

11. Новиков И. Г., Соколов С. С. Локальные перестройки нерегулярной сетки в методике «ТИМ-2D» // VI научно-техническая конференция «Молодежь в науке»: сб. докл. Саров, 30 октября–1 ноября 2007 г.

12. Новиков И. Г., Панов А. И., Соколов С. С. Способ коррекции нерегулярной лагранжевой сетки методом наложения дифференцируемых связей // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 2005. Т. 45, № 8. С. 1487–1500.

13. Власов Ю. В., Панов А. И., Самодолов А. В., Соколов С. С. Магнитодинамическое моделирование устройства на основе взрывомагнитного генератора взрывного размыкателя тока по методике ТИМ-2D // XVI Международная конференция «Харитоновские чтения»: сб. докл. Саров, 21–25 апреля 2014. С. 131–137.

14. Kaul A. M., Ivanovsky A. V., Atchison W. L. et al. Damage growth and recollection in aluminum under axisymmetric convergence using a helical flux compression generator // Journal of Applied Physics. 2014. 115. 023516.

15. Власов Ю. В. Анализ результатов магнитодинамического моделирования коммутации тока взрывными размыкателями различного типа // Прикладная математика и техническая физика. 2015. Т. 56, № 1. С. 131–136.

## УСКОРЕНИЕ ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ РАСЧЕТОВ НА НЕСТРУКТУРИРОВАННЫХ СЕТКАХ

*К. Н. Волков, В. Н. Емельянов, И. В. Тетерина*

Балтийский государственный технический университет  
«ВОЕНМЕХ» им. Д. Ф. Устинова, г. Санкт-Петербург

Течения жидкостей и газов играют ключевую роль в рабочих процессах многих технических устройств. Математические модели газодинамических процессов основаны на фундаментальных законах сохранения массы, количества движения и энергии. В модели включаются также уравнения для термодинамических величин, уравнения состояния и уравнения для тепловых потоков. Турбулентность оказывает влияние на процессы смешения, горения, генерации шума, распространение излучения и перенос частиц дисперсной примеси.

К настоящему времени накоплен обширный фонд вычислительных алгоритмов, предназначенных для численного моделирования течений жидкости и газа, описываемых уравнениями Эйлера или Навье–Стокса. Широкое распространение получили многочисленные программные продукты, в том числе коммерческие. Достижения в создании универсальных вычислительных пакетов, предназначенных для решения широкого круга задач газодинамики и теплообмена, выглядят достаточно впечатляюще. Во многом этим они обязаны прогрессу в разработке современных вычислительных систем с параллельной обработкой данных, развитию математических моделей, а также разработке эффективных численных методов.

Универсальные коммерческие CFD-пакеты (например, Fluent, CFX, Star-CD и другие) и пакеты с открытым исходным кодом (например, OpenFOAM) представляют собой сложные многокомпонентные системы, имеющие трехступенчатую структуру: сеточный генератор, расчетный модуль, графический интерпретатор результатов. В пакеты включаются широкие наборы математических моделей управляющих физических процессов, конечно-разностных схем, методов решения систем разностных уравнений, из элементов которых конструируется решение той или иной задачи. Многие пакеты допускают эксплуатацию не только на персональных компьютерах и рабочих станциях, но и на многопроцессорных вычислительных системах.

Широкое распространение вычислительных пакетов создает иллюзию того, что они позволяют решить любые задачи. На самом деле, используемые в них каталоги математических моделей и конечно-разностных схем далеки от совершенства, поскольку научные изыскания по ним не закончены. Приемлемость многих моделей для решения сложных задач и определение границ их применимости составляет предмет отдельного исследования (многие подходы тестируются на расчетах канонических течений и их приемлемость в более широком диапазоне условий не очевидна). В существенной степени, это относится к реализации методов моделирования турбулентных течений.

В создании пакетов наблюдается стремление к охвату всего многообразия моделей, причем математическая сторона вопроса доминирует над здравым физическим смыслом. Современное состояние науки не способно ответить на ряд важных вопросов о приемлемости некоторых моделей, взятых по отдельности или в сочетании.

Имеющиеся публикации показывают, что усилия исследователей концентрируются, в основном, на численной реализации подходов, имеющей узкую область специализации и воплощающей последние достижения в области вычислительной газодинамики и теплообмена (в пакетах используются, как правило, устоявшиеся подходы, прошедшие апробацию для задач иного класса).

