УДК 621.019.3

Оценка параметров нормального закона распределения предельной нагрузки однотипных деталей по совокупности нескольких цензурированных выборок

Рассмотрена задача оценки параметров нормального закона распределения предельной нагрузки, выводящей из строя механическую конструкцию или деталь. Предлагаемый подход основан на методе максимального правдоподобия и учитывает информацию, содержащуюся в совокупности нескольких многократно цензурированных выборок, представляющих результаты эксперимента. Предполагаются одинаковые коэффициенты вариации предельной нагрузки различных деталей, изготовленных из одного материала по единой технологии с незначительными изменениями объема и конфигурации, при однотипных нагрузках. Приводится алгоритм проведения расчетов на ЭВМ.

Н. А. Билык, Ю. Н. Кузяев, Ю. В. Хомутинин

Для оценки показателей надежности механических конструкций при действии эксплуатационных нагрузок необходимо знать закон распределения предельной нагрузки. С целью оценки неизвестного закона распределения и его параметров широко используются испытания по методу нагрузка–прочность [1–3]. При проведении таких испытаний часто не все предназначенные для испытания детали доводятся до предельного состояния. Прекращение испытаний может происходить по организационным причинам, исходя из возможностей испытательного оборудования, или по другим причинам, т. е. проводится цензурирование испытаний изделия [4]. Цензурирование испытаний приводит к образованию цензурированных выборок экспериментальных данных. Использование цензурированных выборок различных видов для решения практических задач оценивания неизвестных параметров законов распределений случайных величин достаточно широко отражено в литературе [4]. Частным случаем многократно цензурированных выборок являются данные типа доза–эффект, метод статистической обработки которых приведен в справочнике [5]. Известно, что оценки параметров распределения, полученные на основе цензурированных выборок, менее эффективны, чем оценки, полученные по полным выборкам [4, 6]. Учитывая, что количество испытаний высоконадежных, дорогостоящих конструкций исчисляется единицами, приходится отмечать невысокую достоверность оценок параметров распределения предельной нагрузки, полученных по цензурированным выборкам малого объема. В этих условиях для повышения достоверности оценок естественной является попытка привлечения дополнительной информации в виде данных по испытаниям однотипных изделий. Такой подход можно реализовать на основе метода объединения нормированных выборок, предложенного в работе [7] для полных выборок.

Рассмотрим реализацию аналогичного подхода для оценки параметров распределения предельной нагрузки по результатам испытаний однотипных изделий, представленных несколькими цензурированными выборками, планы испытаний которых различны, а характер действующей нагрузки для изделий всех видов одинаков [8]. Для рассмотрения можно взять детали, изготовленные из одного и того же материала по единой технологии, но отличающиеся друг от друга размерами и незначительными изменениями формы. В таких случаях естественно предположить, что все виды деталей имеют один и тот же коэффициент вариации предельной нагрузки $w_p = w(p = \overline{1, N_p})$, где N_p – количество рассматриваемых видов деталей.

Пусть с целью выявления предельной нагрузки изделия испытаны по различным планам, которые отличаются числом испытываемых изделий, последовательностью проведения испытаний, методом фиксирования значений предельной нагрузки. Такие испытания изделий можно представить комбинацией следующих видов испытаний: с фиксированием конкретного значения x_{p1} предельной нагрузки (число испытанных изделий l_{p1}); с фиксированием интервала $\left(x'_{p2},\ x''_{p2}\right)$, в котором находится предельная нагрузка (число испытанных изделий l_{p2}); испытания нагрузкой x_{p3}, превосходящей предельную нагрузку (точно неизвестно, при какой конкретно нагрузке вышло изделие из строя, число испытанных изделий l_{p3}), испытания нагрузкой x_{p4}, не превосходящей предельную нагрузку (безотказные испытания, число испытанных изделий l_{p4}).

Выборка, полученная в результате комбинаций перечисленных планов испытаний изделий, является в общем случае многократно цензурированной объемом $n_p = \sum_{i=1}^{k} l_{pi}$ $(k = 4)$. Распределение предельной нагрузки примем нормальным с неизвестными параметрами m_p, σ_p, где m_p – математическое ожидание; σ_p – среднее квадратическое отклонение случайной величины $x_p(p = \overline{1, N_p})$.

