

26. Краюхин А. А., Свидинский В. А., Стадник А. Л., Янилкин Ю. В. Нестационарные задачи для тестирования упругопластических методик // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов (в печати).

27. Saurel R., Abgrall R. A Multiphase Godunov Method for Compressible Multifluid and Multiphase Flows // J. Comp. Phys. 1999. 150. 425–467.

28. Plohr B. Shockless acceleration of thin plates modeled by a traced random choice method // AIAA J. 1988. 26. 470–478.

29. Sod G. A Survey of Several Finite Difference Methods for Systems of Nonlinear Hyperbolic Conservation Laws // J. Comp. Phys. 1978. 27. 1–31.

ОБ АППРОКСИМАЦИОННОЙ ВЯЗКОСТИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ И РАСЧЕТЫ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Ю. В. Янилкин, О. О. Топорова, А. Л. Стадник, Л. Е. Корзакова

Российский Федеральный Ядерный Центр –
Всероссийский НИИ экспериментальной физики, г. Саров

В работе кратко описаны исходные уравнения и разностная схема для моделирования вязких и невязких газодинамических течений многокомпонентной среды в эйлеровых переменных в методике ЭГАК. Приведена теоретическая оценка схемной вязкости разностной схемы методики. Проведены тестовые расчеты, которые показали корректность использования теоретической оценки схемной вязкости в расчетах конкретных задач.

Введение

При учете молекулярной (физической) вязкости в расчетах возникает проблема, связанная с аппроксимационной (схемной) вязкостью разностной схемы расчета уравнений Эйлера и Навье-Стокса, то есть невязкой и вязкой жидкости (газа). В разностных схемах первого порядка аппроксимации ее величина может заметно влиять на получаемое численное решение. Влияние нефизической схемной вязкости на получаемое разностное решение во многом аналогично влиянию физической вязкости. Поэтому принципиально важно знать коэффициенты той и другой вязкости, при этом моделировать задачи с учетом физической вязкости имеет смысл только в случае малости схемной вязкости по сравнению с физической.

В данной работе вопросы, связанные с указанной проблемой, рассматриваются на примере 3D методики методики ЭГАК [1]. Ниже показано, что коэффициент схемной вязкости методики при аппроксимации невязких членов уравнений в случае квазистационарных течений прямо пропорционален размеру ячейки. В случае нестационарных течений, в частности, в ударноволновых течениях, величина схемной вязкости определяется дополнительными членами, связанными с аппроксимацией по времени. Отсюда следует, что в конкретной задаче всегда можно построить такую сетку, для которой схемная вязкость будет сравнима или даже превалировать над физической вязкостью, и в этом случае для этой задачи не имеет особого смысла использовать такие сетки.

В первом разделе работы кратко приводится разностная схема методики. Выбор схемы обусловлен тем обстоятельством, что учет вязкости проводился в рамках методики ЭГАК с уже выбранными подходами к аппроксимации уравнений [2].

Второй раздел работы посвящен теоретической оценке схемной вязкости методики, на основе рассмотрения первого дифференциального приближения [3].

В третьем разделе представлены результаты тестовых расчетов. На основе численного решения первой задачи Стокса (стационарной), имеющей аналитическое решение для вязкой несжимаемой среды, показано, что получаемые решения ведут себя в соответствии с теоретической оценкой схемной вязкости для этих течений. Тем самым показано, что оценка схемной вязкости, получающаяся из рассмотрения первого дифференциального приближения, является корректной для методики ЭГАК. Кроме этой задачи рассматривается еще одна задача, показывающая важность учета схемной вязкости и в расчетах вязких ударноволновых течений. Расчеты этих задач показывают, что теоретическая оценка схемной вязкости вполне может быть использована и в расчетах с ударноволновыми течениями.

1. Конечно-разностные уравнения

1.1. Исходная система уравнений

Систему интегро-дифференциальных уравнений, описывающих трехмерные течения многокомпонентной сплошной среды с учетом вязких свойств, можно записать в виде законов сохранения для неподвижного объема V :

$$\frac{d\bar{K}}{dt} + \int_S \rho \bar{u} (\bar{u} d\bar{S}) = \int_V \operatorname{div} \mathbf{T} dV, \quad (1)$$

$$\frac{dM_i}{dt} + \int_{S_i} \rho_i (\bar{u}_i d\bar{S}) = 0, \quad (2)$$

$$\frac{dE_i}{dt} + \int_S \rho_i e_i (\bar{u}_i d\bar{S}) = \int_V Sp(\mathbf{T}_i \mathbf{D}_i) dV, \quad (3)$$

здесь \mathbf{T} – тензор вязких напряжений, \mathbf{T}^d – девиатор тензора \mathbf{T} , \mathbf{D} – тензор скоростей деформации, M – масса, E – внутренняя энергия, $\bar{K}(K_x, K_y, K_z)$ – количество движения, ρ – плотность, P – давление, $\bar{u}(u, v, w)$ – скорость, e – удельная (на единицу массы) внутренняя энергия для компонентов, $T_{xx}, T_{yy}, T_{xy}, T_{xz}, T_{yz}, T_{zz}$ $\{T_{jk}^d = T_{jk} - \delta_{ik} P\}$ – компоненты тензора \mathbf{T} для ячейки, i – номер компонента.

Система уравнений (1–3) замыкается УРС компонентов среды

$$P_i = P_i(\rho_i, e_i). \quad (4)$$

Дифференциальные соотношения для определения девиатора тензора вязких напряжений имеют обычный вид

$$\mathbf{T}_{ijk} = \eta_i \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \delta_{jk} \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \right), \quad (5)$$

где η – коэффициент динамической вязкости.

При аппроксимации уравнений (1–3) векторные величины \bar{u} , \bar{K} определяются в узлах счетной сетки, скалярные величины ρ_i , e_i , P_i , $\beta_i = V_i/V$ (объемная доля), \mathbf{T} – в ячейках. Счетными ячейками являются шестигранники, в простейшем случае – кубики.

Система уравнений (1–5) решается численно методом расщепления на этапы. На первом этапе в предположении, что отсутствует движение среды, определяются ускорения за счет девиатора тензора вязких напряжений. На втором этапе решаются уравнения лагранжевой газодинамики, в которой к газодинамическим ускорениям добавляются ускорения, полученные на первом этапе

вычислений. Эти два этапа можно объединить в один лагранжевый этап, так как аппроксимация уравнений производится в лагранжевых переменных. На третьем этапе строится новая счетная сетка, и рассчитываются изменения газодинамических величин за счет потоков через грани ячеек, при вычислении которых используются скорости, плотности и энергии, полученные после лагранжевого этапа. Отметим, что второй и третий этапы вычислений описаны в работе [1] и здесь приводятся лишь некоторые сведения из этих этапов, необходимые для связного изложения текста.

