

УДК 519.6

Методы численного моделирования многомерных задач переноса излучения и частиц во ВНИИЭФ

Р. М. Шагалиев

Дается обзор численных методов решения многомерных задач переноса (линейных и нелинейных, стационарных и нестационарных и т. п.), развиваемых и применяемых в РФЯЦ-ВНИИЭФ. А именно, кратко описаны особенности применения метода Монте-Карло, метода угловых коэффициентов (коэффициентов видимости). Дается подробный анализ детерминистских сеточных методов, при разработке которых особое внимание уделялось вопросам решения нестационарных связанных задач, т. е. задач, где наряду с процессами переноса учитывается большое количество других физических процессов.

Введение

Процессы переноса частиц и их взаимодействия со средой относятся к числу наиболее сложных и трудоемких для численного решения. В работе кратко излагаются численные методы решения задач переноса, развитые в РФЯЦ-ВНИИЭФ. В зависимости от класса прикладных задач и с учетом требований, предъявляемых к его численному решению (к полноте физической модели, к точности и экономичности расчетов и т. п.), в РФЯЦ-ВНИИЭФ применяются различные подходы к моделированию процессов переноса. Это, в первую очередь, подходы, основанные на методе Монте-Карло (М-К), на методе угловых коэффициентов (коэффициентов видимости) и на сеточной аппроксимации исходного уравнения методами конечных разностей и конечных элементов (детерминистские сеточные методы). В работе дается краткое изложение особенностей применения двух первых подходов задач. Материалы по методу М-К и методу угловых коэффициентов подготовлены при участии Житника А. К. и Мельникова В. М., за что автор считает своим долгом выразить им признательность.

В статье дан более полный и подробный обзор детерминистских сеточных методов. При этом особое внимание уделено численным методам, алгоритмам и схемам, созданным в РФЯЦ-ВНИИЭФ и предназначенным для решения многомерных связанных задач. При их решении необходимо учитывать, наряду с процессами переноса, большое число других физических процессов, что предъявляет ряд жестких требований к разрабатываемым методам и алгоритмам.

Метод М-К численного решения задач переноса

Этот метод находит широкое применение в РФЯЦ-ВНИИЭФ при решении следующих классов задач [1-4]:

1. Линейные задачи переноса частиц (перенос нейтронов и гамма-квантов, задачи расчета критических параметров ($K_{эф}$ и λ), расчет защиты от гамма-нейтронного излучения, расчет ра-

диационной ядерной безопасности транспортно-упаковочных контейнеров для перевозки и хранения отработанного ядерного топлива и т. п.).

2. Перенос заряженных частиц.

3. Решение связанных задач, в которых наряду с процессами переноса учитывается ряд других физических процессов.

Используемые в программе алгоритмы обеспечивают хорошую точность описания физических процессов и обладают высокой эффективностью. Для моделирования траекторий используется метод максимальных сечений, обеспечивающий практически то же быстродействие со спектральными константами, что и с групповыми. Учет теплового движения ядер среды осуществляется в процессе моделирования траекторий на холодных сечениях вещества [3]. Это позволяет избавиться от расчета сечений на заданные температуры. При моделировании траекторий электронов используется метод катастрофических столкновений, в котором для описания столкновений с малыми передачами энергии и импульса используется приближение Фоккера-Планка [4]. Разработана модель учета рождения аннигиляционных и тормозных гамма-квантов, которая позволяет достаточно точно описывать их распространение без моделирования траекторий электронов и позитронов.

Программа распараллелена на основе библиотеки межпроцессорных обменов MPI. Используемые алгоритмы показывают высокую эффективность распараллеливания для достаточно большого числа процессоров.

Еще одним из направлений применений метода М-К для решений задач переноса является разработка алгоритмов моделирования на сеточных геометриях. Созданные алгоритмы позволяют моделировать на сеточных геометриях произвольной структуры, а эффективность моделирования практически не зависит от размеров ячеек сетки.