Общий коэффициент вариации w по всем выборкам можно оценить следующим образом. Для предельной нагрузки изделия каждого вида $x_p(p = \overline{1, N_p})$ введем вспомогательную нормированную случайную величину z_p $(p = \overline{1, N_p})$, которая равна $z_p = x_p / m_p$. Случайная величина z_p распределена также по нормальному закону с параметрами $m_{z_p} = 1$, $\sigma_{z_p} = w_p$. Поскольку $w_1 = w_2 = \ldots = w_{N_p} = w$, то выборки z_p $(p = \overline{1, N_p})$ можно объединить в одну объемом $n_0 = \sum_{p=1}^{N_p} n_p$. Математическое ожидание m_0 и среднее квадратическое отклонение случайной величины σ_0, оцененные по объединенной выборке, дадут искомый коэффициент вариации $\sigma_0 / m_0 = w$, достоверность которого будет выше по сравнению с коэффициентами $w_p(p = \overline{1, N_p})$. Получив коэффициент вариации w, оценку параметра σ_p вычислим по формуле $\sigma_p = w m_p$.

Для вычисления оценок m_0, σ_0 используем метод максимума правдоподобия. Функция правдоподобия имеет вид

$$L(m_0,\sigma_0/z_1,...,z_{n_0})=\prod_{i_1=1}^{l_1^0} f(m_0,\sigma_0/z_{i_1})\prod_{i_2=1}^{l_2^0}[F(m_0,\sigma_0/z_{i_2}'')-$$
$$-F(m_0,\sigma_0/z_{i_2}')]\prod_{i_3=1}^{l_3^0} F(m_0,\sigma_0/z_{i_3})\prod_{i_4=1}^{l_4^0}[1-F(m_0,\sigma_0/z_{i_4})], \qquad (1)$$

где $f(m_0,\sigma_0/z_{i_1})$, $F(m_0,\sigma_0/z_{i_2}'')$ – плотность и функция распределения случайной величины z_p $(p=\overline{1,N_p})$, $l_i^0=\sum_{p=1}^{N_p} l_{pi}$.

Нахождение максимума $L(m_0,\sigma_0/z_1,...,z_{n_0})$ эквивалентно нахождению минимума функции $\Phi(m_0,\sigma_0)=-\ln\{L(m_0,\sigma_0/z_1,...,z_{n_0})\}$. Методы минимизации функции $\Phi(m_0,\sigma_0)$ приведены в работе [9]. Метод максимума правдоподобия дает несмещенную оценку параметра m_0, а возможное смещение оценки σ_0 можно скорректировать [10, 11]. Аналогично находятся оценки параметров m_p,σ_p отдельно для каждой детали.

Процедуру вычисления m_p,σ_p можно представить в виде следующего алгоритма:

1) отдельно по каждой выборке методом максимума правдоподобия оцениваются параметры m_p и σ_p;

2) проводится нормировка каждой выборки (нагрузка, при которой производилось фиксирование результатов испытаний, делится на m_p);

3) все нормированные выборки объединяются в обобщенную многократно цензурированную выборку объемом $n_0=\sum_{p=1}^{N_p} n_p$;

4) для обобщенной выборки по методу максимума правдоподобия производится оценка неизвестных параметров m_0,σ_0 и вычисляется коэффициент вариации $w=\sigma_0/m_0$;

5) при полученном коэффициенте вариации для каждого вида деталей по соответствующей выборке также методом максимума правдоподобия оценивается среднее значение предельной нагрузки $m_p^{(1)}$;

операции 2–5 повторяются $k+1$ раз, пока не будет выполняться неравенство $|w_{k+1}-w_k|\le\varepsilon$, где ε — требуемая точность оценки коэффициента вариации.

Коэффициент вариации предельной нагрузки принимаем равным $w=w_{k+1}$. Оценка среднего квадратического отклонения σ_p фактической предельной нагрузки для каждой выборки определяется по формуле $\sigma_p=wm_p^{(k+1)}$.