Для многих практических приложений характерны течения со сложной разномасштабной структурой потока (ударные волны, контактные разрывы, волны разрежения, взаимодействие скачков уплотнения, мелкомасштабная турбулентность, отрывные зоны), что требуется учитывать при разработке соответствующих вычислительных методов для надлежащего разрешения мелкомасштабных особенностей потока. Для получения решения широко используются эмпирические законы турбулентного перемешивания, полученные в условиях, не позволяющих считать эти законы универсальными.

Попытки достичь заданной точности численного решения только за счет увеличения числа узлов или ячеек сетки приводят к таким затратам времени счета и памяти, которые оказываются предельными для самых мощных из современных компьютеров. Проблемы уменьшения требований к компьютерным ресурсам (процессорное время и машинная память) и ускорения газодинамических расчетов остаются одними из основных задач вычислительной газовой динамики, не теряя своей актуальности с совершенствованием вычислительной техники, поскольку потребности практики опережают рост возможностей компьютеров. При этом эффективность вычислительных алгоритмов, предназначенных для численного решения уравнений газовой динамики, в существенной степени зависит от типа конечно-разностных схем (явные или неявные), порядка аппроксимации (низкий или высокий), шаблона разностной схемы (фиксированный или нет) и других факторов.

Несмотря на интенсивное развитие вычислительной техники и достигнутые успехи как в области построения численных методов, так и в разработке соответствующего математического обеспечения, проблема численного моделирования турбулентных течений остается одной из наиболее сложных и важных проблем механики жидкости и газа. В отличие от ламинарных течений, расчет которых стал во многом рутинной процедурой, надежное предсказание характеристик турбулентных течений по ряду причин (трехмерный характер, стохастическая природа, широкий пространственно-временной спектр масштабов) остается, скорее, искусством, чем строгой наукой.

Среди основных методов моделирования турбулентных течений выделяют прямое численное моделирование (Direct Numerical Simulation, DNS), моделирование крупных вихрей (Large Eddy Simulation, LES) и решение осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса (Reynolds-Averaged Navier-Stokes, RANS). Имеются также подходы, сочетающие в себе те или иные черты DNS, RANS и LES, в частности, метод моделирования отсоединенных вихрей (Detached Eddy Simulation, DES) и ряд других.

Традиционные модели турбулентности не описывают многие эффекты (даже на качественном уровне), связанные с вихревой структурой и теплообменом в трехмерных сверхзвуковых течениях. Для повышения точности численного моделирования и повышения информативности описания турбулентных течений жидкости и газа вместо решения осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса, замкнутых при помощи той или иной модели турбулентности, используются методы прямого численного моделирования и моделирования крупных вихрей.

Отсутствие универсальной модели турбулентности и возросшие возможности вычислительной техники заставили изменить оценку возможностей классической теории турбулентности и стимулировали поиск и применение, с одной стороны, более строгих и универсальных подходов, чем RANS, а с другой стороны, менее дорогостоящих подходов, чем DNS. Моделирование крупных вихрей является компромиссным вариантом между DNS и решением RANS. Крупные вихри, находящиеся под прямым воздействием граничных условий и несущие в себе максимум реynольдсовых напряжений, рассчитываются. Мелкие вихри имеют более универсальную структуру и моделируются при помощи моделей подсеточного масштаба (Sub-Grid Scale, SGS).

Нестационарное пространственное течение вязкого сжимаемого газа описывается при помощи уравнений Навье–Стокса, записанных относительно мгновенных (прямое численное моделирование), средних (решение уравнений Рейнольдса) или фильтрованных по пространству (моделирование крупных вихрей) функций. Неинерциальность системы отсчета учитывается при помощи введения в источник член кориолисовой и центробежной силы. Для замыкания фильтрованных уравнений Навье–Стокса используется гипотеза вихревой вязкости (модели типа модели Смагоринского и динамические модели), предположение о локальном подобии структуры мелко- и крупномасштабной турбулентности (модели подобных масштабов) и модели, использующие обращение свертки.

