

УДК 519.6

Параллельные алгоритмы и адаптивные методы численного решения многомерного уравнения переноса

Дается краткий обзор методов распараллеливания и применения дробных адаптивных сеток в фазовом пространстве при решении многомерного уравнения переноса в групповом кинетическом приближении в методике САТУРН.

**А. В. Алексеев, И. М. Беляков,
А. И. Бочков, А. В. Гичук,
В. В. Евдокимов, А. А. Нуждин,
В. Ю. Резчиков, Р. М. Шагалиев,
Т. В. Шемякина**

Введение

Численное моделирование многомерных процессов переноса частиц является одной из наиболее сложных и трудоемких по затратам вычислительного времени задач прикладной математики. Следует отметить особую сложность решения проблемы в общем случае, когда краевая задача для уравнения переноса ставится в областях сложной формы и это уравнение аппроксимируется на неортогональных пространственных сетках. Для постановок многих прикладных задач переноса характерно наличие подобластей со значительно отличающимися оптическими свойствами. В разных подобластях решение по угловым, энергетической и пространственным переменным может иметь существенно разный характер. Например, в рассчитываемых системах содержатся как подобласти с существенно анизотропным распределением потока частиц по направлениям, так и подобласти, в которых распределение имеет почти изотропный характер; подобласти, в которых распределение потоков по энергии является существенно неравновесным, и подобласти с близким к равновесному распределением. В нестационарных задачах свойства указанных подобластей претерпевают значительные изменения во времени.

Для эффективного решения обозначенных выше задач в рамках методики САТУРН [1] развиваются два подхода. Один из них заключается в разработке и применении эффективных параллельных алгоритмов [2–5]. В этом случае численное моделирование проводится на подробных однородных сетках фазового пространства и за счет использования ресурса современных многопроцессорных вычислительных систем решение задачи выполняется за разумное календарное время. Второй подход заключается в развитии методов применения дробных адаптивных сеток [6], когда расчет ведется на неоднородных сетках нужной степени детализации только в той части фазового пространства задачи, где это необходимо.

В работе приведены результаты применения некоторых алгоритмов распараллеливания многомерного нестационарного группового уравнения переноса на неортогональных пространственных сетках. Также рассмотрено использование адаптивных методов решения уравнения переноса с применением дробных сеток в фазовом пространстве.

Постановка задачи

Методика САТУРН основывается на кинетической многогрупповой модели описания процессов переноса. В качестве примера рассмотрим нестационарное многомерное кинетическое уравнение переноса излучения, записанное в классической интегрально-дифференциальной форме [1]

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial t} + L\varepsilon_i + \chi_{ii}\varepsilon_i = \frac{\chi_{ai}}{4\pi} \varepsilon_{ip} + \frac{\chi_{si}}{4\pi} \varepsilon_i^{(0)} + \frac{Q_i}{4\pi}, \quad i = \overline{1, N} - \text{номер группы, } \varepsilon_i^{(0)} = \int_{-1}^1 d\mu \int_0^{2\pi} \varepsilon_i d\varphi, \quad (1)$$

$$L\varepsilon_i = \mu \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \sqrt{1-\mu^2} \cos \varphi \cdot \varepsilon_i \right) + \frac{\partial}{\partial \Phi} \left(\frac{\sqrt{1-\mu^2}}{r} \sin \varphi \cdot \varepsilon_i \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sqrt{1-\mu^2} \sin \varphi \cdot \varepsilon_i \right), \quad (2)$$

$$\rho \frac{\partial E}{\partial t} = \sum_{i=1}^N \chi_{ai} \varepsilon_i^{(0)} \Delta \omega_i - \sum_{i=1}^N \chi_{ai} \varepsilon_{ip} \Delta \omega_i, \quad (3)$$

