

УДК 519.673

Сравнение различных методов расчета термодинамического состояния смешанных ячеек в лагранжевой газодинамике

Рассматриваются методы расчета термодинамического состояния смешанных ячеек в лагранжевой газовой динамике, отличающиеся замыкающими соотношениями. Приводятся результаты расчетов нескольких задач, позволяющих сравнивать методы по эффективности и точности. Показано, что каждый из рассмотренных методов имеет свою область применения и выбор того или иного метода диктуется решаемыми физическими задачами.

Е. А. Гончаров, В. Ю. Колобянин,
В. В. Садчиков, Ю. В. Янилкин

Введение

Использование эйлеровых и произвольно лагранжево-эйлеровых (ALE) методов для ударно-волновых течений многокомпонентной сплошной среды приобретает все больший вес из-за присущих им по сравнению с лагранжевыми методами преимуществ. Наиболее важными из них являются безавостность, более простая подготовка начальных данных, меньшая трудоемкость проведения расчетов и меньшая зависимость результатов от квалификации исполнителя расчетов. Однако использование ALE методов при всей их привлекательности сопряжено с рядом сложных проблем. Одной из таких проблем является аппроксимация уравнений лагранжевой газодинамики для случая многокомпонентной среды, особенно с гетерогенной смесью веществ (далее в тексте – смешанные ячейки), содержащих два и более компонентов. От решения указанной проблемы в задачах такого типа зависят эффективность и точность как лагранжевой газодинамики в отдельности, так и ALE метода в целом, в котором лагранжева газодинамика является составной частью. В смешанных ячейках приходится привлекать те или иные замыкающие соотношения, так как система уравнений газодинамики в таких ячейках не замкнута. В данной работе содержатся обзор и сравнение методов замыкания, используемых в различных расчетных методиках ВНИИЭФ. При этом мы ограничились методиками ЭГАК и Д, в которых реализовано большинство из рассмотренных ниже методов замыкания.

1. Методы расчета смешанных ячеек в лагранжевой газодинамике

1.1. Основные уравнения.

Предполагается, что в счетной области может быть несколько компонентов (веществ) с различными уравнениями состояния (УРС). При этом границы веществ могут не совпадать с линия-

ми счетной сетки, более того, в области возможно наличие смесей, в которых нельзя установить границы между веществами на уровне счетных ячеек. Предполагается, что смеси в общем случае являются гетерогенными, каждый их компонент имеет свое уравнение состояния.

Будем использовать односкоростную модель многокомпонентной среды, где каждый компонент выделяется полным набором термодинамических параметров: плотностью, удельной внутренней энергией и объемной долей (концентрацией). Предположим, что скорость \vec{u} определена в узлах счетной сетки, скалярные величины для каждого компонента: плотность ρ_i , удельная внутренняя энергия e_i , давление P_i , объемная концентрация β_i , а также давление P для среды в целом определены в центрах ячеек, здесь $i = 1, \dots, K$ – номер компонента. Исходная система дифференциальных уравнений многокомпонентной газодинамики будет иметь следующий вид:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } P; \quad (1)$$

$$\frac{d\rho_i}{dt} = -\rho_i \text{div } \vec{u}_i; \quad (2)$$

$$\frac{d\beta_i}{dt} = \beta_i (\text{div } \vec{u}_i - \text{div } \vec{u}); \quad (3)$$

$$\frac{de_i}{dt} = -\frac{P_i}{\rho_i} \text{div } \vec{u}_i; \quad (4)$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{u}. \quad (5)$$

Уравнения (1)–(5) замыкаются УРСами компонентов среды

$$P_i = P_i(\rho_i, e_i). \quad (6)$$

При численном решении системы без выделения ударных волн в уравнение (1) к давлению добавляется счетная вязкость q , а в уравнение (4) – q_i . Здесь q – счетная вязкость для среды в целом; q_i – счетная вязкость компонента.

В настоящей работе рассматриваются лишь проблемы, связанные с расчетом смешанных ячеек, поэтому разностные уравнения приводятся ниже только в необходимом объеме (например, опускаются все детали пространственной аппроксимации дифференциальных операторов). Заметим, что система (1)–(6) не замкнута, в частности, в ней не определены: среднее давление P , дивергенции компонентов $\text{div } \vec{u}_i$ (здесь и в дальнейшем под дивергенцией понимается дивергенция скорости), искусственные вязкости компонентов q_i и искусственная вязкость q ячейки в целом. Для замыкания системы необходимы дополнительные предположения относительно состояния смеси в ячейках.

1.2. Основные методы замыкания и определение дивергенций компонентов.

Для замыкания уравнений газодинамики в смешанных ячейках применялось достаточно большое количество замыкающих соотношений, однако многие из них вышли из употребления и представляют лишь исторический интерес. Ниже рассматриваются наиболее часто используемые в конкретных методиках ВНИИЭФ методы замыкания. При этом для численного исследования используются лишь ALE методика ЭГАК [1] и лагранжева методика Д [2], в рамках которых реализовано большинство из рассматриваемых ниже методов.

Рассмотрим вначале методы замыкания с точки зрения определения дивергенций компонентов (изменений плотностей компонентов).

Метод 1 основан на предположении об одинаковой сжимаемости компонентов [3]

$$\operatorname{div} \bar{u} = \operatorname{div} \bar{u}_1 = \operatorname{div} \bar{u}_2 = \dots \quad (7)$$

Метод 2 основан на предположении о равенстве давления компонентов [4] с учетом их вязкостей в следующей форме:

$$P_i + q_i = P_k + q_k. \quad (8)$$

Использование данного предположения приводит к итерационному способу решения системы уравнений (2), (4) и (6), описанному в [5].

Метод 3 основан на предположении об одинаковом приращении давления компонентов [6]: $\Delta P_i = \Delta P_k$. Откуда следует, что

$$\rho_i c_i^2 \operatorname{div} \bar{u}_i = \rho_k c_k^2 \operatorname{div} \bar{u}_k. \quad (9)$$

В работе [7] метод 3 был дополнен безытерационным алгоритмом выравнивания давления компонентов. С учетом этого формула определения дивергенций компонентов имеет следующий вид:

$$\operatorname{div} \bar{u}_i = \lambda_i \operatorname{div} \bar{u} - \frac{\Delta P_i}{\tau \rho_i c_i^2}, \quad (10)$$

где

$$\Delta P_i = A \frac{c\tau}{h} (\bar{P} - P_i), \quad \lambda_i = \frac{1}{\rho_i c_i^2 \sum_k \frac{\beta_k}{\rho_k c_k^2}}. \quad (11)$$

Здесь \bar{P} – среднее давление (см. ниже); множитель $\frac{c\tau}{h}$, равный отношению временного шага к характерному для данной смешанной ячейки времени выравнивания давления $\frac{h}{c}$ (c – скорость звука, а h – характерный размер ячейки), определяет долю от разницы в давлении компонентов, на которую произойдет выравнивание давления компонентов за один временной шаг; $A \sim 1$ – константа.

Метод 4 основан на рассмотрении распада произвольного разрыва в акустическом приближении, в котором учитываются давление компонентов и скорость на границах ячейки [8]. Формула определения дивергенций компонентов имеет вид

$$\operatorname{div} \bar{u}_i = \left(\frac{\lambda_i}{\beta_i} \right) \operatorname{div} \bar{u} + \omega \frac{(P_i - P_\Sigma)}{\beta_i h} \frac{1}{(\rho c)_\Sigma}, \quad (12)$$

где

$$P_\Sigma = \frac{\sum_{k=1}^K P_k}{K}; \quad (\rho c)_\Sigma = \frac{\sum_{k=1}^K (\rho c)_k}{K}; \quad \lambda_i = \frac{1}{K-1} \left(1 - \frac{(\rho c)_i}{\sum_{k=1}^K (\rho c)_k} \right); \quad (13)$$

$\omega \sim 1$ – некоторый коэффициент.