1.2. Аппроксимация уравнений

1.2.1. Исходная система уравнений и порядок их аппроксимации. Система уравнений для многокомпонентной вязкой среды на лагранжевом этапе имеет следующий вид:

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{T} dV, \quad (6)$$

$$\frac{d\rho_i}{dt} = -\rho_i \operatorname{div} \vec{u}_i, \quad (7)$$

$$\frac{dE_i}{dt} = \int_{V_i} Sp(\mathbf{T}_i^d D_i) dV_i - \int_{V_i} P_i \operatorname{div} \vec{u}_i dV_i. \quad (8)$$

Уравнения (6)–(8) замыкаются УРС (4) и соотношениями (5).

Отметим, что при разностной аппроксимации в уравнениях к давлению добавляется искусственная вязкость, то есть вместо P_i используется величина $P_i + q_i$. В смешанных ячейках должны быть определены также значения компонент девиатора вязких напряжений и тензора скоростей деформации для каждого имеющегося в ячейке компонента. Правила их определения зависят от принятых предположений для замыкания уравнений газодинамики. Например, для равенства дивергенций компонент предполагается равенство как девиатора тензора вязких напряжений, так и тензора скоростей деформации, т. е.

$$\mathbf{T}_i = \mathbf{T}, \quad \mathbf{D}_i = \mathbf{D}. \quad (9)$$

Остановимся подробнее на аппроксимации уравнений движения. Аппроксимацию остальных уравнений можно посмотреть в [10].

1.2.2. Аппроксимация уравнений движения на лагранжевом этапе. Перепишем уравнение движения лагранжевого этапа в виде

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} P + \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{T}^d.$$

Покомпонентно это будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{du_x}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial T_{xx}^d}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}^d}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}^d}{\partial z} \right), \\ \frac{du_y}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial T_{yx}^d}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}^d}{\partial y} + \frac{\partial T_{yz}^d}{\partial z} \right), \\ \frac{du_z}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial T_{zx}^d}{\partial x} + \frac{\partial T_{zy}^d}{\partial y} + \frac{\partial T_{zz}^d}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Приведем разностное уравнение, аппроксимирующее первое уравнение системы (10) (два остальных аппроксимируются аналогично):

$$u_x^{n+1} = u_x^n - \frac{\tau}{\rho^n} \left(\frac{\partial(\tilde{P} + q^n)}{\partial x} \right) + \frac{\tau}{\rho^n} \left[\left(\frac{\partial T_{xx}^{dn}}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial T_{xy}^{dn}}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial T_{xz}^{dn}}{\partial z} \right) \right], \quad (11)$$

где надчеркивание означает разностный аналог соответствующего дифференциального оператора; верхний правый индекс означает принадлежность временному слою; тильда над давлением означает, что в соответствующем разностном уравнении берется так называемое спрогнозированное «предвычисленное» значение давления; τ – шаг по времени. В уравнении (11) к давлению аддитивно добавляется искусственная вязкость, которая имеет вид

$$q^n = C_1 \rho^n \left(h^n (\nabla \cdot \bar{u}^n) \right)^2 + C_0 \rho^n c^n h^n (\nabla \cdot \bar{u}^n), \quad \text{при } \nabla \cdot \bar{u} < 0, \quad (12)$$

где c – скорость звука, h^n – размер ячейки. Таким образом, она состоит из суммы квадратичной вязкости типа Неймана–Рихтмайера с множителем $C_1 = 1$ и линейной вязкости с множителем $C_1 = 0,2$.

Предвычисленное давление \tilde{P} вычисляется по формуле

$$\tilde{p} = p^n - \tau \sigma (c^n)^2 \rho^n (\nabla \cdot u^n), \quad (13)$$

где $\sigma = 0,6$ – параметр, обеспечивающий устойчивость разностной схемы [5].

1.2.3. Аппроксимация уравнений движения на эйлеровом этапе. Как указано выше, после лагранжева этапа производится построение новой счетной сетки и пересчет величин на эту сетку, то есть аппроксимация конвективных членов уравнений (1–3). Мы рассмотрим случай неподвижной сетки ($\bar{u}_i^* = 0$), тогда на втором этапе решается следующая система уравнений:

$$\frac{d\bar{K}}{dt} + \int_S \rho \bar{u} (\bar{u} d\bar{S}) = 0, \quad (14)$$

$$\frac{dM_i}{dt} + \int_{S_i} \rho_i (\bar{u}_i d\bar{S}) = 0, \quad (15)$$

$$\frac{dE_i}{dt} + \int_{S_i} \rho_i e_i (\bar{u}_i d\bar{S}) = 0. \quad (16)$$

Разностные уравнения, аппроксимирующие уравнения (15–16), приведены в [10].

При аппроксимации уравнения движения (14) используется согласованная с потоками массы аппроксимация потоков количества движения. Для этого строятся вспомогательные ячейки, вершины которых лежат в восьми счетных ячейках, прилегающих к данному узлу, при этом от каждой ячейки отсекается 1/8 ее массы. На рис. 1 приведен пример построения одной восьмой части вспомогательной ячейки.

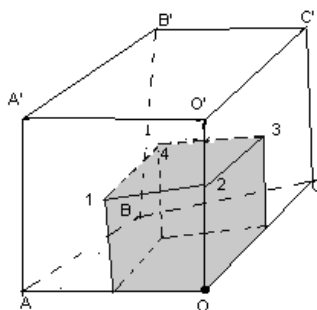


Рис. 1. Пример построения одной восьмой части вспомогательной ячейки

Разностные уравнения движения имеют вид

$$K^{n+1} = \tilde{K} + \sum_{j=1}^6 \Delta \tilde{K}_j, \quad (17)$$

где $\tilde{K} = 0,125(M_1 + M_2 + M_3 + M_4 + M_5 + M_6 + M_7 + M_8)\tilde{u}$; $\Delta \tilde{K}_j$ – потоки количества движения через грани вспомогательной ячейки.

В общем виде формула для вычисления потоков импульса имеет вид:

$$\Delta \tilde{K} = \Delta M \left[\alpha \tilde{u}^d + (1 - \alpha) \tilde{u}^a \right], \quad (18)$$

где \tilde{u}^d – скорость в «донорном» узле сетки, лежащем вверх по потоку, \tilde{u}^a – скорость в «акцепторном» узле, расположенном вниз по потоку, ΔM – поток массы. Выпишем, например, значение $\Delta \tilde{K}_j$ для потока через грань вспомогательной ячейки 1234 (см. рис. 1) для случая, когда поток направлен снизу вверх

$$\Delta M_{1234} = \frac{1}{8} (\Delta M_{ABCO} + \Delta M_{A'B'C'O'}),$$

где ΔM_{ABCO} , $\Delta M_{A'B'C'O'}$ – потоки массы через соответствующие грани, $\tilde{u}^d = u_o$, $\tilde{u}^a = u_o'$.

Значение параметра α выбирается следующим образом:

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\Delta V_{ABCO} + \Delta V_{A'B'C'O'}}{\Delta V_{ABCOA'B'C'O'}} \right), \quad (19)$$

где $\Delta V_{A'B'C'O'}$, ΔV_{ABCO} – потоки объема через соответствующие грани.

