**УДК 517.958:536.2**

# МЕТОД ВЫДЕЛЕНИЯ ДИАГОНАЛЬНОЙ МАТРИЦЫ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ В $P_1$-ПРИБЛИЖЕНИИ ПО СХЕМЕ РОМБ

А. Д. Гаджиев, А. А. Шестаков
(РФЯЦ-ВНИИТФ)

Рассматривается метод выделения диагональной матрицы для ускорения итераций при численном решении уравнения переноса излучения в $P_1$-приближении по схеме РОМБ. Суть метода состоит в задании одностороннего потока излучения с предыдущей итерации на границах разностных ячеек и получении диагональной матрицы для определения температуры.

## Введение

Система уравнений переноса излучения и уравнения энергии представляют собой нелинейную систему. Если линеаризовать функцию Планка и внутреннюю энергию по температуре и исключить температуру, получим уравнение переноса излучения с полной матрицей рассеяния [1]. Если использовать метод простой итерации или итерации Зейделя, то получается медленно сходящийся процесс при больших оптических толщинах.

В работе Фотрие [1] для решения линеаризованной системы предложено применять прямой метод матричной прогонки. Объем вычислений этого метода пропорционален $IG^3$, где $I$ — число узлов разностной сетки, $G$ — число групп.

Если для решения линеаризованной системы для схем трехточечного типа использовать метод типа Якоби, получим метод из работы [2].

Другой подход для совместного решения уравнения энергии и многогруппового уравнения переноса излучения для схем трехточечного типа предложен Райбики [1] в 1971 г. В этом методе плотность излучения в данной точке выражается на основе прямого метода через функцию Планка во всех точках. Подставляя эту плотность излучения в уравнение энергии и линеаризуя по температуре, получаем систему уравнений с полной матрицей относительно температуры. Объем вычислений в этом методе пропорционален $GI^2 + I^3$.

Если в системе уравнений диффузии аналогично итерациям типа Якоби выразить плотность излучения через функцию Планка в той же точке и подставить это выражение в уравнение энергии, получим систему уравнений с диагональной матрицей относительно температуры. Используя полученную температуру, исходную систему можно решить либо прогонкой в одномерном случае, либо итерационными методами в двумерном случае. Такой метод итераций был предложен в работе [3].

Классические методы, используемые для решения задач спектральной диффузии, ориентированы на трехточечные разностные схемы с диагональным преобладанием, а схема РОМБ [4], используемая в данной работе, представляет собой двухточечную схему. Формально применить метод выделения диагонального элемента (ВДЭ) к двухточечным схемам не удается, так как он ориентирован на трехточечный шаблон с выделением диагонального члена. В работах [5, 6] предложено применять метод ВДЭ к двухточечной схеме РОМБ, записанной в эквивалентной трехточечной форме. Рассмотрено два варианта метода, обладающих достаточно высокой скоростью сходимости как в оптически прозрачных, так и в оптически плотных средах. Однако в многомерном случае привести схему РОМБ к трехточечной форме не удается. Приходится ограничиваться приближенными формулами приведения к трехточечному виду. Кроме того, в методе ВДЭ, реализованном в [7], используются упрощенные параметры разностной схемы $\delta = 1/(4m)$, $\theta = 0$, что бывает обременительным для некоторых задач. Поэтому стала актуальной задача построения итерационных методов типа ВДЭ для схемы РОМБ с произвольными параметрами $\delta$, $\theta$.

Для многомерных задач переноса излучения неясно, как применять прямые методы типа Фотрие или Райбики. Поэтому создание эффективных быстросходящихся итерационных методов в многомерном случае является актуальной задачей. В итерационном методе выделения диагональной матрицы (ВДМ), рассматриваемом в данной работе, предлагается использовать комбинацию плотности и потока излучения с предыдущей итерации на границах счетных ячеек. В качестве комбинации предлагается использовать либо односторонние потоки, либо инварианты Римана, либо счетные псевдоинварианты схемы РОМБ.

В разд. 1 рассмотрен метод ВДМ для схемы РОМБ в одномерном случае. В разд. 2 этот метод рассмотрен в двумерном случае. В разд. 3 рассмотрены численные расчеты модельной задачи.

