

УДК 519.6

Решение многомерных задач механики сплошных сред на неструктурированных лагранжевых сетках

Рассматриваются вопросы о возможности применения неструктурированных лагранжевых сеток для решения многомерных задач механики сплошных сред с большими сдвиговыми деформациями и вихревыми течениями. Приводится краткое описание трех численных методик, базирующихся на методе конечных разностей, для решения задач механики сплошных сред на многогранных неструктурированных лагранжевых сетках. Приводятся примеры численных расчетов модельных задач.

С. С. Соколов, И. Д. Софронов,
В. В. Рассказова, О. И. Бутнев,
А. И. Панов, В. Н. Мотлохов,
Б. М. Жогов, С. Г. Волков,
А. А. Воропинов, И. Г. Новиков,
В. А. Пронин, И. В. Соболев,
А. В. Ялозо

Введение

Для численного решения нестационарных задач механики сплошных сред широкое распространение получили конечно-разностные методы. Уже в середине 50-х годов были разработаны первые методики, способные численно решать задачи газодинамики в двумерной постановке. По мере развития вычислительной техники начали разрабатываться и методики для численного моделирования трехмерных течений, которые являлись обобщением двумерных методик на трехмерный случай. В основном численные методики для расчета двумерных течений сплошных сред используют регулярные четырехугольные сетки, а для трехмерных течений – регулярные шестигранные сетки. При этом решение задач с небольшими деформациями материалов обычно проводится на лагранжевых сетках, а решение задач с большими сдвиговыми деформациями материалов и струйными течениями – на эйлеровых или лагранжево-эйлеровых сетках. Более широкое использование регулярных сеток для решения задач механики сплошных сред связано с достаточно высокой экономичностью и простотой алгоритмов счета.

Начало работ по созданию методик на неструктурированных лагранжевых сетках было положено в середине 60-х годов И. Д. Софроновым с указанием практической значимости использования такого подхода [1]. Сетки в виде многоугольников и многогранников произвольной конфигурации позволяют снять ряд трудностей при построении начальной сетки, которые присущи регулярным сеткам, намного упрощая способы построения начальных сеток с заданными свойствами в областях сложной формы. Методики на неструктурированных сетках позволяют вводить аппарат локальной перестройки сетки как с изменением общего количества точек, так и с

изменим количества соседства точек. Это позволяет расширять возможности проведения расчетов с большими сдвиговыми деформациями вещества в лагранжевых переменных. Поэтому при решении задач со сложной геометрией, плохо описываемых с применением матричной сетки, в задачах с большими сдвиговыми деформациями и струйными течениями, целесообразней применять методики с неструктурированными сетками. Кроме того, точность расчетов, выполненных в лагранжевых переменных, как правило, превышает точность расчетов с тем же числом точек, выполненных в эйлеровых переменных. На базе неструктурированных многоугольных сеток во ВНИИЭФ были созданы методики ДМК и МЕДУЗА [2] первоначально для расчета двумерных задач газодинамики. В 1985 г. И. Д. Софронов и В. В. Рассказова предложили обобщить двумерную методику ДМК на трехмерный случай – методика ТМК [3, 4]. Обобщением методики МЕДУЗА для решения трехмерных задач газовой динамики на неструктурированных сетках является методика МЕДУЗА-3Д [5].

Постановка задачи

Рассмотрим уравнения движения сплошной изотропной среды [6]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= -\rho \operatorname{div} \vec{u}; \\ \rho \frac{d\vec{u}}{dt} &= -\operatorname{grad} P + \operatorname{div} S + \frac{1}{4\pi} [\operatorname{rot} \vec{H} \times \vec{H}]; \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{H}}{\rho} \right) &= \left(\frac{\vec{H}}{\rho} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{u}; \\ \frac{dE}{dt} &= -P \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) + \frac{1}{\rho} S_p(SD) + \frac{1}{\rho} \operatorname{div}(\kappa \operatorname{grad} T); \\ \frac{d\vec{r}}{dt} &= \vec{u}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где ρ – плотность вещества; E – удельная внутренняя энергия; T – температура; κ – коэффициент теплопроводности; $\vec{u} = (u, v, w)$ – вектор скорости; $\vec{r} = (x, y, z)$ – радиус-вектор; P – давление; S – девиатор тензора напряжений; D – тензор скоростей деформации; $S_p(SD)$ – первый инвариант тензора SD ; \vec{H} – вектор напряженности магнитного поля.

Для замыкания системы дифференциальных уравнений используем уравнение состояния среды $P = P^r(\rho, E)$. Если для описания среды используется газодинамическая модель, то $S = 0$.

Если для описания среды используется упругопластическая модель, то $S = S^{yn}$; $P = P^r$. В этом случае для определения девиаторной составляющей тензора напряжения используем закон Гука в

дифференциальной форме $\frac{\delta S^{yn}}{\delta t} = 2G \left(D - \frac{1}{3} S_p D \right)$. Здесь G – модуль сдвига, а $\frac{\delta}{\delta t}$ – производная

по времени вдоль направления движения. В области пластических деформаций используем условие текучести Мизеса для корректировки девиатора тензора напряжений $\frac{2}{3} S_{ij}^{yn} S_{ij}^{yn} = Y^2$. Здесь

Y – предел текучести, который может быть как константой (для идеально пластических сред), так и некоторой функцией (для материалов с упрочнением). Если для описания материала используется упруговязкопластическая модель, то $P = P^r + P^b$; $S = S^{yn} + S^b$; $P^b = \frac{1}{3}\mu_1 S_p D$; $S^b = \left(D - \frac{1}{3} S_p D \right)$. Здесь P^r – определяется из уравнения состояния; P^b , S^b – вязкие давление и девиатор тензора напряжений; μ_1, μ_2 – коэффициенты динамической вязкости. В качестве искусственной вязкости используется комбинация квадратичной и линейной вязкостей.

Основные особенности методики ТМК

Первой трехмерной методикой для расчета трехмерных задач газодинамики на неструктурированных многогранных лагранжевых сетках во ВНИИЭФ была методика ТМК, разработанная под руководством И. Д. Софронова и В. В. Рассказовой [3, 4]. В дальнейшем в рамках этой методики была реализована возможность для расчета нестационарных упругопластических течений [7]. Для решения разностных уравнений газовой динамики и упругопластичности используется явная разностная схема с разнесенным шаблоном центрирования: кинематические величины определены в узлах разностной сетки, термодинамические – в центрах ячеек. Для определения скоростей узлов сетки используется интегральная форма записи закона сохранения импульса, проинтегрированного по объему, охватывающему узел со стороны четырех ячеек, прилегающих к узлу. В качестве счетной сетки используются выпуклые многогранники произвольной конфигурации (рис.1,а), но с обязательным выполнением условия – число соседних ячеек в любом узле многогранника не более четырех. Это условие всегда выполнимо, если в качестве выпуклых многогранников использовать в начальный момент времени интегрирования фигуры Дирихле – Вороного (рис.1,б). Сетка описывается с помощью координат и связей узлов сетки с использованием на стадии начального построения сетки Дирихле координат центров ячеек. Соседями каждого узла сетки являются четыре узла и четыре ячейки сетки. Связи каждого узла сетки упорядочены в списках соседства. Для поддержания сетки в «хорошем» состоянии в процессе численного расчета используется методика упругого удара, разработанная В. В. Рассказовой [4], которая позволяет сохранять выпуклыми относительно центра фигуры трехгранные углы в процессе интегрирования, и методика локальных перестроек многогранных ячеек [8]. Методика ТМК предназначена для численного решения трехмерных задач газодинамики и упругопластичности в однообластной постановке на нерегулярных многогранных сетках с фиксированной структурой соседства.