Однако необходимо отметить, что донорно-акцепторный способ определения α (формула 18) применяется не во всех узлах сетки, а только в тех, в которых масса или количество движения не меняются сильно за один счетный шаг. В противном случае используется донорный способ, т. е. полагается $\alpha = 1$. Обычно переключение происходит в смешанных ячейках или в ячейках, которые меняют свой тип, т. е. при переходах смешанная-чистая или чистая-смешанная.

2. Теоретическая оценка аппроксимационной вязкости разностных схем

Схемная вязкость разностных схем определяется из рассмотрения первого дифференциально-го приближения разностных уравнений [3]. Разложим каждый член в разностных уравнениях движения невязкого газа (см. [4]) в ряд Тейлора (при этом нужно иметь в виду, что одни величины определены в узлах счетной сетки, другие – в центрах ячеек). При разложении в ряд мы полагаем, что остаточные члены от вязких членов уравнений малы по сравнению с самими вязкими членами. Разложение проведем отдельно для эйлерова и лагранжева этапов вычислений для кубической сетки. Соответствующая система уравнений на эйлеровом этапе для квазистационарных течений (в пренебрежении производными по времени) имеет следующий вид:

$$\frac{\partial \rho u_x}{\partial t} + \text{div}(\rho u_x \bar{u}) = \frac{\partial}{\partial x} \left(A h \rho u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(A h \rho u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(A h \rho u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) + \theta(h^2, \tau^2),$$

$$\frac{\partial \rho u_y}{\partial t} + \text{div}(\rho u_y \bar{u}) = \frac{\partial}{\partial x} \left(A h \rho u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(A h \rho u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(A h \rho u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) + \theta(h^2, \tau^2),$$

$$\frac{\partial \rho u_z}{\partial t} + \text{div}(\rho u_z \bar{u}) = \frac{\partial}{\partial x} \left(A h \rho u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(A h \rho u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(A h \rho u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \theta(h^2, \tau^2),$$

где $A = \text{const}$, зависящая от метода вычисления потоков импульса, для донорно-акцепторного метода (α вычисляется по формуле (19)) $A = 1/4$, для донорного метода ($\alpha = 1$) $A = 1/2$.

В случае квазистационарных течений правые части этой системы будут представлять основные остаточные члены полной системы уравнений газодинамики, которые имеют первый порядок малости по пространственным переменным. Их можно трактовать как производные от компонентов тензора напряжений аппроксимационной вязкости, записав в виде (по повторяющимся индексам суммирование)

$$\sigma_{ik} = Ah\rho u_k \frac{\partial}{\partial x_k} u_i \rightarrow \sigma_{ik} = Ah\rho \langle u \rangle \frac{\partial}{\partial x_k} u_i, \quad (20)$$

$\langle u \rangle$ – характерная скорость потока, которая, однако, является вектором (это обстоятельство отличает схемную вязкость от физической).

Если в уравнении движения применяется донорный метод (что происходит в ячейках с большими отношениями значений потоков масс через две противоположные стороны ячеек, то есть на УВ или в окрестности контактных границ), то $A = 1/2$, при использовании донорно-акцепторного метода (на гладких участках течений) $A = 1/4$.

Формула (20) аналогична выражению для компонент тензора вязких напряжений, входящих в уравнения Навье–Стокса. При этом роль коэффициента физической вязкости здесь играет коэффициент схемной вязкости

$$\eta_c = Ah\rho \langle u \rangle, \quad \nu_c = Ah \langle u \rangle \quad (21)$$

зависящий от локальной скорости потока и размера счетной ячейки.

Заметим, что уравнение энергии также приводится к виду уравнения энергии для вязкой жидкости, но при этом будет содержать и дополнительные члены. Однако все остаточные члены в уравнении энергии малы по сравнению с остаточными членами в уравнении движения, так как имеют третий порядок аппроксимации вследствие использования метода РРМ. Это позволяет при оценке остаточных членов ограничиться рассмотрением уравнения движения.

Спиридоновым В. Ф. (частное сообщение) показано, что при $\sigma \geq \sigma_{\text{крит}}$ приращение давления при вычислении его предвычисленного значения играет роль линейной вязкости. Значение $\sigma_{\text{крит}}$

зависит от УРС, для идеального газа ($p = (\gamma - 1)\rho e$) $\sigma_{\text{крит}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\gamma}$. В методике ЭГАК используется

значение $\sigma = 0,6$. Таким образом, для оценки коэффициента (нестационарной) схемной вязкости за счет предвычисленного давления можно воспользоваться выражением

$$\nu_{\text{ув}} = 0,6c^2\tau \rightarrow \eta_{\text{ув}} = 0,6\rho c^2\tau \quad (22)$$

или, что, то же самое, выражением

$$\nu_{\text{ув}} = 0,3ch \rightarrow \eta_{\text{ув}} = 0,3\rho ch, \quad (23)$$

получающимся в предположении, что при выборе временного шага для невязкой газодинамики ($\tau = Kh/c$) значение числа Куранта равно $K = 0,5$. Из формулы (23) видно, что коэффициент нестационарной схемной вязкости так же линейно зависит от размера ячейки, как и стационарной. В случае вязкой жидкости ниже мы используем непосредственно формулу (22), беря величину счетного шага из соответствующего расчета, так как в расчетах с учетом физической вязкости временной шаг выбирается по другому.

Таким образом, имеются две составляющие аппроксимационной вязкости разностной схемы. В случае квазистационарных течений может быть использована формула (21) с $A = 1/4$ («стационарная» схемная вязкость). Для нестационарных (ударноволновых) течений может быть использована та же формула (21) с $A = 1/2$, при этом с аддитивной добавкой (22) или (23) («нестационарная схемная вязкость»). Ниже на основе расчетов двух задач, имеющих аналитическое решение для вязкой жидкости, показывается обоснованность применения формул (21)–(23) для оценок схемной вязкости методики в конкретных расчетах.

Формулы (21)–(23), кроме всего прочего, позволяют оценить, насколько схемная вязкость больше или меньше физической вязкости для среды при конкретных значениях размеров ячейки. По ним можно оценить, какая должна быть сетка для моделирования течений с учетом физической вязкости. Потому что при достаточно грубых сетках схемная вязкость может быть того же порядка или даже превалировать над физической, и не имеет смысла использовать такие сетки в расчетах с учетом вязкости.

В заключение раздела отметим, что аналогичные формулы для оценки схемной вязкости получаются и для 2D осесимметричных течений.

3. Тестовые расчеты

3.1. Задача Стокса

3.1.1. 2D расчеты с нулевой схемной вязкостью. Для несжимаемой вязкой жидкости в случае тангенциального разрыва двух плоскопараллельных потоков (первая задача Стокса) имеется аналитическое решение для зависимости зоны размазывания скачка скорости от времени, которая выражается формулой Шлихтинга [6]

$$\Delta \approx 8\sqrt{\eta t}. \quad (24)$$

Примечание. Отметим, что в работе [6] используется коэффициент кинематической вязкости, однако в данной задаче плотность равна единице.