## 1. Одномерный случай

**Постановка задачи.** Рассмотрим одномерную систему переноса лучистой энергии в многогрупповом $P_1$-приближении:

$$\frac{\rho}{c}\frac{d}{dt}\left(\frac{U_g}{\rho}\right) + \frac{\partial S_g}{\partial x} + \alpha_{cg}U_g = \alpha_{cg}B_g;$$
$$\beta\frac{\rho}{c}\frac{d}{dt}\left(\frac{S_g}{\rho}\right) + \frac{1}{3}\frac{\partial U_g}{\partial x} + \alpha_g S_g = 0;$$
$$\rho\frac{dE}{dt} = \sum_{g=1}^{G}\alpha_{cg}\left(U_g - B_g\right) + \rho Q.$$

Здесь $\rho$ — плотность вещества; $c$ — скорость света; $t$ — время; $x$ — координата; $U_g = \int\limits_{-1}^{1} J_g d\mu$ — плотность излучения энергетической группы $g$ $(g = 1, \ldots, G)$, умноженная на скорость света; $S_g = \int\limits_{-1}^{1} \mu J_g d\mu$ — поток излучения группы $g$; $J_g$ — интенсивность излучения группы $g$; $\varepsilon_g$ — энергия группы $g$; $Q$ — источник; $B_g$ — функция Планка; $\alpha_{cg}$ — коэффициент поглощения фотонов; $\alpha_{sg}$ — коэффициент рассеяния фотонов; $\alpha_g$ — коэффициент ослабления, $\alpha_g = \alpha_{cg} + \alpha_{sg}$; $E$ — внутренняя энергия вещества; $\beta = 0$ в случае диффузионного приближения, $\beta = 1$ в $P_1$-приближении.

Граничные условия имеют вид

$$\alpha_{0,g}U_g + \beta_{0,g}S_g = \varphi_{0,g}; \qquad \alpha_{1,g}U_g + \beta_{1,g}S_g = \varphi_{1,g},$$

где $\alpha_{0,g}$, $\beta_{0,g}$, $\varphi_{0,g}$, $\alpha_{1,g}$, $\beta_{1,g}$, $\varphi_{1,g}$ — параметры для задания граничных условий.

**Разностная аппроксимация по схеме РОМБ.** Сначала рассмотрим метод ВДМ для одномерного случая без учета движения среды. Система разностных $P_1$-уравнений имеет следующий вид (для упрощения записи здесь опущены индексы $g$ и $i + 1/2$) [5]:

$$\begin{aligned} &qU^{n+1} + \frac{1}{h}\Delta_i S^{n+1} = \frac{1}{c\tau}U^n + \alpha_c B^{n+1};\\ &q_2 S^{n+1} + \frac{1}{3h}\Delta_i U^{n+1} = \frac{\beta}{c\tau}S^n, \end{aligned} \tag{1}$$

где $q = \dfrac{1}{c\tau} + \alpha_c$; $q_2 = \dfrac{\beta}{c\tau} + \alpha_c + \alpha_s$; $h = x_{i+1} - x_i$.

Систему разностных уравнений (1) дополняем соотношениями, связывающими $U$ и $S$ с целыми и полуцелыми индексами:

$$U_{i+1/2} = \frac{U_{i+1} + U_i}{2} + \delta_{i+1/2}\Delta_i S; \qquad S_{i+1/2} = \frac{S_{i+1} + S_i}{2} + \theta_{i+1/2}\Delta_i U.$$

Параметры $\delta$, $\theta$ определяются ниже.

Подставляя соотношения связи в систему (1), получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} a_i^0 U_i + b_i^0 U_{i+1} + c_i^0 S_i + d_i^0 S_{i+1} = f_{i+1/2}^0; \\ a_i^1 U_i + b_i^1 U_{i+1} + c_i^1 S_i + d_i^1 S_{i+1} = f_{i+1/2}^1, \end{aligned} \tag{2}$$

где

$$a_i^0 = b_i^0 = c_i^1 = d_i^1 = 1; \quad c_i^0 = -2a_{i+1/2}; \quad d_i^0 = 2a_{i+1/2}; \quad a_{i+1/2} = \left(\delta + \frac{1}{qh}\right)_{i+1/2};$$

$$a_i^1 = -2m_{i+1/2}; \quad b_i^1 = 2m_{i+1/2}; \quad m = \left(\theta + \frac{1}{3q_2 h}\right)_{i+1/2}; \quad \delta = \frac{1}{4m}; \quad \theta = 0;$$

$$f_{i+1/2}^0 = \frac{2}{q_{i+1/2}}\left(\frac{1}{c\tau}U^n + \alpha_c B\right)_{i+1/2}; \quad f_{i+1/2}^1 = \frac{2}{q_{2,i+1/2}}\frac{\beta}{c\tau}S_{i+1/2}^n.$$

