

УДК 519.6

# Методика решения двумерного уравнения переноса на нерегулярных многоугольных сетках

А. Н. Москвин, В. А. Шумилин

*Для решения двумерного уравнения переноса построена консервативная конечно-разностная схема на многоугольных пространственных сетках. Разностная схема строится в два этапа. На первом этапе промежуточные значения неизвестной функции в счетной ячейке находятся путем приближенного решения уравнения переноса вдоль характеристик. На втором этапе из уравнения баланса в ячейке находится корректирующий множитель, и все полученные значения неизвестной функции умножаются на этот множитель. Разработаны экономичные алгоритмы, реализующие метод бегущего счета на пространственных сетках, элементами которых являются произвольные многоугольники. Действенность методики иллюстрируется численными расчетами.*

## Введение

Построение разностных схем для решения двумерного уравнения переноса на нерегулярных пространственных сетках представляет большой интерес. Это обусловлено тем, что использование таких сеток при решении задач со сложной геометрией позволяет выбирать пространственную сетку экономичным образом.

В [1] сформулирован некоторый подход к построению консервативных разностных аппроксимаций двумерного уравнения переноса на многоугольных пространственных сетках. Важным свойством этого подхода является треугольность получаемого разностного оператора переноса в случае, когда все счетные ячейки являются выпуклыми.

В [2] построена консервативная разностная схема для двумерного уравнения переноса на нерегулярных пространственных сетках, образованных выпуклыми четырехугольниками. В схеме [2] сеточные значения введены в центрах и на ребрах ячеек сетки. Для замыкания системы сеточных уравнений применяются дополнительные соотношения, обеспечивающие либо первый, либо второй порядок аппроксимации в зависимости от числа освещенных сторон. Эта схема в течение ряда лет успешно применялась при решении широкого класса прикладных задач.

На основании результатов [1, 2] в работе [3] построена схема с расширенным шаблоном, в которой сеточные значения искомой функции определены одновременно в узлах, на ребрах и в центрах ячеек сетки. На определенном таким образом шаблоне введены дополнительные соотношения по пространственным переменным, которые обеспечивают второй порядок аппроксимации при любом варианте освещенности сторон четырехугольной ячейки. Схема обобщена для случая произвольных выпуклых многоугольников.

В данной работе для решения двумерного уравнения переноса строится консервативная конечно-разностная схема на многоугольных пространственных сетках. Сеточные значения вводятся в центрах и на ребрах ячеек сетки, в узлах вводятся вспомогательные значения. Разностная схема строится в два этапа. На первом этапе промежуточные значения неизвестной функции в счетной ячейке находятся путем приближенного решения уравнения переноса вдоль характери-

стик. На втором этапе из уравнения баланса в ячейке находится корректирующий множитель, и все полученные значения неизвестной функции умножаются на этот множитель. Как и в работах [2, 3] для выпуклых ячеек, система сеточных уравнений является треугольной, что позволяет реализовать метод бегущего счета для любого направления освещенности. Для случая невыпуклых ячеек разработаны специальные алгоритмы, при этом обращено особое внимание на их экономичность. Действенность методики иллюстрируется численными расчетами.

### Постановка задачи

Рассмотрим нестационарное двумерное кинетическое уравнение переноса нейтронов для осесимметричной геометрии в многогрупповом приближении. В цилиндрической системе координат при использовании записи в дивергентной форме это уравнение имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{N_i}{v_i} \right) + LN_i + \alpha N_i = F_i; \quad (1)$$

$$LN_i(z, r, \mu, \varphi) = \frac{\partial}{r \partial r} \left( r \sqrt{1 - \mu^2} \cos \varphi N_i \right) + \frac{\partial}{\partial z} (\mu N_i) - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\sqrt{1 - \mu^2}}{r} \sin \varphi N_i \right);$$

$$F_i(z, r) = \frac{1}{2\pi} \left( \sum_{j=1}^{i1} \beta_{ij} n_j^{(o)} + Q_i \right); \quad n_j^{(o)} = \int_{-1}^1 d\mu \int_0^\pi N_i d\varphi.$$

Здесь  $i$  – номер энергетической группы ( $i = 1, 2, \dots, i1$ );  $r, z$  – цилиндрические координаты положения частицы ( $r$  – расстояние от точки нахождения частицы до оси  $\vec{Z}$ ;  $z$  – координата частицы вдоль оси  $\vec{Z}$ );  $\vec{\Omega}(\mu, \varphi)$  – единичный вектор в направлении полета частицы;  $\mu = \cos \theta$ ,  $\theta$  – угол между вектором  $\vec{\Omega}$  и осью  $\vec{Z}$ ;  $\varphi$  – угол между проекцией вектора  $\vec{\Omega}$  на плоскость, проходящую через точки  $(r, z)$  перпендикулярно оси  $\vec{Z}$ , и вектором этой плоскости, направленным из точки оси  $\vec{Z}$  к рассматриваемой точке;  $\alpha_i(t, r, z)$ ,  $\beta_{ij}(t, r, z)$  ( $i = 1, 2, \dots, i1; j = 1, 2, \dots, i1$ ) – коэффициенты поглощения и размножения частиц;  $v_i(t, r, z)$  – скорость частиц группы  $i$ ;  $N_i(t, r, z, \mu, \varphi)$  – поток частиц группы  $i$  в точке  $(t, r, z)$ , летящих в направлении  $\vec{\Omega}$ ;  $Q_i(t, r, z)$  – независимый источник частиц группы  $i$ .