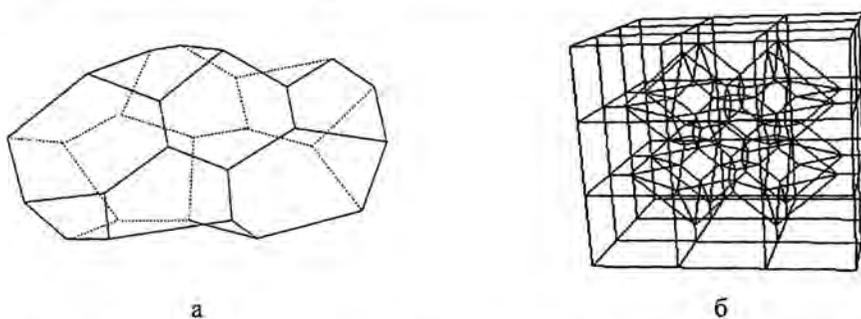


Рис. 1. Ячейка трехмерной сетки (а) и сетка Дирихле, заполняющая куб (б)

Основные особенности методики МЕДУЗА-3Д

Основными особенностями методики МЕДУЗА-3Д являются использование нерегулярной сетки, центрирование всех газодинамических величин в узле, переменный разностный шаблон для численного интегрирования дифференциальных уравнений и возможность изменения топологии сетки в процессе решения. Контактные границы описываются смешанными ячейками, для расчета которых применяется метод концентраций. Методика решения трехмерных задач газовой динамики на неструктурированных сетках является обобщением методики МЕДУЗА [2] для решения двумерных задач.

Решение системы (1) для случая газодинамики ищется внутри области определения задачи с заданными начальными и граничными условиями. Рассматривается множество точек (узлов сетки), которым приписываются значения всех термодинамических и кинематических функций. Начальное распределение точек задается исходя из начальных и граничных условий задачи. Для каждой точки определяется множество ее соседей на основе евклидовой метрики. Определение соседства осуществляется с помощью метода тетраэдризации. Множество точек с установленным соответствием соседства порождает сетку задачи. Используется однообластная модель решения задачи. Это приводит к возникновению на границах сред смешанных ячеек, решение в которых ищется на основании многокомпонентного подхода. Ячейки сетки представляют собой многогранники, внутри которых находятся узлы сетки; в узлах центрированы все кинематические и термодинамические величины.

В основе алгоритма построения ячейки лежит привлечение центров масс тетраэдров, центров масс граней тетраэдров и центров ребер. Для хранения топологии сетки используется подход, при котором точка ссылается на произвольный примыкающий к ней тетраэдр, а каждый тетраэдр ссылается на четыре примыкающих к нему тетраэдра и четыре свои вершины. Использование тетраэдров позволило решить проблему выделения контактной поверхности в смешанной ячейке, если сам узел и его смешанные соседи лежат на лагранжевой поверхности. В этом случае, приписав на начальной стадии свойство вещества каждому тетраэдру, удастся сохранять тетраэдры «чистыми» до тех пор, пока не осуществляется сдвиг точки (раздвижка) или перестройка сетки, приводящие к появлению смешанных тетраэдров. Интегрирование уравнения движения в трехмерном случае сводится к вычислению поверхностного интеграла $\iint_{\Delta} (P + q) \vec{n} dS$, где P , q –

материальное и вязкое давление; \vec{n} – вектор внешней нормали; dS – площадь треугольника; Δ – все треугольники, образующие поверхность ячейки интегрирования. Как видно из рис. 2, каждая грань ячейки интегрирования представляет собой треугольник (для определенности рассмотрим

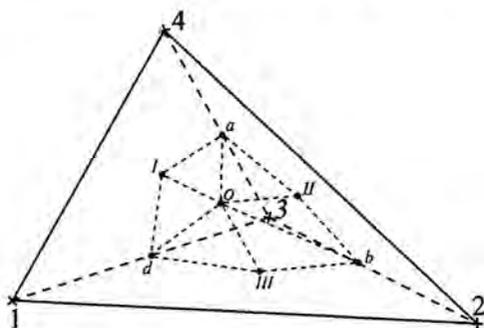


Рис. 2. Шесть треугольников поверхности интегрирования, отнесенных к узлу 3

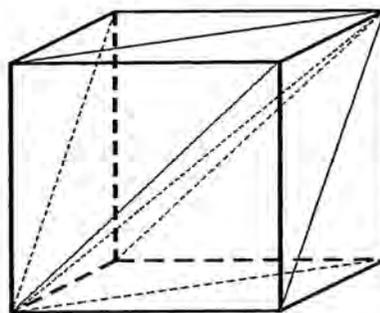


Рис. 3. Разбиение шестигранника на тетраэдры

треугольник OId), вершинами которого являются центр тетраэдра O , центр одной из граней тетраэдра I и середина одного из ребер тетраэдра d . Давление в этих точках определяется с помощью линейных комбинаций значений в вершинах тетраэдра 1, 2, 3, 4. После этого полное давление на грани определяется как среднее арифметическое полных давлений в вершинах треугольника. В том случае, когда соответствующая грань ячейки интегрирования лежит на границе с заданным граничным давлением, давление на грани не рассчитывается вышеописанным способом, а берется непосредственно из граничного условия. Суммарный вектор силы, действующий на ячейку, вычисляется путем суммирования с соответствующим знаком элементарных сил, действующих на элементарные треугольники каждого тетраэдра. Начальная неструктурированная сетка строится из регулярной шестигранной посредством одинакового разбиения каждого шестигранника на шесть тетраэдров. На рис. 3 изображен пример такого разбиения шестигранника. Для подавления высокочастотных возмущений используется оператор сглаживания поля скоростей $O(\tau h^3)$.