**Метод ВДМ.** Будем обсчитывать ячейку разностной сетки независимо от соседних интервалов. В качестве граничного условия на левой границе ячейки в точке $i$ будем рассматривать некоторую комбинацию искомых функций

$$\alpha_0^\nu U_i^{\nu+1/2} + \beta_0^\nu S_i^{\nu+1/2} = \varphi_0^\nu, \tag{3}$$

где $\varphi_0^\nu = \alpha_0^\nu U_i^\nu + \beta_0^\nu S_i^\nu$. В качестве граничного условия на правой границе ячейки в точке $i+1$ будем рассматривать аналогичную комбинацию

$$\alpha_1^\nu U_{i+1}^{\nu+1/2} - \beta_1^\nu S_{i+1}^{\nu+1/2} = \varphi_1^\nu, \tag{4}$$

где $\varphi_1^\nu = \alpha_1^\nu U_{i+1}^\nu - \beta_1^\nu S_{i+1}^\nu$.

Систему линейных уравнений (2) будем решать внутри данной ячейки методом встречной прогонки. Предполагаем связь между $U_i$ и $S_i$ в виде

$$X_i^+ U_i + Y_i^+ S_i = Z_i^+ \tag{5}$$

для прогонки вперед (в сторону роста $i$) и

$$X_i^- U_i - Y_i^- S_i = Z_i^- \tag{6}$$

для прогонки назад (в сторону убывания $i$).

Используя уравнения (5), (6), получаем рекуррентные соотношения для нахождения прогоночных коэффициентов:

$$\begin{aligned} X_{i+1}^+ &= < cb >_i X1_i^+ + < ba >_i Y1_i^+; \\ Y_{i+1}^+ &= < cd >_i X1_i^+ + < da >_i Y1_i^+; \\ Z_{i+1}^+ &= < cf >_i X1_i^+ + < fa >_i Y1_i^+ + < ac >_i Z1_i^+ \end{aligned} \tag{7}$$

с нормировкой

$$X1_{i+1}^+ = \frac{X_{i+1}^+}{X_{i+1}^+ + Y_{i+1}^+}; \quad Y1_{i+1}^+ = \frac{Y_{i+1}^+}{X_{i+1}^+ + Y_{i+1}^+}; \quad Z1_{i+1}^+ = \frac{Z_{i+1}^+}{X_{i+1}^+ + Y_{i+1}^+}; \quad i = 0, 1, \ldots, I-1,$$

где

$$< cb >= c^1 b^0 - c^0 b^1, \quad < ba >= b^1 a^0 - b^0 a^1 \text{ и т. д.};$$

$$a_i^0 = b_i^0 = c_i^1 = d_i^1 = 1; \quad c_i^0 = -2a_{i+1/2}; \quad d_i^0 = 2a_{i+1/2}; \quad a_{i+1/2} = \left(\delta + \frac{1}{qh}\right)_{i+1/2};$$

$$a_i^1 = -2m_{i+1/2}; \quad b_i^1 = 2m_{i+1/2}; \quad m = \left(\theta + \frac{1}{3q_2 h}\right)_{i+1/2}; \quad \delta = \frac{1}{4m}; \quad \theta = 0;$$

$$f_{i+1/2}^0 = \frac{2}{q_{i+1/2}} \left(\frac{1}{c\tau} U^n + \alpha_c B\right)_{i+1/2}; \quad f_{i+1/2}^1 = \frac{2}{q_{2,i+1/2}} \frac{\beta}{c\tau} S_{i+1/2}^n.$$

В силу граничного условия на границе $\Gamma_0$ $(i = 0)$ имеем $X_0^+ = \alpha_0$; $Y_0^+ = \beta_0$; $Z_0^+ = \varphi_0$.

Для прогонки назад

$$\begin{aligned} X_i^- &=< da >_i X1_{i+1}^- + < ba >_i Y1_{i+1}^-; \\ Y_i^- &=< cd >_i X1_{i+1}^- + < cb >_i Y1_{i+1}^-; \\ Z_i^- &=< df >_i X1_{i+1}^- + < bf >_i Y1_{i+1}^- + < bd >_i Z1_{i+1}^- \end{aligned} \tag{8}$$

с нормировкой

$$X1_i^- = \frac{X_i^-}{X_i^- + Y_i^-}; \quad Y1_i^- = \frac{Y_i^-}{X_i^- + Y_i^-}; \quad Z1_i^- = \frac{Z_i^-}{X_i^- + Y_i^-}; \quad i = I-1, I-2, \ldots, 1, 0.$$

В силу граничного условия на границе $\Gamma_1$ $(i = I)$ имеем $X_I^- = \alpha_1$; $Y_I^- = \beta_1$; $Z_I^- = \varphi_1$.