Уравнение (1) требуется решить в области фазового пространства  $D = \{(r, z) \in L, -1 \leq \mu \leq 1, 0 \leq \varphi \leq \pi\}$ , где  $L$  – сечение тела вращения плоскостью, проходящей через ось  $\vec{Z}$ .

На внешней поверхности при  $\left( \vec{\Omega} \vec{n} \right) < 0$  ( $\vec{n}$  – внешняя нормаль к образующей  $\Gamma$ ) задается входящий поток частиц:

$$N_i(t, r, z, \mu, \varphi) \Big|_{(r, z) \in \Gamma} = \psi_i(t, r, z, \mu, \varphi) \Big|_{(r, z) \in \Gamma},$$

где  $\psi_i$  – заданные функции.

Наряду с уравнением (1) рассматриваются уравнения для случая  $r = 0$  и  $\varphi = \pi$ :

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} N_i \Big|_{r=0} = 0; \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{N_i}{v_i} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left( \sqrt{1 - \mu^2} N_i \right) + \mu \frac{\partial}{\partial z} N_i + \alpha_i N_i = F_i. \quad (3)$$

Уравнения (2) и (3) в дальнейшем используются как дополнительные (внутренние) граничные условия.

Система уравнений (1) решается итерациями по интегралу столкновений. В дальнейшем для простоты изложения рассматривается уравнение для одной группы с известной правой частью (индексы номера итерации и номера группы опущены).

### Аппроксимация по угловым переменным и времени

Аппроксимация по угловым переменным и времени строится аналогично [2, 4].

На интервале  $-1 \leq \mu \leq 1$  выберем узловые значения  $\mu_m, m = 1, 2, \dots, \bar{m}$ . Для каждого значения  $\mu_m$  интервал изменения переменной  $\varphi \in [\pi, 0]$  разобьем на подынтервалы  $\varphi_{q-1, m} \geq \varphi \geq \varphi_{q, m}, q = 1, 2, \dots, \bar{q}_m$ , где  $\varphi_{0, m} = \pi, \varphi_{\bar{q}_m, m} = 0$  и точка  $\varphi = \pi/2$  являются узловыми точками.

Уравнение (1) на интервалах  $(\varphi_{q-1}, \varphi_q)$  при заданном  $\mu_m$  аппроксимируется следующими разностными уравнениями:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} \left[ \left( \frac{N}{v} \right)_{m, q-1/2}^{n+1} - \left( \frac{N}{v} \right)_{m, q-1/2}^n \right] + \frac{\partial}{r \partial r} \left( r \sqrt{1 - \mu_m^2} \cos \bar{\varphi}_q N_{m, q-1/2} \right)^{n+\gamma} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu_m N_{m, q-1/2} \right)^{n+\gamma} - \\ & - \frac{1}{r} \sqrt{1 - \mu_m^2} \sin \varphi_q \frac{N_{m, q}^{n+\gamma}}{\Delta \varphi_q} + \frac{1}{r} \sqrt{1 - \mu_m^2} \sin \varphi_{q-1} \frac{N_{m, q-1}^{n+\gamma}}{\Delta \varphi_q} + \alpha N_{m, q-1/2}^{n+\gamma} = F^{n+\gamma}, \quad (4) \\ & m = 1, 2, \dots, \bar{m}, \quad q = 1, 2, \dots, \bar{q}_m, \end{aligned}$$

где  $\Delta \varphi_q = \varphi_{q-1} - \varphi_q, \quad \cos \bar{\varphi}_q = \frac{1}{\varphi_q - \varphi_{q-1}} \int_{\varphi_{q-1}}^{\varphi_q} \cos \varphi d\varphi = \frac{\sin \varphi_q - \sin \varphi_{q-1}}{\varphi_q - \varphi_{q-1}}.$

Для замыкания уравнения по переменной  $\varphi$  применяется следующее дополнительное соотношение:

$$N_{m, q-1/2} = \eta N_{m, q} + (1 - \eta) N_{m, q-1}, \quad (0, 5 \leq \eta \leq 1). \quad (5)$$

Рассмотрим на оси времени  $t$  два соседних момента  $t^n$  и  $t^{n+1}$ . Производная по времени в (1) аппроксимируется следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{N}{v} \right) = \frac{\Phi^{n+1} - \Phi^n}{\Delta t^{n+1}}, \quad (6)$$

где  $\Phi(t, r, z, \mu, \varphi) = \frac{N}{v}, \quad \Delta t^{n+1} = t^{n+1} - t^n.$

Все величины, зависящие от  $r$  и  $z$ , при аппроксимации по времени полагаем заданными на момент времени  $t^{n+\gamma} = (1-\gamma)t^n + \gamma t^{n+1}$ , ( $0,5 \leq \gamma \leq 1$ ). Дополнительное соотношение по времени представляет собой функциональное равенство

$$\frac{N^{n+\gamma}}{\nu} = \gamma \Phi^{n+1} + (1-\gamma) \Phi^n. \quad (7)$$

Отметим, что на момент времени  $t^n$  нет необходимости определять значения  $N^n$ , достаточно иметь значения функции  $\Phi^n(r, z, \mu, \varphi) = \frac{N^n}{\nu}$ , которые и являются начальными данными для уравнения (1) на данном счетном шаге. Подставляя (5)–(7) в (4), получаем систему уравнений для функции  $N(t, r, z, \mu, \varphi)$  на момент времени  $t^{n+\gamma}$ :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{r \partial r} \left( r \sqrt{1-\mu^2} \cos \varphi N_i^{n+\gamma}(r, z, \mu, \varphi) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu N_i^{n+\gamma}(r, z, \mu, \varphi) \right) - \\ & - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{r} \sqrt{1-\mu^2} \sin \varphi N_i^{n+\gamma}(r, z, \mu, \varphi) \right) + \left( \alpha + \frac{1}{\nu \gamma \Delta t} \right) \Delta V N_i^{n+\gamma}(r, z, \mu, \varphi) = \quad (8) \\ & = \Delta V \left( F(r, z) + \frac{\Phi^n(r, z, \mu, \varphi)}{\gamma \Delta t} \right). \end{aligned}$$

