивергенция представляется как сумма дивергенций, сосчитанных на этих двух этапах

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_\xi = \nabla \cdot \mathbf{u}_{\xi 1} + \nabla \cdot \mathbf{u}_{\xi 2}. \quad (9)$$

На первом этапе полагается $\nabla \cdot \mathbf{u}_{\xi 1} = \nabla \cdot \mathbf{u}$ в соответствии с моделью замыкания 1.

На втором этапе происходит релаксация давлений компонентов по алгоритму из работы [18] (в своей основе). В этом алгоритме накладывается условие, чтобы оставались неизменными как полная дивергенция смешанной ячейки, так и полная внутренняя энергия. Выравнивание давлений компонентов осуществляется за счет вычисления дополнительных дивергенций компонентов $\nabla \cdot \mathbf{u}_{\xi 2}$ по формулам

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_{\xi 2} = -\Delta P_\xi / \tau \rho_\xi c_\xi^2, \quad (6)$$

где ΔP_ξ определяется выражением $\Delta P_\xi = A(P - P_\xi) c \tau / h$, в котором P – среднее давление, а A – некоторый коэффициент (константа). При получении выражения (6) использовалось известное в адиабатическом приближении соотношение $\Delta P = -\rho c^2 \tau \operatorname{div} \mathbf{u}$.

Множитель $c \tau / h$, равный отношению временного шага к характерному для данной смешанной ячейки времени выравнивания давлений h/c , определяет долю от разницы в давлениях компонентов, на которую произойдет выравнивание.

Для модели АСМ коэффициент A предлагается сделать зависимым от взаимной ориентации направлений движения среды и КГ. Общую дивергенцию разделяем на две составляющие $\nabla \cdot \mathbf{u}_\tau$ и $\nabla \cdot \mathbf{u}_n$, получающиеся разложением скоростей на две компоненты, вдоль КГ и по нормали к ней. И полагаем $A = A_0 (\nabla \cdot \mathbf{u}_n / \nabla \cdot \mathbf{u})$, где A_0 – некоторая константа.

В случае движения по нормали к КГ (рис. 1,а) $\nabla \cdot \mathbf{u}_n = \nabla \cdot \mathbf{u}$ и коэффициент выравнивания давлений $A = A_0$, в этом случае релаксация давлений наибольшая. При движении вдоль КГ (рис. 1,б) $\nabla \cdot \mathbf{u}_n = 0$ и коэффициент выравнивания давлений $A = 0$, то есть выравнивание давлений полностью отсутствует, и работает только первый этап метода замыкания.

Коэффициент A_0 должен определяться по результатам тестовых расчетов. Мы определяли его по результатам расчетов нескольких задач, варьируя его значение от 0,5 до 2. И остановились на значении $A_0 = 1$. Заметим, что такое же значение для константы A было выбрано в работе [18] для второго этапа в моделях 3 и 4.

При фиксированном объеме смешанной ячейки выравнивание давлений с помощью описанных дополнительных дивергенций компонентов совместно с требованием неизменности полной внутренней энергии приводит к некоторому обмену внутренней энергией между компонентами. Действительно, если представить суммарное изменение внутренних энергий компонентов в виде

$$\Delta E = -P_+ \Delta V_+ - P_- \Delta V_-, \quad (7)$$

где P_+ – среднее давление тех компонентов, у которых давление превышает общее среднее давление, и ΔV_+ – изменение объема этих компонентов. При выравнивании давлений такие вещества расширяются, поэтому $\Delta V_+ > 0$. Аналогично определены и P_- и ΔV_- . При этом $\Delta V_- < 0$. Так как из условия сохранения объема ячейки $\Delta V_+ = |\Delta V_-|$, а по определению $P_+ > P_-$, то при проведении процедуры выравнивания давлений изменение внутренней энергии ячейки, определяемое формулой (7), будет всегда отрицательным. Такая ситуация связана с тем, что при движении контактных границ возникают внутренние (подсеточные) движения в смешанной ячейке. Таким образом, при выравнивании давлений компонентов часть внутренней энергии ячейки перейдет во внутрисеточную кинетическую. Для сохранения энергии в смешанной ячейке необходимо потерянную при выравнивании давлений компонентов за счет дополнительных дивергенций внутреннюю энергию вернуть веществам. То есть появятся дополнительные добавки к внутренней энергии компонентов $\Delta e'_\xi$ в соответствии с уравнением

$$-\frac{\tau}{\rho^n} \sum_{\xi} \beta_{\xi} \left(p_{\xi}^{n+1/2} + q_{\xi}^n \right) \frac{\nabla \cdot \mathbf{u}_{\xi 2}^n + \nabla \cdot \mathbf{u}_{\xi 2}^{n+1}}{2} + \sum_{\xi} \alpha_{\xi} \Delta e'_{\xi} = 0. \quad (8)$$