В декартовой системе координат нестационарное пространственное течение вязкого сжимаемого газа описывается следующими уравнениями, записанными в консервативных переменных:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = 0.$$

Связь между давлением и удельной полной энергией имеет вид:

$$p = (\gamma - 1)\rho \left[ e - \frac{1}{2}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \right].$$

Вектор консервативных переменных  $Q$  и вектор потока  $F$  имеют следующий вид:

$$Q = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_x \\ \rho v_y \\ \rho v_z \\ \rho e \end{pmatrix}, \quad F_x = \begin{pmatrix} \rho v_x \\ \rho v_x v_x + p - \tau_{xx} \\ \rho v_x v_y - \tau_{xy} \\ \rho v_x v_z - \tau_{xz} \\ (\rho e + p)v_x - v_x \tau_{xx} - v_y \tau_{xy} - v_z \tau_{xz} + q_x \end{pmatrix},$$

$$F_y = \begin{pmatrix} \rho v_y \\ \rho v_y v_x - \tau_{yx} \\ \rho v_y v_y + p - \tau_{yy} \\ \rho v_y v_z - \tau_{yz} \\ (\rho e + p)v_y - v_x \tau_{yx} - v_y \tau_{yy} - v_z \tau_{yz} + q_y \end{pmatrix}, \quad F_z = \begin{pmatrix} \rho v_z \\ \rho v_z v_x - \tau_{zx} \\ \rho v_z v_y - \tau_{zy} \\ \rho v_z v_z + p - \tau_{zz} \\ (\rho e + p)v_z - v_x \tau_{zx} - v_y \tau_{zy} - v_z \tau_{zz} + q_z \end{pmatrix}.$$

Компоненты тензора вязких напряжений и вектора теплового потока находятся из соотношений:

$$\tau_{ij} = \mu_e \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right), \quad q_i = -\lambda_e \frac{\partial T}{\partial x_i}.$$

Дискретизация основных уравнений проводится при помощи метода конечных объемов на неструктурированной сетке и конечно-разностных схем высокой разрешающей способности

по времени и по пространству. К преимуществам разработанного подхода относятся возможность работы на структурированных и неструктурированных сетках; выбор для дискретизации законов сохранения среднемедианного контрольного объема; применение соотношений для расчета градиента и псевдолапласиана, учитывающих растянутость сетки в пограничном слое; запись потоков через грани внутренних и граничных контрольных объемов в одинаковой форме, что обеспечивает простоту реализацию; эффективную реализацию граничных условий на стенке.

При численном моделировании задач механики жидкости и газа эффективность вычислительной процедуры и качество получаемого решения в существенной степени зависят от того, какие конечно-разностные схемы используются для дискретизации слагаемых, описывающих конвективный перенос в уравнениях Навье–Стокса. Ошибки дискретизации, проявляющиеся в виде схемной вязкости и численной дисперсии, приводят не только к количественному, но и к качественному искажению численного решения.

Решение задач газовой динамики в широком диапазоне скоростей предъявляет повышенные требования к используемому численному методу, который, с одной стороны, должен достаточно точно воспроизводить разрывные решения, а с другой – раскрывать динамику малых возмущений на фоне среднего течения. Указанные требования являются противоречивыми, поскольку раскрытие динамики малых возмущений требует понижения схемной диссипации, что приводит к нежелательным осцилляциям решения в областях больших градиентов искомым функций. Дискретизация конвективных потоков продолжает оставаться темой интенсивных дискуссий.

Прогресс в практике численного решения уравнений Эйлера и Навье–Стокса связан с разработкой разностных схем расчета потоков высокой разрешающей способности (High Resolution Scheme, HRS), позволяющих получать одновременно точные и монотонные решения при наличии слабых и сильных разрывов. Такие схемы имеют комбинированную природу и объединяют достоинства схем с разностями против потока (безусловная устойчивость) и центрированными разностями (отсутствие численной диффузии), позволяя получать одновременно точные, монотонные (ограниченные) и сходящиеся решения.

Появление нового класса разностных методов, основанных на использовании схем высокого порядка точности ( $k$ -точные схемы, TVD, ENO и WENO схемы), привело к значительному улучшению качества численных решений по сравнению с классическими разностными методами фиксированного порядка точности. Практическое использование ENO и WENO схем высокого порядка точности и их внедрение в существующие программные коды сопряжено с определенными сложностями. Реализация ENO и WENO рода схем требует значительных вычислительных затрат, что обусловлено перебором шаблонов и выбором наиболее гладкого из них. Поскольку условие невозрастания вариации решения строго не соблюдается, в решении зачастую возникают нефизические эффекты.