Основные особенности методики ТИМ

Методика ТИМ предназначена для расчета трехмерных задач механики сплошных сред на многогранных нерегулярных лагранжевых сетках [9]. Она позволяет проводить расчеты на сетках с произвольным количеством связей в узлах (количество примыкающих ячеек, ребер и граней). Методика работоспособна как на нерегулярных многогранных сетках типа Дирихле – Вороного, так и на шестигранных сетках, нерегулярных многогранных сетках, имеющих произвольное количество соседств в узле. Для всех типов сеток используется единый счетный алгоритм. Для расчета начальных данных и решения уравнений механики сплошных сред используется правая декартова система координат. Методика предназначена для расчета задач газодинамики, нестационарной упругопластичности, магнитной гидродинамики, теплопроводности. При построении конечно-разностной схемы для решения системы дифференциальных уравнений (1) в декартовой системе координат (x, y, z) используется интегроинтерполяционный метод [10] при следующих предположениях: величины $P, \rho, E, q, S_{ij}, \varepsilon_{ij}, \bar{H}, T$ – относятся к центрам многогранников (ячеек) и постоянны внутри них; величины x, y, z – относятся к вершинам многогранников (узлам); величины u, v, w определяются в вершинах многогранников и постоянны внутри объемов, относящихся к узлам; для описания граней используется представление их в триангулированном виде. При деформации ячейки ее грани, представляющие собой многоугольники в пространстве, могут быть неплоскими. Для этого ячейка разбивается на систему тетраэдров, вершинами каждого из которых являются центр счетной ячейки, центр грани и две соседние вершины этой грани. Объем ячейки определяем как сумму объемов этих тетраэдров. Масса узлов определяется как сумма долей (приходящихся на каждую вершину) масс ячеек, сходящихся в данном узле. Массы узлов и массы ячеек в процессе счета не меняются. При разработке методики ТИМ были учтены основные положения как самой методики ДМК, позволяющей проводить расчеты задач механики сплошной среды на нерегулярных многоугольных и регулярных четырехугольных лагранжевых сетках, так и некоторые особенности методики ТМК (способ построения начальной сетки Дирихле – Вороного и применение многогранных лагранжевых сеток для расчета задач газодинамики).

При решении нестационарных задач газодинамики и упругопластичности используется явная полностью консервативная разностная схема. На равномерных сетках она имеет второй поряд-

док точности по пространству и времени. Для определения скоростей узлов сетки используется интегральная форма записи закона сохранения импульса. Интегрирование производится по объему V , охватывающему узел со стороны ячеек, прилегающих к узлу, ограниченному поверхностью C , с применением формулы Гаусса – Остроградского

$$\iiint_V \rho \frac{du}{dt} dV = \iiint_V \left(-\frac{\partial(P+q)}{\partial x} + \frac{\partial S_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial S_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial S_{xz}}{\partial z} \right) dV = \iint_C \left(-(P+q)\vec{i} + S_{xx}\vec{i} + S_{xy}\vec{j} + S_{xz}\vec{k} \right) \vec{n} dC;$$

$$\iiint_V \rho \frac{dv}{dt} dV = \iint_C \left(S_{xy}\vec{i} + (S_{yy} - P - q)\vec{j} + S_{yz}\vec{k} \right) \vec{n} dC;$$

$$\iiint_V \rho \frac{dw}{dt} dV = \iint_C \left(S_{xz}\vec{i} + S_{yz}\vec{j} + (S_{zz} - P - q)\vec{k} \right) \vec{n} dC,$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – координатные орты; \vec{n} – нормаль к поверхности C .

При решении задач магнитной гидродинамики с вмороженным полем вектор напряженности магнитного поля относится к центрам ячеек сетки, векторы плотности тока и электромагнитной силы – к узлам сетки. Используется явная разностная схема. Для решения уравнения магнитной индукции уравнение интегрируется по счетной ячейке Ω . Пусть объем ячейки равен V . Проинтегрировав обе части уравнения по Ω , получим равенство

$$\frac{d(\bar{H}V)}{dt} \approx H_x \int_{\partial\Omega} \bar{u} dy dz + H_y \int_{\partial\Omega} \bar{u} dz dx + H_z \int_{\partial\Omega} \bar{u} dx dy.$$

Интегралы в правой части этого равенства заменяются конечными суммами.

При решении уравнения теплопроводности температура относится к центрам ячеек, а вектор потока тепла – к узлам. Разностная схема строится с помощью операции обобщенного дифференцирования разрывных функций и является полностью неявной и консервативной [11]. Аппроксимация дифференциального оператора в уравнении теплопроводности на равномерных сетках имеет второй порядок точности по пространству. Получающаяся разностная система линейных уравнений имеет симметричную и положительно определенную матрицу. Система уравнений решается итерационным методом сопряженных градиентов с использованием различных видов предобуславливателей, таких как неполное разложение Холецкого, блочный метод Шварца и других.

Типы начальных сеток, используемых в методике ТИМ

Начальная счетная сетка для расчета задач может быть следующих типов [12]: нерегулярная многогранная сетка Дирихле – Вороного (рис. 4,а); нерегулярная многогранная сетка, полученная из двумерной нерегулярной сетки поворотом вокруг оси (рис. 4,б) или путем "перемещения" листа с двумерной сеткой в пространстве (рис. 4,в); шестигранная сетка (рис. 4,г). Для расчета сложных по геометрии задач может использоваться в качестве начальной сетка, состоящая сразу из нескольких типов сеток в одной области (например, из шестигранников и многогранников одновременно), рис. 5.

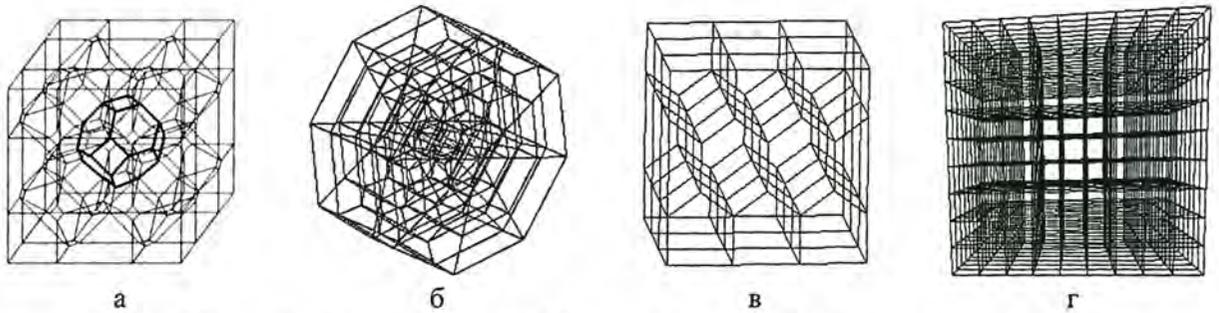


Рис. 4. Нерегулярная сетка Дирихле – Вороного (а); нерегулярные сетки, полученные из двумерной сетки (б, в); шестигранной сетки (г)

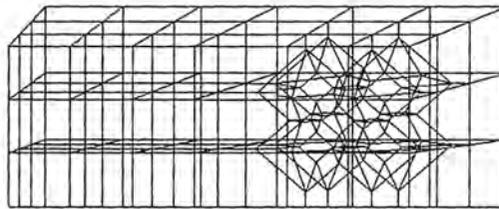


Рис. 5. Счетная сетка, где в одной счетной области присутствуют шестигранные ячейки и ячейки типа Дирихле – Вороного