Расчет переноса излучения в вакууме методом коэффициентов видимости

При решении инженерных тепловых задач и задач лазерных мишеней необходимо учитывать перенос излучения в полостях конструкций. Для моделирования этого класса задач в РФЯЦ-ВНИИЭФ развит и в течение многих лет успешно используется метод коэффициентов видимости, основанный на численном решении интегрального уравнения (1) переноса излучения через оптически прозрачную среду [5–10]

$$J_{\nu}^{-}(P, t) = \int_{S(P)} J_{\nu}^{+}\left(Q, t - \frac{\rho_{PQ}}{c}\right) \frac{\cos(\vec{n}_P, \vec{PQ}) \cos(\vec{n}_Q, \vec{QP})}{\pi r^2(P, Q)} dS_Q, \quad (1)$$

где $J_{\nu}^{+}(P, t)$, $J_{\nu}^{-}(P, t)$ – односторонние потоки излучения частоты. В дальнейшем для удобства будем называть оптически прозрачные расчетные области вакуумными, все остальные области – диффузионными. На границе вакуумной и диффузионной областей уравнение (2) дополняется уравнением баланса

$$J^{-}(A, t) - J^{+}(A, t) = q, \quad (2)$$

где q – поток энергии через единицу площади граничной поверхности.

Для решения задачи задается сеточное разбиение границы вакуумной области. Поверхностная сетка граничных элементов для вакуумных областей является нерегулярной, с граничными элементами, являющимися произвольными плоскими многоугольниками.

Решение интегрального уравнения совместно с уравнением баланса на границе вакуумной и диффузионной областей осуществляется методом коэффициентов видимости (зональным методом). Интегральное уравнение переноса излучения аппроксимируется системой линейных алгебраических уравнений, относительно осредненных по N граничным элементам потоков излучения

$$S_i J_i^-(t) = \sum_{j=1}^N a_{ij} J_j^+ \left(t - \frac{\rho_{ij}}{c} \right). \quad (3)$$

Данная система уравнений замыкается граничными условиями

$$J_i^-(t) - J_i^+(t) = q, \quad i=1, \dots, N. \quad (4)$$

Коэффициенты a_{ij} (5) системы уравнений – это так называемые коэффициенты видимости

$$a_{ij} = \frac{1}{S_i} \iint_{S_i S_j} H_{ij} \frac{\mu_p \mu_q}{\pi \rho_{PQ}^2} ds_q ds_p. \quad (5)$$

С помощью функции H_{ij} в этих коэффициентах учитывается возможное затенение области видимости между поверхностями S_i и S_j другими телами. Для определения области видимости в интегралах (5) и вычисления коэффициентов видимости реализованы два известных метода – метод полусферы и метод полукуба

Численное решение многомерных задач переноса методами конечных разностей и конечных элементов

При численном решении многих классов прикладных задач переноса в РФЯЦ-ВНИИЭФ широкое применение находят сеточные методы [11–13]. Среди таких численных методов следует, прежде всего, выделить методы, основанные на конечно-разностной и конечно-элементной аппроксимациях многогруппового уравнения переноса. Данные методы широко используются, в частности, для численного решения линейных и нелинейных спектральных задач переноса физики высоких плотностей и энергии. Расчеты этих задач, как правило, проводятся в многогрупповом приближении в двумерной и трехмерной геометриях с одновременным учетом большого количества других физических процессов. С учетом этих особенностей к качеству разрабатываемых сеточных методов решения задач переноса предъявляется ряд жестких требований. Ниже перечислены некоторые положения, на которых основываются численные методы решения нестационарных задач переноса, разработанные во ВНИИЭФ:

1. Аппроксимация нестационарного уравнения переноса по переменной времени осуществляется по неявной двухточечной разностной схеме.