Входящая в это выражение дополнительная дивергенция с $(n+1)$ момента времени с точностью до членов первого порядка малости величины $\Delta P_{\xi}/P$ может быть вычислена по формуле

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_{\xi 2}^{n+1} \approx \nabla \cdot \mathbf{u}_{\xi 2}^n (1 - Ac\tau/h).$$

Остается определить, каким образом распределять диссипируемую кинетическую энергию по компонентам (формула (8) определяет только полную энергию $\sum_{\xi} \alpha_{\xi} \Delta e'_{\xi} = \Delta e'$). В настоящей работе, как и в работе [18], используется способ нахождения величин $\Delta e'_{\xi}$ из условия, что эти величины одинаковы для всех компонентов, то есть $\Delta e'_{\xi} = \Delta e'$. В этом случае для всех компонентов смешанной ячейки из уравнения (8) получаем $\Delta e'_{\xi} = \Delta e' = \frac{\tau}{\rho^n} \sum_{\xi} \beta_{\xi} \left(P_{\xi}^{n+1/2} + q_{\xi}^n \right) \frac{\nabla \cdot \mathbf{u}_{\xi 2}^n + \nabla \cdot \mathbf{u}_{\xi 2}^{n+1}}{2}$.

3.3. Метод расчета смешанных ячеек, содержащих вакуум

Для расчета смешанных ячеек, содержащих вакуум, предлагаемый выше метод был модифицирован. Модификация основана на специальном условии замыкания [25], которое заключается в том, что для компонента при растяжении ячейки используется условие равенства дивергенции компонента дивергенции всей ячейки, а при сжатии приращение объема ячейки полностью отдается вакууму.

Для нового условия замыкания предлагается сделать следующее: общую дивергенцию, как и выше, разделяем на две составляющие $\nabla \cdot \mathbf{u}_{\tau}$ и $\nabla \cdot \mathbf{u}_n$, получающиеся разложением скоростей на две компоненты, вдоль КГ и по нормали к ней.

При растяжении ячейки, то есть если $\nabla \cdot \mathbf{u} \geq 0$, то $\nabla \cdot \mathbf{u}_{\xi} = \nabla \cdot \mathbf{u}$.

При сжатии ячейки, то есть при $\nabla \cdot \mathbf{u} < 0$,

– если $\nabla \cdot \mathbf{u}_n < 0$: $\nabla \cdot \mathbf{u}_{\xi} = \nabla \cdot \mathbf{u}_{\xi}^{\tau}$, $\nabla \cdot \mathbf{u}_{\text{вак}} = (\nabla \cdot \mathbf{u} - \beta_{\xi} \cdot \nabla \cdot \mathbf{u}_{\xi}) / \beta_{\text{вак}}$;

– если $\nabla \cdot \mathbf{u}_n \geq 0$: $\nabla \cdot \mathbf{u}_{\xi} = \nabla \cdot \mathbf{u}$.

Рассмотрим ситуации, приведенные на рис. 1. Пусть имеет место сжатие ячейки. Тогда в случае движения по нормали к КГ (рис. 1,а) имеем $\nabla \cdot \mathbf{u}_n = \nabla \cdot \mathbf{u}$, $\nabla \cdot \mathbf{u}_{\tau} = 0$, и так как $\nabla \cdot \mathbf{u}_n < 0$, получаем $\nabla \cdot \mathbf{u}_{\text{вак}} = \nabla \cdot \mathbf{u} / \beta_{\text{вак}}$. При движении вдоль КГ (рис. 1,б) $\nabla \cdot \mathbf{u}_n = 0$, и $\nabla \cdot \mathbf{u}_{\xi} = \nabla \cdot \mathbf{u}$.

Если приращение объема ячейки превысит объем содержащегося в ячейке вакуума, то остаток приращения объема отдается другому компоненту.

4. Тестовые расчеты

В данном разделе рассматриваются две 1D и одна 2D задачи, имеющие точные решения. Все 1D расчеты проведены в лагранжевых переменных.

В ранее проведенных сравнительных исследованиях методов 1–4 на большом количестве задач, в том числе не вошедших в данную работу, было показано, что из них наиболее универсальным является метод 4, основанный на равенстве скоростей компонентов. Поэтому ниже проводится сравнение нового метода 7 и метода 4 между собой. При этом метод 4 дополнен алгоритмом выравнивания давлений компонентов с коэффициентом $A = 1$.

Для 1D задач приводятся следующие однотипные обработки результатов расчетов.