### Аппроксимация по пространственным переменным

Область  $L$  покрываем многоугольниками. Введем сеточные значения функции  $N(t, r, z, \mu, \varphi)$  на ребрах –  $N_{(k, k+1)}$  и в центрах многоугольников –  $N_0$ .

Для построения конечно-разностной схемы используем интегроинтерполяционный метод [5] и метод дополнительных соотношений [2, 4]. Умножим уравнение (8) на элемент фазового объема  $r dr dz d\varphi$  и проинтегрируем по счетной ячейке, представляющей собой прямую призму, в основании которой лежит многоугольная ячейка (рис. 1).

Переходя по формулам Гаусса – Остроградского к интегрированию по граням и применяя теорему о среднем, получаем

$$\sum_{k=1}^{\bar{k}} \chi_k N_{(k, k+1)} + N_q \chi_q - N_{q-1} \chi_{q-1} + \left( \alpha + \frac{1}{\nu \gamma \Delta t} \right) \Delta V N_0 = \Delta V \left( F + \frac{N^n}{\nu \gamma \Delta t} \right). \quad (9)$$

Здесь  $\bar{k}$  – число сторон многоугольника;  $N_{(k, k+1)}$  – значения  $N(t, r, z, \mu, \varphi)$  на боковых гранях призмы ( $N_{(\bar{k}, \bar{k}+1)} \equiv N_{(\bar{k}, 1)}$ );  $N_q$  и  $N_{q-1}$  – значения  $N(t, r, z, \mu, \varphi)$  на нижнем и верхнем основаниях призмы;  $N_0$  – значение  $N(t, r, z, \mu, \varphi)$  в центре;

$$\begin{aligned} \chi'_k &= \mu_m (r_{k+1} - r_k) - \sqrt{1-\mu_m^2} \cos \bar{\varphi}_q (z_{k+1} - z_k); \quad \chi_k = \frac{r_k + r_{k+1}}{2} \chi'_k, \quad r_{\bar{k}+1} \equiv r_1, \quad z_{\bar{k}+1} \equiv z_1; \\ \chi_{q-1} &= \frac{\sqrt{1-\mu_m^2} \sin \varphi_{q-1} dS}{\varphi_{q-1} - \varphi_q}; \quad \chi_q = \frac{\sqrt{1-\mu_m^2} \sin \varphi_q dS}{\varphi_{q-1} - \varphi_q}, \end{aligned}$$

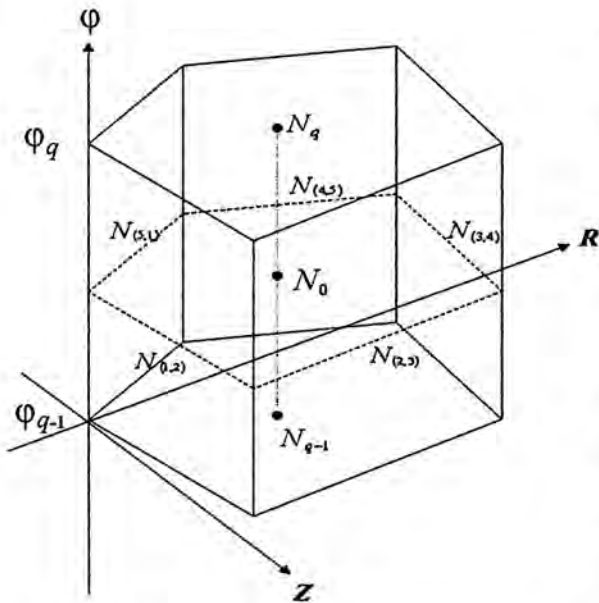


Рис. 1. Отдельные сеточные значения функции  $N(t, r, z, \mu, \varphi)$

где  $dS = \iint dzdr$  – площадь счетной ячейки в плоскости  $(R, Z)$ ;  $\Delta V = \iint rdzdr$  – элемент объема ячейки, представляющий собой тор с осью симметрии  $\vec{Z}$ , сечение которого в плоскости  $(R, Z)$  является многоугольной ячейкой.

Важным этапом конструирования схем на многоугольных сетках является построение дополнительных соотношений по пространственным переменным. Необходимо, чтобы при любых направлениях  $\mu_m$  и  $\varphi_{q,m}$ , т. е. при любых вариантах освещенности, они приводили к невырожденной системе сеточных уравнений и при этом на гладких решениях имелась возможность аппроксимации соответствующих алгебраических тождеств со вторым или близким ко второму порядком точности.

Разностная схема строится в два этапа. На первом этапе промежуточные значения неизвестной функции на неосвещенном контуре

многоугольника и в его центре находятся путем приближенного решения уравнения переноса вдоль характеристик. На втором этапе из уравнения баланса нейтронов в ячейке (9) находится корректирующий множитель, и все полученные в ячейке значения функции умножаются на этот множитель.

Поясним это на примере решения уравнения переноса в выпуклой многоугольной ячейке, изображенной на рис. 2.