2. Аппроксимация уравнения переноса по пространственным переменным строится на неортогональных пространственных сетках, а именно:

- на регулярных неортогональных сетках из выпуклых четырехугольников;
- на нерегулярных неортогональных сетках из произвольных выпуклых многоугольников.

На указанных сетках построен ряд консервативных конечно-разностных схем: разностные схемы с введением алгебраических замыкающих соотношений [12, 14, 15], конечно-элементные схемы [13], схема, основанная на применении адаптивных дробных сеток в фазовом пространстве [16, 17]. Для дискретизации уравнения переноса по угловым переменным применяются схемы метода дискретных ординат. Общим для всех указанных схем является то, что они сохраняют на неортогональных сетках такие важные свойства DS_n -схем, как аппроксимация уравнения переноса в рамках одной ячейки фазового пространства и, как следствие, возможность разрешения систем сеточных уравнений по схеме бегущего счета [12, 13]. Вместе с тем, они отличаются друг от друга такими свойствами, как точность аппроксимации на существенно неортогональных сетках, обеспечение монотонности сеточного решения, простота алгоритмической реализации и некоторыми другими свойствами.

3. Численное решение взаимосвязанной системы многогрупповых сеточных уравнений переноса осуществляется методом итераций по источнику. Для повышения эффективности применяются алгоритмы ускорения сходимости итераций по источнику. В случае линейных стационарных задач для ускорения сходимости простых итераций разработан и успешно применяется потоковый согласованный, или, кратко, FCA-метод [18, 19], а в случае нелинейных нестационарных задач – КМ-метод [20].

4. Численное решение системы сеточных уравнений переноса с известной правой частью осуществляется методом бегущего счета [12] и по модификации этого метода, ориентированного на многогрупповой случай [20].

5. Для численного решения двумерных и трехмерных задач переноса на многопроцессорных ЭВМ разработаны и применяются эффективные комбинированные алгоритмы распараллеливания, ориентированные на общий случай, когда используются неортогональные пространственные сетки [21, 22].

Более подробное изложение особенностей некоторых из алгоритмов и методов, используемых при численном решении уравнения переноса сеточными методами, приведено ниже.

Аппроксимация уравнения переноса по переменной времени, пространственным и угловым переменным.

Схемы с введением алгебраических замыкающих соотношений

Эти схемы строятся с привлечением значений сеточной функции в ячейке, на сторонах и вершинах четырехугольной ячейки (рис. 1). Системы сеточных уравнений включают:

- сеточные уравнения, выражающие баланс частиц в ячейках сетки;
- дополнительные (алгебраические замыкающие) соотношения по переменной времени и угловой переменной φ ;
- дополнительные соотношения по пространственным переменным, связывающие значения искомой функции в ячейке, на сторонах и в вершинах ячейки. Число дополнительных соотношений зависит от количества освещенных сторон четырехугольной ячейки. В зависимости от значений $(\mu_m, \varphi_{q,m})$ здесь возможны три различных варианта освещенности сторон ячейки пространственной сетки, которые приведены на рис. 2.

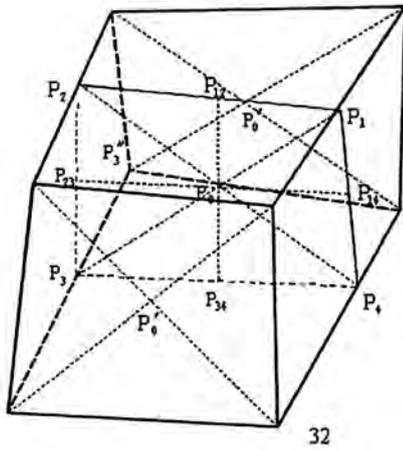


Рис. 1. Аппроксимация многогруппового кинетического уравнения:
 – по времени: неявная схема с весовыми множителями;
 – по угловым переменным: метод дискретных ординат (DS_n – квадратуры);
 – по пространственным переменным: на расширенном шаблоне для неортогональных пространственных сеток.
 Схемы:
 – консервативны;
 – обеспечивают практическую сходимость к решению уравнения переноса со вторым порядком точности на произвольных неортогональных пространственных сетках.