1. Зависимости погрешности в норме L_1 от размеров ячейки h .
2. Таблицы с интегральными погрешностями в норме L_1 для всех расчетов и величины, характеризующие порядок сходимости расчетов.

В этой работе погрешность (относительная) определяется по формуле (9)

$$\delta y = \frac{\|y_{\text{расчет}} - y_{\text{точный}}\|_1}{\|y_{\text{точный}}\|_1} = \theta (h/h_0)^\sigma, \quad (9)$$

где h – начальный размер ячейки, h_0 – начальный размер ячейки самой грубой сетки, $y_{\text{расчет}}$, $y_{\text{точный}}$ – расчетное и точное значение величины в центре ячейки, соответственно. При использовании формулы (9) величина θ будет близка к значению интегральной погрешности на самой грубой сетке.

4.1. Задача 1. Прохождение ударной волны через границу вода-воздух

Постановка расчетов. Задача рассмотрена в работе [27], точное решение получено в [28]. Начальные данные этой задачи следующие:

$$(\gamma, P_\infty, \rho, e, P, u) = \begin{cases} (4.4, 6 \cdot 10^8, 10^3, 1.07 \cdot 10^6, 10^9, 0), & \text{if } 0 \leq x \leq 0.7, \\ (1.4, 0, 50, 5 \cdot 10^4, 10^6, 0), & \text{if } 0.7 < x \leq 1. \end{cases}$$

УРС воды $P = (\gamma - 1)\rho e - \gamma P_\infty$, для которого квадрат скорости звука вычисляется по формуле $c^2 = \gamma(\gamma - 1)(e - P_\infty/\rho) = \gamma(P + P_\infty)/\rho$. Расчет ведется до $t = 2,2 \cdot 10^{-4}$. Расчеты проведены на сетках с 250, 500, 1000 ячеек.

Результаты расчетов. В табл. 1 и 2 приводятся нормы относительной погрешности основных величин, а также точные и расчетные значения основных величин в смешанных ячейках. На рис. 2 приводятся зависимости погрешности в норме L_1 от h .

Таблица 1

Нормы относительной погрешности основных величин на $t = 0,00022$

L_1	250	500	1000	θ	σ
p	2,55E-02	1,66E-02	1,00E-02	2,58E-02	0,68
ρ	3,73E-03	2,23E-03	1,28E-03	3,76E-03	0,77
e	2,63E-03	1,57E-03	8,93E-04	2,65E-03	0,78
u	1,51E-02	8,52E-03	4,76E-03	1,51E-02	0,83

Метод 4

Окончание табл. 1

L_1	250	500	1000	θ	σ
p	2,39E-02	1,53E-02	9,37E-03	2,39E-02	0,68
ρ	2,51E-03	1,44E-03	7,93E-04	2,51E-03	0,83
e	1,64E-03	9,19E-04	5,29E-04	1,64E-03	0,81
u	1,22E-02	7,13E-03	4,69E-03	1,22E-02	0,69

Метод 7

Таблица 2

Точное и расчетное значения основных величин в смешанных ячейках на $t = 0,00022$

	Точное	Метод 4	Метод 7
P_1	1,5986E+07	1,5990E+07	1,5943E+07
P_2	1,5986E+07	1,5989E+07	1,5944E+07
ρ_1	8,0497E+02	7,3954E+02	7,5793E+02
ρ_2	2,2040E+02	1,1041E+02	1,5040E+02
e_1	9,7042E+05	1,0562E+06	1,0306E+06
e_2	1,8133E+05	3,6202E+05	2,6502E+05

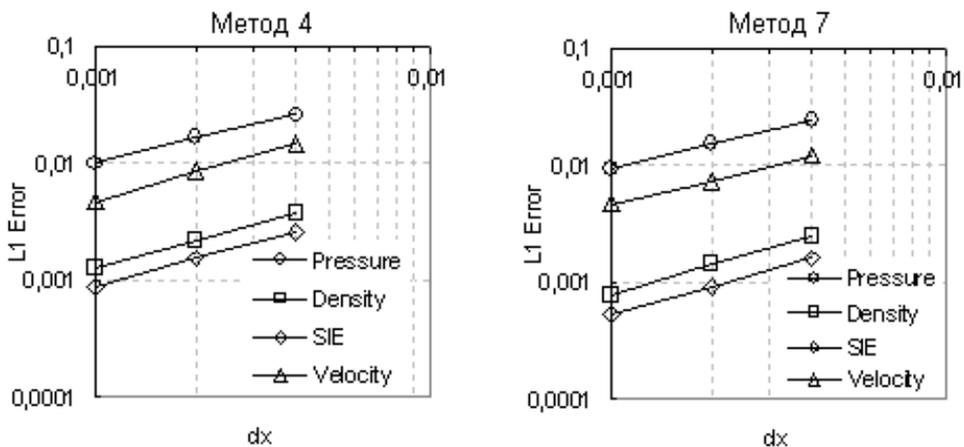


Рис. 2. Зависимости погрешности основных величин в норме L_1 от h на $t = 0,00022$