Для дискретизации невязких потоков применяется модифицированный вариант схемы MUSCL, метод кусочно-параболической реконструкции и схема Чакраварти–Ошера, а также схемы ENO и WENO. Для дискретизации вязких потоков применяются центрированные конечно-разностные формулы 2-го порядка. Градиент в серединной точке грани рассчитывается как полусумма узловых значений. Для демпфирования высокочастотных гармоник решения составляющая градиента в направлении наиболее короткой грани заменяется модифицированным соотношением. Для дискретизации по времени используется пятишаговый метод Рунге–Кутты, имеющий радиус устойчивости в 2 раза больший, чем традиционно используемый трехшаговый алгоритм. Система разностных уравнений решается многосеточным методом на основе схемы полной аппроксимации (используется V-цикл и до 4-х уровней сетки). В качестве сглаживающего алгоритма используется обобщенный метод взвешенных невязок, а для построения последовательности вложенных неструктурированных сеток - метод схлопывающихся граней. Для ускорения сходимости итерационного процесса при моделировании низкоскоростных течений применяется метод блочного предобусловливания [1].

Модельные задачи играют роль испытательного полигона для проверки новых методологических концепций и оценки точности результатов, полученных с помощью сконструированных на их основе программных средств. Набор тестовых задач служит для проверки корректности работы проекционно-эволюционных методов. Результаты расчетов позволяют судить о монотонности

и точности численного метода, наличия численной диффузии и нефизических осцилляций в областях с резкими градиентами искомых функций.

Верификация обычно разделяется на верификацию компьютерного кода (code verification) и верификацию численного решения (solution verification). Верификация компьютерного кода заключается в предоставлении доказательств того, что математическая модель и алгоритм ее решения работают корректно (устранение ошибок в программном коде и численном алгоритме). Верификация численного решения заключается в анализе точности математической модели (проверка численного метода, итерационной сходимости алгоритма, сеточной зависимости решения, точности входных и выходных данных).

Источники ошибок в результатах решения задачи разделяются на ошибки моделирования (modelling error) и ошибки численного решения (numerical error). Ошибки моделирования связаны с постановкой математической модели (геометрия, уравнения, преобразования координат, граничные условия, модель турбулентности), а численные ошибки – с дискретизацией уравнений сохранения, численной диссипацией, неполной сходимостью итерационного процесса, нарушением условий сохранения, ошибками округления.

Для остановки итерационного процесса достигнутый уровень невязки сравнивается с заданной степенью точности (сходимость к машинной точности является желательной, но не достижимой на практике). Методы оценки ошибки основаны либо на графическом представлении истории сходимости итерационного процесса, либо на теоретическом исследовании поведения невязки, и зависят от типа сходимости (монотонная, осциллирующая, смешанная).

Сеточная зависимость решения проверяется при помощи решения задачи на последовательности сеток, шаг которых при движении по иерархии сеток сверху вниз уменьшается на определенную величину, например, в два раза.

Разработанные оригинальные математические и дискретные модели апробированы при решении широкого круга задач (течения в каналах, соплах, кавернах, обтекание тел различной геометрии, течения в решетках газовых турбин) [1]. Верификация созданного программного обеспечения осуществлена на основе сравнительного анализа численных результатов тестовых задач с имеющимися данными надежных физических экспериментов [2] и численных результатов, полученных другими расчетными методами.

Одной из задач, решаемых разработанным подходом, является расчет течения в канале со вдувом, характерным для твердотопливных ракетных двигателей, где внутренняя полость камеры сгорания представляет собой сложную систему каналов, стенки которых образованы горячей поверхностью заряда твердого топлива и внутренней поверхностью корпуса. Математической моделью течения продуктов сгорания служит модель течения в канале с проницаемыми стенками, которая отражает подвод массы со стороны горячей поверхности заряда [3].

Каналы с массоподводящими стенками присутствуют во всех конструктивных решениях и выделяются в самостоятельный конструктивный элемент. В каналах развиваются течения, определяющие работоспособность конструкции, уровень теплообмена, особенности переноса частиц конденсированной фазы и их инерционное осаждение, условия течения на входе в сопло [4, 5].

Камеры сгорания крупногабаритных твердотопливных двигателей имеют разнообразие геометрические оформления. Широкое применение находят каналы с цилиндрической и многощелевой (звездообразной) формой поперечного сечения. Для компенсации увеличивающейся во времени поверхности массопровода в конструкцию заряда вводят дегрессивно горящие элементы, например, кольцевые проточки и пропилы, позволяющие получить на стационарном режиме работы двигателя давление в камере, близкое к постоянному.