Результаты эксперимента могут быть представлены выборкой, неизвестные параметры которой m_p и σ_p нельзя определить методом максимума функции правдоподобия без привлечения дополнительной информации. Поэтому необходимо указать условия, которым должны удовлетворять выборки, представляющие экспериментальные данные. Рассмотрим функцию правдоподобия $L(m_p,\sigma_p/x_1,...,x_{n_p})$ (1). Условия существования ее максимума по данным группированных выборок рассмотрены в работах [12–14]. Поскольку значение функции правдоподобия получается на основе вероятности реализации в проведенных испытаниях данной выборки $(x_1, x_2, ..., x_{n_p})$, то функция правдоподобия должна удовлетворять следующим условиям:

1) $\lim\limits_{m_p \to \pm\infty} L(m_p, \sigma_p / x_1, ..., x_{n_p}) = 0$ при фиксированном σ_p;

2) $\lim\limits_{\substack{\sigma_p \to 0 \\ \sigma_p \to \infty}} L(m_p, \sigma_p / x_1, ..., x_{n_p}) = 0$ при фиксированном m_p.

Выборки, для которых эти условия не выполняются, будем называть вырожденными. К вырожденным относятся: выборки, содержащие только элементы, разрушенные нагрузкой заданного уровня, и неразрушенные элементы, т. е. $l_{p1} = l_{p2} = 0$, $l_{p3} \neq 0$, $l_{p4} \neq 0$; выборки, содержащие только элементы, разрушенные нагрузкой заданного уровня, т. е. $l_{p1} = l_{p2} = l_{p4} = 0$, $l_{p3} \neq 0$; выборки, содержащие только неразрушенные элементы, т. е. $l_{p1} = l_{p2} = l_{p3} = 0$, $l_{p4} \neq 0$; выборки, содержащие элементы, предельные нагрузки которых совпадают или совпадают интервалы, содержащие предельную нагрузку, т. е. $l_{p3} = l_{p4} = 0$, $l_{p1} \neq 0$ или $l_{p2} \neq 0$, но все x_{p1} или интервалы $[x'_{p2}, x''_{p2}]$ имеют равные значения.

Вырожденные выборки вследствие невыполнения условий 1) или 2) не могут быть обработаны на первом этапе предлагаемого алгоритма (не могут быть получены оценки параметров m_p, σ_p), но на этапе объединения в обобщенную выборку для оценки общего коэффициента вариации их целесообразно учитывать, так как они несут определенную информацию. Перед объединением всех выборок (в том числе и вырожденных) в обобщенную их необходимо пронормировать (значения $x_1, ..., x_{n_p}$ разделить на среднее значение m_p). Для невырожденных выборок значения m_p определяют методом максимума правдоподобия. Для вырожденных выборок средние значения можно определить следующим образом:

1. Если $l_{p1} + l_{p2} \neq 0$, то среднее значение вычисляем по формуле

$$m_p = \frac{1}{l_{p1} + l_{p2}} \left[\sum_{j=1}^{l_{p1}} x_{pj} + \sum_{k=1}^{l_{p2}} \frac{1}{2}(x'_{pk} + x''_{pk}) \right],$$

где x_{pj} – точное значение предельной нагрузки j-й детали p-го вида; $[x'_{pk}, x''_{pk}]$ – интервал, в котором находится значение предельной нагрузки k-й детали p-го вида.

2. Если $l_{p1} = l_{p2} = 0$, то для оценки среднего значения m_p по методу максимума правдоподобия используем дополнительную информацию в виде априорного коэффициента вариации w_0 и вычисляем значения функции правдоподобия $L(m_p, w_0 m_p / x_1, ..., x_{n_p})$ для N значений параметра m_p, охватывающих примерно всю область возможных значений m_p. Если при этом l_{p3} и l_{p4} одновременно не равны нулю, то за оценку среднего значения принимаем значение m_p, которое соответствует наибольшему значению функции правдоподобия $L(m_p, w_0 m_p / x_1, ..., x_{n_p})$. Если одно из чисел l_{p3} и l_{p4} равно нулю, то за среднее значение данной выборки можно принять наиболее вероятное значение m_p, определяемое по максимуму функции плотности распределения параметра $m_p - \varphi'(m_p)$, где $\varphi(m_p) = L(m_p, w_0 m_p / x_1, ..., x_{n_p})$.

За начальное приближение w_0 принимаем значение коэффициента вариации предельной нагрузки материала деталей, имеющееся в справочниках или предварительно определенное по результатам испытания образцов из данного материала.