При численном решении геометрия системы плоская и имеет вид, нарисованный на рис. 2 ($AB = 1$, $AM = 3$, $MD = 3$). На границах BC и AD – условие периодичности. Параметры веществ: $\rho_1 = \rho_2 = 1$; $\gamma_1 = \gamma_2 = 5/3$; $P_1 = P_2 = 0,6$; $u_x = 0$; $u_y = \pm w$, $w = 0,5$; $\eta = 0,005$. В расчетах использовалась квадратная счетная сетка с $h = 0,01, 0,02, 0,04$.

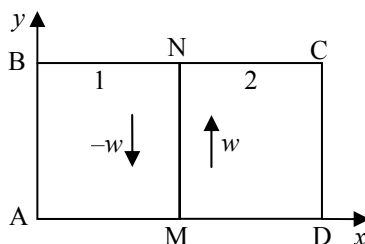


Рис. 2. Начальная геометрия для задачи Стокса в 2D постановке

Расчеты проведены как с указанной физической вязкостью, так и с нулевой вязкостью. Данная задача является стационарной, поэтому для оценки схемной вязкости можно использовать формулу (21). Легко проверить, что в этой задаче при заданных скоростях теоретически схемная вязкость в расчетах равна нулю.

В расчете с $\eta = 0$ роста зоны размазывания скачка скорости не происходило, то есть полученное решение соответствует аналитическому решению для невязкой жидкости. В расчетах с $\eta = 0,005$ происходило размазывание скачка скорости. Ниже ширина зоны размазывания определялась по узлам счетной сетки, в которых скорости отличались от скорости основного потока на 1%. На рис. 3 приводятся расчетные зависимости ширины зоны Δ от времени при выбранном способе, там же приведена аналитическая зависимость $\Delta \approx 8\sqrt{\eta t}$ при $\eta = 0,005$. Видно, что расчетные зависимости ширины зоны хорошо согласуются с аналитической зависимостью для всех расчетов с разными размерами ячеек.

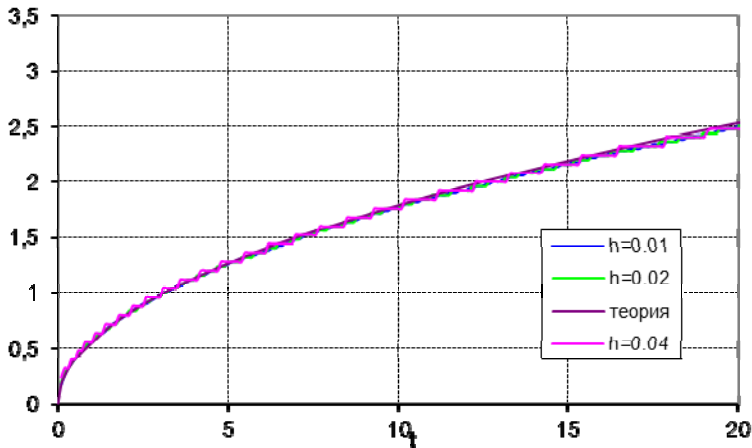


Рис. 3. Задача Стокса. Зависимости ширины зоны Δ от времени в 2D расчетах с нулевой схемной вязкостью

3.1.2. Расчетная оценка схемной вязкости. Если решать задачу Стокса для невязкого газа с помощью численных методов, имеющих схемную вязкость, то в расчетах также должен происходить рост зоны размазывания скачка скорости из-за наличия схемной вязкости. Сопоставляя результаты численного решения с аналитическими решениями, можно оценить, какой физической вязкости соответствует полученное численное решение.

Геометрия системы и постановка расчета представлены выше, в данном расчете физическая вязкость равнялась нулю, однако, в отличие от вышеприведенного расчета, счетная область двигалась как целое вдоль оси Ox со скоростью $u_x = 1$. В этом случае оценка схемной вязкости по формулам (20, 21) при $u_x = 1$ дает $\nu_c = 0,0025$ (размер счетной ячейки $h = 0,01$). В отличие от расчета с $u_x = 0$ в предыдущем разделе в данном расчете происходило размазывание скачка скорости даже при нулевой физической вязкости.

Зависимость ширины зоны размазывания скорости выражается формулой (24). Из нее следует

$$\eta \approx \left(\frac{\Delta}{8\sqrt{t}} \right)^2. \quad (25)$$

В соответствии с этой формулой коэффициент вязкости, присутствующей в расчете, должен выражаться формулой

$$\eta_c \approx \left(\frac{\Delta_c}{8\sqrt{t}} \right)^2. \quad (26)$$

В табл. 1 приводятся η_c , определенные на разные моменты времени.

Таблица 1

Коэффициент расчетной вязкости на разные моменты времени

t	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
η_c	0,0035	0,0035	0,0036	0,0037	0,0035	0,0035

Из табл. 1 видно, что с течением времени η_c практически не меняется и рост ширины зоны размазывания скорости происходит согласно формуле (26) с $\eta = \eta_c \approx 0,0035$. На рис. 4 приводится расчетная зависимость ширины зоны Δ от времени (кривая 1), там же приведена аналитическая зависимость (26) при $\eta = 0,0035$ (кривая *theory*).

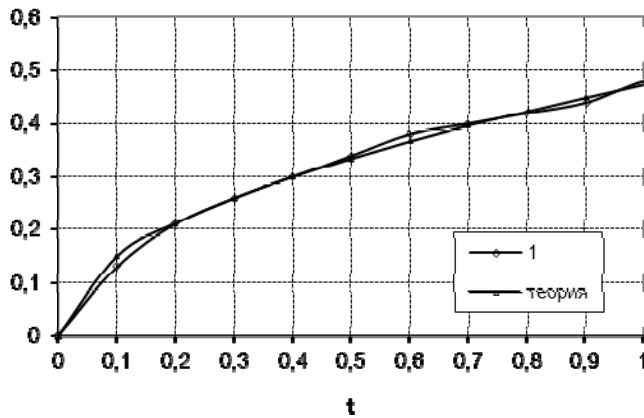


Рис. 4. Задача Стокса. Зависимость ширины зоны Δ от времени

Расчетная зависимость ширины зоны от времени хорошо согласуется с аналитической зависимостью, что говорит о близости полученного численного решения к аналитическому решению для вязкой жидкости с $\eta = 0,0035$.

3.1.3. Оценка влияния схемной вязкости. Для оценки влияния схемной вязкости на результаты расчетов были проведены расчеты задачи Стокса для вязкого газа с коэффициентом физической вязкости $\eta = 0,005$ в вышеприведенной постановке – счетная область двигалась как целое вдоль оси Ox со скоростью $u_x = 1$. В расчетах варьировалась счетная сетка ($h = 0,005, h = 0,01, h = 0,02, h = 0,04$), которым соответствовали коэффициенты схемной вязкости по формуле (21) $\eta_c = 0,00125, 0,0025, 0,005, 0,01$.