Метод 5 [9] основан на равенстве массовой скорости компонентов после прохождения малого возмущения. При малых возмущениях модуль дивергенции компонентов равен

$$|\operatorname{div} u_i| \approx \left| \frac{\Delta p_i}{\rho_i \tau} \right| \approx \left| \frac{u_i}{c_i \tau} \right|,$$

где u_i – массовая скорость компонента в возмущении. Предполагая равенство массовой скорости компонентов ($u_i = u$), получаем, что дивергенции компонентов должны быть пропорциональны величине $1/c_i$. Формула определения дивергенций компонентов с алгоритмом выравнивания давлений, что и для метода 3, записывается в виде

$$\operatorname{div} \bar{u}_i = \lambda_i \operatorname{div} \bar{u} - \frac{\Delta P_i}{\tau \rho_i c_i^2}, \quad (14)$$

где

$$\Delta P_i = A \frac{c\tau}{h} (\bar{P} - P_i); \quad \lambda_i = \frac{1}{c_i \sum_k \frac{\beta_k}{c_k}}.$$

1.3. Определение среднего давления в смешанных ячейках.

Кроме дивергенций компонентов для аппроксимации уравнения движения в смешанных ячейках необходимо определить также и среднее давление. Формулы для его вычисления получаются из указанных выше замыкающих соотношений с использованием условия аддитивности энергии компонентов (здесь и в дальнейшем имеется в виду удельная внутренняя энергия). Будем считать, что среднее давление (как и искусственная вязкость) для всех методов определяется по формуле

$$\bar{P} = \sum \psi_i P_i. \quad (15)$$

Здесь ψ_i – некоторая функция, удовлетворяющая условию $\sum \psi_i = 1$, для определения которой и привлекается условие аддитивности энергии компонентов

$$\Delta e = \sum \alpha_i \Delta e_i, \quad (16)$$

где α_i и Δe_i – массовая концентрация и изменение удельной внутренней энергии компонента, а Δe – изменение энергии всей ячейки.

Если в (16) использовать применяемую в методике ЭГАК разностную аппроксимацию уравнения энергии для компонентов

$$\Delta e_i = -\tau \frac{\bar{P}_i + q_i}{2\rho_i^n} (\operatorname{div} \bar{u}_i^n + \operatorname{div} \bar{u}_i^{n+1}),$$

то закон аддитивности энергии компонентов можно записать в виде

$$-\frac{\tau}{\rho} (\bar{\bar{P}} + q) \frac{\operatorname{div} \bar{u}^n + \operatorname{div} \bar{u}^{n+1}}{2} = -\frac{\tau}{\rho} \sum \beta_i (\bar{P}_i + q_i) \frac{\operatorname{div} \bar{u}_i^n + \operatorname{div} \bar{u}_i^{n+1}}{2} + \sum \alpha_i \Delta e'_i. \quad (17)$$

Здесь \bar{P}_i – "предвычисленное" давление компонента (каким образом оно вычисляется не имеет значения, детали см. в работе [6]); $\bar{\bar{P}}$ – среднее по ячейке "предвычисленное" давление; ρ – сред-

ная плотность; q и q_i – искусственная вязкость, средняя и компонентов соответственно. При условии равенства давления компонентов среднему давлению из (17) следует, что $\sum \alpha_i \Delta e'_i = 0$. Таким образом, этот член представляет собой добавки к энергии за счет процесса выравнивания давления компонентов. Из (17) при заданных способах получения $\bar{P} + q$ и дивергенций компонентов можно находить значения $\Delta e'_i$, которые представляют собой дополнительные приращения внутренней энергии компонентов для обеспечения баланса энергии. При использовании процедуры выравнивания давления компонентов невозможно указать точный способ получения $\Delta e'_i$. Для методов 3 и 5 используется способ, опирающийся на предположение об одинаковом приращении давления компонентов, в данном случае при изменении их внутренней энергии [7].

Для метода 1 функция ψ_i имеет следующий вид:

$$\psi_i = \beta_i. \tag{18}$$

Отметим, что выравнивание давления для этого метода не имеет смысла, так как при расчете дивергенций компонентов на следующем же шаге по времени давление будет заметно отличаться и его выравнивание приведет только к дополнительному увеличению энтропии.

Для метода 2 давление компонентов равно среднему давлению в любой момент времени, поэтому $\bar{P} = P_i$.

Для метода 3

$$\psi_i = \beta_i \lambda_i, \tag{19}$$

где λ_i определяется формулой (11).

Для метода 4 в работе [8] показано, что λ_i в формуле (12) можно брать в качестве сомножителя в формуле (15) для определения среднего давления, т. е. $\psi_i = \lambda_i$. При этом для выполнения условия аддитивности энергии, как и для метода 3, делается добавка к энергии.

В методе 5 также используется выражение (19), в котором λ_i дается формулой (14).

Приведем также формулы вычисления счетной вязкости q_i для компонентов смешанной ячейки, с которыми проделаны все нижеследующие расчеты.

Для метода 1

$$q_i = c_{\text{кв}} \rho (h \operatorname{div} u)^2 \frac{\alpha_i \beta_i}{\sum \alpha_i \beta_i^2}.$$

Для метода 2

$$q_i = c_{\text{кв}} \rho (h \operatorname{div} u)^2.$$

Для методов 3, 5

$$q_i = c_{\text{кв}} \rho (h \operatorname{div} u)^2 \frac{\rho_i}{\sum \beta_i \xi_i \rho_i}.$$

Для метода 4

$$q_i = c_{\text{кв}} h^2 \left(\frac{\partial \rho_i}{\partial t} \right)^2 \frac{1}{\rho_i} + q_{\text{лин}}.$$

Здесь $c_{кв}$ – коэффициент квадратичной вязкости; $q_{лин}$ – линейная вязкость. Для средней вязкости q в смешанной ячейке используется выражение (15) с заменой P_i на q_i , что необходимо для выполнения закона аддитивности внутренней энергии.

1.4. Определение средней скорости звука.

Одним из возможных способов сравнения методов счета газодинамики в смешанных ячейках может быть оценка скорости распространения малых возмущений в смешанных ячейках.

Как известно, скорость распространения малых возмущений в адиабатических течениях (скорость звука) определяется по формуле

$$c^2 \approx \frac{\Delta P}{\Delta \rho}. \quad (20)$$

За счетный шаг по времени τ в смешанной ячейке приращение средней плотности составляет величину

$$\Delta \rho \approx -\rho^n \operatorname{div} \bar{u}^n \tau. \quad (21)$$

Изменение среднего давления, рассчитанного по формуле (15), за счетный шаг получим с точностью до членов первого порядка малости в виде

$$\begin{aligned} \Delta P &= \sum \psi_i^{n+1} P_i^{n+1} - \sum \psi_i^n P_i^n \approx \sum \Delta(\psi_i) P_i^n + \sum \psi_i^n \Delta P_i \approx \sum \Delta(\psi_i) P_i^n - \\ &- \sum \psi_i^n \rho_i^n (c_i^n)^2 \operatorname{div} \bar{u}_i^n \tau = \sum \Delta(\psi_i) P_i^n - \sum \frac{(\psi_i^n)^2}{\beta_i^n} \rho_i^n (c_i^n)^2 \operatorname{div} \bar{u}^n \tau. \end{aligned} \quad (22)$$

Подставляя (22) и (21) в (20), находим

$$(c^n)^2 \approx -\frac{\sum \Delta(\psi_i) P_i^n}{\rho^n \operatorname{div} \bar{u}^n \tau} + \frac{1}{\rho^n} \sum \frac{(\psi_i^n)^2}{\beta_i^n} \rho_i^n (c_i^n)^2. \quad (23)$$

Для всех рассматриваемых нами методов первый член в правой части выражения (23) мал по сравнению со вторым.