r, z, Φ – цилиндрические координаты положения частицы. $\vec{\Omega} = \vec{\Omega}(\mu, \varphi)$ – единичный вектор в направлении полета частицы; $\mu = \cos \theta$, θ – угол между вектором $\vec{\Omega}$ и осью Z ; φ – угол между проекцией вектора $\vec{\Omega}$ на плоскость, проходящую через точку (r, z, Φ) перпендикулярно оси Z , и вектором в этой плоскости, направленным из точки оси Z к рассматриваемой точке (r, z, Φ) ; $-1 < \mu < 1$, $0 < \varphi < 2\pi$, ω_i – средняя энергия фотонов в i -й группе; $\Delta \omega_i$ – ширина интервала по энергетической переменной; $\varepsilon_i = \varepsilon_i(r, z, \Phi, \mu, \varphi, \omega_i, t)$ – поток энергии излучения; $T(r, z, \Phi)$ – температура среды; $\rho(r, z, \Phi)$ – плотность вещества; $\chi_{ai} = \chi_{ai}(\rho, T, \omega_i)$ – сечение поглощения фотонов; $\chi_{si} = \chi_{si}(\rho, T, \omega_i)$ – сечение рассеяния фотонов; $\chi_{ii} = \chi_{ai} + \chi_{si}$ – полное сечение; $\varepsilon_{ip}(T, \omega_i)$ – функция Планка; $Q_i = Q_i(r, z, \Phi, \omega_i)$ – независимый источник; $E(\rho, T)$ – внутренняя энергия.

Система (1) решается в области фазового пространства $D = \{(r, z) \in L(\Phi), \Phi_1 \leq \Phi \leq \Phi_2, -1 \leq \mu \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$, $L(\Phi)$ – сечение тела вращения плоскостью, проходящей через ось Z ; Φ_1, Φ_2 – сечения, ограничивающие область решения: $0 \leq \Phi_1 \leq \Phi_2 \leq 2\pi$.

Граничное условие на внешней поверхности задается при $(\vec{\Omega} \vec{n}) < 0$ в виде

$$\varepsilon_i(\vec{r}, \vec{\Omega}, \omega_i, t) \Big|_{\substack{(\vec{\Omega}, \vec{n}) < 0 \\ \vec{r} \in \Gamma}} = \varphi_i(\vec{r}_\Gamma, \vec{\Omega}, \omega_i, t), \quad (4)$$

где $\Gamma = \Gamma(\Phi)$ – граничная поверхность; \vec{n} – внешняя нормаль к поверхности.

Начальное условие задается в виде

$$\varepsilon_i(\vec{r}, \vec{\Omega}, \omega_i, t) \Big|_{t=t_0} = \psi_i(\vec{r}, \vec{\Omega}, \omega_i). \quad (5)$$

Методы аппроксимации и решения

По переменной времени уравнение переноса аппроксимируется по неявной трехслойной разностной схеме. Аппроксимация уравнения переноса по угловым переменным строится по схеме метода дискретных ординат.

Пространственная аппроксимация уравнения переноса строится на регулярных пространственных сетках с использованием методов конечных разностей на шаблоне, содержащем решения в центрах, на ребрах и в узлах ячейки (рис. 1).

На шаге по времени система уравнений решается итерационным по правой части методом. На каждой итерации системы сеточных уравнений с заданной правой частью решаются по направлениям полета частиц. Для решения системы сеточных уравнений переноса с заданной правой частью применяются явные экономичные алгоритмы "бегущего счета".

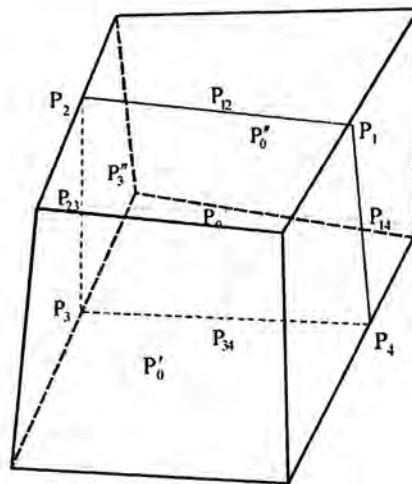


Рис. 1. Ячейка пространственной сетки и искомые функции

Параллельные методики

В методике САТУРН реализован ряд параллельных алгоритмов:

- мелкоблочный алгоритм распараллеливания, предназначенный для решения пространственно двумерных и трехмерных задач на структурированных сетках [2];
- алгоритмы распараллеливания по энергетическим группам и направлениям полета частиц, предназначенные для решения задач как на структурированных, так и неструктурированных сетках [1, 3];
- алгоритм распараллеливания конвейерного типа по слоям, предназначенный для решения пространственно трехмерных задач на структурированных сетках [5];
- комбинирование мелкоблочного алгоритма и алгоритма распараллеливания по энергетическим группам, предназначенное для решения пространственно двумерных и трехмерных задач на структурированных сетках [4].