Для указанного направления  $\vec{\Omega}$  известными по пространственным переменным являются значения функции  $N_{(i,j)}$  на соответствующих сторонах  $(i, j)$ ,  $i = \overline{1,5}$ ,  $j = \overline{2,6}$ .

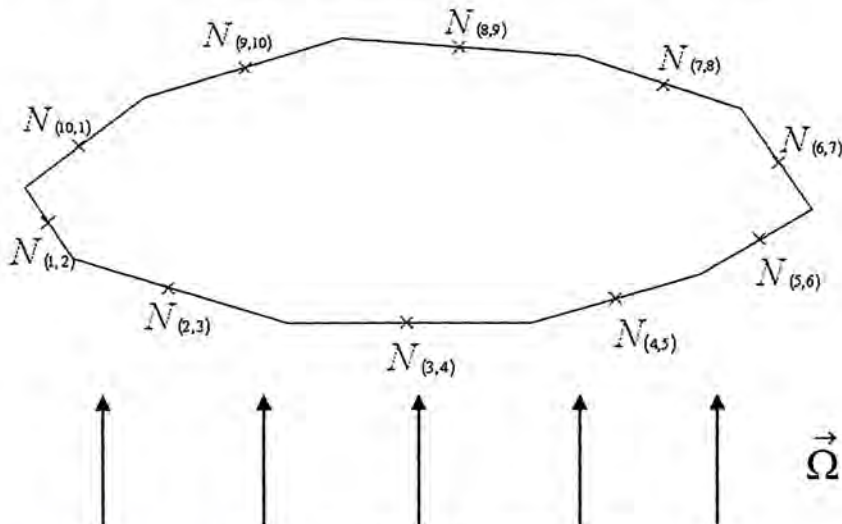


Рис. 2. Выпуклый десятиугольник

Требуется найти: 1) значения функции  $N_0$  в центре ячейки; 2) значения функции  $N_{(i,j)}$  на сторонах  $(i, j)$ ,  $i = \overline{6,10}$ ,  $j = \overline{7,10(1)}$ .

Для замыкания системы уравнений в данной ячейке для данного направления необходимо использовать шесть дополнительных соотношений по пространству. Решение в центре ячейки будем определять как среднеарифметическое значение функции  $N$  на всех боковых сторонах

$$N_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n N_{(i, i+1)}, \quad (10)$$

где  $n$  – число сторон в многоугольнике.

Оставшиеся пять дополнительных соотношений получим с учетом следующих соглашений. Решение вдоль характеристик для искомой функции в центрах «темных» сторон может быть записано в виде

$$N_{(k,k+1)} = \left(1 + d \ell_{(k,k+1)}\right) N^P_{(k,k+1)}, \quad (11)$$

где  $d$  – линейный коэффициент размножения (поглощения) нейтронов вдоль характеристики;  $\ell_{(k,k+1)}$  – расстояние от центра темной стороны  $(k, k + 1)$  до ее проекции на освещенный контур многоугольника;  $N^P_{(k,k+1)}$  – проекция функции на освещенный контур многоугольника, которая может быть получена путем линейной интерполяции соответствующих узловых значений стороны, куда «падает» проекция. Для этого на освещенном контуре многоугольника введем в наш шаблон значения функции  $N(t, r, z, \mu, \varphi)$  в узлах ячейки (рис. 3).

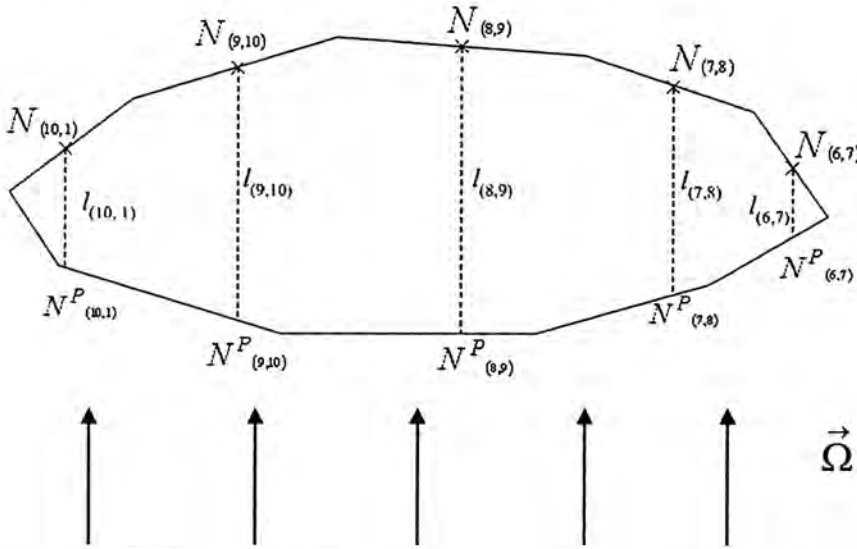


Рис. 3. Построение проекций для середин неосвещенных сторон

Отметим одно важное обстоятельство. Для определения освещенной стороны, куда падает проекция вдоль характеристики из центра неосвещенной стороны (для определенности обозначим ее через  $P_{(k,k+1)}$ ), можно воспользоваться следующим алгоритмом:

1) определяем точку отсчета для набора сумм коэффициентов освещенности (для рассматриваемого примера пусть это будет узел с номером 1);

- 2) считаем сумму  $\sum_{\text{тснн}} \chi'(P_{(k,k+1)})$  коэффициентов  $\chi'$  неосвещенных сторон, начиная от точки отсчета и кончая предыдущим темным узлом, плюс половина  $\chi'$  для текущей стороны;
- 3) набираем сумму коэффициентов  $\chi'$  для освещенных сторон, начиная от точки отсчета, в обратном направлении до выполнения условия  $\left( \sum_{\text{свст}}^m \chi' \sum_{\text{тснн}} \chi'(P_{(k,k+1)}) \right) \left( \sum_{\text{свст}}^{m+1} \chi' \sum_{\text{тснн}} \chi'(P_{(k,k+1)}) \right) \leq 0$ .