Поле течения в окрестности проточки в продольном сечении показывает рис. 1. Поток, который поступает из нее в канал, образует течение с профилем скорости более наполненным, чем косинусоидальный.

Картина течения в канале заряда, имеющем круглую форму поперечного сечения в плане, и в утопленном сопле показана на рис. 2. Течение в канале заряда остается существенно дозвуковым. На выходе из сопла число Маха равняется 2,1 (фрагмент *a*). Генерация кинетической энергии

турбулентности начинается в сечении  $x/L \sim 0,6$  (фрагмент б), а генерация турбулентной вязкости в сечении  $x/L \sim 0,25$  (фрагмент в).

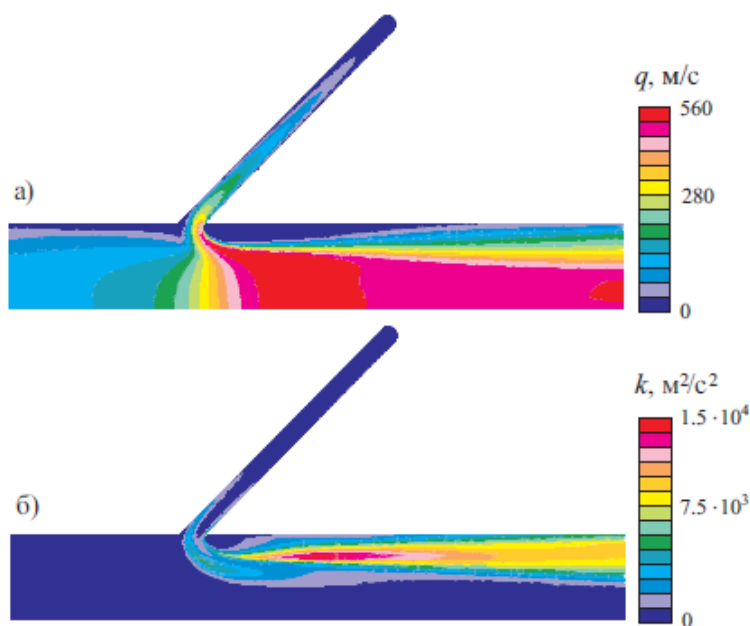


Рис. 1. Линии уровня скорости (а) и кинетической энергии турбулентности (б)

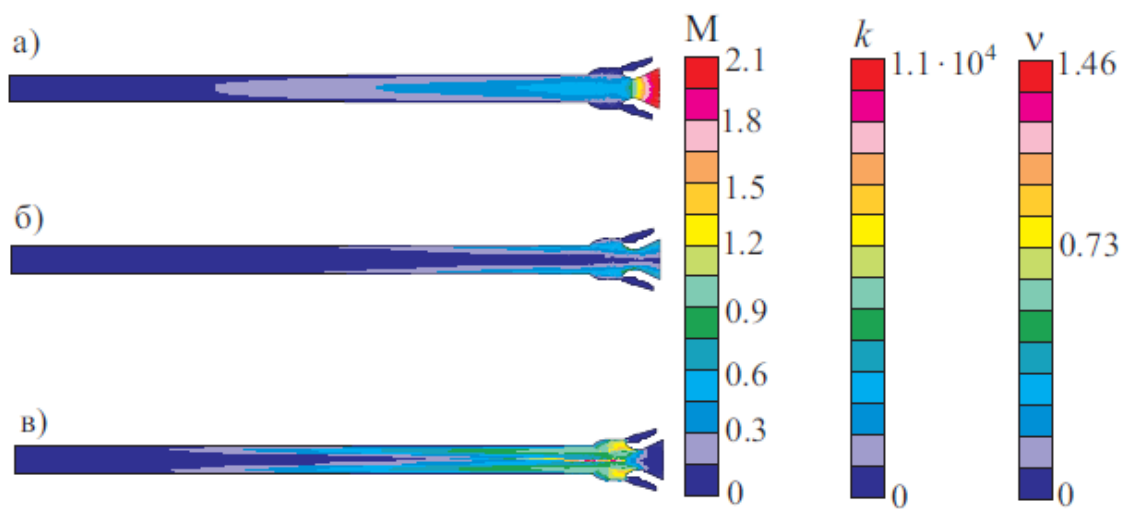


Рис. 2. Линии уровня числа Маха (а), кинетической энергии турбулентности (б) и турбулентной вязкости (в)

Другой задачей для тестирования разработанного подхода является расчет течений в поворотном утолщенном сопловом блоке. Сопловые сверхзвуковые течения являются одной из распространенных форм движения газа в технике и характеризуются широким разнообразием. Информация о распределениях характеристик потока требуется для определения силовых и тепловых нагрузок на различные элементы конструкции.