Для метода 1 из выражения (23) следует известная формула [3]

$$(c^n)^2 = \sum \alpha_i^n (c_i^n)^2. \quad (24)$$

Для метода 3

$$(c^n)^2 = \frac{1}{\rho^n \sum \frac{\beta_i^n}{\rho_i^n (c_i^n)^2}} = \frac{1}{\sum \frac{\alpha_i^n}{(c_i^n)^2}}. \quad (25)$$

Формула (25) справедлива и для метода 2, так как оба метода дают равные приращения давления компонентов, если они были равны на момент времени t^n . Отметим также, что в справочнике [10] формула (25) приводится для пористого трехкомпонентного грунта.

Для метода 4 получим

$$(c^n)^2 \approx \sum \left(\frac{\lambda_i^n}{\beta_i^n} \right)^2 \alpha_i^n (c_i^n)^2. \quad (26)$$

Наконец, для метода 5

$$c^n \approx \frac{1}{\sum \frac{\beta_i^n}{c_i^n}}. \quad (27)$$

Эта скорость совпадает со скоростью прохождения возмущением смешанной ячейки на контактной границе в перпендикулярном к этой границе направлении.

2. Тестовые расчеты

Несколько тестовых задач из предлагаемых ниже уже были исследованы в работах [6–9] для некоторых методов замыкания. Однако в настоящей работе приводится сравнение всех рассмотренных выше методов замыкания, поэтому некоторые результаты повторяются для полноты изложения. Отметим, что полученные ниже результаты по методу 3 с алгоритмом выравнивания давления отличаются от результатов, приведенных в [8], где была получена значительно худшая точность для этого метода. Отличие объясняется тем, что в методике Д данный метод был реализован без алгоритма выравнивания давления.

2.1. Задача о распаде разрыва.

Постановка задачи взята из работы [11]. В области 1 ($-8 < x < 0$) находится идеальный газ с плотностью $\rho_1 = 2,5$, внутренней энергией $E_1 = 6$, с уравнением состояния $P = (\gamma - 1)\rho E$, $\gamma = 3$. В области 2 ($0 < x < 3$) содержится газ с параметрами $\rho_2 = 12$, $E_2 = 0$ и уравнением состояния в форме Ми – Грюнайзена

$$P = P_x(\rho) + \tilde{A}(E - E_x)\rho; \quad P_{\tilde{v}} = \frac{\rho_0 c_0^2}{n} \left[\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^n - 1 \right]; \quad E_x = \int_{\rho_0}^{\rho} P_x(\rho) \frac{d\rho}{\rho^2},$$

где $c_0 = 2$, $n = 3$, $\tilde{A} = 0,5$, $\rho_0 = 12$. В начальный момент времени давление веществ $p_1 = 30$, $p_2 = 0$. Здесь и далее, если не указано обратное, используются безразмерные величины. Область $-8 < x < 0$ равномерно разбивалась на 80 интервалов, $0 < x < 3$ – на 60. На границах $x = -8$ и $x = 3$ задается нулевое граничное давление. Расчет проводится до времени $t = 0,5$. На этот момент времени в окрестности границы раздела веществ задача имеет следующее аналитическое решение, получающееся из условий распада разрыва:

$$\rho_1 = 2,227; \quad E_1 = 4,76168; \quad p_1 = p_2 = 21,2085; \quad \rho_2 = 15,85; \quad E_2 = 0,2153; \quad u_1 = u_2 = 0,655.$$

В табл. 1 приводятся значения плотности веществ в окрестности смешанной ячейки (номер 80, в начальный момент времени $\beta_i = 0,5$), полученные по всем методам в сравнении с точным решением и с расчетом с чистыми ячейками. Видно, что наиболее близкое к аналитическому решение для плотности в смешанной ячейке дают методы 2, 3, 5, чуть хуже результат по методу 4, а наибольшее отличие получено по методу 1. Отметим, что в окружающих смешанную ячейку чистых ячейках плотности веществ практически одинаковые для всех методов и близки к аналитическому решению.

Таблица 1

Значения плотности компонентов в окрестности смешанной ячейки в задаче 1
(δ – отклонение в процентах от точного решения)

Номер вещества	Номер ячейки	Плотность в ячейке					Расчет с чистыми ячейками	Точное решение
		Метод 1	Метод 2	Метод 3	Метод 4	Метод 5		
0	78	2,23	2,23	2,23	2,23	2,23	2,23	2,23
0	79	2,23	2,23	2,23	2,23	2,23	2,23	2,23
0	80	2,88	2,20	2,22	2,02	2,22	0	2,23
δ		29,2 %	1,34 %	0,45 %	9,42 %	0,45 %		
1		13,82	15,68	15,68	15,78	15,67		
δ		12,8 %	1,07 %	1,07 %	0,44 %	1,14 %		15,85
1	81	15,80	15,80	15,79	15,83	15,78	15,73	15,85
1	82	15,81	15,81	15,81	15,84	15,81	15,80	15,85
1	83	15,82	15,82	15,82	15,85	15,82	15,81	15,85

2.2. Прохождение ударной волны по смеси двух газов.

В области $0 < x < 100$ имеется смесь двух идеальных газов: вещество 0 – $\rho_0^0 = 1, e_0^0 = 0, \beta_0^0 = 0,5, \gamma_0 = 3$; вещество 1 – $\rho_1^0 = 1, e_1^0 = 0, \beta_1^0 = 0,5, \gamma_1 = 1,2$. На левой границе задана постоянная скорость $u = 2$. Вся область разбивается равномерно на 100 ячеек. Расчеты проводились в лагранжевой постановке.

По смеси газов идет ударная волна (УВ) с массовой скоростью u , на фронте которой должны достигаться максимальные сжатия для каждого газа в отдельности, т. е. $\rho_0 = 2$ для первого газа и $\rho_1 = 11$ для второго при условии отсутствия адиабатического обмена энергиями между газами. Исходя из этих ожидаемых результатов по известным для сильной УВ соотношениям можно оценить значение плотности и давления за фронтом УВ и скорость ее распространения:

$$\bar{\rho} = \frac{\beta_0^0 \rho_0^0 + \beta_1^0 \rho_1^0}{\beta_0^0 \frac{\rho_0^0}{\rho_0} + \beta_1^0 \frac{\rho_1^0}{\rho_1}}; \quad \bar{P} = (\bar{\gamma} + 1) \frac{\bar{\rho}^0 u^2}{2}; \quad D = (\bar{\gamma} + 1) \frac{u}{2}. \quad (28)$$

Здесь $\bar{\rho}^0$ – средняя плотность невозмущенной смеси; $\bar{\gamma} = \frac{\bar{\rho} + \bar{\rho}^0}{\bar{\rho} - \bar{\rho}^0}$ – средняя адиабатическая постоянная. После подстановки численных значений получаем $\bar{\rho} = 3,385; D = 2,836$ и $\bar{P} = 5,672$.

Результаты расчетов в сравнении с аналитическими решениями представлены на рис. 1 на момент времени $t = 25$ в виде давления компонентов и среднего давления (P -Average) в зависимости от расстояния для метода 1, а для методов 2–5 приведено только давление компонентов, так как среднее давление практически совпадает с ним. На рис. 2 приведены профили для плотности компонентов. Полученные с помощью методов 2–5 профили давления и скорости распространения УВ удовлетворительно согласуются между собой и с теоретическими значениями. Расчет по методу 1 дает заметно отличающиеся результаты как по амплитуде давления за фронтом УВ, так и по скорости фронта. Профили плотности также показывают, что метод 1 дает отличающийся от теории результат. Плотность обоих компонентов в этом расчете одинакова в полном соответствии с принятым предположением о равенстве дивергенций, поэтому первый компонент имеет большую, чем должно быть по теории, плотность, а второй – меньшую. Остальные методы по сравне-

нию с методом 1 значительно точнее. Полученные в расчетах по этим методам сжатия за фронтом УВ близки к ожидаемым. В то же время отметим, что наиболее точный результат получен по методу 3.