Основным параллельным алгоритмом методики САТУРН для решения двумерных задач переноса на регулярной четырехугольной сетке является алгоритм мелкоблочного распараллели-

вания [2]. В основе данного алгоритма лежит принцип пространственной декомпозиции исходной системы на подобласти. Разбиение на подобласти, помещаемые на отдельные процессоры (в дальнейшем параобласти), производится в общем случае регулярным образом по строкам и столбцам системы (матричная 2D декомпозиция), в частном случае возможно разбиение только по одному из пространственных направлений (линейная 1D декомпозиция).

Перечислим основные положения алгоритма мелкоблочного распараллеливания:

- пространственная декомпозиция области на непересекающиеся параобласти;
- организация одновременного решения систем сеточных уравнений для разных интервалов по угловой переменной μ ;
- решение краевой задачи в параобласти с внутренними граничными условиями, вычисленными на текущей итерации, что позволяет сохранить точность решения и не дает увеличения общего числа итераций, по сравнению с последовательной методикой;
- совмещение межпроцессорных обменов со счетом.

Алгоритм мелкоблочного распараллеливания является параллельным алгоритмом волнового типа и подразумевает последовательную загрузку процессоров в ходе выполнения операции параллельного бегущего счета для одного направления полета частиц. При этом алгоритм предназначен для решения уравнения переноса, записанного в цилиндрической системе координат, и ориентирован на параллельное решение задач на существенно неортогональных сетках. Эффективность мелкоблочного распараллеливания, в первую очередь, зависит от параметров пространственной декомпозиции и числа направлений полета частиц. В табл. 1 продемонстрирована зависимость эффективности распараллеливания на 225 процессорах (15 по строкам, 15 по столбцам) от числа направлений полета частиц. Данные результаты были получены методом деления на двумерной одногрупповой сферически-симметричной задаче с $1,44 \cdot 10^6$ пространственных ячеек.

Таблица 1

Эффективность алгоритма мелкоблочного распараллеливания на 225 процессорах в зависимости от числа направлений в задаче

Число направлений	30	48	96	126
Эффективность E , %	60	70	90	93

В комбинации с алгоритмом мелкоблочного распараллеливания в методике САТУРН используется алгоритм распараллеливания по энергетическим группам. Последний параллельный алгоритм основывается на следующем положении. При решении многогруппового уравнения переноса расчет различных интервалов по энергетической переменной можно проводить независимо на одной итерации по правой части, что означает возможность декомпозиции по вычислительной работе. Комбинированный алгоритм распараллеливания [4] сочетает в себе декомпозицию задачи как по пространственным переменным (на параобласти), так и по энергетическим группам (на группобласти). Такой подход позволяет эффективно использовать при решении кинетического уравнения в методике САТУРН значительно большее количество процессоров, чем при использовании распараллеливания только по пространству или только по группам.

Более высокая эффективность комбинированного алгоритма распараллеливания по сравнению с алгоритмом мелкоблочного распараллеливания продемонстрирована в табл. 2. Результаты табл. 2 были получены методом деления на двумерной 28-групповой сферически-симметричной задаче с 96 направлениями полета частиц и с $1,6 \cdot 10^4$ пространственных ячеек. В задаче использовалась одномерная пространственная декомпозиция (только по столбцам). Для каждого расчета приведено общее число процессоров, а также число параобластей (как параметр декомпозиции по пространству) и число группобластей (как параметр декомпозиции по энергетическим группам).

Таблица 2

Эффективность комбинированного алгоритма распараллеливания

Число процессоров	100	100	200	200
Число группобластей	1	4	1	4
Число параобластей	100	25	200	50
Ускорение, S_p	66	75	93	112
Эффективность E , %	66	75	46	56

При решении пространственно трехмерных задач в методике САТУРН используется алгоритм распараллеливания конвейерного типа по трехмерным слоям системы [5].