Геометрическая интерпретация описанного выше алгоритма представлена на рис. 4.

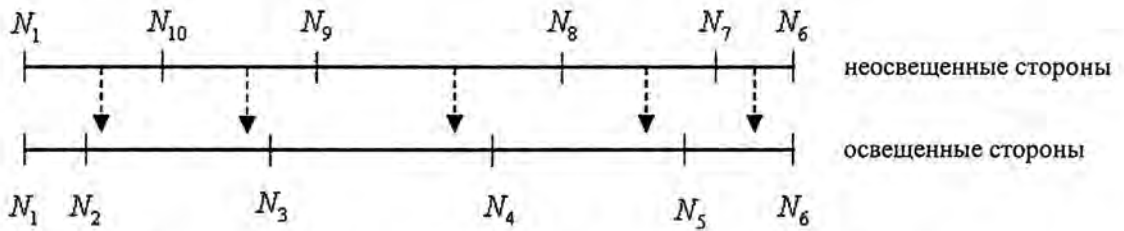


Рис. 4. Геометрическая "интерпретация" алгоритма поиска освещенной стороны, куда попадает проекция

Заметим также, что, учитывая значения сумм коэффициентов освещенности на темных и светлых сторонах, легко посчитать значение функции в точке пересечения характеристики с соответствующей освещенной стороной. На примере рис. 4 видно, что результатом  $\sum_{\text{темн}} \chi'(\text{сторона } (9, 10)) - \sum_{\text{свст}} \chi'(2 \text{ узел})$  будет один из коэффициентов линейной комбинации узловых значений стороны (2, 3). Поступая аналогично и для второго коэффициента, получаем

$$N_{(9,10)}^P = N_3 \frac{\sum_{\text{темн}} \chi'(\text{сторона } (9, 10)) - \sum_{\text{свст}} \chi'(2 \text{ узел})}{\chi'_{(2,3)}} + N_2 \frac{\sum_{\text{свст}} \chi'(3 \text{ узел}) - \sum_{\text{темн}} \chi'(\text{сторона } (9, 10))}{\chi'_{(2,3)}}$$

Относительно вычисления параметра  $\ell_{(k,k+1)}$  можно сказать следующее. Вместо реальной длины, которая может быть вычислена с использованием корня квадратного, можно использовать прирост по одной из координат осей. Адекватность такой замены вытекает из подобия треугольников.

Таким образом, отметим, что приведенные выше замечания существенным образом уменьшают трудоемкость представляемой схемы.

Подставляя (11), (10) в (9), для рассматриваемой ячейки получаем выражение для параметра  $d$ :

$$d \left\{ \sum_{k=6}^{10} \ell_{(k,k+1)} N_{(k,k+1)}^P \chi_k + \left( \frac{\chi_q}{\eta} + \left( \alpha + \frac{1}{\nu \gamma \Delta t} \right) \Delta V \right) \frac{1}{10} \sum_{k=6}^{10} \ell_{(k,k+1)} N_{(k,k+1)}^P \right\} =$$

$$= \Delta V \left( F + \frac{N^n}{\nu \gamma \Delta t} \right) - \sum_{k=1}^5 N_{(k,k+1)} \chi_k - \sum_{k=6}^{10} N_{(k,k+1)}^P \chi_k - \left( \frac{\chi_q}{\eta} + \left( \alpha + \frac{1}{\nu \gamma \Delta t} \right) \Delta V \right) \times,$$

$$\times \left( \frac{1}{10} \sum_{k=1}^5 N_{(k,k+1)} + \frac{1}{10} \sum_{k=6}^{10} N_{(k,k+1)}^P \right) - N_{q-1} \left( \frac{\chi_q (1-\eta)}{\eta} - \chi_{q-1} \right)$$

или в общем случае

$$\begin{aligned}
 & d \left\{ \sum_{\text{ТМН}} \ell_{(k,k+1)} N^P_{(k,k+1)} \chi_k + \frac{1}{n} \left( \sum_{\text{ТМН}} \ell_{(k,k+1)} N^P_{(k,k+1)} \right) \left( \frac{\chi_q}{\eta} + \left( \alpha + \frac{1}{\nu \gamma \Delta t} \right) \Delta V \right) \right\} = \\
 & = \Delta V \left( F + \frac{N^n}{\nu \gamma \Delta t} \right) - \sum_{\text{СВСТ}} N_{(k,k+1)} \chi_k - \sum_{\text{ТМН}} N^P_{(k,k+1)} \chi_k - \left( \frac{\chi_q}{\eta} + \left( \alpha + \frac{1}{\nu \gamma \Delta t} \right) \Delta V \right) \times \\
 & \quad \times \left( \frac{1}{n} \sum_{\text{СВСТ}} N_{(k,k+1)} + \frac{1}{n} \sum_{\text{ТМН}} N^P_{(k,k+1)} \right) - N_{q-1} \left( \frac{\chi_q (1-\eta)}{\eta} - \chi_{q-1} \right). \quad (12)
 \end{aligned}$$

Определив значение параметра  $d$ , из (11) найдем все искомые значения функции в центрах темных сторон и далее по формуле (10) – значение функции в центре многоугольной ячейки.