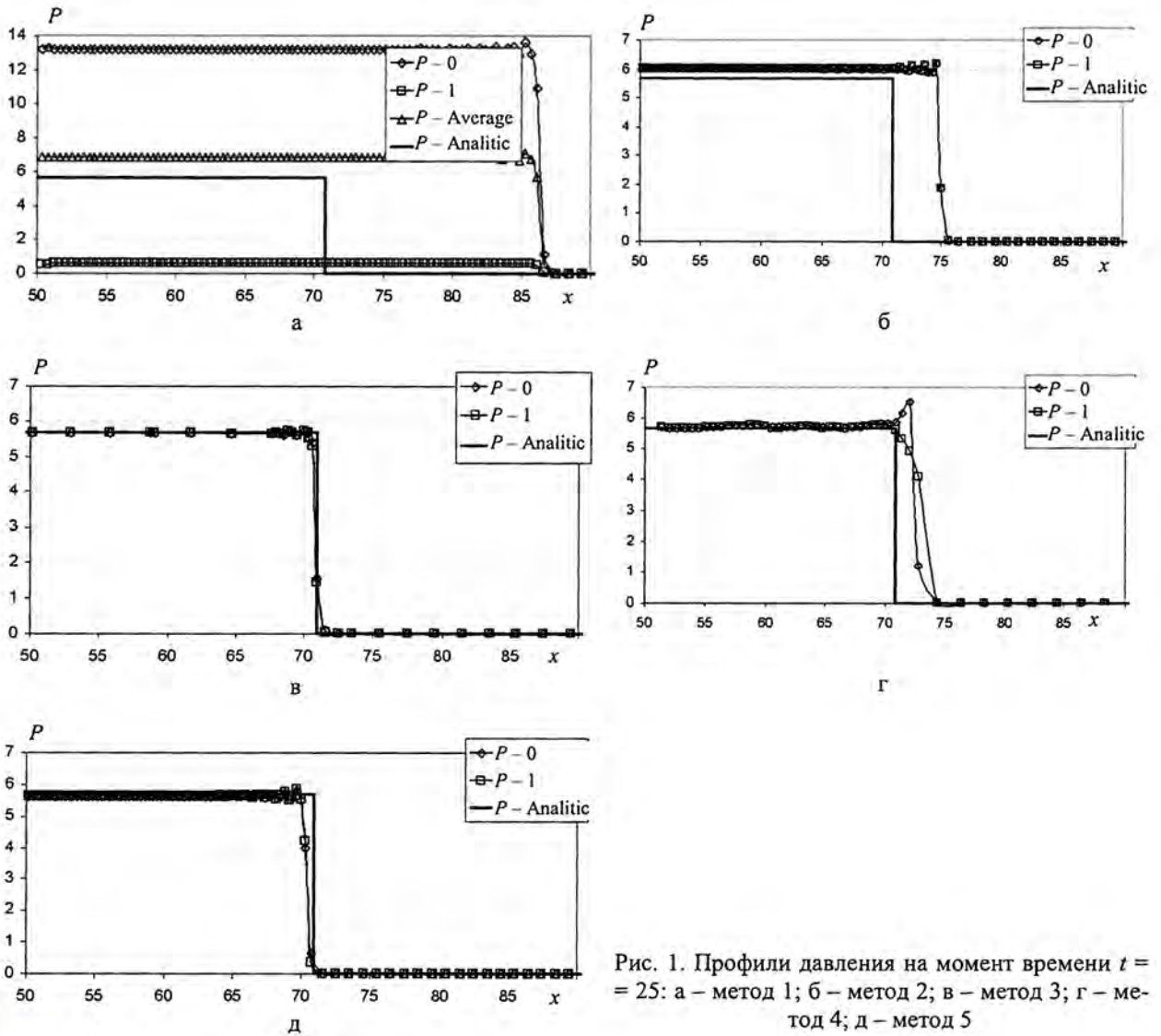


Рис. 1. Профили давления на момент времени $t = 25$: а – метод 1; б – метод 2; в – метод 3; г – метод 4; д – метод 5

2.3. Прохождение слабой волны по гетерогенной среде.

2.3.1. Постановка задачи и результаты расчетов в приближении смеси.

Рассматривается одномерная задача распространения малых возмущений по гетерогенной среде, описываемой смешанными ячейками в следующей постановке. Задана прямоугольная область $0 < x < 50$, $0 < y < 0,3$, разбитая равномерно на 500 ячеек по оси X и 3 ячейки по оси Y ($h_x = h_y = 0,1$). В области содержится покоящаяся однородная смесь двух веществ – идеальный газ со следующими параметрами на начальный момент времени: вещество 0 – $\rho = 0,01$, $e = 0,015$, $\gamma = 3$, $P = 0,0003$; вещество 1 – $\rho = 0,05625$, $e = 1,7784^{-6}$, $\gamma = 3000$, $P = 0,0003$. При этом

СРАВНЕНИЕ РАЗЛИЧНЫХ МЕТОДОВ РАСЧЕТА ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ...