4.2. Задача Сода

Постановка расчетов. Эта задача описана в работе [29] и ставится следующим образом. Имеются два идеальных газа со следующими начальными данными:

$$(\gamma, \rho, e, p, u) = \begin{cases} (1.4, 1, 2.5, 1, 0), & \text{if } 0 \leq x \leq 0.5, \\ (1.4, 0.125, 2, 0.1, 0), & \text{if } 0.5 < x \leq 1. \end{cases}$$

В расчетах используются два компонента. Расчеты проведены на сетках с 100, 200, 400 и 800 ячеек до $t = 0,2$.

Результаты расчетов. В табл. 3 и 4 приводятся нормы относительной погрешности основных величин, а также точное и расчетное значения основных величин в смешанных ячейках. На рис. 3 приводятся зависимости погрешности в норме L_1 от h .

Таблица 3

Нормы относительной погрешности основных величин

L_1	100	200	400	800	θ	σ
p	1,96E-02	1,13E-02	6,44E-03	3,60E-03	1,97E-02	0,81
ρ	1,63E-02	9,51E-03	5,40E-03	3,01E-03	1,65E-02	0,81
e	9,53E-03	5,51E-03	3,08E-03	1,71E-03	9,64E-03	0,83
u	3,11E-02	1,61E-02	8,30E-03	4,29E-03	3,11E-02	0,95

Метод 4

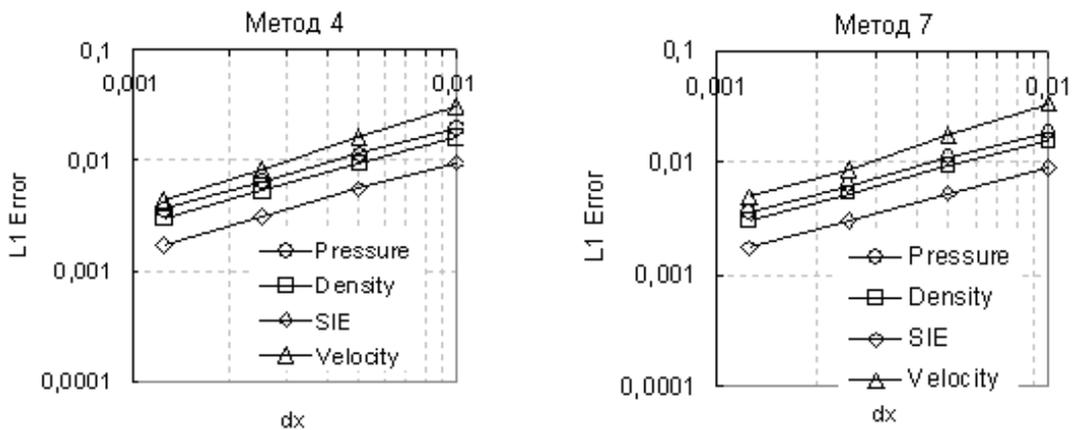
L_1	100	200	400	800	θ	σ
p	1,89E-02	1,11E-02	6,33E-03	3,58E-03	1,89E-02	0,80
ρ	1,58E-02	9,39E-03	5,35E-03	3,01E-03	1,59E-02	0,80
e	9,09E-03	5,42E-03	3,01E-03	1,71E-03	9,22E-03	0,81
u	3,40E-02	1,78E-02	8,66E-03	4,99E-03	3,45E-02	0,93

Метод 7

Таблица 4

Точное и расчетное значения основных величин в смешанных ячейках на $t = 0,2$

	Точное	Метод 4	Метод 7
p_1	0,303130	0,303130	0,30313
p_2	0,303130	0,303130	0,30313
ρ_1	0,426319	0,390630	0,391073
ρ_2	0,265574	0,247670	0,245285
e_1	1,777600	1,940020	1,9378
e_2	2,853541	3,059820	3,08955

Рис. 3. Зависимости погрешности основных величин в норме L_1 от h на $t = 0,2$

4.3. 2D задача о распространении упругих волн в пластине

Для данной задачи Краюхиным А. А. в работе [26] получена скорость распространения продольной упругой волны в пластине. В работе [26] приводится и численное решение задачи по методике ЭГАК при отсутствии смешанных ячеек, которое показало хорошую точность расчетов в такой постановке.