При управлении вектором тяги с помощью поворотного управляющего сопла (рис. 3) подвижная часть газового тракта соединяется с неподвижной частью посредством шарнирного соединения. Разъем контура поворотного сопла располагается в различных его частях: в дозвуковой, когда сопло частично утолщено, и в околосзвуковой, когда сопло имеет неподвижный вход. Частичная

утопленность сопла в полость камеры сгорания позволяет осуществить угловое отклонение как конфузорного, так и диффузорного участков соплового тракта. В управляющем сопле с неподвижным входом при повороте подвижной части происходит деформация газового потока и связанное с этим появление избыточных давлений в поперечных сечениях соплового тракта [6].

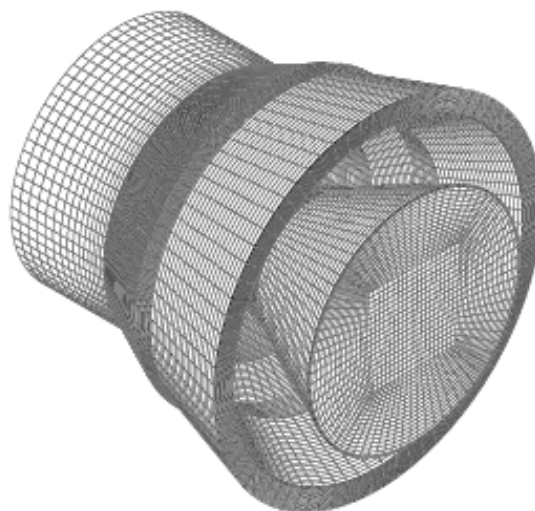


Рис. 3. Сетка на поверхности соплового блока

Поле течения в окрестности соплового блока в продольном сечении без отклонения и при радиальном отклонении показывает рис. 4. Отклонение сопла приводит к существенной перестройке течения.

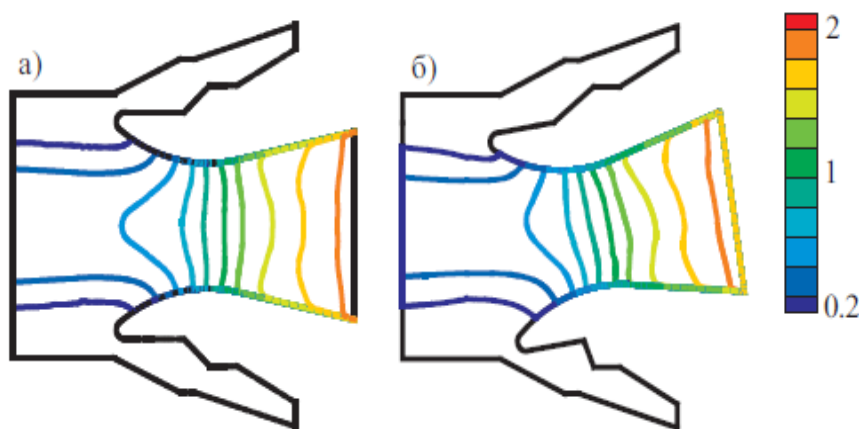


Рис. 4. Картина обтекания сопла, обработанная в виде изолиний чисел Маха, для осесимметричного положения (а) и при смещении в радиальном направлении (б)

Визуализацию поля течения в поперечном сечении расчетной области при смещении сопла в радиальном направлении показывает рис. 5. Отклонение сопла от осесимметричного положения приводит к достаточно сильному возмущению поля течения. Среди газодинамических характеристик потока наименее слабые изменения претерпевает давление.

Полученные распределения характеристик потока представляют интерес для проектирования системы управления вектором тяги, позволяя учесть задержку выхода струи и отклик системы управления на открытие клапана, а также для дальнейшего расчета напряженно-деформированного состояния клапана и моделирования термоупругого состояния конструкции. Предложенный метод

расчета пространственного турбулентного течения в предсопловом объеме и сопловом блоке позволяет учитывать влияние конструктивных и газодинамических параметров на энергетические характеристики изделия.