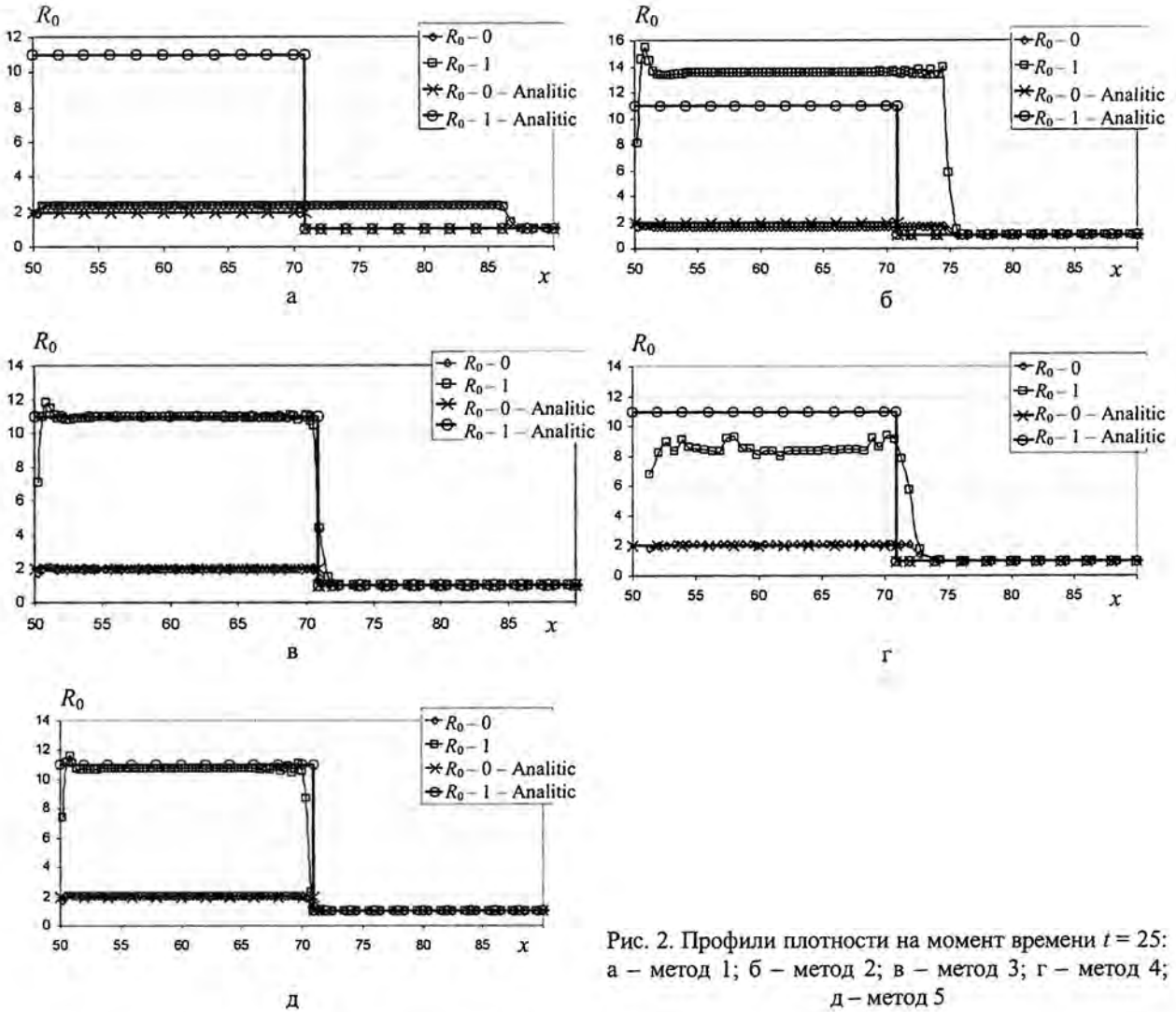


Рис. 2. Профили плотности на момент времени $t = 25$: а – метод 1; б – метод 2; в – метод 3; г – метод 4; д – метод 5

скорость звука компонентов $c_0 = 0,3$, а $c_1 = 4$. На левой границе задается скорость движения границы, направленная внутрь счетной области и равная $0,0005$, которая в 600 раз меньше минимальной скорости звука в заданных веществах. В расчетах варьируется концентрация каждого вещества в ячейке от $0,2$ до $0,8$.

В табл. 2 приведены значения скорости звука C_{th} , рассчитанные по формулам (24)–(27), и скорости распространения возмущения D_{calc} , полученные в расчетах с однородной смесью. Отметим, что для метода 5 в таблице приведена средняя скорость распространения возмущения по счетной области на расстоянии, определяемом размерами задачи. В действительности в расчетах по этому методу скорость возмущений является переменной. На малых расстояниях от левой границы она практически совпадает с теоретической, а на больших расстояниях близка к скорости распространения в методах 2–4. Это объясняется тем, что из-за выравнивания давления компонентов возмущения, распространяющиеся от левой границы и "подпитывающие" передний фронт, движутся по среде, в которой скорость звука определяется формулой (25), а не (27), что и приводит к уменьшению со временем скорости распространения переднего фронта. В целом данные, при-

веденные в табл. 2, показывают хорошее согласие теоретических и расчетных скоростей распространения малых возмущений по гетерогенной смеси. Несколько большая величина расчетной скорости распространения возмущения (на $\approx 10\%$ больше теоретической) получена для метода 1. Дело в том, что при равенстве дивергенций даже такая малая массовая скорость, которая задана в расчете, приводит к тому, что приращение давления слабо сжимаемого компонента (вещество 1) получается не малым по сравнению с начальным давлением и по этому веществу фактически идет УВ.

Таблица 2

Скорость распространения возмущений в расчетах с вариацией объемной концентрации веществ (тест 3.1)

Объемная доля		Метод 1		Метод 2		Метод 3		Метод 4		Метод 5	
β_0	β_1	$C_{th}(24)$	D_{mix}	$C_{th}(25)$	D_{mix}	$C_{th}(25)$	D_{mix}	$C_{th}(26)$	D_{mix}	$C_{th}(27)$	D_{mix}
0,5	0,5	3,69	4,1	0,233	0,234	0,233	0,236	0,249	0,234	0,558	0,47
0,2	0,8	3,91	4,3	0,309	0,308	0,309	0,31	0,322	0,312	1,15	1
0,8	0,2	3,06	3,45	0,242	0,241	0,242	0,241	0,312	0,235	0,368	0,304

Интересно, что в данной задаче по формулам (25) и (26) значения скорости звука получают практически одинаковыми и меньше минимальной скорости звука компонентов ($c_0 = 0,3$). То, что указанные формулы для данной задачи сводятся к идентичным, легко показать имея в виду,

что величины $\frac{1}{\rho_i c_i}$ и $\frac{1}{\rho_i c_i^2}$ для различных компонентов отличаются на порядки. Тогда в формуле

(25) можно оставить только член, относящийся к хорошо сжимаемому веществу (за исключением случаев очень малых объемных концентраций этого компонента), и она примет вид

$$c^2 = \frac{\rho_0}{\beta_0 \rho} c_0^2. \quad (29)$$

Точно такую же формулу можно получить исходя из формулы (26).

Из (29) следует, что, когда $\beta_0 > \frac{\rho_0}{\rho}$, скорость звука в смешанной ячейке будет меньше минимальной скорости звука компонентов. Учитывая, что в данном случае $\rho_0 \ll \rho_1$ и поэтому $\rho \approx (1 - \beta_0)\rho_1$, из (29) имеем, что минимум скорости звука находится при $\beta_0 \approx 0,5$ и составляет

$$c_{min} \approx \sqrt{\frac{2\rho_0}{\rho_1}} c_0. \quad (30)$$

Таким образом, в смешанных ячейках, содержащих смесь веществ с сильно отличающимися сжимаемостями и плотностью компонента с большей сжимаемостью, намного меньшей плотности другого вещества (например, смесь газа с конденсированным веществом), в широком интервале объемных концентраций средняя скорость звука будет меньше минимальной скорости звука компонентов. Наименьшее значение скорости звука достигается при $\beta_0 \approx 0,5$ и определяется формулой (30), из которой следует, что средняя скорость распространения возмущений в таких смешанных ячейках может быть в десятки раз меньше минимальной скорости звука компонентов. В приведенных в справочнике [10] экспериментальных данных по взрывам в грунте, который содержит в малых концентрациях воздух, наблюдается уменьшение средней скорости звука до скорости, меньшей в 1,5–2 раза скорости звука в воздухе.

Как видно, для разных методов замыкания как теоретически, так и в практических расчетах получаются значительно отличающиеся скорости звука. Таким образом, скорость звука может служить критерием корректности счета задачи тем или иным методом, если известно истинное ее значение. С целью оценки этой скорости для различных гетерогенных структур двухкомпонентной среды были проведены расчеты в лагранжевой постановке без смешанных ячеек (п. 2.3.2). Параметры веществ и граничные условия взяты точно такими же, как и в расчетах со смешанными ячейками.

2.3.2. Прямое моделирование распространения возмущений.

Первая серия расчетов (тест 3.1) представляет собой моделирование прохождения слабого возмущения через чередующиеся слои двух веществ, расположенных перпендикулярно направлению распространения волны. Задавалась прямоугольная область $0 < x < 500$, $0 < y < 0,3$, разбитая равномерно на 5000 ячеек по оси X и 3 ячейки по оси Y ($h_x = h_y = 0,1$). В первом расчете слои были равной толщины, каждый слой занимал 25 ячеек по оси X , при этом все ячейки – чистые. Всего в области было 100 пар слоев. Этот модельный расчет соответствует распространению возмущения по гетерогенной смеси, в которой размеры прослоек или каналов вдоль направления распространения возмущения меньше размеров счетных ячеек. По-видимому, этот случай близок к насыпному грунту, когда отсутствуют продольные жесткие "скелетные" конструкции, по которым возмущения могут распространяться относительно независимым образом. В этом случае возмущение внутри счетной ячейки при своем распространении проходит попеременно через различные вещества. На рис. 3 представлен профиль давления на момент времени $t = 1000$.