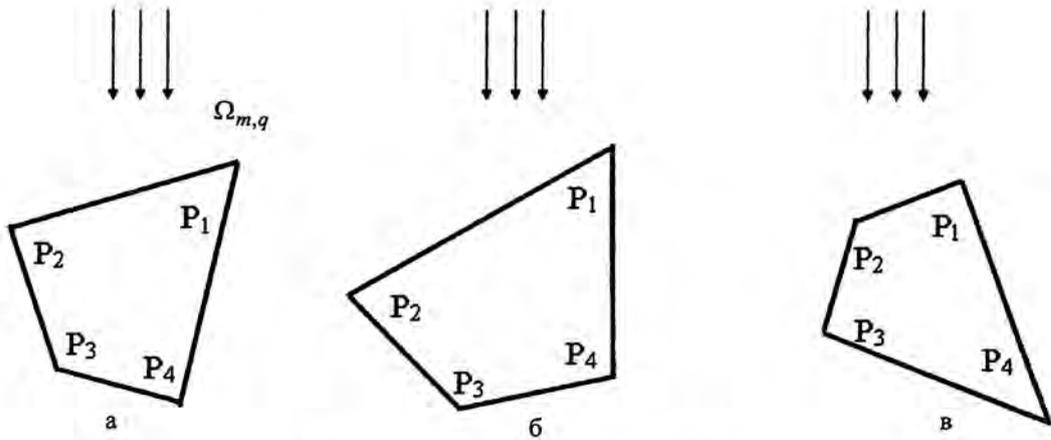


Рис. 2. Варианты освещенности ячейки

Этим вариантам освещенности в двух рассматриваемых ниже схемах соответствуют свои дополнительные соотношения, полученные разными способами. А именно, в схеме [13] (далее схема 1) привлекаются дополнительные соотношения, которые основываются на представлении решения внутри ячейки в виде линейной функции, а в схеме [14] (далее схема 2) дополнительные соотношения выводятся из приближенного представления решения уравнения переноса вдоль характеристик.

Ниже приведены результаты расчетов одной двумерной тестовой задачи на вычисление собственного параметра λ [13, 14]. Численные расчеты задачи проводились на прямоугольных сетках и на существенно неортогональных сетках. Результаты расчетов приведены в табл. 1. Нетрудно убедиться, что расчетные значения λ , полученные по обоим схемам, удовлетворяют формуле, соответствующей сходимости со вторым порядком, $\lambda = 0,1647 - \frac{A}{k^2}$, где A – некоторая константа, близкая к единице.

Таблица 1

Значения параметра λ на различных пространственных сетках, полученные в расчетах по схеме 1 и схеме 2

Сетка	Размер ячеек			
	$h = 0,1$ (см)	$h/2$	$h/4$	$h/8$
Значение параметра λ на различных пространственных сетках (по схеме 1)				
Прямоугольная	0,1627515	0,1642543	0,1646291	0,1647228
Неортогональная	0,1618866	0,1639924	0,1644934	0,1646495
Значение параметра λ на различных пространственных сетках (по схеме 2)				
Прямоугольная	0,162753	0,164256	0,164631	0,164724
Неортогональная	0,161205	0,164074	0,164678	0,16477

Адаптивный метод дробных сеток в фазовом пространстве

Идея рассматриваемого метода заключается в том, что в фазовой области, где ищется решение задачи, выделяется некоторая, в общем случае многосвязная область, в которой осуществляется дробление ячеек исходной сетки на более мелкие [16, 17]. Дробление может осуществляться: по пространственным переменным, по угловым переменным, по переменной энергии. В нестационарных задачах область дробления ячеек опорной сетки переопределяется на временных шагах. При этом привлекаются специальные алгоритмы. При аппроксимации уравнения переноса в дробных ячейках адаптивной сетки обеспечивается сохранение основных свойств схемы, используемой для численного уравнения переноса на опорной сетке (порядок аппроксимации, консервативность, возможность решения сеточных уравнений переноса по алгоритму бегущего счета и некоторые другие).