Перечислим основные особенности данного параллельного алгоритма:

- пространственная декомпозиция задачи на параобласти только по трехмерным слоям;
- решение краевой задачи в параобласти с внутренними граничными условиями, вычисленными на текущей итерации, что позволяет сохранить точность решения и не дает увеличения общего числа итераций по сравнению с последовательной методикой.

Эффективность алгоритма зависит от числа направлений полета частиц по всем группам в задаче, а также числа процессоров. В табл. 3 продемонстрирована зависимость эффективности распараллеливания от числа процессоров в задаче. Результаты табл. 3 были получены методом деления на 26-групповой существенно трехмерной задаче с 96 направлениями полета частиц и с $\sim 10^6$ пространственных ячеек.

Таблица 3

Эффективность алгоритма распараллеливания конвейерного типа

Число процессоров	9	18	36	72	144
Эффективность E , %	92	85	81	78	76

Адаптивный метод

Рассмотрим применение адаптивных дробных пространственных, угловых и энергетических сеток при решении многомерного уравнения переноса [6]. На текущий момент адаптивные алгоритмы реализованы отдельно по пространственным [7], угловым [8, 9] и энергетическим переменным. В дальнейшем планируется их объединение в алгоритм использования дробных адаптивных сеток в фазовом пространстве решения многомерного уравнения переноса.

Основные положения метода

1. Рассматриваются два типа сеток: опорная и адаптивная. Опорная сетка является основной счетной сеткой и в ходе всего расчета остается неизменной. Адаптивная сетка получается в результате дробления ячеек опорной сетки. Адаптивная сетка может как укрупняться, так и измельчаться в ходе расчета.

2. Адаптивная дробная сетка строится путем равномерного разбиения ячейки опорной сетки фазового пространства на 2^N адаптивных интервалов, где N – уровень адаптивной сетки.

3. В ячейке опорной сетки фазового пространства уровень адаптивности по разным переменным фазового пространства может быть различным.

4. Адаптивная сетка перестраивается в процессе проведения расчета задачи. Для ее построения используются специальные алгоритмы и критерии адаптивного метода, которые работают в начале шага по времени на основе информации, полученной на предыдущем временном шаге.

Критерии построения адаптивных сеток

Задача критерия заключается в определении точек фазового пространства, в которых необходимо провести перестроение адаптивной сетки для обеспечения требуемой точности и, по возможности, сокращения времени счета задачи. Критерий работает в обе стороны: сгущает и прореживает сетку в зависимости от полученного решения.

Было рассмотрено два основных типа критериев построения адаптивных сеток: градиентный и трехточечный.

Градиентный критерий основан на анализе градиентов функций и проводит адаптивное разбиение требуемого уровня в тех точках фазового пространства, где решение претерпевает изменения, превышающие некоторые заданные значения.

Более подробно рассмотрим трехточечный критерий на примере некоторой произвольной функции $f = f(\omega)$. Пусть функция $f = f(\omega)$ определена в центрах интервалов сетки по переменной ω (рис. 2). На рис. 2 прерывистыми вертикальными линиями отмечены границы опорных интервалов по переменной ω , точечными – границы адаптивных интервалов. Критерий, основываясь на анализе степени выпуклостей и вогнутостей функции $f = f(\omega)$, является трехточечным, т. е. при своей работе привлекает значения функции f в трех соседних точках сетки по переменной ω . В зависимости от величины площадей треугольников принимается решение об изменении уровня адаптивности в каждом из интервалов сетки.