Особое внимание уделено вопросам построения экономичных алгоритмов преобразования матрицы системы алгебраических уравнений, получающихся в результате замены на многоугольниках дифференциального уравнения разностным, в треугольный вид (так называемых алгоритмов упорядочивания многоугольников в области).

В работе [1] возможность упорядочивания доказана для выпуклых многоугольников. В общем случае элементами рассматриваемой авторами пространственной сетки могут являться как выпуклые, так и невыпуклые многоугольники.

Пусть в области содержится несколько невыпуклых многоугольников. Выделим локальные подобласти, которые состоят из невыпуклого многоугольника и соседних с ним многоугольников. Если в таких подобластях, например, воспользовавшись геометрическими перестроениями, избавиться от невыпуклых многоугольников, то можно будет привести рассматриваемую систему к условиям теоремы, доказанной в [1] (рис. 5).

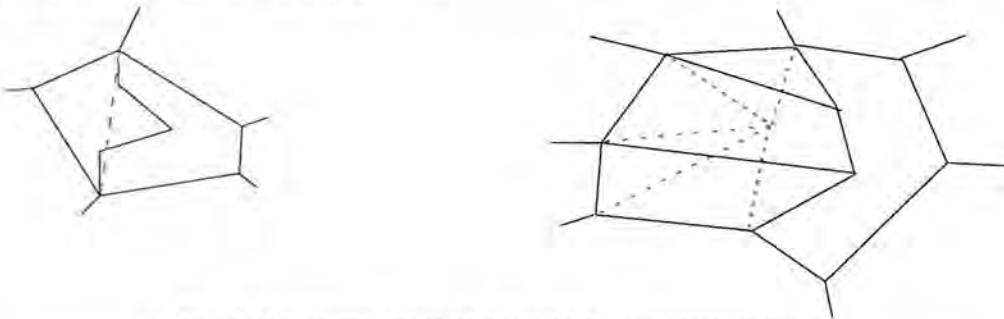


Рис. 5. Алгоритм ухода от невыпуклых многоугольников

Следовательно, если для каждой из определенных таким образом подобластей с невыпуклыми многоугольниками (рис. 6) предложить специальные алгоритмы упорядочивания, то поставленную задачу можно решить в целом.

Теперь обратимся к вопросам экономичности алгоритмов упорядочивания.

Напомним, что для выбранного направления полета частиц уравнение переноса можно численно решать в тех многоугольниках, которые на текущий момент имеют на всех освещенных сторонах известные значения функции  $N(t, r, z, \mu, \varphi)$ . Нетрудно заметить, что процедура поиска разрешимых многоугольников может приводить к значительным временным затратам.

Для нерегулярных сеток разработан специальный алгоритм упорядочивания многоугольников. Информация о ячейках, у которых освещена хотя бы одна сторона, заносится в стек, а по мере их разрешения эта информация удаляется из стека. Проверка на разрешимость конкретной ячейки сводится к проверке на равенство нулю одного параметра. Предложенный алгоритм упорядочивания является весьма экономичным и практически не сказывается на общих трудозатратах.



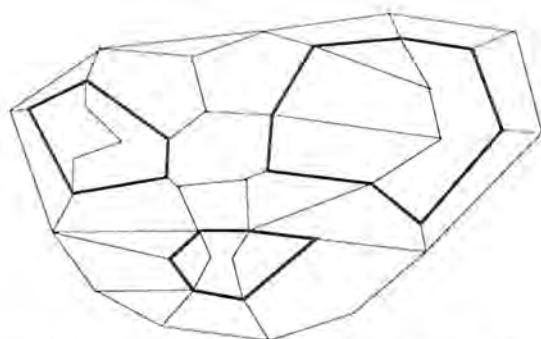


Рис. 6. Выделение локальных подобластей, содержащих невыпуклые ячейки

### Примеры расчетов

**Задача 1.** Рассматривается цилиндр с параметрами  $0 \leq r \leq 1$ ,  $0 \leq z \leq 2$ ,  $\alpha = 1,34$ ,  $\beta = 2,25$ ,  $\rho = 1$ ,  $Q = 0$ . Требуется определить собственный параметр  $\lambda_0$  – постоянную изменения нейтронов по времени [2].

Для расчета данной задачи выбирались пространственные сетки двух типов (рис. 7).

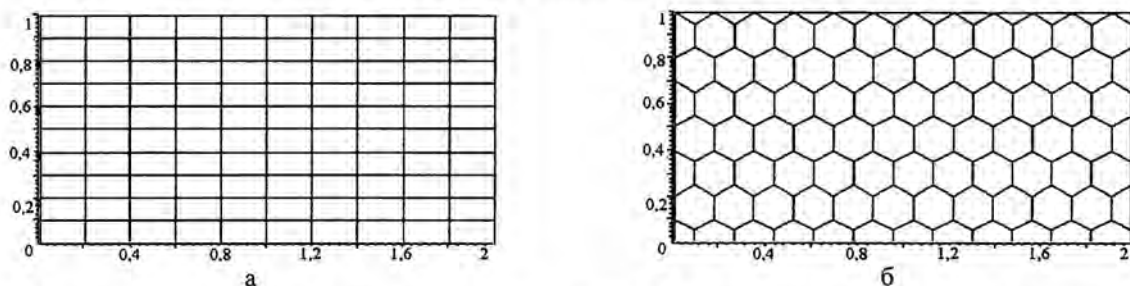


Рис. 7. Пространственные сетки для расчета задачи 1: а – прямоугольная; б – шестиугольная

Расчеты проводились на измельчающихся пространственных сетках. Угловые сетки для расчета данной задачи варьировались. Число интервалов по переменной  $\mu$  бралось равным 6 (24 направления полета частиц), 12 (84 направления полета частиц), 24 (312 направлений полета частиц), 48 (1200 направлений полета частиц).