Ниже приводится пример расчета одной двумерной тестовой нестационарной задачи с применением адаптивного метода дробных сеток по пространственным переменным. Рассматривается осесимметричная система, представленная на рис. 3 и состоящая из двух физических областей: 1-я область – оптически плотная область $\{0 \leq Z \leq 5; 1 \leq R \leq 1,2\}$, 2-я – прозрачная область $\{0 \leq Z \leq 5; 0 \leq R \leq 1\}$. Учитываются процессы поглощения и переизлучения фотонов средой, причем сечение поглощения фотонов задано формулой $\chi_a = A/T^3$, где $A = 50,89$ в первой области и $A = 0,1374$ во второй области.

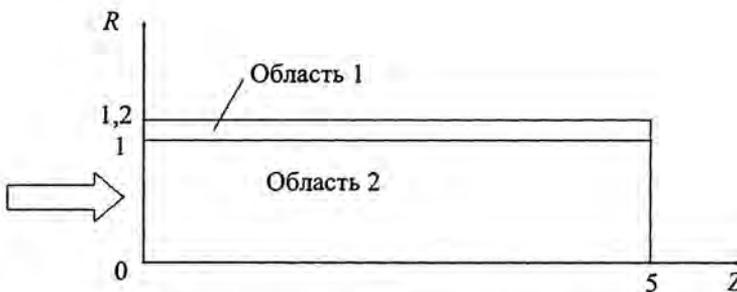


Рис. 3. Геометрия системы в двумерной тестовой задаче

Начальная температура T во всех точках системы полагалась равной 0,0001. На части левого торца прямоугольной области задается входящий изотропный поток излучения, соответствующий температуре $T = 1$. Рассматриваемая задача имеет существенно двумерное решение.

Ниже приведены некоторые результаты ее численного решения. При этом для описания пространственных сеток, на которых выполнялись расчеты, используется следующее обозначение: $Nr(Pr) \times Nz(Pz)$, где Nr – число строк, Nz – число столбцов, Pr – максимальный уровень адаптивности по строкам (*MaxAdapt*), Pz – максимальный уровень адаптивности по столбцам. Результаты расчета тестовой задачи на адаптивных сетках $10(4) \times 50(4)$ и $10(8) \times 50(8)$ показаны на рис. 4, там же для сравнения приведены численные решения на некоторых пространственных сетках без адаптивности. Как видно из представленных графиков, решение, полученное на сетке $10(8) \times 50(8)$ с использованием адаптивной методики, оказывается близким к результату расчета на сетке 40×200 с использованием стандартной методики. При этом адаптивный расчет требует в 2,8 раза меньше затрат вычислительного времени.