На рис. 5 приводятся расчетные зависимости ширины зоны Δ от времени для всех расчетов, там же приведена аналитическая зависимость $\Delta \approx 8\sqrt{\eta t}$ для $\eta = 0,005$.

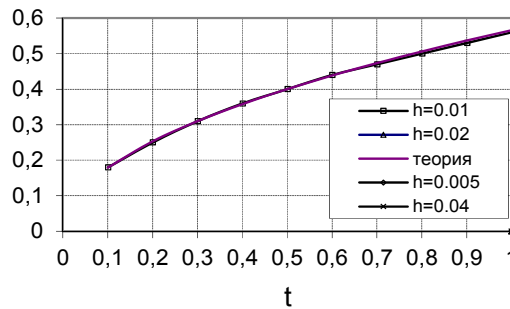


Рис. 5. Задача Стокса. Зависимость Δ от времени для расчетов на разных сетках

Из рис. 5 видно, что зависимости ширины зоны для расчетов на сетках с $h = 0,005, h = 0,01$ хорошо согласуются с аналитической зависимостью. Для этих расчетов коэффициент схемной вязкости меньше, чем коэффициент физической вязкости $\eta = 0,005$ ($\eta_c < \eta$). В расчете на сетке с $h = 0,02$ влияние схемной вязкости на результаты расчета ($\eta_c = \eta$) заметно. В расчетах на более грубых сетках коэффициент схемной вязкости больше, чем коэффициент физической вязкости ($\eta_c > \eta$). Влияние схемной вязкости в таких расчетах уже существенное.

Примечание. Немонотонное поведение двух кривых на рис. 5 объясняется грубостью счетной сетки при малом количестве ячеек.

3.2. Фронт стационарной ударной волны

3.2.1. Постановка задачи и расчетов. Рассматривается задача о «размытии» фронта стационарной ударной волны (УВ) в конденсированной среде, взятая из статьи [7] (опыт № 927) с коэффициентом физической вязкости $\eta = 0,01$ ГПа·10 мкс.

Начальная геометрия задачи в расчетах приведена на рис. 6.

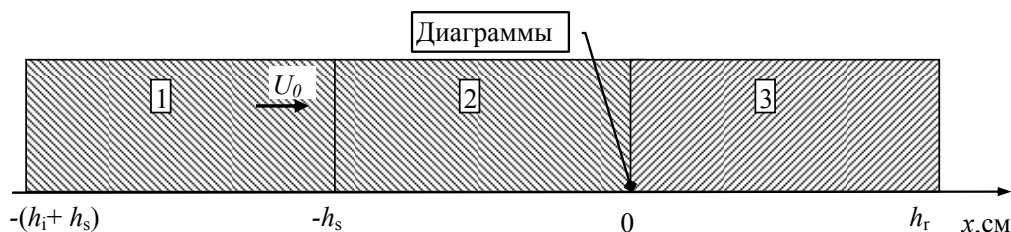


Рис. 6. Начальная геометрия: 1 – ударник, 2 – образец, 3 – опорная пластина

В расчетах: пластина-ударник (алюминиевый сплав Al 6061-T6) толщиной $h_1 = 1,223$ см, со скоростью удара $U_0 = 0,4808$ км/с; образец (сплав Al 6061-T6) толщиной $h_s = 1,223$ см; опорная пластина толщиной $h_r = 1,223$ см.

Проведена серия расчетов в плоской геометрии. Использовалась равномерная эйлерова сетка с размерами ячеек по оси x (по нормали к поверхности ударника и мишени) $h = 0,002, 0,001$ и $0,0005$ см. На левой и правой границах задавалось условие типа «свободная поверхность».

Для алюминиевого сплава использовалось уравнение состояния РОСА-МИ [8] без учета разрушения; для описания упругопластических свойств использовалась модель сдвиговой прочности [9].

В момент удара все три пластины (ударник, образец и опора) были в состоянии «при нормальных условиях»: температура $T_0 = 293^\circ\text{K}$, давление $P_0 = 10^{-4}$ ГПа, удельная внутренняя энергия $e_0 = 0$ кДж/г, плотность $\rho_0 = 2,71$ г/см³. Расчеты проводились до момента времени $t = 0,3 \cdot 10$ мкс. Укажем некоторые данные, необходимые для оценок схемной вязкости: скорость звука $c \approx 5,5$, массовая скорость $u \approx 0,25$, скорость распространения УВ $D \approx 5,75$, величина счетного шага τ в расчетах приведена в табл. 3.

3.2.2. Результаты расчетов и их обсуждение. Для данной задачи имеются экспериментальные данные по скорости контактной границы «Al – опорная пластина», по которым возможно определить ширину и временной интервал размазывания УВ. Последний из этих параметров и будет являться основным при анализе результатов расчетов.

Прежде чем перейти к результатам расчетов, отметим следующие их особенности. В данной задаче имеются УВ (в первой задаче их нет), для моделирования которых используется искусственная вязкость, состоящая из квадратичной и линейной частей. Обе эти вязкости действуют аналогично физической вязкости, сглаживая профиль УВ. При этом квадратичная вязкость размазывает УВ на ~ 4 ячейки, а зона размазывания у линейной вязкости может быть значительно больше, так как она «работает» (превалирует по сравнению с квадратичной) и за фронтом волны. Следовательно, влияние искусственной вязкости на временные зависимости скорости рассматриваемой контактной границы может быть значительным. Кроме этого, вследствие наличия УВ в данной задаче при оценке необходим учет дополнительной схемной вязкости за счет определения предвычисленного давления (формула (13)).

Таким образом, в данной задаче имеет место наложение действий пяти видов вязкостей: физической, искусственной (квадратичной и линейной), схемной (стационарной и нестационарной) на решение. Для выяснения эффектов, связанных именно с физической вязкостью, необходимо минимизировать влияние остальных или же точно их оценить. При оценке последних авторы используют **первое предположение**, что каждая из рассматриваемых ниже вязкостей влияют на течение аддитивным образом.

Ударноволновые течения в методике ЭГАК не могут быть смоделированы без квадратичной вязкости, но линейная вязкость допускает ее отключение, поэтому были проведены расчеты как с линейной вязкостью, так и без нее. Естественно, возможно отключение и физической вязкости. В табл. 3 приведены отличительные данные всех проведенных расчетов (n соответствует размеру ячейки $h = 0,002\text{см}$). Остальные вязкости (схемные и искусственная квадратичная) могут быть оценены теоретически или численно при помощи расчетов, при этом их влияние уменьшается при измельчении счетной сетки.

Отметим еще один момент, связанный с оценкой схемной вязкости. Дело в том, что формула (21) получена для квазистационарных течений однородной (однокомпонентной) среды. Ударноволновые течения условию квазистационарности не удовлетворяют, кроме того, рассматриваемая среда является многокомпонентной. Поэтому теоретическая оценка схемной вязкости должна производиться по формуле (21), к которой должна быть добавлена нестационарная вязкость за счет предвычисленного давления по формуле (22).