Как следует из рисунка, средняя скорость распространения возмущения $D \approx 0,23-0,24$, что хорошо соответствует скорости, оцененной по формулам (25) и (26). Можно отметить, что эта скорость меньше, чем минимальная скорость звука отдельных компонентов. Также были проведены расчеты слоистой системы с подобным расположением слоев, в которых варьировались толщины слоев с различными веществами, что эквивалентно изменению концентрации компонентов в смешанных ячейках при однородном смешении компонентов.

Вторая серия расчетов (тест 3.2) проведена для случая распространения возмущения вдоль контактной границы двух веществ. Задавалась прямоугольная область $0 < x < 150$, $0 < y < 2$, которая разбивалась равномерно на 1500 ячеек по оси X и 20 ячеек по оси Y ($h_x = h_y = 0,1$). В области имеются два вещества, одно вещество занимает подобласть $0 < x < 150$, $0 < y < 1$, другое – $0 < x < 150$, $1 < y < 2$. Также были проведены расчеты, в которых варьировались толщины слоев. Анализ результатов расчетов показывает, что в этом случае возмущение распространяется практически независимо по веществам для всех рассмотренных случаев. Скорость распространения возмущения близка к скорости звука в каждом из веществ.

В третьей серии расчетов (тест 3.3) имитировалось прохождение слабого возмущения по среде, имеющей "скелетные" образования какого-либо компонента. Задавалась область $0 < x < 84,1$, $0 < y < 3$, которая разбивалась равномерно на 841 ячейку по оси X и 30 ячеек по оси Y

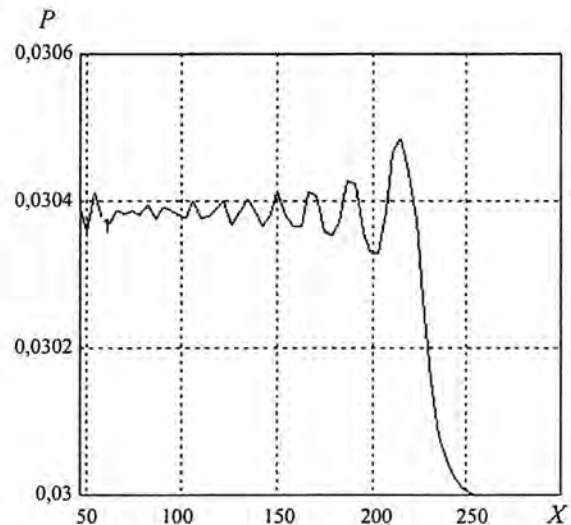


Рис. 3. Профиль давления на момент времени $t = 1000$



Рис. 4. Часть начальной геометрии расчетов, в которых имитируется наличие в смешанных ячейках скелетных образований

($h_x = h_y = 0,1$). На рис. 4 приведена часть начальной геометрии этих расчетов. Расчеты выполнены в плоской геометрии. При этом один из компонентов заполняет круги (бесконечные цилиндры), а другой – промежутки между ними. Как раз эти промежутки и являются имитатором "скелетных" образований в смешанной ячейке. Расчеты проведены с вариацией объемной концентрации компонентов. Для случая $\beta_0 = \beta_1 = 0,5$ радиус кругов $R = 1,9$, расстояние по оси X между соседними центрами $L = 3,8$.

В табл. 3 представлена полученная в тестовых расчетах скорость распространения возмущений по гетерогенным структурам. Значение D_{calc} в таблице является средним при прохождении возмущением расстояния, определяемого размерами счетной сетки. Как и в расчетах со смесью по методу 5, значение D_{calc} в тестовых расчетах с гетерогенными структурами является функцией расстояния от движущейся левой границы. На малых расстояниях от левой границы для гетерогенной структуры теста 3.1 ("слойка") скорость распространения возмущений определяется формулой (27) для метода 5, а на больших расстояниях – формулой (25) для методов 2, 3. Для гетерогенной структуры теста 3.3 (цилиндры с прослойкой) начальная скорость распространения возмущений практически совпадает со скоростью звука вещества, составляющего прослойку. На большие моменты времени эта скорость также приближается к скорости звука, определяемой формулой (25).

Таблица 3

Скорость распространения возмущений по гетерогенным структурам

Тест 3.1			Тест 3.3		
β_0	β_1	D_{calc}	β_0	β_1	D_{calc}
0,5	0,5	0,24	0,5	0,5*	0,294
0,2	0,8	0,307	0,5*	0,5	0,345
0,8	0,2	0,242	0,2*	0,8	2,73
			0,8	0,2*	0,288

* Вещество, заполняющее круги в тесте 3.3.

На рис. 5 приведены зависимости скорости распространения возмущений от расстояния, пройденного возмущением, для "слойки" и в расчете со смесью по методу 5 для объемных концентраций компонентов 0,5. Толщины слоев в гетерогенной структуре равны 0,05, а размер смешанной ячейки 0,1. Таким образом, можно сравнить зависимость скорости распространения возмущений от расстояния, пройденного возмущением по гетерогенной структуре и по смеси, в каждой ячейке которой как бы находятся два слоя. Видно, что в "слойке" скорость распространения возмущений заметно быстрее выходит на значение, соответствующее распространению по среде с равным давлением компонентов, определяемое по формуле (25). Однако для другого типа гетерогенной структуры выход на это значение скорости распространения намного более медленный, чем в расчете со смесью по методу 5. Можно сказать, что метод 5, во-первых, качественно передает изменение скорости распространения в зависимости от расстояния, пройденного возмущением, а, во-вторых, "в среднем" описывает эту зависимость для различных типов гетерогенных структур.

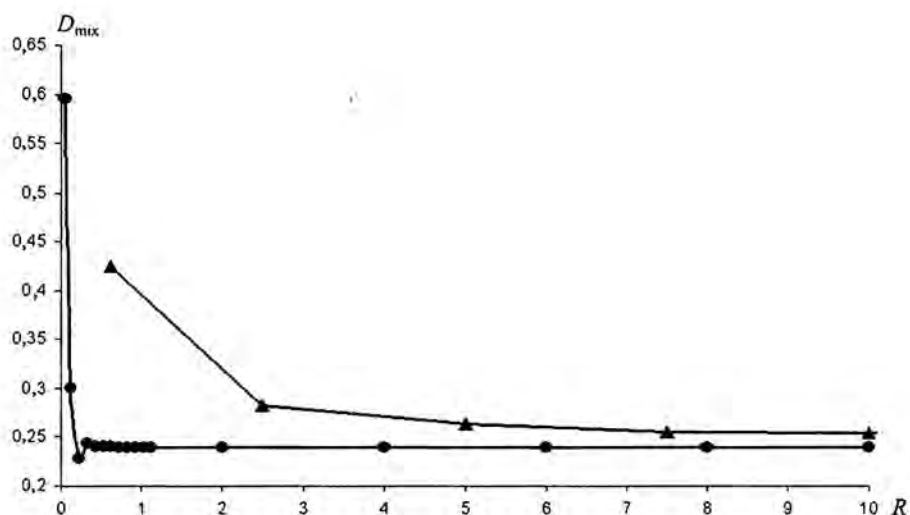


Рис. 5. Зависимость скорости распространения возмущений от расстояния, пройденного возмущением:
▲ – метод 5; ● – слойка

Из сравнения приведенных в табл. 2 и 3 данных следует, что в проведенных расчетах со смесью по методам 2, 3 и 4 скорость распространения возмущений D_{mix} хорошо согласуется с величиной D_{calc} , полученной в прямом расчете многослойной конструкции. Это говорит о том, что в расчетах с большими толщинами смеси указанные методы должны давать удовлетворительные результаты.