В настоящей работе данная задача численно решена в постановке, когда положение КГ не совпадает с линиями сетки, и в расчете появляются смешанные ячейки. При этом в качестве окружающего компонента использовался воздух или вакуум. Все расчеты проведены на неподвижной счетной сетке.

Постановка расчетов. Проводились расчеты распространения упругих волн в пластине. В расчетах летящий со скоростью $V_0 = 0,01$ км/с ударник из титана длиной $L = 10$ см ударялся о «жесткую» стенку. При этом в ударнике возникала упругая волна, распространяющаяся по направлению к его тыльной поверхности. По результатам расчетов определялась скорость волны. На рис. 4,а схематично изображена начальная геометрия расчета, $H = 1$ – толщина стенки. Расчеты проводились на эйлеровой сетке, равномерной в области ударника, с размером счетной ячейки $h = 0,2$ см (в области ударника счетные ячейки имели квадратную форму). Также был проведен расчет на косой сетке. Растровая картина поля концентраций и счетная сетка для данного расчета приведены на рис. 4,б.

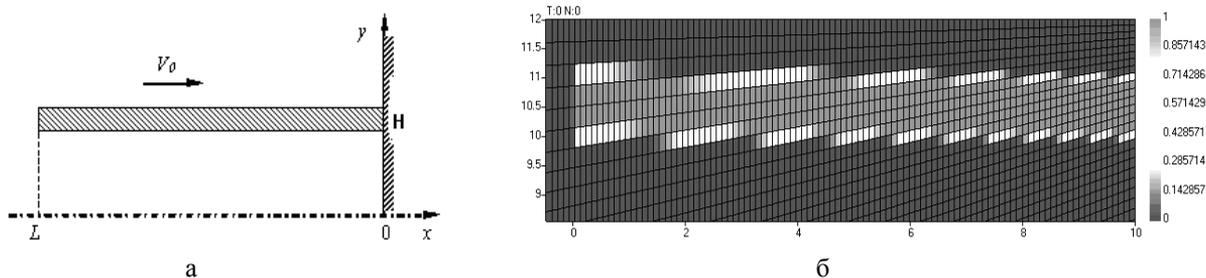


Рис. 4. Геометрия задачи о распространении упругих волн в пластине (а) и растровая картина объемных концентраций в расчете на косой сетке (б)

В расчетах вокруг ударника задан вакуум. Счетная сетка строилась таким образом, чтобы вокруг ударника на начальный момент времени были смешанные с окружающим вакуумом счетные ячейки.

Для исследования влияния замыкающих соотношений в смешанных ячейках на скорость распространения упругой продольной волны в пластине были проведены расчеты, в которых ударник двигался не в вакууме, а в воздухе. Для описания воздуха использовалось УРС идеального газа при следующих начальных условиях: $E_0 = 0$, $P_0 = 0$, $\rho_0 = 1,3 \cdot 10^{-3}$ г/см³. Для смешанных ячеек вещества ударника и воздуха использовались условия замыкания, реализованные в комплексе ЭГАС: равенство массовых скоростей компонентов и предлагаемый в данной работе метод. Во всех расчетах с воздухом на толщину пластины приходилось 5 счетных ячеек ($N = 5$), расчетная сетка строилась таким образом, чтобы на боковых поверхностях ударника на начальный момент времени присутствовали смешанные ячейки (объемные концентрации компонентов 0,5).

Для описания титана использовались УРС в форме Ми-Грюнайзена с константами: $\rho = 4,5$ г/см³, $c_0 = 4,842$ км/с, $n = 3,4243$, $\Gamma = 1,18$, $P_{отк} = -1,8$ ГПа; откольный критерий разрушения и модель упругопластичности Джонсона–Кука с параметрами из табл. 5.

Таблица 5

Параметры модели Джонсона–Кука для титана

b , ГПа	k	c	m	C_v , кДж/(г·К)	T_m , К	G , ГПа	ν
1,092	0,93	0,014	1,1	$580 \cdot 10^{-6}$	1878	43	0,32

Результаты расчетов. Для определения скорости продольной волны в расчетах предложен следующий способ (описанный в работе [26]). Предположим, что в процессе распространения упругой волны ее фронт не «размазывается». Из-за того, что имел место удар по «жесткой» стенке,

скорость материала ударника за фронтом волны должна равняться нулю. Поэтому темп уменьшения скорости центра масс ударника можно связать со скоростью распространения упругой волны. В работе [26] показано, что зависимость скорости центра масс ударника от времени в расчете без смешанных ячеек на боковых поверхностях ударника хорошо аппроксимируется линейной функцией ($V = -0,0052t + 0,01$), то есть скорость упругой волны постоянна. Время прохождения упругой волны вдоль ударника $T = 0,01/0,0052 = 1,92 \cdot 10$ мкс. Здесь T – момент времени, на который скорость центра масс ударника равна нулю, что соответствует времени пробега волны вдоль всего ударника. Зная начальную длину ударника, можно вычислить скорость продольной волны с помощью формулы $c_w = 10/1,92 = 5,2$ км/с.