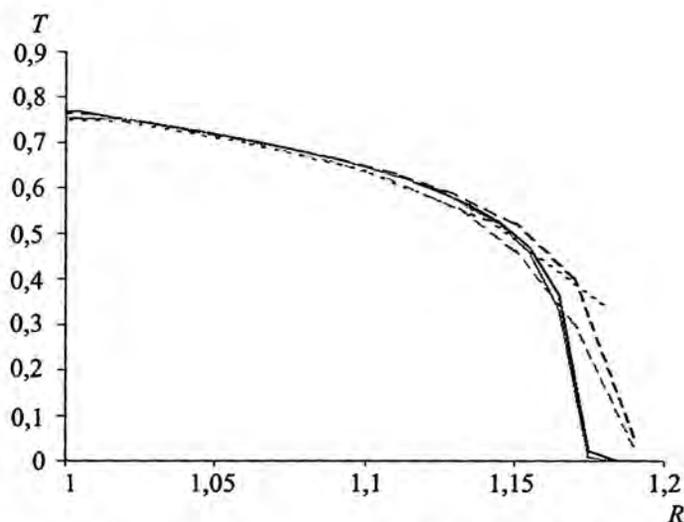


Рис. 4. Профиль температуры вещества вдоль линии $Z = 2$ на момент времени 0,01 в двумерной тестовой задаче для различных опорных сеток: — — решение на базовой сетке 40×200 ; - - - - расчет 20×100 ; расчет 10×50 ; - - - - расчет $10(4) \times 50(4)$; — — расчет $10(8) \times 50(8)$

Алгоритмы ускорения сходимости итерационных процессов

Для обеспечения эффективности при решении многогрупповых сеточных уравнений переноса очень важно применять эффективные методы ускорения сходимости традиционно используемого итерационного метода по источнику (по правой части) уравнения переноса.

Для решения линейных стационарных задач переноса нами разработан и успешно применяется потоковый согласованный метод ускорения (*FCA*-метод). Краткая формулировка данного метода и некоторые результаты его численных исследований приводятся ниже.

FCA-метод (потоковый согласованный метод). В методе *FCA* [18, 19]) искомыми являются функции одностороннего потока. Сеточные значения этих функций вводятся на ребрах и

средних линиях ячеек. В рассмотрение вводятся уравнения для нулевого и первых моментов функции N , содержащие компенсирующие источники для согласования решения этапа ускорения и решения простой итерации. Использование FCA -метода позволяет значительно сократить временные затраты на расчеты оптически плотных систем.

В табл. 2 и 3, приведены примеры применения FCA -метода для ускорения сходимости простых итераций (N/A метод) в тестовой задаче с чистым рассеянием, решаемым в кубической области, а также в двумерной тестовой задаче для реактора РБМК [23].

Таблица 2

Область $\{0 < x < 1,5, 0 < y < 1,5, 0 < z < 1,5\}$

α	β	2D		3D	
		N/A	FCA	N/A	FCA
10.	9.	81	7	116	12
10.	9.9	331	7	300	13
10.	9.99	463	7	361	13
10.	10.	482	7	370	13

Таблица 3

Результаты расчетов канала реактора РБМК

Метод	Число итераций
Метод Келлога	229
Прямой метод	412
Метод итераций по источнику	555
Метод итераций по источнику + FCA	42
Метод итераций по источнику + FCA + метод Чебышева	24

Особо высокие требования к сходимости и эффективности методов ускорения предъявляются при решении нелинейных нестационарных многогрупповых задач переноса рентгеновского излучения. Для данного класса задач нами сконструирован и широко используется КМ-метод [20]. Ниже приведена краткая формулировка КМ-метода, а также даны результаты сравнительных расчетов одной нестационарной тестовой задачи, выполненных с применением КМ-метода.

В КМ-методе уравнение переноса решается в два этапа.

I этап – предиктор:

$$\frac{1}{v_i} \frac{N_i^{s+\frac{1}{2}} - N_i^s}{\Delta t} + L N_i^{s+\frac{1}{2}} + \alpha_i N_i^{s+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{NI} \beta_{ij} n_j^{(0)s};$$

$$N_i^{s+\frac{1}{2}} = \gamma N_i^{s+1} + (1-\gamma) N_i^s, \quad i = 1, 2, \dots, NI. \quad (6)$$

II этап – корректор, реализованный в поправочной форме:

$$\frac{1}{v_i} \frac{\Delta N_i^{s+1}}{\Delta t} + L \Delta N_i^{s+\gamma} + \alpha_i \Delta N_i^{s+\gamma} - \sum_{j=1}^{NI} \beta_{ij} \Delta N_j^{s+\gamma} = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{NI} \beta_{ij} \Delta n_j^{(0)s+\frac{1}{2}};$$

$$\Delta N_i^{s+1} = N_i^{s+1} - N_i^s, \Delta N_i^{s+\gamma} = \gamma \Delta N_i^{s+1};$$

$$\Delta n_i^{(0)s+\frac{1}{2}} = n_i^{(0)s+\frac{1}{2}} - n_i^{(0)s}, i = 1, 2, \dots, NI.$$

Приведем результаты сравнительных расчетов одной тестовой задачи, выполненных с использованием КМ-метода и методом простых итераций(табл. 4).