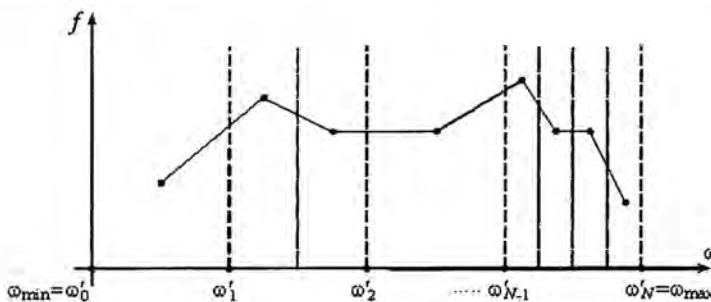


Рис. 2. Пример функции $f = f(\omega)$

Адаптивный по пространственным переменным метод

Дробление каждой опорной ячейки двумерной пространственной сетки производится независимо по строкам и по столбцам. В каждой пространственной ячейке определен свой уровень адаптивности по пространственным направлениям.

Выбор множества пространственных ячеек, где необходимо построение адаптивной пространственной сетки, осуществляется с использованием системы критериев адаптивного метода, анализирующих решение на опорной сетке.

При перестроении адаптивной сетки переинтерполяция сеточных величин производится нормированным консервативным интегрированием с весами.

При решении двумерного кинетического уравнения в цикле по направлениям угловой сетки на опорной пространственной сетке используется стандартный метод бегущего счета. Метод бегущего счета используется и для решения уравнения переноса на адаптивной пространственной сетке внутри опорных ячеек.

Адаптивный по угловым переменным метод

В разных пространственных ячейках допускается дробление на разное число адаптивных подинтервалов по направлению опорной угловой сетки. В одной пространственной ячейке в разных опорных интервалах угловой сетки допускается дробление на разное число адаптивных подинтервалов.

Выбор множества пространственных ячеек и интервалов угловой сетки в этих ячейках, где необходимо построение адаптивной угловой сетки, осуществляется с использованием системы критериев адаптивного метода:

- анализ градиентов искомой функции по угловым переменным и изменение уровня адаптивной сетки в тех пространственных точках и в тех интервалах угловой сетки, где решение превышает изменения, превышающие некоторые заданные значения;
- определение фронта решения и изменение уровня адаптивной сетки на фронте (или перед и за фронтом);
- изменение уровня адаптивной сетки в заданном числе приграничных точек (строк, столбцов), число которых может изменяться с учетом особенностей поведения решения по времени.

Метод бегущего счета организуется по направлениям опорной угловой сетки. В случае неортогональной пространственной сетки возможен многопроходный режим работы метода.

Адаптивный по энергетическим переменным метод

Используется специальная аппроксимация уравнения переноса на адаптивной по энергетической переменной сетке, когда в разных ячейках пространственной сетки разбиение по энергетическим группам различно.

В разных пространственных ячейках допускается дробление на разное число адаптивных подинтервалов по интервалам опорной энергетической сетки. В одной пространственной ячейке в разных опорных интервалах энергетической сетки допускается дробление на разное число адаптивных подинтервалов.

Выбор множества пространственных ячеек и интервалов энергетической сетки, где необходимо построение адаптивной энергетической сетки, осуществляется с использованием системы критериев, анализирующих зависимость на временных шагах скалярного потока от энергетической переменной, а также учитывающих оптические свойства среды.

Для решения систем сеточных уравнений адаптивного по энергетическим переменным метода применяется обобщенный метод бегущего счета. В разных пространственных ячейках численно решается разное число групповых уравнений. В процессе бегущего счета используется алгоритм консервативной передачи решения из одной ячейки в другую.

Тестовые задачи

Для верификации и оценки эффективности реализованных адаптивных по пространственным, энергетической и угловым переменным методов были проведены численные исследования на ряде задач.

В табл. 4 представлены параметры тестовых задач 1 и 2 с использованием адаптивного метода по пространственным переменным.

Таблица 4

Параметры тестовых задач

Параметр	Задача 1	Задача 2
Характер решения	Одномерный	Существенно двумерный
Геометрия	См. рис. 3,а	См. рис. 3,б
Граничные условия	На левой границе входящий поток излучения, соответствующий $\varepsilon(0, \mu, t) = \frac{ct}{c + (cC_1\mu + 1)}$ $\mu > 0, C_1 = -0,85903205\dots$ где $\varepsilon(z, \mu, t)$ – интенсивность излучения, умноженная на π .	На левой границе: на части, относящейся к плотной области – "зеркальное отражение", на части, относящейся к прозрачной области – входящий изотропный поток излучения, соответствующий температуре $T = 1$.
Энергия	$E = 2058 \cdot T^4$	$E = C_V T$, где $C_V = 0,81$.
Сечение поглощения	$\chi_a = \frac{1}{2058 \cdot T^4}$	$\chi_a = A/T^3$, где $A = 50,89$ в 1-й физической области; $A = 0,1374$ во 2-й физической области.