Таблица 3

Отличительные особенности расчетов

Номер расчета	Число ячеек	Величина шага τ	Линейная вязкость	Физическая вязкость $\eta = 0,01$
1	n	0,00012	Нет	Есть
2	$2n$	0,00006	Нет	Есть
3	$4n$	0,00003	Нет	Есть
4	n	0,00012	Есть	Нет
5	n	0,00012	Есть	Есть
6	$2n$	0,00006	Есть	Нет
7	$2n$	0,00006	Есть	Есть
8	$2n$	0,00006	Нет	Нет
9	n	0,00006	Есть	Нет

Ниже анализируются результаты расчетов в виде временного интервала (ширины) зоны размазывания скорости на контактной границе (КГ). При этом возникает проблема корректного определения ширины зоны, так как в рассматриваемых задачах нет четкой границы. В настоящей работе ширина определялась следующим образом. В качестве границ зоны взяты точки, в которых значения скорости отличаются от значений скорости, находящихся на полочке слева или справа от зоны размазывания, как и выше, $\sim 1\%$ от величины ее максимального значения. В данном эксперименте максимальное значение скорости составляет величину $\sim 0,231$ (в расчетах $\sim 0,24$), тогда $\Delta u \sim 0,0025$ с каждой стороны зоны. Определенная таким образом экспериментальная ширина (по времени) составляет величину $\sim 0,0085 - 0,0115$. К сожалению, для более точного определения не хватает экспериментальных точек. Поэтому в качестве экспериментальной ширины возьмем среднее значение $\Delta t_{\text{exp}} = 0,01$.

Прежде чем анализировать результаты расчетов, выпишем теоретические оценочные значения части нефизических вязкостей и соответственно величины соответствующих временных интервалов зоны размазывания скорости.

Рассмотрим искусственную квадратичную вязкость. Ширина зоны размазывания УВ за счет этой вязкости с указанным выше множителем в методике ЭГАК, как правило, составляет ~ 4 ячейки,

что позволяет оценить и временной интервал размазывания зоны: $\Delta t = (\text{ширина зоны})/(\text{скорость УВ}) \approx \approx 4h/5,75 \approx 0,0014$ для расчета n .

Оценка схемных вязкостей дает следующие значения: стационарная вязкость по формуле (21) равна 0,00068, а нестационарная по формуле (22) – 0,0058 для расчета n . При теоретической оценке схемной вязкости принято во внимание, что в данной задаче интересует погрешность на УВ, а на ней используется донорная аппроксимация потоков импульса. Для расчетов $2n$ и $4n$ полученные значения должны быть уменьшены соответственно в 2 и 4 раза. Переход к временной ширине размазывания УВ (Δt) осуществим исходя из следующих соображений. Мы имеем результаты моделирования с учетом физической вязкости и без нее, что позволяет связать коэффициент динамической вязкости с шириной размазывания УВ линейной зависимостью

$$\Delta t_c = B\eta_c, \quad (27)$$

где $B \approx 1$ – некоторая размерная константа, значение которой получено ниже.

Предполагая постоянство этой константы (**второе предположение**), из значения величины коэффициента динамической вязкости по формуле (27) можем получить временной интервал размазывания УВ и для схемной вязкости.

Рассмотрим теперь результаты расчетов, которые в виде зависимостей скорости КГ «А1 – опорная пластина» приводятся на рис. 7–10. В табл. 4 собраны интегральные данные по интервалам времен размазывания УВ. В ней в столбцах 4–8 для всех расчетов представлены Δt отдельно для каждого вида нефизических вязкостей, в столбце 2 – суммарное значение по столбцам 4–8, в столбце 1 – значение, полученное в соответствующем расчете.

В этой таблице неизвестно теоретическое значение линейной вязкости. Она оценена сравнением двух расчетов: с линейной вязкостью и без нее (в предположении аддитивности влияния отдельных вязкостей на решение). На рис. 7 приводятся результаты расчетов на сетке $2n$ с нулевой физической вязкостью $\eta = 0$, и с нулевой и с ненулевой линейной вязкостью. Сравнивая результаты двух расчетов (см. в табл. 4 строки 6 и 8) можно найти величину влияния линейной вязкости в расчете. Временной интервал размазывания скорости составляет $\Delta t \sim 0,0030$ для расчета без линейной вязкости и $\Delta t \sim 0,0059$ с ее учетом. Таким образом, на линейную вязкость приходится $\Delta t \sim 0,0029 = (0,0059 - 0,0030)$. Аналогичная оценка линейной вязкости для расчетов на сетке n $\Delta t \sim 0,0039$.

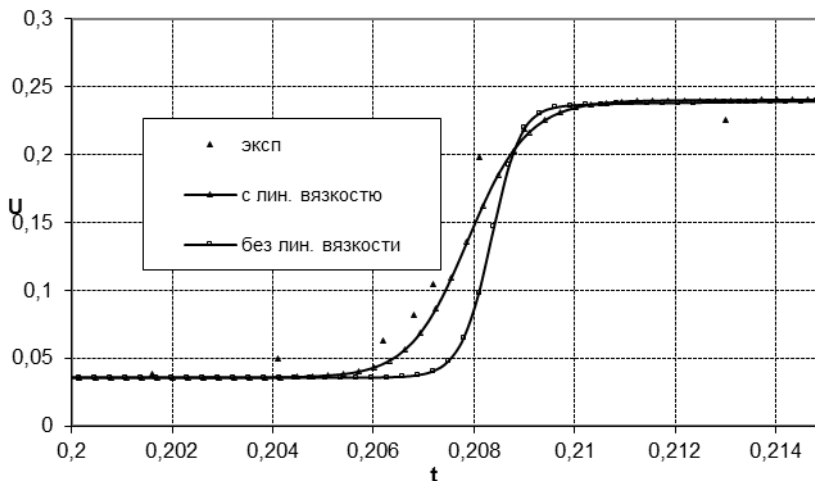


Рис. 7. Зависимости массовой скорости КГ «образец-опорная пластина» от времени в расчетах $\eta = 0$ с линейной вязкостью и без нее на сетке $2n$

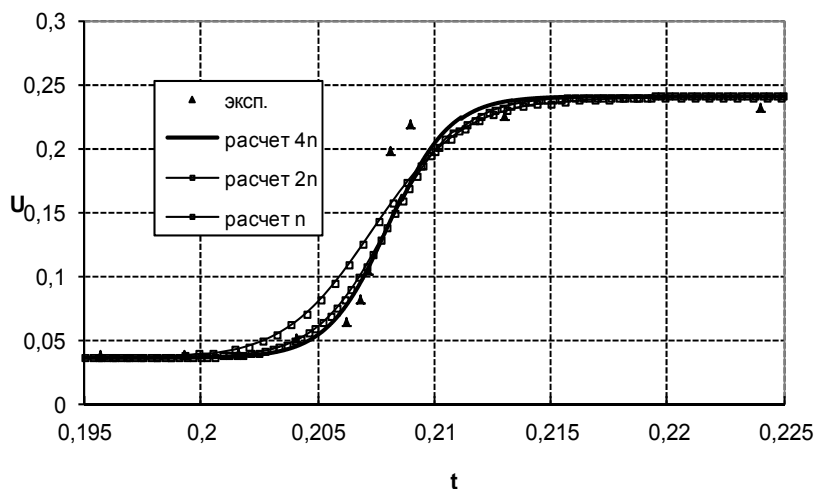


Рис. 8. Зависимости массовой скорости КГ «образец-опорная пластина» от времени в расчетах на сходимость без линейной вязкости