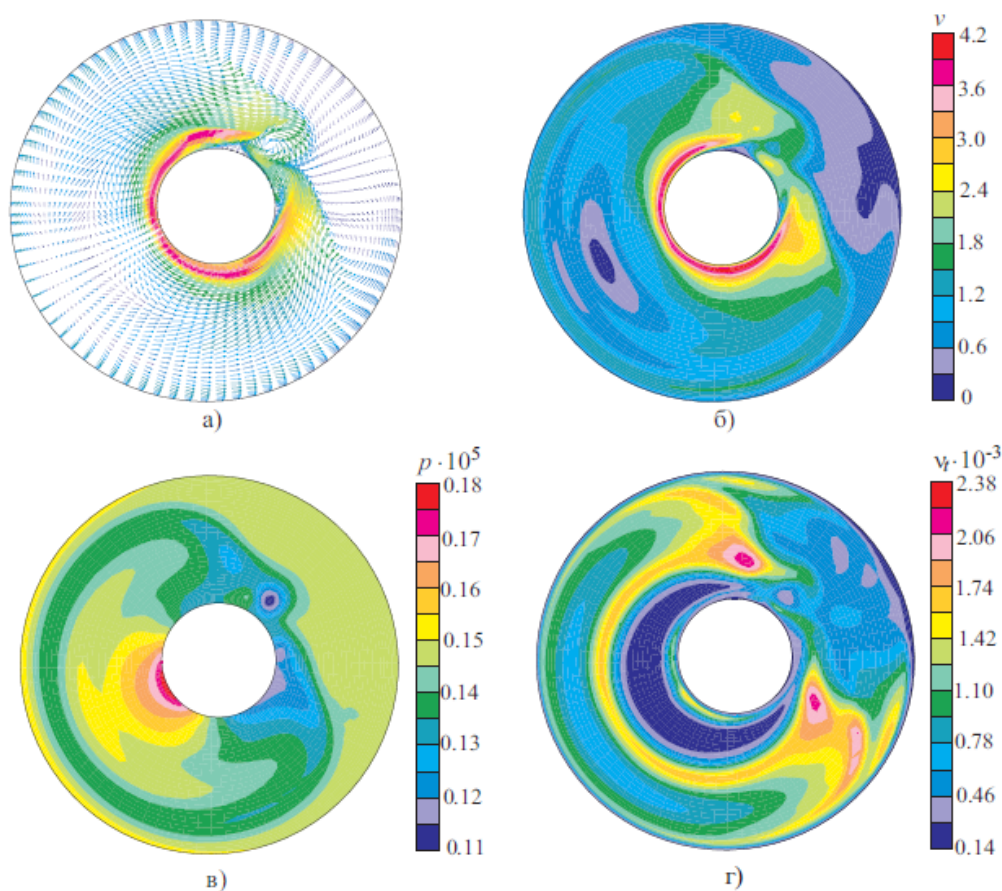


Рис. 5. Картина обтекания сопла, обработанная в виде векторного поля скорости (а), линий уровня модуля скорости (б), линий уровня давления (в) и линий уровня турбулентной вязкости (г)

Разработанные и реализованные численные методы позволяют решать нестационарные задачи газовой динамики при наличии различных особенностей потока на основе разностных схем высокого порядка аппроксимации в областях сложной геометрической конфигурации при использовании неструктурированных сеток.

## Литература

1. Методы ускорения газодинамических расчетов на неструктурированных сетках / Под. ред. В. Н. Емельянова. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2013.
2. Савельев С. К., Емельянов В. Н., Бендерский Б. Я. Экспериментальные методы исследования газодинамики РДТТ. Санкт-Петербург: Изд-во «Недра», 2007.
3. Волков К. Н., Емельянов В. Н. Газовые течения с массоподводом в каналах и трактах энергоустановок. М.: Физматлит, 2011.
4. Шишков А. А., Панин С. Д., Румянцев Б. В. Рабочие процессы в РДТТ. М.: Машиностроение.
5. Газодинамические и теплофизические процессы в ракетных двигателях твердого топлива / Под ред. А. С. Коротева. М.: Машиностроение, 2004.
6. Органы управления вектором тяги твердотопливных ракет / Под ред. Н. П. Кузнецова. Москва–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2006.