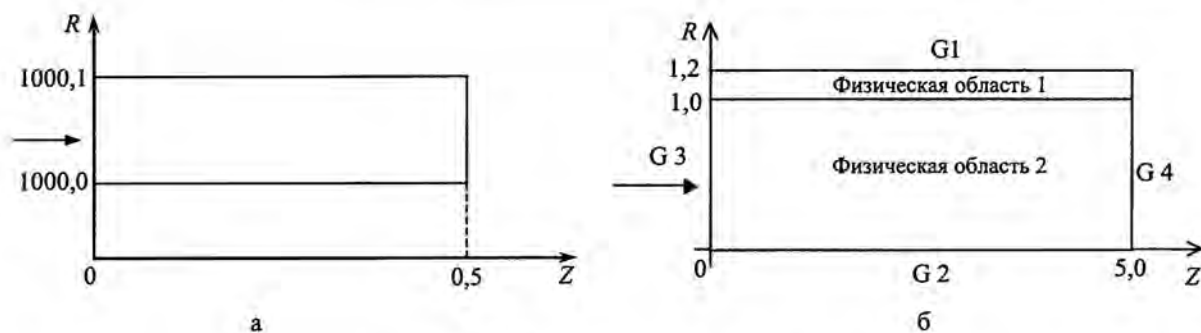


Рис. 3. Геометрия тестовых задач

Задача 1

В качестве опорной пространственной сетки использовалась сетка из 10 строк и 25 или 50 столбцов (рис. 3,а). Расчеты с применением адаптивной по пространственным переменным методики [7] практически совпадают с расчетом на самой мелкой пространственной сетке с 400 столбцами, а также с аналитическим решением [10]. Такой результат подтверждает правильность работы адаптивных алгоритмов. При этом адаптивный расчет с максимальным разбиением опорной пространственной сетки на 8 ячеек, совпадающий с результатами расчетом по стандартной методике на пространственной сетке, имеющей 200 столбцов, требует в 6,2 раза меньше времени. Аналогичное сравнение расчета на сетке с 400 столбцами по стандартной программе без адаптив-

ности и адаптивных расчетов с разбиением опорных ячеек на 16 и на 8 адаптивных ячеек дает выигрыш по времени счета в 9 и 5,6 раза, соответственно, при сохранении заданной точности.

Задача 2

В качестве опорной пространственной сетки для расчета с использованием адаптивного алгоритма была выбрана сетка (рис. 3,б), содержащая 10 строк (по 5 в каждой области) и 50 столбцов ($NR = 10, NZ = 50$). Уровень адаптивного разбиения выбран такой, чтобы максимальное измельчение соответствовало сеткам по пространственным переменным с разбиением $NR = 40, NZ = 200$ и $NR = 80, NZ = 400$.

Решение на адаптивной сетке $NR = 10, NZ = 50$ с максимальным разбиением на 8 адаптивных ячеек близко к расчету на самой мелкой пространственной сетке – $NR = 60, NZ = 300$. Адаптивный расчет при этом требует в 4,8 раза меньше времени. В расчетах с меньшим уровнем адаптивности (максимальное разбиение на 4 адаптивные ячейки в каждом направлении) на сетке $NR = 10, NZ = 50$ было получено близкое по точности решение к расчету $NR = 40, NZ = 200$ при экономии времени счета в 8,9 раза.

Задача 3

Рассматривается задача с использованием адаптивного по энергетическим переменным алгоритма. В основе постановки данного теста лежит известная тестовая задача Флека [11].