После проведения встречных прогонок вычисляем $U_i$, $S_i$ по формулам

$$U_i = \frac{Y_i^- Z_i^+ + Y_i^+ Z_i^-}{X_i^+ Y_i^- + X_i^- Y_i^+}; \qquad S_i = \frac{X_i^- Z_i^+ - X_i^+ Z_i^-}{X_i^+ Y_i^- + X_i^- Y_i^+}.$$

Делая в разностной ячейке один шаг для прогонки вперед от точки $i$ и один шаг для прогонки назад от точки $i+1$ по формулам (7), (8), получаем в этих точках уравнения

$$X_{i+1}^+ U_{i+1}^{\nu+1/2} + Y_{i+1}^+ S_{i+1}^{\nu+1/2} = \left(Z_{i+1}^+\right)^{\nu+1/2}; \tag{9}$$

$$X_i^- U_i^{\nu+1/2} - Y_i^- S_i^{\nu+1/2} = \left(Z_i^-\right)^{\nu+1/2}. \tag{10}$$

Из уравнений (3), (10) получаем

$$U_i = \frac{\varphi_0 Y_i^- + \beta_0 Z_i^-}{\alpha_0 Y_i^- + \beta_0 X_i^-}; \qquad S_i = \frac{\varphi_0 X_i^- - \alpha_0 Z_i^-}{\alpha_0 Y_i^- + \beta_0 X_i^-}. \tag{11}$$

Из уравнений (4), (9) получаем

$$U_{i+1} = \frac{\varphi_1 Y_{i+1}^+ + \beta_1 Z_{i+1}^+}{\alpha_1 Y_{i+1}^+ + \beta_1 X_{i+1}^+}; \qquad S_{i+1} = \frac{\alpha_1 Z_{i+1}^+ - \varphi_1 X_{i+1}^+}{\alpha_1 Y_{i+1}^+ + \beta_1 X_{i+1}^+}. \tag{12}$$

Из формул (11), (12) с учетом рекуррентных значений (7), (8) для $Z_i^+$, $Z_{i+1}^+$ получаем

$$\Delta_i S = a_{11} B_{i+1/2} + a_{12}, \tag{13}$$

где

$$a_{11} = 2\frac{\alpha_c}{q} a_1; \quad a_1 = \frac{\alpha_1}{W_{i+1}} \left(X1_i^+ + 2mY1_i^+\right) + \frac{\alpha_0}{W_i} \left(X1_{i+1}^- + 2mY1_{i+1}^-\right);$$

$$W_i = \alpha_0 Y_i^- + \beta_0 X_i^-; \quad W_{i+1} = \alpha_1 Y_{i+1}^+ + \beta_1 X_{i+1}^+; \quad a = \delta + \frac{1}{qh}; \quad m = \theta + \frac{1}{3q_2 h};$$

$$a_{12} = \frac{2a_1}{c\tau q} U_{i+1/2}^n + \frac{2a_2 \beta}{c\tau q_2} S_{i+1/2}^n + (R_1)_{i+1/2}^\nu; \quad a_2 = \frac{\alpha_1}{W_{i+1}} \left(2aX1_i^+ + Y1_i^+\right) - \frac{\alpha_0}{W_i} \left(2aX1_{i+1}^- + Y1_{i+1}^-\right);$$

$$(R_1)_{i+1/2} = \left(4a_{i+1/2} m_{i+1/2} - 1\right) \left(\frac{\alpha_1}{W_{i+1}} Z1_i^+ + \frac{\alpha_0}{W_i} Z1_{i+1}^-\right) - \frac{\varphi_1}{W_{i+1}} X_{i+1}^+ - \frac{\varphi_0}{W_i} X_i^-.$$

Подставляя выражение (13) в первое уравнение системы (1), получаем явную формулу для плотности излучения:

$$U^{\nu+1/2}_{i+1/2} = \frac{1}{q_{i+1/2}} \left[ \left( \alpha_c - \frac{a_{11}}{h} \right) B^{\nu+1/2} + \frac{1}{c\tau} U^n - \frac{a_{12}}{h} \right]_{i+1/2}. \tag{14}$$