В табл. 1 приведены значения параметра  $\lambda_0$  в зависимости от угловых и пространственных четырехугольных сеток, в табл. 2 – в зависимости от угловых и пространственных шестиугольных сеток.

Таблица 1

Параметр  $\lambda_0$  на четырехугольных (прямоугольных) пространственных сетках

Число интервалов по $\mu$	Размер ячеек по $r$ ( $h$ )			
	0,1	1/2	1/4	1/8
6	0,162753	0,164256	0,164631	0,164724
12	0,150734	0,15222	0,15259	0,152683
24	0,146903	0,148393	0,148762	0,148854
48	0,145817	0,147295	0,147664	0,147756

Таблица 2

Параметр  $\lambda_0$  на шестиугольных пространственных сетках

Число интервалов по $\mu$	Длина стороны шестиугольника $l$			
	0,1	0,07	0,035	0,0175
6	0,16219	0,16407	0,16464	0,164835
12	0,150546	0,152302	0,152821	0,15292
24	0,146242	0,147957	0,148874	0,149012
48	0,14480	0,145054	0,146106	0,147558

За точные значение  $\lambda_T$  для заданного числа интервалов по  $\mu$  примем значения, полученные для расчета на прямоугольной сетке  $\lambda_T = \lambda_n + ah^2$ , где  $h$  – линейный размер счетной ячейки. Имеем  $\lambda_T^6 = 0,164755$ ,  $\lambda_T^{12} = 0,152714$ ,  $\lambda_T^{24} = 0,148885$ ,  $\lambda_T^{48} = 0,147787$ .

В табл. 3 приведены погрешности  $\lambda_T - \lambda$  для всех расчетов.

Таблица 3

Погрешности для всех расчетов

Сетка	Число интервалов по $\mu$	$\lambda_T - \lambda_h$	$\lambda_T - \lambda_{h/2}$	$\lambda_T - \lambda_{h/4}$	$\lambda_T - \lambda_{h/8}$
Прямоугольная	6	0,002007	0,000504	0,000129	$3,6 \cdot 10^{-05}$
	12	0,001976	0,00049	0,00012	$2,7 \cdot 10^{-05}$
	24	0,001987	0,000497	0,000128	$3,6 \cdot 10^{-05}$
	48	0,001973	0,000495	0,000126	$3,4 \cdot 10^{-05}$
		$\lambda_T - \lambda_{l=0,1}$	$\lambda_T - \lambda_{l=0,07}$	$\lambda_T - \lambda_{l=0,035}$	$\lambda_T - \lambda_{l=0,0175}$
Шестиугольная	6	0,00257	0,00069	0,00012	$-7,5 \cdot 10^{-05}$
	12	0,002164	0,000408	-0,00011	-0,00021
	24	0,002648	0,000933	$1,6 \cdot 10^{-05}$	-0,00012
	48	0,00299	0,002736	0,001684	0,000232

Как видно из табл. 3, в расчете на прямоугольных сетках имеет место сходимость по пространственным сеткам с порядком не ниже второго. Расчеты на шестиугольных сетках по точности близки к расчетам на прямоугольных сетках.

**Задача 2.** Эта задача – расчет параметра  $k_{эф}$  в четырехгрупповом приближении [6].

Рассматривается горизонтальный разрез верхней половины трехмерного реактора SNR-300, где 1, 2 – делящиеся материалы; 3 – отражатель; 5, 6 – регулирующие стержни.

Для расчета данной задачи выбирались пять пространственных сеток, четыре из которых приведены на рис. 9, а пятая сетка  $L_{48}$  была получена из первой путем разбиения стороны правильного шестиугольника на 4 равные части.

Во всех расчетах взято 6 интервалов по  $\mu$  (24 направления полета нейтронов). В табл. 4 представлены результаты расчетов.