На рис. 5,а приведены зависимости скорости центра масс пластины от времени в расчетах с воздухом с методами замыкания 4 и 7. На рис. 5,б приведены результаты расчетов с вакуумом по старому методу, а также результаты расчета на косой сетке по новому методу.

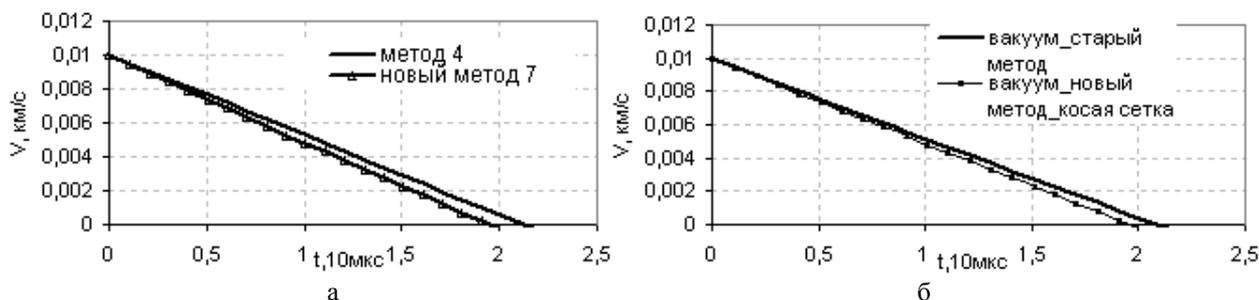


Рис. 5. Скорости центра масс от времени: а – расчеты с воздухом, б – расчеты с вакуумом

В табл. 6 приведены значения скоростей продольной волны, полученные в расчетах с двумя методами замыкания для смешанных ячеек.

Таблица 6

Расчетные (c_w) и теоретические (c_l) значения скорости продольной упругой волны

Расчет	Окружение	Метод замыкания	c_w , км/с	c_l , км/с
1	Вакуум	Метод 4	4,8	5,3
2	Вакуум	Метод 7	5,1	
3	Вакуум	Метод 7 (косая сетка)	5,1	
4	Воздух	Метод 4	4,7	
5	Воздух	Метод 7	5,1	
6	Воздух	Без смешанных ячеек	5,2	

4. Обсуждение результатов

Представленные в табл. 1 и 3 данные показывают, что для обеих 1D задач оба метода обладают хорошей сходимостью к точному решению при уменьшении размеров ячеек. При этом в задаче 1 в расчетах с методом 7 получено несколько лучшее согласие с точным решением, чем по методу 4. По данным из табл. 2 наименьшее отличие расчетного решения от точного по плотности и удельной внутренней энергии компонентов в смешанной ячейке получено по методу 7. Из табл. 4 видно, что для задачи 2 имеется хорошее согласие точного и расчетного значений основных величин в смешанных ячейках для обоих методов замыкания.

Расчеты 2D задачи о распространении упругих волн в тонкой пластине проводились с использованием нового алгоритма для смешанных ячеек, содержащих вакуум. Получен результат, согласующийся с теоретическим значением скорости продольной упругой волны в пластине. Аналогичный расчет был проведен на косой сетке. Скорость продольной волны в расчете на косой сетке

ке практически совпадает со скоростью волны в расчете на прямоугольной сетке. Для исследования влияния моделей замыкания в смешанных ячейках были проведены расчеты, в которых в качестве окружающего компонента использовался не вакуум, а воздух. С методом АСМ отличие от точного решения составляет $\sim 4\%$, в то время как с методом 4 $\sim 10\%$.

Заключение

В работе предложена анизотропная модель АСМ для замыкания уравнений газодинамики и упругопластики в смешанных ячейках. Проведены численные исследования метода АСМ на ряде задач. Проведенные расчеты показали, что новый метод обладает приемлемой точностью во всех расчетах всех рассмотренных 1D задач, количество которых значительно больше приведенных в настоящей работе. Сравнение нового метода проведено со всеми методами замыкания методики ЭГАК, которое показало, что метод АСМ не уступает им в точности моделирования всех исследованных задач с КГ.

Сравнение с наиболее эффективным методом 4 показало, что метод АСМ дает или близкий (задача 2) или более высокий (задача 1) порядок сходимости по сравнению с методом 4. Однако метод 4 (как и все остальные методы 2–6) дает заметную погрешность в упругопластической задаче, в то время как новый метод показывает значительно лучший результат. Все это дает основание рекомендовать модель АСМ для широкого использования в качестве метода замыкания в смешанных ячейках, содержащих КГ.