Выражая аналогично $\Delta_i U$ и подставляя его во второе уравнение системы (1), получаем

$$\Delta_i U^{\nu+1/2} = a_{21} B^{\nu+1/2}_{i+1/2} + a_{22};$$

$$S^{\nu+1/2}_{i+1/2} = \frac{1}{q_{2,i+1/2}} \left[ \frac{\beta}{c\tau} S^n - \frac{1}{3h} \left( a_{21} B^{\nu+1/2} + a_{22} \right) \right]_{i+1/2}, \tag{15}$$

где

$$a_{21} = 2\frac{\alpha_c}{q} b_1; \quad b_1 = \frac{\beta_1}{W_{i+1}} \left( X1^+_i + 2mY1^+_i \right) - \frac{\beta_0}{W_i} \left( X1^-_{i+1} + 2mY1^-_{i+1} \right);$$

$$a_{22} = \frac{2b_1}{c\tau q} U^n_{i+1/2} + \frac{2b_2\beta}{c\tau q_2} S^n_{i+1/2} + (R_2)^\nu_{i+1/2}; \quad b_2 = \frac{\beta_1}{W_{i+1}} \left( 2aX1^+_i + Y1^+_i \right) + \frac{\beta_0}{W_i} \left( 2aX1^-_{i+1} + Y1^-_{i+1} \right);$$

$$(R_2)_{i+1} = \left( 4a_{i+1/2} m_{i+1/2} - 1 \right) \left( \frac{\beta_1}{W_{i+1}} Z1^+_i - \frac{\beta_0}{W_i} Z1^-_{i+1} \right) + \frac{\varphi_1}{W_{i+1}} Y^+_{i+1} - \frac{\varphi_0}{W_i} Y^-_i.$$

Если в формулу (15) подставить функцию $B$ из формулы (14), то можно найти поток по формуле

$$S^{n+1}_{i+1/2} = \frac{1}{q_{2,i+1/2}} \left[ \frac{\beta}{c\tau} S^n - \frac{1}{3h} \left( a_{21} \frac{qU^{n+1} - \dfrac{1}{c\tau} U^n + \dfrac{a_{12}}{h}}{\alpha_c - \dfrac{a_{11}}{h}} + a_{22} \right) \right]_{i+1/2}. \tag{16}$$

Подставляя формулу (14) в уравнение энергии и линеаризуя его по температуре, получаем выражение для нахождения температуры:

$$T^{k+1}_{i+1/2} = T^k_{i+1/2} + \left[ \frac{\rho \left( E^n - E^k \right) + \tau \sum\limits_{g=1}^{G} \alpha^\nu_{cg} \left( U^k_g - B^k_g \right)}{\rho E^k_T + \tau \sum\limits_{g=1}^{G} \alpha^\nu_{cg} b^\nu_g B^\nu_{g,T}} \right]_{i+1/2}, \tag{17}$$

где $U^k = \dfrac{1}{q} \left[ \left( \alpha_c - \dfrac{a^\nu_{11}}{h} \right) B^k + \dfrac{1}{c\tau} U^n - \dfrac{a^\nu_{12}}{h} \right]$; $b = \dfrac{1}{c\tau q} + \dfrac{a_{11}}{qh}$.

При сходимости ньютоновских итераций по линеаризации $E(T)$ и $B_g(T)$ получаем температуру $T^{\nu+1/2}$, которая используется на втором этапе для вычисления комбинаций $\varphi^{\nu+1}_0$, $\varphi^{\nu+1}_1$ во всех точках разностной и энергетической сеток.

В данной работе рассматривалось три вида комбинаций:

1. Односторонний поток, т. е. функция $\varphi$ выбиралась в виде

$$(\varphi_0)_{g,i} = \frac{1}{4} U_{g,i} + \frac{1}{2} S_{g,i}; \quad (\varphi_1)_{g,i} = \frac{1}{4} U_{g,i} - \frac{1}{2} S_{g,i}.$$

2. Инвариант Римана:

$$(\varphi_0)_{g,i} = \frac{1}{\sqrt{3}} U_{g,i} + S_{g,i}; \quad (\varphi_1)_{g,i} = \frac{1}{\sqrt{3}} U_{g,i} - S_{g,i}.$$

3. Счетный псевдоинвариант:

$$(\varphi_0)_{g,i} = \left( X^+ U \right)_{g,i} + \left( Y^+ S \right)_{g,i}; \quad (\varphi_1)_{g,i} = \left( X^- U \right)_{g,i} - \left( Y^- S \right)_{g,i}.$$

Наиболее простыми являются первые два варианта. В третьем варианте обязательно должна быть реализована встречная прогонка (в первом и втором достаточно потоковой прогонки), а также необходима большая оперативная память для хранения массивов $X^+$, $Y^+$, $X^-$, $Y^-$, $a_i$, $b_i$, $c_i$, $d_i$ со второго этапа для всех групп ускоряющего этапа.