Пример. Результаты испытаний однотипных деталей из одного материала представлены выборками (см. таблицу). Оценка параметров распределения случайной величины методом максимального правдоподобия по выборкам 1 и 2 дала следующие результаты: $m_1 = 27,65$, $\sigma_1 = 1,953$, $w_1 = 0,071$; $m_2 = 41,50$, $\sigma_2 = 1,921$, $w_2 = 0,046$. Общий коэффициент вариации по двум выборкам равен 0,060. Выборка 3 относится к вырожденным и не может быть обработана методом максимума правдоподобия без привлечения дополнительной информации. Для нормировки выборки 3 оценку среднего значения случайной величины проводили при коэффициенте вариации $w_3 = 0,1$. Получено $m_3 = 18,62$. После нормировки и объединения всех выборок в обобщенную методом максимума правдоподобия оценен общий коэффициент вариации $w_0 = 0,055$. При таком значении коэффициента вариации получены следующие средние значения m предельной нагрузки для каждой выборки: $m_1 = 27,70$, $m_2 = 41,46$ и $m_3 = 17,86$.

Результаты испытаний однотипных деталей

Номер выборки	Объем выборки	Состав выборки				
		Конкретное значение предельной нагрузки x_{p1}	Интервал, содержащий предельную нагрузку x'_{p2}	Интервал, содержащий предельную нагрузку x''_{p2}	Нагрузка, превосходящая предельную, x_{p3}	Нагрузка, не превосходящая предельную, x_{p4}
1	8	27	–	–	–	–
		28,5	–	–	–	–
		–	24	27	–	–
		–	24	27	–	–
		–	30	33	–	–
		–	–	–	35	–
		–	–	–	37	–
		–	–	–	–	24
2	5	–	40	43	–	–
		–	43	46	–	–
		–	40	43	–	–
		–	37	40	–	–
		–	–	–	48	–
3	4	–	–	–	–	17
		–	–	–	–	17
		–	–	–	–	17
		–	–	–	–	17

Список литературы

1. Болотин В. В. Применение методов теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений. М.: Стройиздат. 1971.

2. Акопов М. Г., Толстохлебов В. И. Планирование форсированных испытаний изделий разового действия // Надежность и контроль качества. 1981, № 4. С. 19–26.

3. Острейковский В. А. Определение аналитических зависимостей для оценки параметров модели нагрузка – несущая способность для расчета надежности // Надежность и контроль качества. 1974, № 1. С. 62–69.

4. Скрипник В. М., Назин А. Е., Приходько Ю. Г. и др. Анализ надежности технических систем по цензурированным выборкам. М.: Радио и связь, 1988.

5. Надежность и эффективность в технике: Справочник. Т. 8. М.: Машиностроение, 1990.

6. Кендалл М., Стьюарт А. Статистические выводы и связи. М.: Наука, 1973.

7. Апполонов И. В., Северцев Н. А. Надежность невосстанавливаемых систем однократного применения. М.: Машиностроение, 1977.

8. Билык Н. А., Кузяев Ю. Н., Хомутинин Ю. В. Оценка параметров нормального закона распределения предельной нагрузки однотипных деталей по совокупности нескольких цензурированных выборок // Проблемы машиностроения и надежности машин. 1992, № 3. С. 63–67.

9. Гуснин С. Ю., Омельянов Г. Л., Резников Г. В. и др. Минимизация в инженерных расчетах на ЭВМ. М.: Машиностроение, 1981.

10. Дунин-Барковский И. В., Смирнов Н. В. Теория вероятностей и математическая статистика в технике (общая часть). М.: ГИТТЛ, 1955.

11. Крамер Г. Математические методы статистики. М.: Мир, 1975.

12. Куллдорф Г. Введение в теорию оценивания. М.: Наука, 1966.

13. Никулин М. С. О существовании оценок наибольшего правдоподобия для параметров сдвига и масштаба // Теория вероятностей и ее применения. 1982. Т. 27. Вып. 4. С. 819–820.

14. Артамоновский В. П. Об оценке максимального правдоподобия параметров сдвига и масштаба по группированным выборкам // Там же. 1988. Т. 38. Вып. 4. С. 759–762.

Estimating the Parameters of Normal Law Describing Limiting Load Distribution in One-Type Components on the Basis of Several Censored Samples

N. A. Bilyk, Yu. N. Kuzyayev, Yu. V. Khomutinin

A problem on estimating the parameters of normal law describing distribution of limiting load, which makes inoperative mechanical structures or components is considered. An approach proposed is based on a method of maximum likelihood and takes into account information contained in several multiply censored samples, which present the experimental results. Similar constants of limiting load variation are proposed for different components made of the same material following the same technology, but having negligible volume and configuration variations under one-type loads. A computational algorithm is given.