Поддержание приемлемой счетной сетки в методике ТИМ

Как известно, при проведении численных расчетов по лагранжевым методикам с большими деформациями одной из проблем является поддержание приемлемой счетной сетки. В методике ТИМ для работы со счетной сеткой разработаны специальные методы, которые могут использоваться одновременно при проведении численных расчетов [13]. Поддержание приемлемой счетной сетки осуществляется с применением методики наложения дифференцируемых связей, в которой реализовано несколько алгоритмов поддержания приемлемых счетных сеток (рис. 6): сетки, содержащие «звездные» ячейки (все узлы ячейки находятся в прямой видимости из ее центра); сетки с выпуклыми двугранными углами ячейки (двугранный угол образуется двумя гранями одной ячейки с общим ребром); сетки с выпуклыми многогранными углами ячеек (многогранный

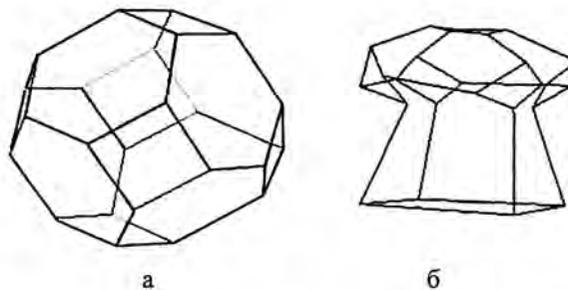


Рис. 6. Выпуклая ячейка (а); не выпуклая "звездная" ячейка (б)

угол образуется ребрами ячейки, выходящими из одного узла). Второй метод – это метод локальных перестроек многогранных сеток, базирующихся на операциях дробления ячейки и объединения ячеек. Он используется при расчете задач с большими сдвиговыми деформациями, вихревыми и струйными течениями. Третий метод основан на сглаживании поля скоростей в узлах счетной сетки для подавления высокочастотных колебаний.

Расчет задач в многообластной постановке по методике ТИМ

При решении сложных трехмерных задач начальную геометрию системы часто приходится разбивать на счетные области. Такое разбиение иногда бывает необходимо для более точного описания взаимодействующих тел с выделенными поверхностями скольжения (контактная поверхность). Грани многогранных ячеек в процессе счета не являются плоскими фигурами. Поэтому для решения задачи контактного взаимодействия [14] на поверхности раздела двух сред сначала производится триангуляция двух взаимодействующих поверхностей (вводится дополнительная сетка, состоящая из треугольников). Триангуляция контактирующей поверхности с помощью дополнительной сетки производится из центров граничных граней к ее узлам. На вспомогательную сетку пересчитываются все необходимые кинематические величины для расчета контактного взаимодействия.

Примеры расчетов

Задача о произвольном распаде разрыва в газодинамической постановке

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ слева и справа от плоскости $x = 0,5$ расположен идеальный газ с показателем адиабаты $\gamma = 1,4$, состояние которого характеризуется следующими параметрами: слева – $\rho_I = 1$; $P_I = 2,5$; $u_I = 0$, а справа $\rho_{II} = 1$; $P_{II} = 0,5$; $u_{II} = -2,8026$. Все поверхности области представляют собой "жесткие стенки". Аналитическое решение и результаты численного расчета задачи по методике ТИМ для разного количества точек вдоль направления движения ударной волны на момент времени $t = 0,24$ представлены на рис. 7.

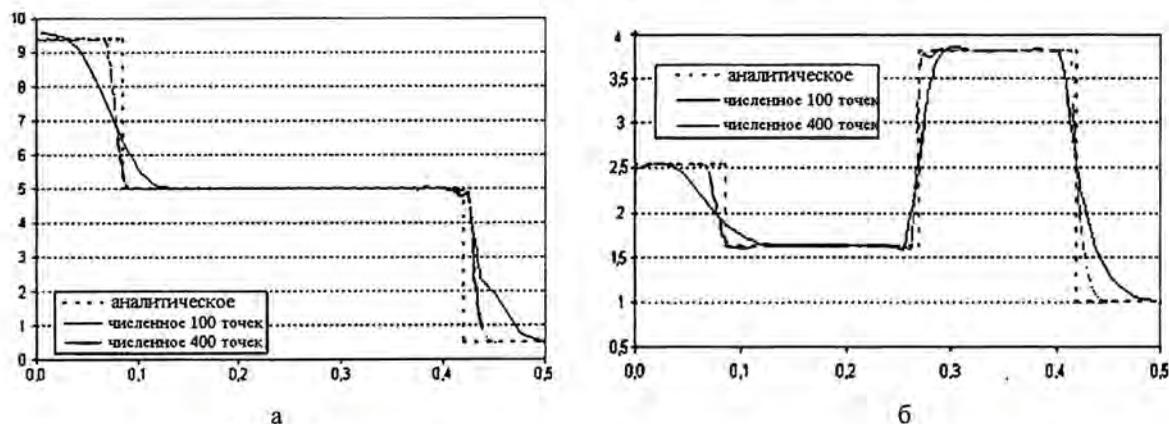


Рис. 7. Распределение давления (а) и плотности (б) на $t = 0,24$

Задача о плоской волне напряжения

Рассмотрим плоскую упругопластическую задачу, имеющую точное решение, о деформации полупространства. Начальная геометрия представляет собой прямоугольный брусок с размерами $|AB|=1,5$ см, $|AA'|=|AD|=0,5$ см. Число точек по задаче было задано 1200. Начальные условия: $\rho_0 = 1$ г/см³, $\vec{u} = 0$, $E_0 = P_0 = S_{x_i x_i} = 0$. Для описания материала использовалось уравнение состояния $P = (\gamma - 1)\rho E$ с показателем адиабаты $\gamma = 3$ и идеальная упругопластическая модель. Упругопластические характеристики материала $G = 15$ ГПа, $Y_0 = 1$ ГПа. На левой границе задается постоянное по времени давление $P_{гр} = 5$ ГПа, все другие границы – жесткие стенки. Расчет проводился по методике ТИМ. На рис. 8,а-в приведены результаты численного расчета и аналитическое решение на момент времени $t = 2,4$ мкс.