Таблица 4

Результаты расчетов тестовой задачи с применением КМ-метода

Номер шага	$\Delta t = 0,1 \cdot 10^{-10}$ с		$\Delta t = 0,5 \cdot 10^{-10}$ с		$\Delta t = 0,1 \cdot 10^{-9}$ с	
	Метод простых итераций	КМ-метод	Метод простых итераций	КМ-метод	Метод простых итераций	КМ-метод
1	19108	14	28696	26	26454	35
5	3332	24	6363	121	7960	238
10	1559	27	8477	101	9146	179
t, с	2880	61	7020	233	8580	435

Алгоритмы распараллеливания

Как уже отмечалось выше, численное решение многих классов многомерных нестационарных задач переноса связано с большими вычислительными затратами. Для решения указанных задач на многопроцессорных ЭВМ нами разработаны эффективные методы мелкозернистого распараллеливания, ориентированные на общий случай применения неортогональных пространственных сеток. Подробное изложение построенных методов распараллеливания дано в работах [21, 22].

Список литературы

1. Житник А. К., Кочубей Ю. К., Субботин А. Н. и др. Применение в РФЯЦ-ВНИИЭФ метода Монте-Карло к задачам переноса частиц // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1999. Вып. 4. С. 64–67.
2. Кочубей Ю. К., Житник А. К., Артемьева Е. В. и др. Программа С-95. Моделирование совместного переноса нейтронов и гамма-квантов методом Монте-Карло // Там же. 2000. Вып. 2. С. 49–52.
3. Иванов Н. В., Иванов А. Н. Учет теплового движения атомов среды при решении задач переноса нейтронов методом Монте-Карло // Там же. 2003. Вып. 4. С. 25–32.
4. Донской Е. Н. Методика и программа ЭЛИЗА решения методом Монте-Карло задач совместного переноса гамма-излучения, электронов и позитронов // Там же. 1993. Вып. 1. С. 3–6.

5. Бабаев Ю. Н., Баженов С. В., Дементьев Ю. А. Об особенностях решения одного интегрального уравнения переноса излучения // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Методики и программы численного решения задач математической физики. 1978. Вып. 1(1). С. 7–9.
6. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука, 1966.
7. Дементьев Ю. А., Машинин Р. Ф., Нагорный В. И., Рогачев В. Г., Тихомирова Э. Н. Методика численного решения трехмерных нестационарных задач энергопереноса излучением через область вакуума // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Методики и программы численного решения задач математической физики. 1984. Вып. 2(16). С. 26–28.
8. Бабаев Ю. Н., Баженов С. В., Базин А. А. и др. Методики и программы ВНИИЭФ для решения двумерных и трехмерных нестационарных задач лучистого энергопереноса в областях сложной формы с использованием коэффициентов видимости. Проблемы конверсионных приложений // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1995. Вып. 4. С. 3–8.
9. Bazin A. A., Vatulin V. V., Dementiev Yu. A., Mironova V. F., Skidan G. I., Tikhomirov B. P., Tikhomirova E. N. Application of View Factor Method in Calculations of Radiation Transport in Targets // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research. 1998. Vol. A415. P. 123–126.
10. Дементьев Ю. А., Машинин Р. Ф., Миронова В. Ф., Ченцов Н. Н. Приближенное вычисление коэффициентов углового распределения для нестационарного теплового излучения с поверхности вращения // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Методики и программы численного решения задач математической физики. 1983. Вып. 1(12). С. 32–34.
11. Шагалиев Р. М., Шумилин В. А., Алексеев А. В., Беляков И. М., Евдокимов В. В. и др. Математические модели и методики решения многомерных задач переноса частиц и энергии, реализованные в комплексе САТУРН-3 // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1999. Вып. 4. С. 20–26.
12. Трошиев В. Е. О классах сеток, допускающих консервативные аппроксимации двумерного оператора переноса треугольным разностным оператором // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 1976. Т. 16, № 3. С. 793–797.
13. Софронов И. Д., Урм В. Я., Харитонов А. В. О решении уравнения переноса методом конечных разностей на нерегулярных сетках // Численные методы механики сплошной среды. 1974. Т. 5, № 2. С. 116–135.
14. Плетенева Н. П., Шагалиев Р. М. Аппроксимация двумерного уравнения переноса на четырехугольных и многоугольных пространственных сетках по разностной схеме с расширенным шаблоном // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1989. Вып. 3. С. 34–41.
15. Москвин А. Н., Шумилин В. А. Методика решения двумерного уравнения переноса на нерегулярных многоугольных сетках // Там же. 2005. Вып. 1. С. 31–40.
16. Шагалиев Р. М. Адаптивный метод решения многомерного уравнения переноса с применением дробных сеток в фазовом пространстве // Там же. 2004. Вып. 4. С. 3–15.