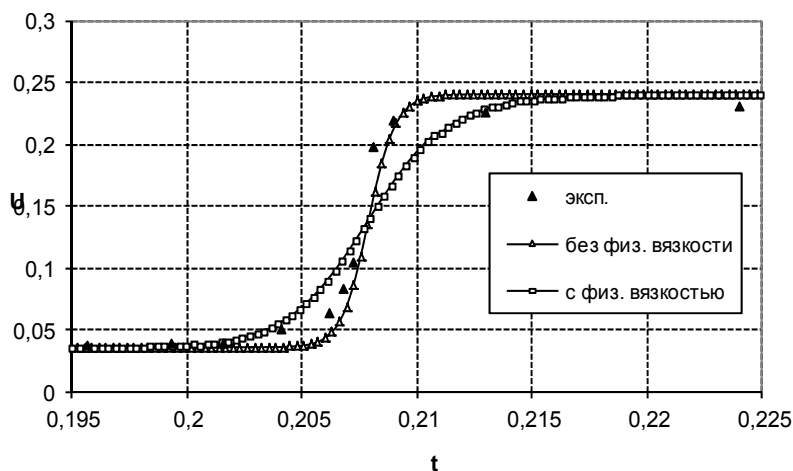


Рис. 9. Зависимости массовой скорости КГ «образец-опорная пластина» от времени в расчетах $\eta = 0$ и $\eta = 0,01$ на сетке $2n$

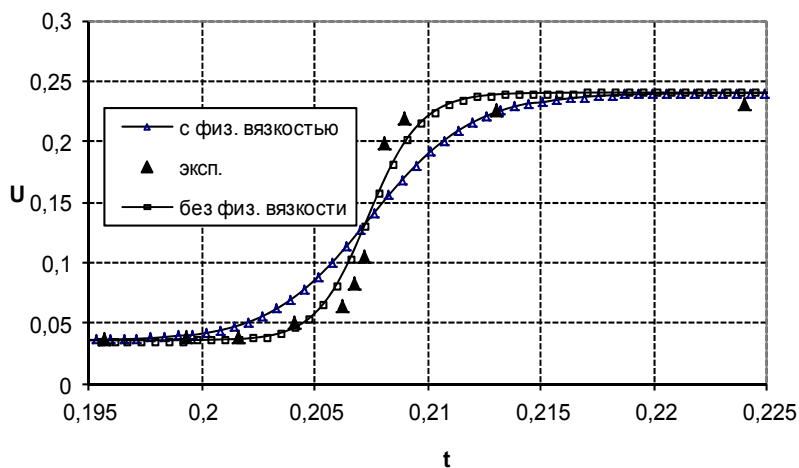


Рис. 10. Зависимости массовой скорости КГ «образец-опорная пластина» от времени в расчетах $\eta = 0$ и $\eta = 0,01$ на сетке n

Расчетные данные по временному интервалу зоны размазывания UV^*

Расчет	$\Delta t_{\text{расчет}}$	$\Delta t_{\text{сумма}}$	$\Delta t_{\text{ф}}$	Δt_{sw}	$\Delta t_{\text{лин}}$	$\Delta t_{\text{нс}}$	$\Delta t_{\text{с}}$
1 (n)	0,0166	0,0180	0,01	0,0014	0	0,0058	0,00068
2 ($2n$)	0,0130	0,0140	0,01	0,0007	0	0,0029	0,00034
3 ($4n$)	0,0114	0,0120	0,01	0,00035	0	0,00145	0,00017
4 (n)	0,0105	0,0118	0	0,0014	0,0039	0,0058	0,00068
5 (n)	0,0205	0,0218	0,01	0,0014	0,0039	0,0058	0,00068
6 ($2n$)	0,0059	0,0068	0	0,0007	0,0029	0,0029	0,00034
7 ($2n$)	0,0159	0,0168	0,01	0,0007	0,0029	0,0029	0,00034
8 ($2n$)	0,0030	0,0039	0	0,0007	0	0,0029	0,00034
9 (n)	0,0076	0,0089	0	0,0014	0,0039	0,0029	0,00068
Эксп.	0,01	–	–	–	–	–	–

*) В таблице $\Delta t_{\text{расчет}}$ – расчетное значение Δt , $\Delta t_{\text{сумма}}$ – суммарное значение за счет всех вязкостей, $\Delta t_{\text{ф}}$ – за счет физической вязкости, Δt_{sw} – за счет квадратичной искусственной вязкости, $\Delta t_{\text{лин}}$ – за счет линейной искусственной вязкости, $\Delta t_{\text{нс}}$ – за счет нестационарной схемной вязкости по формулам (22) и (27), $\Delta t_{\text{с}}$ – за счет стационарной схемной вязкости по формулам (21) и (27)

Рассмотрим результаты расчетов, в которых меняется временной шаг при сохранении остальных параметров неизменными (расчеты 4 и 9). В этом случае в расчетах меняется лишь нестационарная вязкость, которая линейно зависит от временного шага. Из этих расчетов можно определить расчетное значение разницы между временными интервалами $\Delta t \sim 0,0029 = (0,0105 - 0,0076)$, которое совпадает с теоретической оценкой. Этот факт служит подтверждением правомерности предположения об аддитивности действия различных вязкостей и достаточной точности полученной теоретической оценки нестационарной вязкости.

Прежде всего отметим, что в расчетах с физической вязкостью имеется сходимость к эксперименту с уменьшением размеров ячеек. Об этом свидетельствует рис. 8, на котором приведены графики зависимостей скорости КГ от времени, полученные в расчетах на сходимость с физической вязкостью $\eta = 0,01$ на сетках n , $2n$ и $4n$ без линейной вязкости в сравнении с экспериментальными данными. Соответствующие временные интервалы приведены в табл. 4 (первые 3 строки). Из таблицы видно, что расчетная вязкость оказывается несколько меньше по сравнению с оценочным значением во всех трех расчетах. Однако погрешность оценки уменьшается (линейно) с уменьшением размера ячеек ($\Delta t_{\text{расчет}} - \Delta t_{\text{сумма}}$) = 0,0014, 0,0010, 0,0006, соответственно, что также говорит о наличии сходимости численного решения.