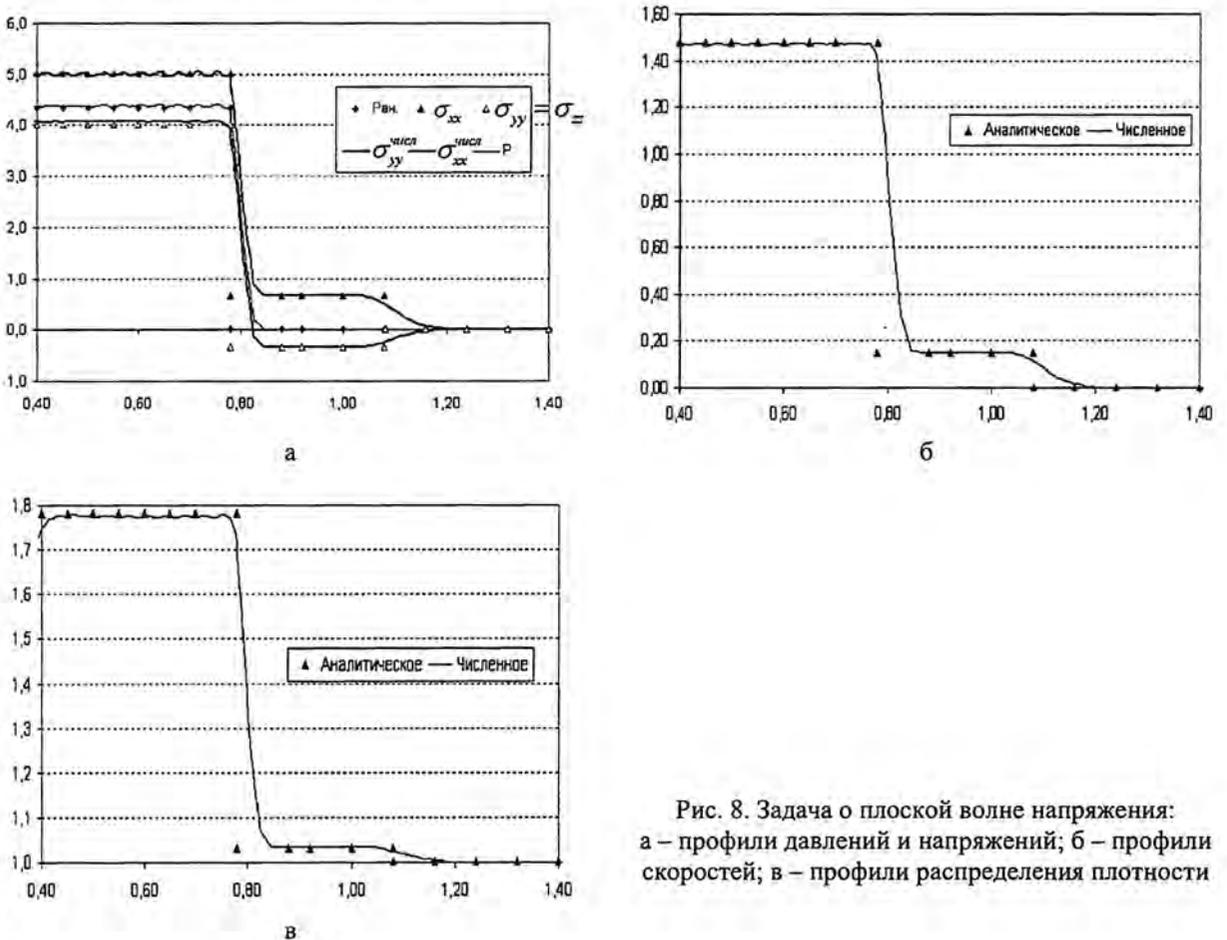


Рис. 8. Задача о плоской волне напряжения: а – профили давлений и напряжений; б – профили скоростей; в – профили распределения плотности

Задача об остывании куба

Для проверки работоспособности методики ТИМ при решении уравнения диффузии были проведены расчеты задачи об остывании куба. Для нее уравнение диффузии имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}. \text{ Внутри единичного куба задана начальная температура } T = 1, \text{ на его гра-}$$

нице поддерживается температура $T = 0$. Задача считалась на сетке из тел Вороного (см. рис. 4) с шагом по времени 0,0005. На рис. 9,а представлено распределение температуры на момент времени $t = 0,05$. На рис. 9,б сплошная линия соответствует точному решению, маркерами нанесена температура по всем ячейкам сетки.

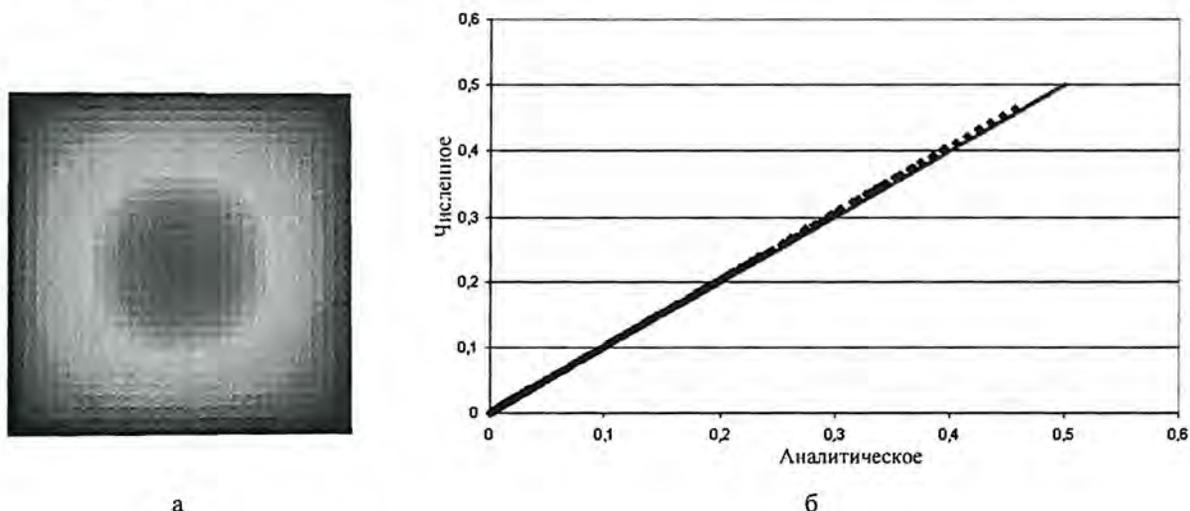


Рис. 9. Распределение температуры в плоскости $Z = 0,5$ в момент времени $t = 0,05$ и отклонение численного решения от точного по всем ячейкам сетки

Задача о развитии неустойчивости Рихтмайера – Мешкова

Размеры счетной области $0 \leq X \leq 12$ см, $0 \leq Y \leq 12$ см, $0 \leq Z \leq 24$ см. Область занята фреоном и воздухом. Размеры области, занятой фреоном, $0 \leq X \leq 6$ см, $0 \leq Y \leq 6$ см, $0 \leq Z \leq 9$ см. На верхней границе задана постоянная скорость $\vec{U} = (0, 0, -21,056456$ см/мс). В воздухе давление $P_1 = 1$ атм, плотность $\rho_1 = 0,001205$ г/см³. Во фреоне $P_2 = 1$ атм, плотность $\rho_2 = 0,00513$ г/см³. Уравнение состояния вещества – идеальный газ с $\gamma_1 = 1,4$ для воздуха и $\gamma_2 = 1,139$ для фреона. Расчет проводился по методике МЕДУЗА-3Д. На рис. 10 приведено решение задачи на момент времени $t = 0,764$ мс.