17. Шагалиев Р. М., Алексеев А. В., Беляков И. М., Гичук А. В., Евдокимов В. В., Москвин А. Н., Нуждин А. А., Плетенева Н. П., Шемякина Т. В. Численное решение двумерного уравнения переноса с применением адаптивного по пространству метода пробных сеток // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2004. Вып. 4. С. 16–25.
18. Евдокимов В. В., Шагалиев Р. М. Согласованный метод FCA ускорения сходимости итераций при численном решении уравнения переноса нейтронов на неортогональных сетках // Там же. 1994. Вып. 3. С. 11–17.
19. Евдокимов В. В., Шагалиев Р. М. Некоторые результаты численных исследований FCA-метода при решении двумерных задач переноса по схемам типа DS_n -метода. Алгоритмы и программы для нейтронно-физических расчетов ядерных реакторов. "Нейтроника-94". Обнинск. 1996. С. 108–112.
20. Федотова Л. П., Шагалиев Р. М. Конечно-разностный КМ-метод для двумерных нестационарных процессов переноса в многогрупповом кинетическом приближении // Математическое моделирование. 1991. Т. 3, N 6.
21. Алексеев А. В., Нуждин А. А., Шагалиев Р. М. Метод мелкозернистого распараллеливания двумерных и трехмерных задач переноса на неортогональных сетках // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2001. Вып. 2. С. 3–11.
22. Алексеев А. В., Шагалиев Р. М. Алгоритм распараллеливания численного решения трехмерного уравнения переноса в комплексе САТУРН // Там же. 1993. Вып. 3. С. 3–7.
23. Москвин А. Н., Никифорова А. В., Шагалиев Р. М. и др. EKRAN Code for the Calculation of the Effective Neutron Multiplication Factor for Reactor Systems // Труды Международной конференции по физике реакторов, 16-20 сентября 1996 г. Япония, г. Мито. Т. 3. P. A386–A395.

Numerical Methods Used at VNIIEF for Simulating Multidimensional Problems of Radiation and Particles Transfer

R. M. Shagaliyev

Methods for solving multidimensional transfer problems (linear and nonlinear, stationary and non-stationary and so forth) developed and applied at RFNC-VNIIEF are overviewed. The peculiarities of applying Monte Carlo methods and angular coefficient (visibility factor) method are outlined. Deterministic net methods are analyzed in detail. When the methods are devised, a special attention is given to solving the non-stationary associated problems, i. e. problems, in which a great number of other physical processes are taken into account along with the transfer processes.