В вариантах 1 и 2 несложно показать, что коэффициент $\alpha_c - a_{11}/h$, входящий в знаменатель формулы (16), всегда больше нуля. Для одностороннего потока получаем

$$\alpha_0 = \alpha_1 = X_i^+ = X_{i+1}^- = \frac{1}{4}; \quad \beta_0 = \beta_1 = Y_i^+ = Y_{i+1}^- = \frac{1}{2}; \quad X1_i^+ = X1_{i+1}^- = \frac{1}{3}; \quad Y1_i^+ = Y1_{i+1}^- = \frac{2}{3};$$
$$X_i^- = X_{i+1}^+ = \frac{1+8m+4am}{3}; \quad Y_i^- = Y_{i+1}^+ = \frac{2\,(1+2a+4am)}{3}; \quad W_i = W_{i+1} = \frac{(1+a)\,(1+4m)}{3};$$
$$a_1 = \frac{1+4m}{12}\left(\frac{1}{W_i} + \frac{1}{W_{i+1}}\right) = \frac{1}{2\,(a+1)}; \quad a_{11} = \frac{\alpha_c}{q\,(a+1)}.$$

Тогда $\alpha_c - \dfrac{a_{11}}{h} = \alpha_c \dfrac{1+\delta}{1+\delta+\dfrac{1}{qh}} > 0$ при $\delta \geq 0$, $\alpha_c > 0$.

Для инварианта Римана получаем

$$\alpha_0 = \alpha_1 = X_i^+ = X_{i+1}^- = \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad \beta_0 = \beta_1 = Y_i^+ = Y_{i+1}^- = 1;$$
$$X1_i^+ = X1_{i+1}^- = \frac{1}{\sqrt{3}+1}; \quad Y1_i^+ = Y1_{i+1}^- = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1};$$
$$X_i^- = X_{i+1}^+ = \frac{1+4am+4m\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}; \quad Y_i^- = Y_{i+1}^+ = \frac{4a+(1+4am)\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1};$$
$$W_i = W_{i+1} = \frac{2}{\sqrt{3}+1}\left(1+\frac{2a}{\sqrt{3}}\right)\left(1+2m\sqrt{3}\right); \quad a_1 = \frac{1}{2a+\sqrt{3}}.$$

Тогда $\alpha_c - \dfrac{a_{11}}{h} = \alpha_c \dfrac{\sqrt{3}+2\delta}{\sqrt{3}+2a} > 0$ при $\delta \geq 0$, $\alpha_c > 0$.

## 2. Двумерный случай

**Постановка задачи.** Рассмотрим двумерную систему переноса лучистой энергии в многогрупповом $P_1$-приближении с учетом движения среды [5]:

$$\begin{aligned}
&\frac{\rho}{c}\frac{d}{dt}\left(\frac{U_g}{\rho}\right) + \mathrm{div}\left(\vec{\Phi}_g\right) + \alpha_{cg}U_g = \alpha_{cg}B_g - \frac{1}{3c}U_g \mathrm{div}\left(\vec{u}\right);\\
&\beta\frac{\rho}{c}\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{\Phi}_g}{\rho}\right) + \frac{1}{3}\nabla U_g + \alpha_g\vec{\Phi}_g = 0;\\
&\rho\frac{dE}{dt} = \sum_{g=1}^{G}\alpha_{cg}\left(U_g - B_g\right) + \rho Q.
\end{aligned} \tag{18}$$

Здесь $U_g = \int\limits_{\Omega} J_g d\vec{\Omega}$ — плотность излучения группы $g$, умноженная на скорость света; $\vec{\Phi}_g = \int\limits_{\Omega} \vec{\Omega} J_g d\vec{\Omega}$ — поток излучения группы $g$ $(g = 1, \ldots, G)$; $J_g$ — интенсивность излучения группы $g$; $\vec{u}$ — скорость движения среды.

Граничные условия имеют вид

$$\alpha_g U_g + \beta_g\left(\vec{\Phi}_g, \vec{n}\right) = \varphi_g,$$

где $\alpha_g$, $\beta_g$, $\varphi_g$ — параметры для задания граничных условий; $\vec{n}$ — внешняя нормаль.