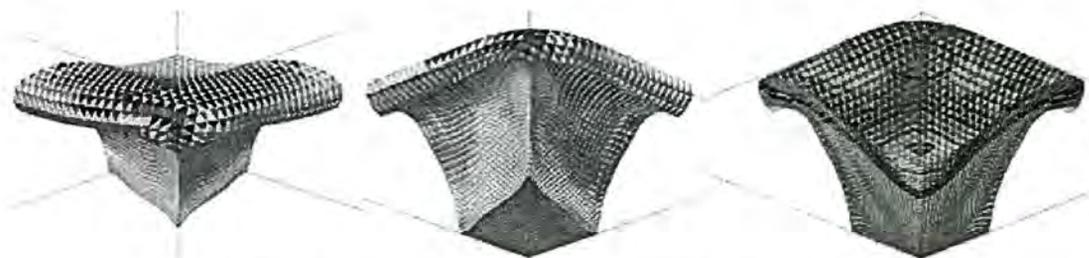


Рис. 10. Форма фреона и поле давления в момент времени $t = 0,764$ мс

Задача об ударе стержня о преграду

Для проверки работоспособности методик ТМК и ТИМ для расчета задач с большими деформациями проведен расчет задачи об ударе стержня в преграду в газодинамическом и упруго-пластическом приближениях.

Газодинамический расчет. Для описания материала ударника и преграды использовалось уравнение состояния идеального газа с $\gamma = 1,4$. Ударник в виде параллелепипеда размером $2 \times 2 \times 10$ см, летящий со скоростью 10 км/с, соударяется с телом, имеющим форму куба с ребром 10 см. Начальная плотность $\rho_0 = 1$, давление и энергия задавались равными нулю. На гранях ударника задано граничное условие "свободной границы", у преграды на всех гранях, кроме поверхности соударения, заданы граничные условия типа "жесткой стенки". Расчет проводился по методикам ТМК и ТИМ на лагранжевой сетке Дирихле – Вороного с общим количеством счетных ячеек, равным 31 400. Начальная геометрия задачи и динамика внедрения ударника в преграду с изображением счетной сетки и сечения плоскостью Oxz с заливкой по величине плотности вещества представлены на рис. 11.

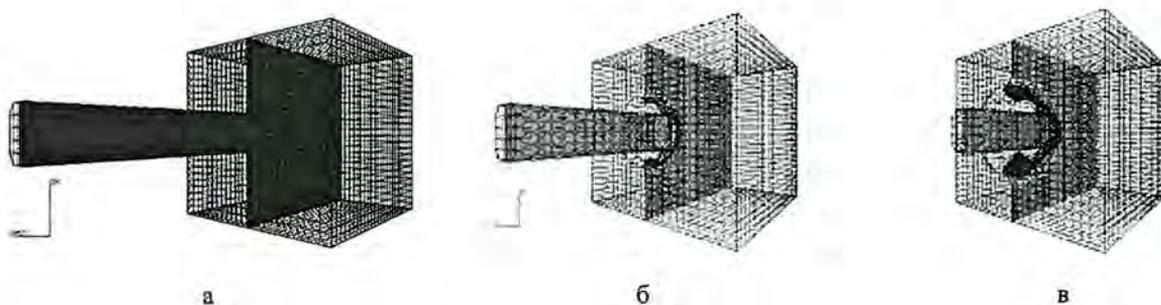


Рис. 11. Внедрение ударника в преграду, газодинамический расчет:
а – начальная геометрия; б – $t = 3,5$ мкс; в – $t = 7$ мкс

Упругопластический расчет. Вещество в ударнике и пробиваемом теле задавалось сталью. Для описания стали использовалось уравнение состояния в форме Ми – Грюнайзена и модель идеальной упругопластичности с параметрами: $\rho_0 = 7,8$ г/см³; $c_0 = 4,9$ км/с; $n = 5$; $\Gamma = 1,66$; $\sigma_s = -2,5$ ГПа; $G = 81$ ГПа; $Y = 1,05$ ГПа. Скорость ударника 1 км/с. Начальная трехмерная сетка, размеры и формы ударника и преграды, граничные условия аналогичны предыдущему расчету. Начальная плотность $\rho_0 = 7,8$ г/см³, давление и энергия равны нулю. Расчет задачи проведен до момента времени 40 мкс по методикам ТМК и ТИМ. На рис. 12 представлена динамика внедрения ударника в преграду с изображением счетной сетки и сечения плоскостью Oxz с заливкой по плотности вещества.

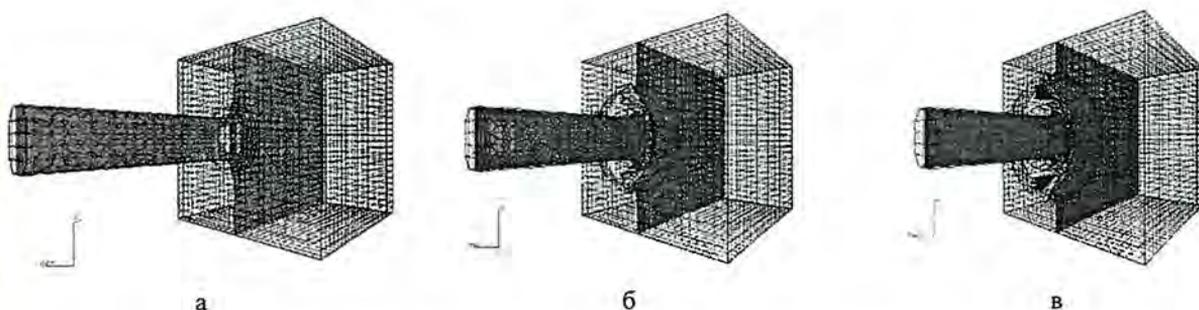


Рис. 12. Динамика внедрения ударника в преграду, упругопластический расчет: а – $t = 10$ мкс;
б – $t = 30$ мкс; в – $t = 40$ мкс

Задача об обжатии эллипсоида

В начальный момент времени рассчитываемая область представляет собой эллипсоид с полуосями $a = 1,5$; $b = 1,5$; $c = 1$, заполненный однородным покоящимся идеальным газом с уравнением состояния $P = (\gamma - 1)\rho E$, плотностью $\rho = 200$, $\gamma = 1,3333$. Эллипсоид обжимается изменяющимся со временем давлением по закону $P(t) = t$ при $0 < t < 5$, $P(t) = 5$ при $t \geq 5$. Для расчета была выбрана нерегулярная многогранная сетка (рис. 13,а). Расчет проводился по методике ТИМ с использованием алгоритмов сглаживания поля скоростей. На рис. 13 изображены счетные сетки и поле давлений в центральном сечении плоскостью. На момент времени $t = 9$ эллипсоид имеет форму диска, на момент времени $t = 15$ – форму эллипсоида. К моменту времени $t = 20$ происходит еще большее удлинение и сплющивание эллипсоида в разных направлениях.