В данной работе исследование метода АСМ проведено для случая КГ в смешанной ячейке, случай смеси предполагается рассмотреть в следующей работе авторов.

Благодарности

Авторы выражают искреннюю благодарность Краюхину А. А. за предложенную им задачу 3, которая послужила толчком для разработки анизотропной модели замыкания, а также J. Камм за помощь в постановке задачи 2.

Литература

1. Tipton R. CALE mixed zone pressure relaxation, Tech. rep., Lawrence Livermore National Laboratory – Private communication (1989).
2. Miller D., Zimmerman G. An algorithm for time evolving volume fractions in mixed zones in Lagrangian hydrodynamics calculations, Tech. rep., Lawrence Livermore National Laboratory, UCRL-PRES-223908 (2006).
3. Baer M., Nunziato J. A two-phase mixture theory for the deflagration-to-detonation transition (ddt) in reactive granular materials // *Int. J. Multiphase Flow*. 1986. 12. 861–889.
4. Murrone A., Guillard H. A five equation reduced model for compressible two phase flow problems // *Journal of Computational Physics*. 2005. 202. 664–698.
5. Kamm J., Shashkov M., Fung J., Harrison A., Canfield T. A comparative study of various pressure relaxation closure models for one-dimensional two-material Lagrangian hydrodynamics // *Int. J. Numer. Meth. Fluids* 2010. 65 (11–12). 1311–1324.
6. Shashkov M. Closure models for multimaterial cells in arbitrary Lagrangian-Eulerian hydrocodes // *Int. J. Numer. Meth. Fluids* 2007. 56. 1497–1504.
7. Francois M., Shashkov M., Dendy E., Lowrie R. Mixture models for multimaterial Eulerian and Lagrangian hydrocodes, Tech. rep // 8th International Conference on New Models and Hydrocodes for Shock Wave Processes – Paris, France; Available as Los Alamos National Laboratory Report LAUR-10-03391 (2010).

8. Yanilkin Y., Goncharov E., Kolobyanin V., Sadchikov V., Kamm J., Shashkov M., Rider W. Multi-material pressure relaxation methods for Lagrangian hydrodynamics // *Computers & Fluids*. 2013. 83. 137–143.
9. Bondarenko Y., Yanilkin Y. Computation of the thermodynamic parameters in the mixed cells in gas dynamics // *Mathematical Modeling*. 2002. 14. 63–81.
10. Делов В. И., Садчиков В. В. Сравнение некоторых моделей для расчета термодинамических параметров неоднородных по составу лагранжевых ячеек // *Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов*. 2005. Вып. 1. С. 57–70.
11. Гончаров Е. А., Янилкин Ю. В. Новый метод расчета термодинамического состояния веществ в смешанных ячейках // *Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов*. 2004. Вып. 3. С. 16–30.
12. Barlow A. A new Lagrangian scheme for multimaterial cells // *Proceedings of European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, ECCOMAS Computational Fluid Dynamics Conference, Swansea, Wales, U.K. (2001)*, 235–294.
13. Despres B., Lagoutiere F. Numerical solution of two-component compressible fluid model with interfaces // *Progress in Computational Fluid Dynamics*. 2007. 7. 295–310.
14. Hill R., Barlow A., Shashkov M., Interface-aware sub-scale dynamics closure model, Tech. Rep. LA-UR-12-21959 // *International Conference on Numerical Methods in Multiphase Flows; 2012-06-12 – 2012-06-14; State College, Pennsylvania, United States and 3rd International EULAG Workshop on Eulerian/Lagrangian methods for fluids. 25–28 June, 2012, Loughborough UK*.
15. Grove J.W. Pressure-velocity equilibrium hydrodynamic models // *Acta Mathematica Scientia*. 2010. 30B(2). 563–594.
16. Бахрах С. М., Спиридонов В. Ф., Шанин А. А. Метод расчета двумерных осесимметричных газодинамических течений неоднородной среды в лагранжево-эйлеровых переменных // *Докл. АН СССР*. 1984. Т. 276, № 4.
17. Харлоу Ф. Х. Численный метод частиц в ячейках для задач гидродинамики // *Вычислительные методы в гидродинамике*. М.: Мир, 1967.
18. Гончаров Е. А., Колобянин В. Ю., Янилкин Ю. В. Метод замыкания уравнений лагранжевой газодинамики в смешанных ячейках, основанный на равенстве скоростей компонентов // *Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов*. 2006. Вып. 4. С. 100–105.
19. Barlow A., Hill R., Shashkov M. Constrained optimization framework for interface-aware sub-scale dynamics closure model for multimaterial cells in Lagrangian and arbitrary Lagrangian-Eulerian hydrodynamics // *J. Comput. Phys*. 2014.
20. Янилкин Ю. В., Беляев С. П., Бондаренко Ю. А. и др. Эйлеровы численные методики ЭГАК и ТРЭК для моделирования многомерных течений многокомпонентной среды // *Труды РФЯЦ-ВНИИЭФ*. 2008. Вып. 12. С. 54–65.
21. Гончаров Е. А., Янилкин Ю. В., Колобянин В. Ю. Об определении искусственной вязкости для компонентов смешанных ячеек с гетерогенной смесью веществ // *Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов*. 2009. Вып. 3.
22. Янилкин Ю. В. и др. Исследование и реализация методов решения уравнений лагранжевой газодинамики для случая многокомпонентной сжимаемой среды с общим давлением: Отчет по ТЗ 039 к Соглашению ВНИИЭФ с LANS 37713-000-02-35 (номер 5.2), 2009.
23. Янилкин Ю. В. и др. Исследование и реализация методов решения уравнений лагранжевой газодинамики для случая многокомпонентной сжимаемой среды с общим давлением: Отчет по ТЗ 039 к Соглашению ВНИИЭФ с LANS 37713-000-02-35 (номер 5.3), 2011.
24. Янилкин Ю. В., Стаценко В. П., Козлов В. И. Математическое моделирование турбулентного перемешивания в сжимаемых средах: курс лекций. – Саров: ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 2009.
25. Код ЭГИДА-2D для моделирования двумерных задач. Том 1: учеб. пособие // под ред. Ю. В. Янилкина. – Саров: ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ». 2008.