**Разностная аппроксимация.** Система разностных $P_1$-уравнений относительно нормальных составляющих вектора потока излучения $(S_1)_{i+1/2}$, $(S_2)_{j+1/2}$ имеет вид (для упрощения записи здесь опущен индекс $g$)

$$\begin{aligned}
&\frac{\rho}{c\tau}\Delta^n\left(\frac{U}{\rho}\right)+\frac{1}{\Delta v}\Big(\Delta_i\left(rS_1\right)+\Delta_j\left(rS_2\right)\Big)^{n+1}+\alpha_c U^{n+1}=\alpha_c B^{n+1}-\frac{1}{3c}U^{n+1}\mathrm{div}_h\vec{u};\\
&\beta\frac{\rho}{c\tau}\Delta^n\left(\frac{S_1}{\rho}\right)+\frac{1}{\Delta s}\left(M_{i+1/2}\Delta_i U-M_{j+1/2}\Delta_j U\right)^{n+1}+(\alpha S_1)^{n+1}=0;\\
&\beta\frac{\rho}{c\tau}\Delta^n\left(\frac{S_2}{\rho}\right)+\frac{1}{\Delta s}\left(L_{i+1/2}\Delta_i U-L_{j+1/2}\Delta_j U\right)^{n+1}+(\alpha S_2)^{n+1}=0,
\end{aligned}\tag{19}$$

где $\Delta s$ — площадь разностной ячейки; $\Delta v$ — объем разностной ячейки в цилиндрически-симметричной геометрии; остальные величины определены в работе [5].

Систему разностных уравнений (19) дополняем соотношениями, связывающими $U$ и $S$ с целыми и полуцелыми индексами:

$$\begin{aligned}
&U_{i+1/2}=\frac{U_{i+1}+U_i}{2}+\delta_{i+1/2}\Delta_i S_1; \qquad U_{j+1/2}=\frac{U_{j+1}+U_j}{2}+\delta_{j+1/2}\Delta_j S_2;\\
&S_{1,i+1/2}=\frac{S_{1,i+1}+S_{1,i}}{2}+\theta_{i+1/2}\Delta_i U; \quad S_{2,j+1/2}=\frac{S_{2,j+1}+S_{2,j}}{2}+\theta_{j+1/2}\Delta_j U.
\end{aligned}\tag{20}$$

Параметры $\delta$, $\theta$ определяются ниже.

Систему диффузионных уравнений будем решать итерационным методом стабилизирующей поправки (ИМСП) [8]:

$$\begin{aligned}
&qU^{\mu+1/2}+\frac{1}{\Delta v}\Delta_i\left(rS_1\right)^{\mu+1/2}=\frac{1}{c\tau}\frac{\rho^{n+1}}{\rho^n}U^n+\alpha_c B^{\mu+1/2}-\frac{1}{\Delta v}\Delta_j\left(rS_2\right)^{\mu};\\
&q_2 S_1^{\mu+1/2}+\frac{M_{i+1/2}}{\Delta s}\Delta_i U^{\mu+1/2}=\frac{\beta}{c\tau}\frac{\rho^{n+1}}{\rho^n}S_1^n+\frac{M_{j+1/2}}{\Delta s}\Delta_j U^{\mu};\\
&qU^{\mu+1}+\frac{1}{\Delta v}\Delta_j\left(rS_2\right)^{\mu+1}=qU^{\mu+1/2}+\frac{1}{\Delta v}\Delta_j\left(rS_2\right)^{\mu};\\
&q_2 S_2^{\mu+1}-\frac{L_{j+1/2}}{\Delta s}\Delta_j U^{\mu+1}=\frac{\beta}{c\tau}\frac{\rho^{n+1}}{\rho^n}S_2^n-\frac{L_{i+1/2}}{\Delta s}\Delta_i U^{\mu+1/2},
\end{aligned}\tag{21}$$

где $q=\dfrac{1}{c\tau}+\alpha_c+\dfrac{1}{3c}\,\mathrm{div}_h\vec{u}$; $q_2=\dfrac{\beta}{c\tau}+\alpha_c+\alpha_S$.