При выполнении расчетов учитывается процесс поглощения фотонов, сечение поглощения фотонов задано формулой: $\chi_{ai} = A\omega_i^{-3}(1 - \exp(-\omega_i/T))$. В областях I, III (оптически прозрачных)

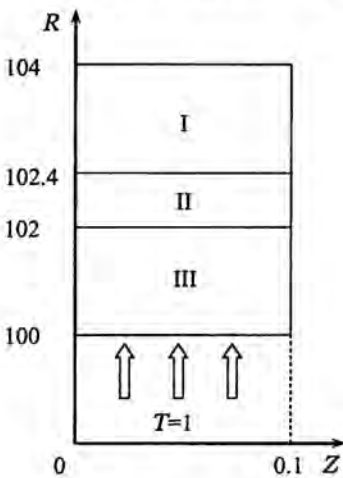


Рис. 4. Геометрия задачи 3

$A = 27$ (рис. 4). В области II (оптически плотной) $A = 10000$. Сечение рассеяния в расчетах равно нулю ($\chi_s = 0$). На границах $Z = 0$ и $Z = 0,1$ задано зеркальное отражение, на границе $R = 100$ задан входящий изотропный поток, соответствующий температуре излучения $T = 1$. Расчеты проведены с использованием 28, 14 и 7 энергетических групп. При проведении расчетов с использованием адаптивного по энергетическим переменным алгоритма в качестве опорной использовалась сетка из 7 энергетических групп.

В табл. 5 приведены среднеквадратичные отклонения полученного решения от расчета с использованием 28 энергетических групп и ускорение по времени счета. Результаты приведены для двух вариантов критерия.

Таблица 5

Точность и эффективность счета задачи 3

Число групп	14	7	Вариант 1	Вариант 2
Ускорение относительно расчета с 28 группами	1,72	2,47	1,37	1,44
Среднеквадратичное отклонение T , %	3,7	27,26	0,35	0,22

Задача 4

Рассматривается задача с использованием адаптивного по угловым переменным метода [8, 9].

В основе постановки данного теста лежит модификация тестовой задачи Флека. Введена щель, соединяющая две прозрачные области (область IV) и изменены размеры областей. Итак, рассматривается система $\{0 \leq Z \leq 0,2; 0,1 \leq R \leq 1,5\}$, состоящая из пяти физических областей и

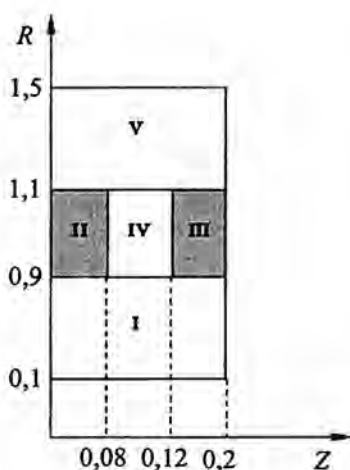


Рис. 5. Геометрия задачи 4

удаленная от оси вращения на расстояние $R = 0,1$ (рис. 5). Зависимость энергии вещества от температуры задается уравнением $E = C_V T$, где $C_V = 0,81$. На границе $R = 0,1$, $0 \leq Z \leq 0,2$ задан входящий изотропный поток излучения, соответствующий температуре $T = 1$, на границах $Z = 0$ и $Z = 0,2$ задано условие зеркального отражения. Сечение поглощения фотонов задано формулой: $\chi_a = A/T^3$. В областях I, IV, V $A = 0,1374$. В областях II, III $A = 50,89$. В качестве опорной сетки по угловым переменным выбрана сетка, содержащая 8 интервалов по переменной μ .

В табл. 6 приведен выигрыш по времени счета, относительно расчета с угловой сеткой, содержащей 128 интервалов по переменной μ ($N_\mu = 128$) и среднее квадратичное отклонение.

Таблица 6

Точность и эффективность счета задачи 4

N_μ	$N_\mu = 64$	$N_\mu = 32$	Вариант 1	Вариант 2
Ускорение относительно расчета $N_\mu = 128$	2,01	3,75	3,02	3,33
Среднеквадратичное отклонение от $N_\mu = 128$ (%)	0,65	1,85	0,68	0,85

Заключение

Представлены параллельные алгоритмы и адаптивные методы решения многомерного многогруппового кинетического уравнения переноса. Приведены результаты численных исследований эффективности алгоритмов распараллеливания и адаптивных по пространственным, энергетической и угловым переменным методов решения уравнения переноса. Использование параллельных алгоритмов и адаптивных методов по отдельности, и особенно в совокупности, позволит многократно сократить время, необходимое для численного решения многомерного многогруппового уравнения переноса.