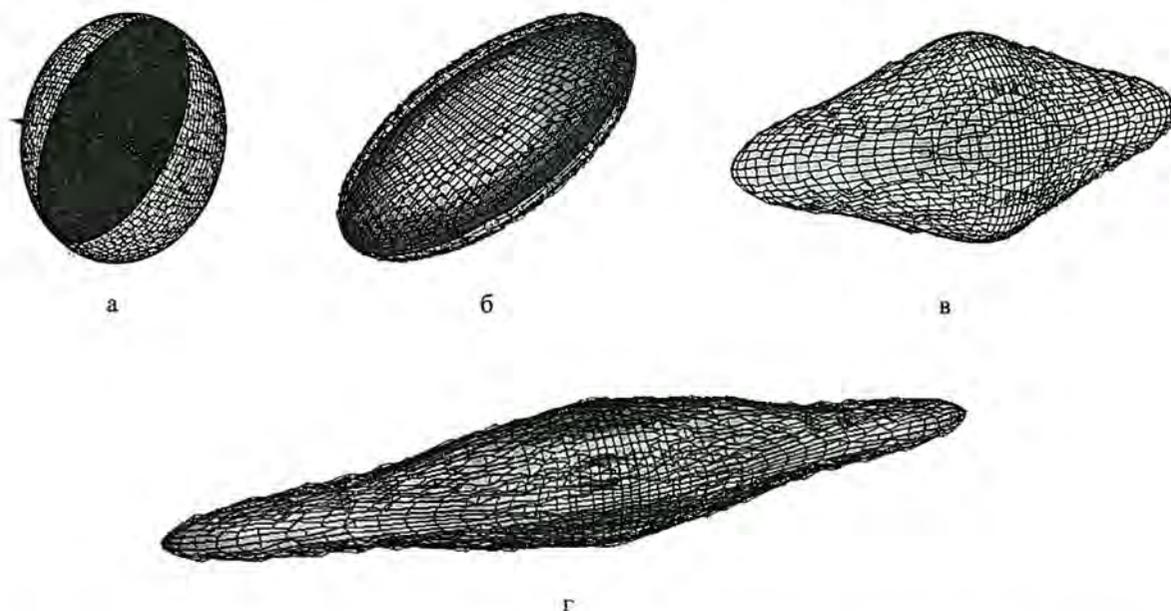


Рис. 13. Динамика обжатия эллипсоида с сеткой в центральном сечении на момент времени $t = 0$ (а); $t = 9$ (б); $t = 15$ (в); $t = 20$ (г)

Задача о сферической тепловой волне

Целью теста является проверка сходимости сферической волны на неравномерной сетке в центр. Счетная область представляет собой шар с радиусом 4. Сетка получена вращением двумерной сетки (рис. 14,а) вокруг оси OX (рис. 14,б). На внешней поверхности шара поддерживается постоянная температура $T = 1$, начальная температура равна 0. Коэффициент теплопроводности зависит от температуры по закону $\kappa(T) = T^3$. На рис. 15 представлено распределение температуры на три различные момента времени.

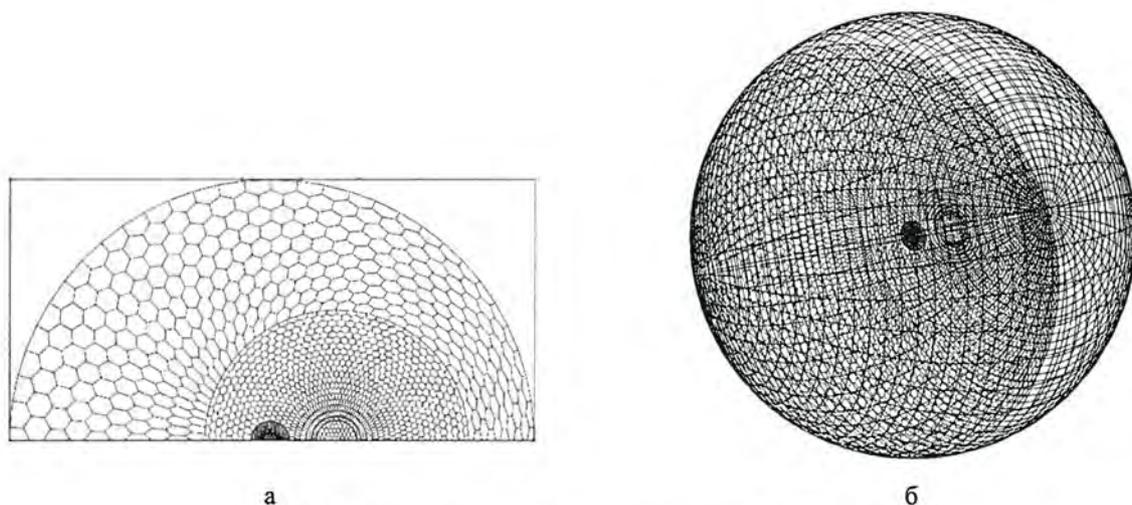


Рис. 14. Счетная сетка задачи о сферической тепловой волне

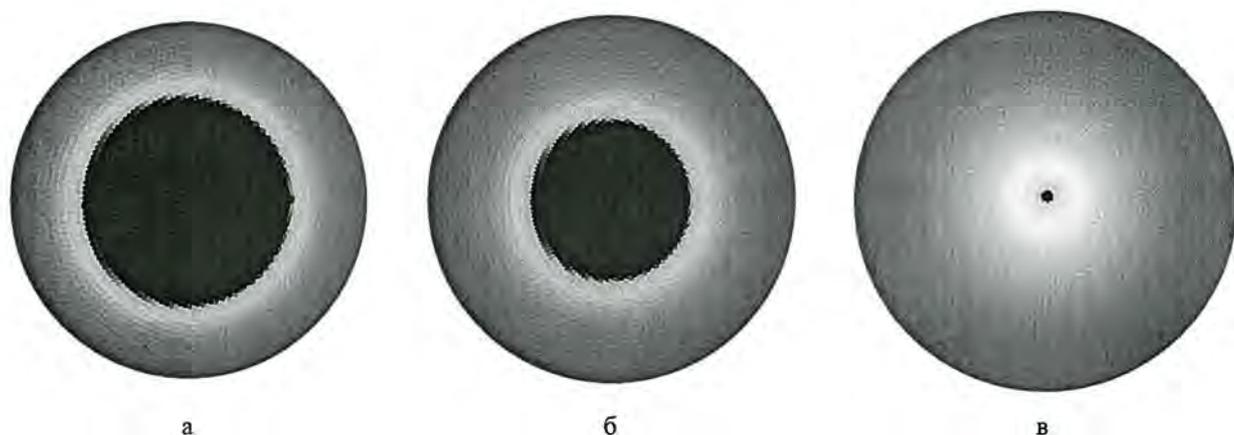


Рис. 15. Распределение температуры в различные моменты времени

Задача о взрыве в магнитном поле диполя

Пусть \vec{H}_0 – поле на бесконечности; R_0 – начальный радиус области с заданной энергией и $\vec{H} = 0$. Пусть ось X направлена вверх, вдоль убывания плотности, и вектор \vec{H}_0 лежит в плоскости OXY . Угол между ним и осью OX обозначим через α . Так как при $r < R_0$ магнитное поле равно нулю, то снаружи оно будет иметь вид диполя, ось которого лежит в плоскости XY и наклонена под углом α к оси X . Компоненты магнитного поля зададим в следующем виде:

$$H_x = H_x' \cos \alpha + H_y' \sin \alpha ; H_y = -H_x' \sin \alpha + H_y' \cos \alpha ; H_z = H_z' ;$$

$$H_x' = H_0 \left(1 + 0,5 \frac{R_0^3}{r^3} - 1,5 R_0^3 \frac{x'^2}{r^5} \right); \quad H_y' = -1,5 H_0 R_0^3 \frac{x'y'}{r^5}; \quad H_z' = -1,5 H_0 R_0^3 \frac{x'z}{r^5},$$

где $x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha$, $y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha$, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, $H_0 = 5$.