26. Краюхин А. А., Свидинский В. А., Стадник А. Л., Янилкин Ю. В. Нестационарные задачи для тестирования упругопластических методик // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов (в печати).

27. Saurel R., Abgrall R. A Multiphase Godunov Method for Compressible Multifluid and Multiphase Flows // J. Comp. Phys. 1999. 150. 425–467.

28. Plohr B. Shockless acceleration of thin plates modeled by a traced random choice method // AIAA J. 1988. 26. 470–478.

29. Sod G. A Survey of Several Finite Difference Methods for Systems of Nonlinear Hyperbolic Conservation Laws // J. Comp. Phys. 1978. 27. 1–31.

ОБ АППРОКСИМАЦИОННОЙ ВЯЗКОСТИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ И РАСЧЕТЫ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Ю. В. Янилкин, О. О. Топорова, А. Л. Стадник, Л. Е. Корзакова

Российский Федеральный Ядерный Центр –
Всероссийский НИИ экспериментальной физики, г. Саров

В работе кратко описаны исходные уравнения и разностная схема для моделирования вязких и невязких газодинамических течений многокомпонентной среды в эйлеровых переменных в методике ЭГАК. Приведена теоретическая оценка схемной вязкости разностной схемы методики. Проведены тестовые расчеты, которые показали корректность использования теоретической оценки схемной вязкости в расчетах конкретных задач.

Введение

При учете молекулярной (физической) вязкости в расчетах возникает проблема, связанная с аппроксимационной (схемной) вязкостью разностной схемы расчета уравнений Эйлера и Навье-Стокса, то есть невязкой и вязкой жидкости (газа). В разностных схемах первого порядка аппроксимации ее величина может заметно влиять на получаемое численное решение. Влияние нефизической схемной вязкости на получаемое разностное решение во многом аналогично влиянию физической вязкости. Поэтому принципиально важно знать коэффициенты той и другой вязкости, при этом моделировать задачи с учетом физической вязкости имеет смысл только в случае малости схемной вязкости по сравнению с физической.

В данной работе вопросы, связанные с указанной проблемой, рассматриваются на примере 3D методики методики ЭГАК [1]. Ниже показано, что коэффициент схемной вязкости методики при аппроксимации невязких членов уравнений в случае квазистационарных течений прямо пропорционален размеру ячейки. В случае нестационарных течений, в частности, в ударноволновых течениях, величина схемной вязкости определяется дополнительными членами, связанными с аппроксимацией по времени. Отсюда следует, что в конкретной задаче всегда можно построить такую сетку, для которой схемная вязкость будет сравнима или даже превалировать над физической вязкостью, и в этом случае для этой задачи не имеет особого смысла использовать такие сетки.

В первом разделе работы кратко приводится разностная схема методики. Выбор схемы обусловлен тем обстоятельством, что учет вязкости проводился в рамках методики ЭГАК с уже выбранными подходами к аппроксимации уравнений [2].