Список литературы

- Шагалиев Р. М., Беляков И. М., Алексеев А. В., Евдокимов В. В., Звенигородская О. А., Москвин А. Н., Плетенева Н. П., Федотова Л. П., Шумилин В. А., Математическое моделирование и методики решения многомерных задач переноса частиц и энергии, реализованные в комплексе САТУРН-3 // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1999. Вып. 4. С. 20–26.

2. Алексеев А. В., Шагалиев Р. М., Нуждин А. А. Метод мелкозернистого распараллеливания двумерных и трехмерных задач переноса на неортогональных сетках // Труды РФЯЦ-ВНИИЭФ. Саров. 2002. Вып. 3. С. 96–109.
3. Shagaliev R. M., Belyakov I. M., Alekseyev A. V., Nuzhdin A. A., Vlasova O. E., Evdokimov V. V., Rezchikov V. Yu., Subbot S. V. Methods for Parallelization of Multigroup Transport Problem Solution for 2D and 3D Geometry // Book of Abstracts. PCFD. May 13–15. 2003. Moscow. Russia. P. 269.
4. Шагалиев Р. М., Беляков И. М., Шумилин В. А., Алексеев А. В., Бутнева О. В., Костенко А. Ю., Нуждин А. А., Плетенева Н. П., Резчиков В. Ю., Суббот С. В. Комбинированный алгоритм распараллеливания решения двумерного уравнения переноса на неортогональных пространственных сетках. // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2005. Вып. 1. С. 3–8.
5. Алексеев А. В., Шагалиев Р. М. Алгоритмы распараллеливания численного решения трехмерного уравнения переноса в комплексе САТУРН // Там же. 1993. Вып. 4. С. 3–7.
6. Шагалиев Р. М. Адаптивный метод решения многомерного уравнения переноса с применением дробных сеток в фазовом пространстве // Там же. 2004. Вып. 4. С. 3–15.
7. Шагалиев Р. М., Алексеев А. В., Беляков И. М., Гичук А. В., Евдокимов В. В., Москвин А. Н., Нуждин А. А., Плетенева Н. П., Шемякина Т. В. Численное решение двумерного уравнения переноса с применением адаптивного по пространству метода дробных сеток // Там же. 2004. Вып. 4. С. 16–26.
8. Шагалиев Р. М., Алексеев А. В., Бочков А. И., Гичук А. В., Евдокимов В. В., Нуждин А. А., Шемякина Т. В. Адаптивный по угловым переменным метод решения двумерного уравнения переноса на неортогональной пространственной сетке // Там же. 2006. Вып. 4. С. 3–14.
9. Шагалиев Р. М., Алексеев А. В., Бочков А. И., Евдокимов В. В., Ириничев Е. А., Плетенева Н. П., Суббот С. В. Результаты численных исследований адаптивного по угловым переменным метода решения двумерного уравнения переноса излучения // Там же. 2007. Вып. 1. С. 27–37.
10. Думкина Г. В., Козманов М. Ю. Точное решение нелинейной системы уравнений энергии и нестационарного переноса излучения // ЖВМ и МФ. 1979. Т. 19, № 4. С. 1061–1063.
11. Fleck J. A., Cummings J. D. An Implicit Monte Carlo Scheme for Calculating Time and Frequency Dependent Nonlinear Radiation Transport // J. of Comput. Phys. 1971. Vol. 8. P. 313–342.

Parallel Algorithms and Adaptive Methods for Numerical Solution of Multidimensional Transfer Equation

A. V. Alekseyev, I. M. Belyakov, A. I. Bochkov, A. V. Gichuk, V. V. Yevdokimov,
A. A. Nuzhdin, V. Yu. Rezchikov, P. M. Shagaliyev, T. V. Shemyakina

Parallelization methods and application of fractional adaptive meshes in the phase space when solving multidimensional transport equation in the group kinetic approximation are considered.