Таким образом, результаты рассмотренных расчетов показывают, что скорость распространения возмущений зависит как от расположения компонентов, так и от направления распространения возмущений относительно конкретного размещения веществ. Отсюда следует, что скорость звука в смешанных ячейках, содержащих гетерогенную смесь веществ, может быть анизотропной. В этой ситуации определение средней скорости звука в смешанной ячейке – задача, которая не может быть однозначно и корректно решена для всех течений. Так как формулы определения скорости звука однозначно следуют из моделей замыкания уравнений газодинамики, то невозможно указать одну верную во всех отношениях модель замыкания.

2.4. Прохождение УВ по среде, состоящей из гетерогенных структур.

Рассматривается двумерная, плоская задача о прохождении ударной волны по гетерогенной среде, состоящей из цилиндров, заполненных жидкостью [5]. Счетная область состоит из плотно упакованных стальных цилиндров ($R_1 = 3,5$, $R_2 = 5,5$), заполненных жидкостью; в промежутках между цилиндрами находится вакуум (рис. 6). УВ формируется постоянным давлением, приложенным к границе счетной области. УРСы жидкости и стали брались в форме Ми – Грюнайзена со следующими параметрами: сталь – $\rho = 7,8$, $n = 5$, $\gamma = 2,666$, $c = 5,1$; жидкость – $\rho = 1,3$, $n = 7$, $\gamma = 1,4$, $c = 1,5$.

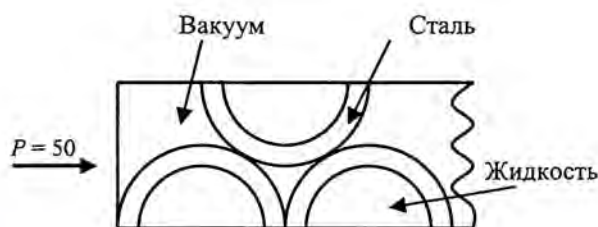


Рис. 6. Геометрия двумерного расчета

В работе [5] приводятся результаты расчетов этой задачи в нескольких постановках, в том числе и результаты прямого двумерного моделирования. Задача также может быть смоделирована в одномерном приближении заменой набора цилиндров, жидкости и вакуума смесью, содержащей усредненные по пространству объемные концентрации указанных компонентов. Кроме того, было показано, что вакуум может быть заменен пористой сталью или жидкостью, причем результаты расчетов от этого не зависят.

В настоящей работе по методам 1–5 проведены расчеты в лагранжевой постановке следующей одномерной задачи. Задавалась прямоугольная область $0 < x < 220$ с равномерной счетной сеткой из 440 ячеек. В области находилась смесь жидкости ($\beta_0 = 0,37, e_0 = 0$) и пористой стали ($\beta_1 = 0,63, e_1 = 0$) с начальной плотностью $\rho_1 = 6,65$. На левой границе задано постоянное давление $P = 50$.

На рис. 7 приведены профили среднего давления и давления компонентов, полученные в расчетах по методам 1 и 4. В расчете по методу 1 давления компонентов отличаются как между собой, так и от среднего давления. Тем не менее среднее давление практически совпадает с граничным давлением. При использовании методов 3 и 4 вблизи фронта УВ давления компонентов также, хотя и в меньшей степени, чем в методе 1, отличаются от среднего давления. Видно, что с помощью процедуры выравнивания давлений достаточно быстро давления компонентов выходят на среднее давление, равное заданному на границе.

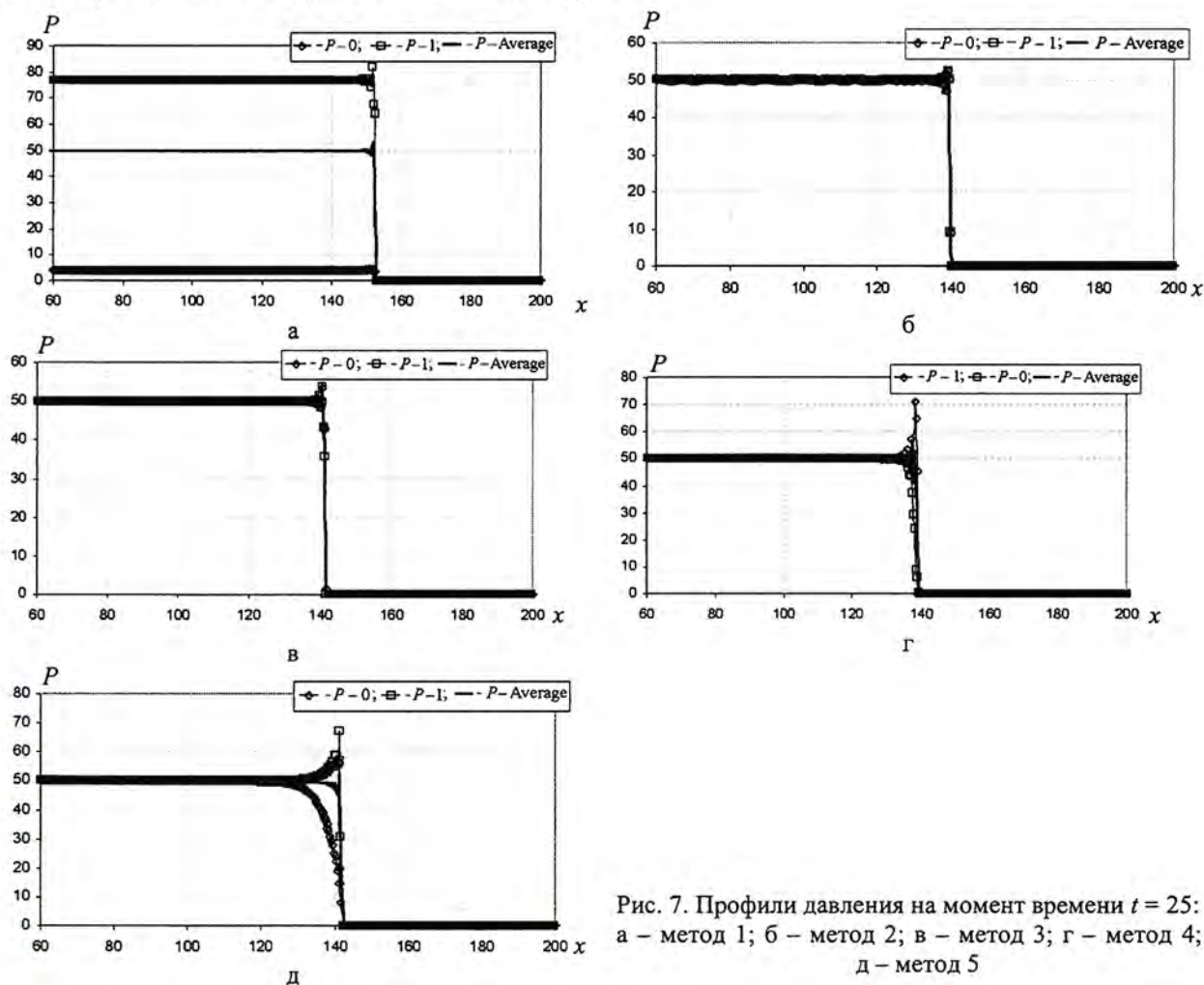


Рис. 7. Профили давления на момент времени $t = 25$: а – метод 1; б – метод 2; в – метод 3; г – метод 4; д – метод 5

На рис. 8 изображены $x-t$ диаграммы движения фронта УВ, которые сравниваются как между собой, так и с результатами прямого двумерного моделирования. Из представленных на рисунке данных следует, что скорость распространения ударной волны в методах 2–5 лучше согласуется с результатами прямого двумерного моделирования, чем получающаяся при использовании метода 1.