Как уже отмечено выше, можно оценить точность учета физической вязкости по используемой методике. На рис. 9 приводятся результаты расчетов на сетке n с нулевой $\eta = 0$ и ненулевой $\eta = 0,01$ физической вязкостью в сравнении с экспериментальными данными. Разница между двумя расчетами (см. строки 4 и 5 в табл. 4) дает величину «расчетной» физической вязкости. Временная ширина зоны размазывания скорости в расчете с $\eta = 0$ составила $\Delta t \sim 0,0105$, в расчете с $\eta = 0,01$ – $\Delta t \sim 0,0205$. На рис. 10 приводятся аналогичные результаты расчетов на сетке $2n$ (см. также строки 6 и 7 в табл. 4). Временной интервал ширины зоны в расчете с $\eta = 0$ составила $\Delta t \sim 0,0059$, в расчете с $\eta = 0,01$ – $\Delta t \sim 0,0159$. Разница между этими данными на обеих сетках составляет величину $\Delta t \sim 0,01$, что лежит в экспериментальном диапазоне. Полученные результаты, таким образом, означают, что заданная физическая вязкость $\eta = 0,01$ в расчетах учитывается корректно. Отсюда и из результатов расчетов на сходимость (см. выше) следует и побочный вывод о том, что погрешность моделирования в основном определяется аппроксимацией невязких членов уравнений. Отметим также, что из этих расчетов следует, что значение константы B в формуле (27) равно 1.

Таким образом, оценка полной схемной вязкости по формулам (21), (22) и с учетом искусственной вязкости дает близкое к полученным в расчете значения, при этом величина погрешности коррелирует с размером ячейки.

4. Оценка схемного числа Рейнольдса

Полученная оценка схемной вязкости позволяет оценить и величину схемного числа Рейнольдса (Re) в расчетах. Теоретически число Re определяется выражением

$$Re = \frac{\langle u \rangle L}{\nu}, \quad (28)$$

где L – характерный размер задачи. Если вместо физической вязкости ν в (28) использовать схемную вязкость для стационарного течения (формулу (21)), что представляется вполне корректной (например, для турбулентных течений), получим схемное число Рейнольдса Re_c

$$Re_c = \frac{\langle u \rangle hN}{Ah \langle u \rangle} = \frac{N}{A}, \quad (29)$$

где N – число ячеек на характерный размер задачи. Таким образом, при $A = 1/4$ $Re_c = 4N$, то есть схемное число Рейнольдса с точностью до множителя равно количеству ячеек в направлении характерного размера задачи.

Заключение

В работе кратко описаны исходные уравнения и разностная схема методики решения уравнений Навье-Стокса для многокомпонентной среды, реализованной в методике ЭГАК, и предназначенной для моделирования 2D и 3D течений в эйлеровых переменных. Представлены результаты тестовых расчетов, подтверждающих корректность работы программы.

Приведена теоретическая оценка схемной вязкости для квазистационарных и нестационарных течений, получающаяся из рассмотрения первого дифференциального приближения. Проведены расчеты для двух течений, которые показали, что влияние схемной вязкости на получаемое разностное решение во многом аналогично влиянию физической вязкости. Поэтому при проведении расчетов важно уметь оценивать эффекты, связанные с ее наличием. Показано, что схемную вязкость методики ЭГАК, а также схемное число Рейнольдса можно оценить по предложенным в данной работе формулам, которые дают вполне корректные оценки в расчетах безударных и ударно-волновых течений многокомпонентной среды. Это позволяет теоретически определять критические размеры ячеек, больше которых не имеет смысла использовать при проведении расчетов течений вязкой жидкости, так как в этом случае влияние схемной вязкости будет сравнимо с эффектами физической вязкости.

Анализ результатов показывает, что в первой задаче расчетная вязкость оказывается несколько больше оценочной, а во второй, наоборот, меньше. Тем не менее, абсолютные значения расчетных вязкостей довольно близки к оценочным значениям (возможно было получить и более лучшее согласие выбором критерия определения зон размазывания, однако авторы не ставили перед собой такую цель). Это свидетельствует о достаточной корректности использованных в работе предположений об аддитивности действия различных вязкостей на решение и линейном законе связи между шириной зоны размазывания УВ и коэффициентами физической и схемной вязкостей. Кроме того, из полученных результатов следует, что при проведении расчетов с учетом физической вязкости для получения адекватных численных результатов достаточно обеспечить малость оценочных значений нефизических вязкостей по сравнению с физической.

В заключение отметим, что полученные результаты являются достаточно общими, тем не менее авторы не могут указать какую-либо формулу для определения критических размеров ячеек, которая обеспечила бы малость схемной вязкости по отношению к физической и была бы пригодна для любой методики. Однако сам подход к проблеме может быть использован при проведении расчетов и по другим методикам.

Благодарности

Авторы выражают благодарность Иоилеву А. Г. за предложенную вторую задачу; Спиридонову В. Ф., обратившему наше внимание на схемную вязкость, связанную с предвычисленным давлением; Наумову А. О. за ценные замечания по тексту статьи.

Литература

1. Янилкин Ю. В., Беляев С. П., Бондаренко Ю. А. и др. Эйлеровы численные методики ЭГАК и ТРЭК для моделирования многомерных течений многокомпонентной среды // Труды РФЯЦ-ВНИИЭФ. 2008. Вып. 12. С. 54–65.
2. Стадник А. Л., Стаценко В. П., Янилкин Ю. В. Учет молекулярной вязкости при прямом 3D численном моделировании гравитационного турбулентного перемешивания // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2005. Вып. 1–2. С. 74–83.
3. Яненко Н. Н., Шокин Ю. И. О первом дифференциальном приближении разностных схем для гиперболических систем уравнений // Сибирский математический журнал. 1969. Т. 10, № 5.
4. Bakhrakh S., Samigulin M., Sevastianov V., Yanilkin Yu. The EGAK Method for Calculating Gas Flows of Heterogeneous Media in Eulerian Coordinates // Numerical Method in Fluid Dynamics. М.: MIR, 1984.
4. Бахрах С. М., Жарова Г. В., Спиридонов В. Ф. Консервативная схема счета осесимметричных течений (явно-неявный алгоритм) // Численные методы динамики вязкой жидкости. 1983. С. 31–35.
5. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974.
6. Johnson J. N., Barker L. M. Dislocation dynamics and steady plastic wave profiles in 6061-T6 aluminum // J. Appl. Phys. 1969. Vol. 40, N 11. P. 4321–4334.
7. Гордеев Д. Г., Гударенко Л. Ф., Каякин А. А., Куделькин В. Г. Полуэмпирическая модель уравнений состояния металлов с эффективным учетом ионизации. Часть 1. Описание модели // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2010. Вып. 3.
8. Глушак Б. Л., Новиков С. А., Батьков Ю. В. Определяющее уравнение Al и Mg для описания высокоскоростного деформирования в УВ // ФГВ. 1992, № 1.
9. Янилкин Ю. В., Стаценко В. П., Козлов В. И. Математическое моделирование турбулентного перемешивания в сжимаемых средах: курс лекций. – Саров: ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 2009.