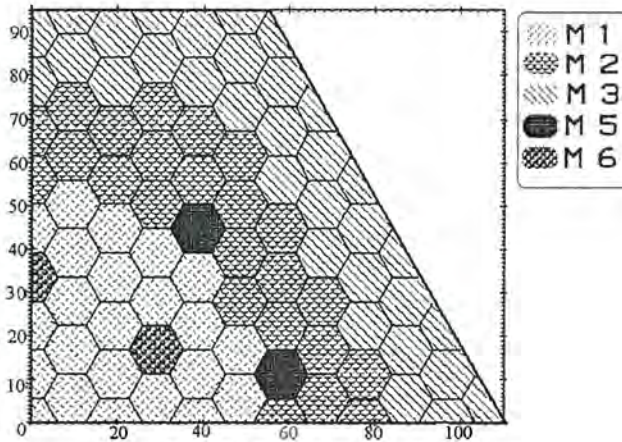


Рис. 8. Геометрия задачи 2

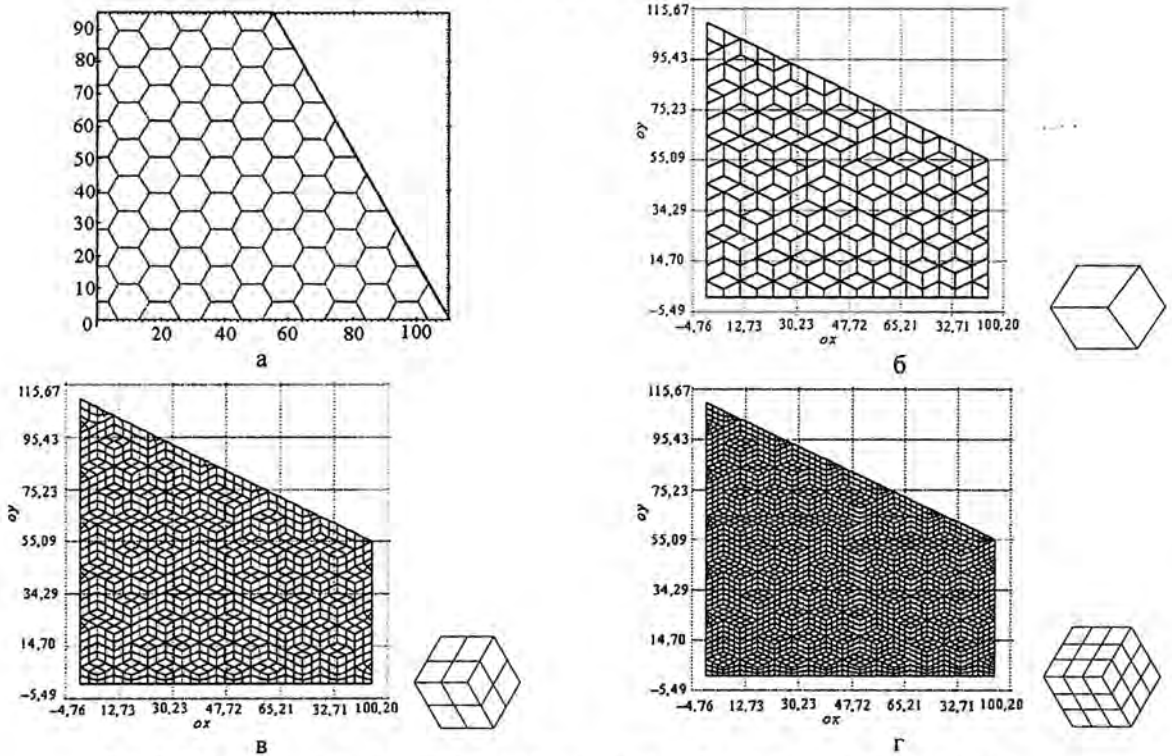


Рис. 9. Пространственные сетки для расчета задачи 2: а – шестиугольная сетка; б – сетка  $L_3$ ; в – сетка  $L_{12}$ ; г – сетка  $L_{27}$

Таблица 4

Значения параметра  $k_{эф}$

Сетка	$k_{эф}$
Шестиугольная	1,13035
$L_3$	1,13171
$L_{12}$	1,13337
$L_{27}$	1,13362
$L_{48}$	1,13368

Как видно из табл. 4, в расчетах наблюдается сходимость по пространственным переменным (пространственная сетка в расчетах является нерегулярной). Результаты расчетов по программе хорошо согласуются с результатами, приведенными в работе [6].

### Заключение

Первый вариант методики был создан в 1995 г. в рамках проекта МНТЦ № 67.

За время эксплуатации были проведены некоторые усовершенствования схемы и алгоритмов. Практический опыт использования подтвердил эффективность применения методики решения уравнения переноса на многоугольных пространственных сетках. Особенно это проявляется в решении задач со сложной геометрией, имеющих локальные мелкомасштабные подобласти, в которых применение многоугольных ячеек позволяет строить сетку экономичным образом.

### Список литературы

1. Трошиев В. Е. О классах сеток, допускающих консервативные аппроксимации двумерного оператора переноса треугольным разностным оператором // Журнал вычисл. мат. и мат. физики. 1976. Т. 16, № 3. С. 793–797.
2. Трошиев В. Е., Шумилин В. А. Разностная схема решения двумерного уравнения переноса на нерегулярных четырехугольных сетках // Там же. 1986. Т. 26, № 2. С. 230–241.
3. Плетенева Н. П., Шагалиев Р. М. Аппроксимация двумерного уравнения переноса на четырехугольных и многоугольных пространственных сетках по разностной схеме с расширенным шаблоном // ВАНТ. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1989. Вып. 3. С. 34–41.
4. Елесин В. А., Трошиев В. Е., Федянин В. Н., Юдинцев В. Ф. Численная методика и организация программы для решения многогруппового нестационарного кинетического уравнения // Комплексы программ математической физики. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1972. С. 18–23.
5. Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977.
6. Buckel G., Kufner K., Stehle B. Benchmark calculation for a sodium-cooled breeder reactor by two- and three-dimensional diffusion methods // Nucl. Sci. and Eng. 1977. N 64. P. 75–89.

## The Technique for Solving the 2D Transport Equation Using Irregular Polygonal Grids

A. N. Moskvina, V. A. Shumilin

*A conservative finite difference scheme for polygonal spatial grids has been constructed to solve the 2D transport equation. The difference scheme is constructed in two phases. During the first phase temporary values of the unknown function in a computational cell are to be found by approximately solving the transport equation along characteristics. During the second phase the balance equation is used to find the correction factor and all the obtained values of the unknown function are multiplied by this factor. There have been developed cost-efficient algorithms implementing the sweep method using spatial grids which components are polygons of arbitrary shapes. The technique serviceability is demonstrated using the results of numerical simulations.*