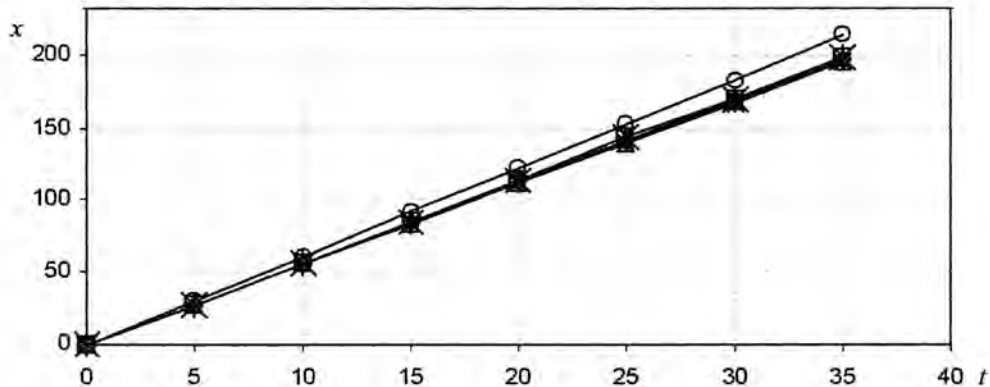


Рис. 8. $x-t$ диаграммы фронта УВ: \circ – метод 1; \triangle – метод 2; \diamond – метод 3; $*$ – метод 4; \square – метод 5; $*$ – 2D

Заключение

Исследованы несколько моделей замыкания уравнений газодинамики в смешанных ячейках (смесь гетерогенная). Показано, что из числа рассмотренных нельзя указать одну пригодную для всех случаев модель замыкающего соотношения для расчета течений гетерогенных смесей и выбор модели, вообще говоря, диктуется решаемой задачей. Однако с точки зрения моделирования смесей можно дать некоторые рекомендации по использованию рассмотренных моделей замыкания.

Следует сразу отметить, что в расчетах, в которых масса веществ в смешанных ячейках заметно меньше, чем масса веществ, охваченных существенным для рассматриваемой задачи движением, все рассмотренные модели замыкания могут дать удовлетворительные результаты. Отсюда следует, что в расчетах задач с контактными границами все рассмотренные модели могут дать приемлемый по точности результат.

Модель 1 имеет недостаточную точность в расчетах задач со смесями с сильно отличающимися сжимаемостями компонентов. Тем не менее в задаче о распаде разрыва (см. п. 2.1) неточность в определении параметров в единственной в задаче смешанной ячейке никак не повлияла на точность воспроизведения параметров в окружающих чистых ячейках. Это говорит о допустимости применения модели 1 в ряде задач, в которых смешанные ячейки существуют только из-за наличия контактных границ. Отметим, что это тем более справедливо для расчетов в эйлеровых переменных, в которых термодинамическое состояние в смешанных ячейках на контактных границах в значительной степени определяется конвективными потоками из чистых ячеек.

Модели 2, 3 и 4, которые в принципе основаны на едином физическом приближении – равенстве давления компонентов в смешанных ячейках, показали себя достаточно точными при моделировании ударно-волновых течений в тестовых расчетах больших областей смешанных ячеек. Однако требуется осторожный подход при моделировании слабо сжимаемых течений гетероген-

ных смесей с малым количеством смешанных ячеек, так как в этом случае может занижаться скорость распространения возмущений. Если сравнивать эти три модели между собой, то предпочтение необходимо отдать модели 3. Модель 2 отличается дороговизной и трудностью программной реализации вследствие необходимости итерационного решения уравнений газодинамики. Модель 4, по-видимому, ограничена только расчетами в чисто лагранжевой постановке со сравнимыми значениями объемных концентраций компонентов.

Возможно, более широкую область применения имеет модель 5. С одной стороны, она передает изменение скорости распространения возмущений в зависимости от размеров смешанной области при моделировании слабо сжимаемых течений гетерогенных смесей со структурными образованиями. С другой стороны, эта модель имеет приемлемую точность при моделировании ударно-волновых течений. Являясь как бы промежуточной между моделями 1 и 3, модель 5 свободна от недостатков указанных моделей, связанных с их предельным характером распределения полной дивергенции скорости смешанной ячейки по компонентам.

В заключение отметим, что более полную информацию о достоинствах и недостатках моделей замыкания могли бы дать эйлеровы расчеты, в которых объемные концентрации компонентов меняются в более широких (по сравнению с рассмотренными в данной работе) пределах (от 0 до 1), однако такие исследования выходят за рамки данной работы.

Список литературы

1. Янилкин Ю. В., Шанин А. А., Ковалев Н. П. Комплекс программ ЭГАК для расчетов двумерных течений многокомпонентной среды // ВАНТ. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1993. Вып. 4. С. 69–75.
2. Софронов И. Д., Дмитриев Н. А., Дмитриева Л. В., Малиновская Е. В. Методика расчета двумерных нестационарных задач газодинамики в переменных Лагранжа: Препринт № 59. ИПМ АН СССР, 1976.
3. Бахрах С. М., Спиридонов В. Ф., Шанин А. А. Метод расчета двумерных осесимметричных газодинамических течений неоднородной среды в лагранжево-эйлеровых переменных // Докл. АН СССР. 1984. Т. 278, № 4. С. 829–833.
4. Харлоу Ф. Х. Численный метод частиц в ячейках для задач гидродинамики // Вычислительные методы в гидродинамике. М.: Мир, 1967.
5. Жарова Г. В., Янилкин Ю. В. Комплекс программ ЭГАК. Алгоритм выравнивания давлений веществ в смешанных ячейках // ВАНТ. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1993. Вып. 3. С. 77–82.
6. Бондаренко Ю. А., Янилкин Ю. В. Расчет термодинамических параметров смешанных ячеек в газовой динамике // Там же. 2000. Вып. 4. С. 12–25.
7. Гончаров Е. А., Янилкин Ю. В. Новый метод расчета термодинамического состояния веществ в смешанных ячейках // Там же. 2004. Вып. 3. С. 16–30.
8. Делов В. И., Садчиков В. В. Сравнение некоторых моделей для расчета термодинамических параметров неоднородных по составу лагранжевых ячеек // Там же. 2005. Вып. 1. С. 57–70.
9. Гончаров Е. А., Колобянин В. Ю., Янилкин Ю. В. Метод замыкания уравнений газовой динамики в смешанных ячейках для гетерогенной смеси, основанный на равенстве скоростей компонентов // Там же. 2006. Вып. 4. С. 100–105.

10. Физика взрыва / Под ред. Л. П. Орленко. М.: Физматлит. Том 1. 2002. С. 711–713.
11. Бондаренко Ю. А., Воронин Б. Л., Делов В. И. Описание системы тестов для двумерных газодинамических методик и программ. Ч. 1. Требования к тестам. Тесты 1–7 // ВАНТ. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1991. Вып. 2. С. 3–9.

Collation of Optional Methods to Calculate Thermodynamic State of Mixed Cells in the Lagrangian Dynamics

E. A. Goncharov, V. Yu. Kolobyenin, V. V. Sadchikov, Yu. V. Yanilkin

The paper tackles upon several methods applied to calculate thermodynamic state of mixed cells in the Lagrangian dynamics, the difference between which refers to their trailing relations. Presented are the results of certain calculations, which enable collation of the above methods as to their effectiveness and precision. It is shown, that each of the methods under consideration enjoys its own application field, thus may be individually selected depending on the physical problem to be solved.