Давление и внутренняя энергия в области $r > R_0$ полагаются равными нулю. На рис. 16 представлено распределение магнитного давления на момент времени $t = 3,5$.

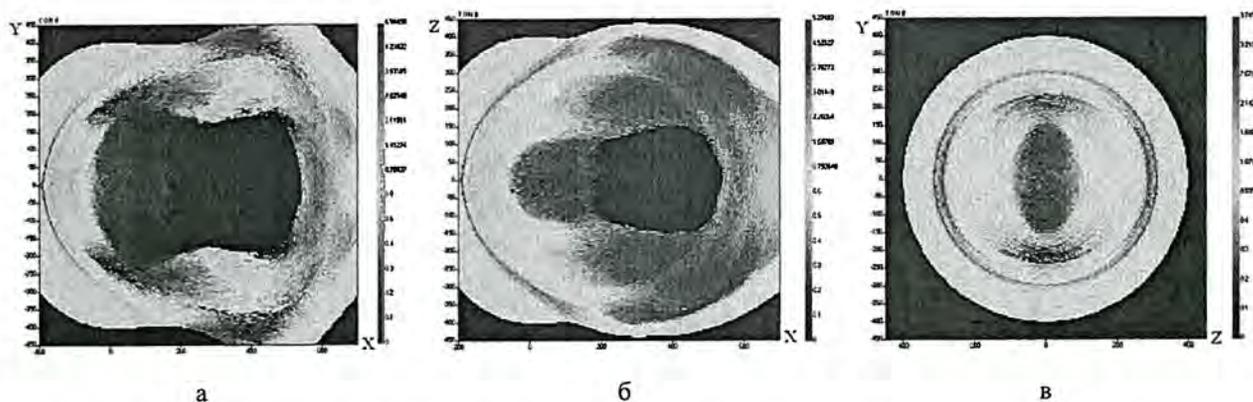


Рис. 16. Распределение магнитного давления в трех координатных плоскостях XY , XZ , ZY на момент времени $t = 3,5$

Заключение

В данной работе представлены основные положения методик, разработанных во ВНИИЭФ для расчета трехмерных задач механики сплошных сред на многогранных неструктурированных лагранжевых сетках. Их разработке послужил большой практический опыт, накопленный во ВНИИЭФ при использовании методик ДМК и МЕДУЗА для расчета двумерных задач механики сплошных сред на неструктурированных многоугольных лагранжевых сетках. Практический интерес к использованию неструктурированных сеток особенно проявляется при решении задач со сложными геометриями, имеющих локальные мелкомасштабные подобласти, в которых применение многоугольных и многогранных ячеек позволяет строить сетку более эффективным образом с заданными свойствами. Представленные результаты расчетов модельных задач на многогранных неструктурированных лагранжевых сетках подтвердили их работоспособность.

Список литературы

1. Софронов И. Д. О численном решении уравнения теплопроводности на неортогональной сетке // Тезисы научных сообщений 1 Международного конгресса математиков. Секция 14, Москва, 1966.
2. Sofronov I. D., Rasskazova V. V., Nesterenko L. V. The use of nonregular nest for solving two-dimension nonstationary problems in gas dynamics // Numerical Methods in Fluid Dynamics. M.: Mir Publishers, 1984. P. 82–121.
3. Рассказова В. В., Софронов И. Д. Некоторые вопросы численного решения трехмерных задач механики сплошной среды // ВАНТ. Сер. Методики и программы численного решения задач математической физики. 1987. Вып. 1. С. 44–57.
4. Рассказова В. В., Софронов И. Д., Еременко А. Ю., Мотлохов В. Н. Методика решения задач трехмерной нестационарной газовой динамики на нерегулярных лагранжевых сетках // Там же. 1998. Вып. 4.
5. Барабанов Р. А., Бутнев О. И., Волков С. Г. и др. Методика МЕДУЗА-3Д расчета трехмерных задач газовой динамики на нерегулярных сетках // ВАНТ. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2005. Вып. 2. С. 35–43.
6. Седов Л. И. Механика сплошной среды. М. Наука, 1970. Т. 1–2.
7. Соколов С. С. Методика решения нестационарных упругопластических задач на нерегулярных многогранных лагранжевых сетках // ВАНТ. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2002. Вып. 4. С. 23–36.
8. Рассказова В. В., Софронов И. Д., Шапоренко А. Н. Методы перестройки связей для произвольной многогранной счетной сетки // Там же. 1997. Вып. 2. С. 3–16.
9. Соколов С. С., Панов А. И., Воропинов А. А. и др. Методика ТИМ расчета трехмерных задач механики сплошных сред на неструктурированных многогранных лагранжевых сетках // Там же. 2005. Вып. 3. С. 37–52.
10. Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977.
11. Панов А. И. Методика решения уравнения теплопроводности на нерегулярной сетке // ВАНТ. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2004. Вып. 4. С. 27–40.
12. Соколов С. С., Воропинов А. А., Панов А. И. Методика построения многогранной листовой сетки на основе многоугольной нерегулярной сетки // Там же. 2005. Вып. 4. С. 46–53.
13. Панов А. И., Новиков И. Г., Соколов С. С. Способ коррекции нерегулярной лагранжевой сетки методом наложения на узлы сетки дифференцируемых связей // Там же. Вып. 2. С. 27–34.
14. Соколов С. С., Ялозо А. В. Метод расчета контактной границы для нерегулярных многогранных сеток в методике ТИМ // Там же. Вып. 4. С. 38–46.

Solution of Multidimensional Problems of Continuum Mechanics Using Unstructured Lagrangian Meshes

S. S. Sokolov, I. D. Sofronov, V. V. Rasskazova, O. I. Butnev, A. I. Panov,
V. N. Motlokhov, B. M. Zhogov, S. G. Volkov, A. A. Voropinov,
I. G. Novikov, V. A. Pronin, I. V. Sobolev, A. V. Yalozo

The possibility of applying unstructured Lagrangian meshes to solve multidimensional problems of continuum mechanics characterized by high shear strains and vortex flows is considered in the paper. A concise description of three numerical techniques based on the finite difference method to be used for solving problems of continuum mechanics at the polyhedral unstructured meshes is given. The examples of numerical calculations of model problems are presented.