Подставляя соотношения связи (20) в систему (21), получаем на первом этапе ИМСП следующие уравнения:

$$\begin{aligned}
&a_i^0U_i+b_i^0U_{i+1}+c_i^0S_{1i}+d_i^0S_{1i+1}=f_{i+1/2}^0;\\
&a_i^1U_i+b_i^1U_{i+1}+c_i^1S_{1i}+d_i^1S_{1i+1}=f_{i+1/2}^1,
\end{aligned}\tag{22}$$

где

$$\begin{aligned}
&a_i^0=b_i^0=c_i^1=d_i^1=1; \quad c_i^0=-2\left(\delta_{i+1/2}+\frac{r_i}{q\Delta v}\right); \quad d_i^0=2\left(\delta_{i+1/2}+\frac{r_{i+1}}{q\Delta v}\right);\\
&a_i^1=-2m_{i+1/2}; \qquad b_i^1=2m_{i+1/2}; \qquad m=\left(\theta+\frac{M}{q_2\Delta s}\right)_{i+1/2}; \quad \delta=\frac{1}{4m}; \quad \theta=0;\\
&f_{i+1/2}^0=\frac{2}{q_{i+1/2}}\left(\frac{1}{c\tau}\frac{\rho^{n+1}}{\rho^n}U^n+\alpha_c B^{\mu+1/2}-\frac{1}{\Delta v}\Delta_j\left(rS_2\right)^{\mu}\right);\\
&f_{i+1/2}^1=\frac{2}{q_{2,i+1/2}}\left(\frac{\beta}{c\tau}\frac{\rho^{n+1}}{\rho^n}S_1^n+\frac{M_{j+1/2}}{\Delta s}\Delta_j U^{\mu}\right).
\end{aligned}\tag{23}$$

На втором этапе получаем систему

$$
\begin{aligned}
&a_j^0 U_j + b_j^0 U_{j+1} + c_j^0 S_{2j} + d_j^0 S_{2j+1} = f_{j+1/2}^0;\\
&a_j^1 U_j + b_j^1 U_{j+1} + c_j^1 S_{2j} + d_j^1 S_{2j+1} = f_{j+1/2}^1,
\end{aligned}
\tag{24}
$$

где

$$
\begin{aligned}
&a_j^0 = b_j^0 = c_j^1 = d_j^1 = 1; \quad c_j^0 = -2\left(\delta_{j+1/2} + \frac{r_j}{q\Delta v}\right); \quad d_j^0 = 2\left(\delta_{j+1/2} + \frac{r_{j+1}}{q\Delta v}\right);\\
&a_j^1 = -2m_{j+1/2}; \quad b_j^1 = 2m_{j+1/2}; \quad m = \left(\theta + \frac{M}{q_2\Delta s}\right)_{j+1/2}; \quad \delta = \frac{1}{4m}; \quad \theta = 0;\\
&f_{j+1/2}^0 = \frac{2}{q}\left(qU^{\mu+1/2} + \frac{1}{\Delta v}\Delta_j\left(rS_2\right)^\mu\right); \quad f_{j+1/2}^1 = \frac{2}{q_2}\left(\frac{\beta}{c\tau}\frac{\rho^{n+1}}{\rho^n}S_2^n - \frac{L_{i+1/2}}{\Delta s}\Delta_j U^{\mu+1/2}\right).
\end{aligned}
\tag{25}
$$

Системы линейных уравнений (22)—(25) решаются методом встречной прогонки.

**Метод ВДМ.** В этом методе односторонние потоки $\varphi$ на всех четырех гранях ячейки задаются с предыдущей итерации. Далее из системы разностных уравнений (20)—(23) выразим плотность излучения $U_{i+1/2,j+1/2}$ через функцию Планка $B_{i+1/2,j+1/2}$. Выписывая выражения $U$, $S$ на гранях разностной ячейки аналогично формулам (11), (12) и составляя разности $\Delta U$, $\Delta S$, получаем систему четырех уравнений:

$$
\begin{aligned}
&\Delta_i U = a_{11}B - a_{12}\Delta_j\left(rS_2\right) + a_{13}\Delta_j U + a_{14};\\
&\Delta_i\left(rS_1\right) = a_{21}B - a_{22}\Delta_j\left(rS_2\right) + a_{23}\Delta_j U + a_{24};\\
&\Delta_j U = a_{31}B - a_{32}\Delta_i\left(rS_1\right) + a_{33}\Delta_i U + a_{34};\\
&\Delta_j\left(rS_2\right) = a_{41}B - a_{42}\Delta_i\left(rS_1\right) + a_{43}\Delta_i U + a_{44},
\end{aligned}
\tag{26}
$$

где

$$
\begin{aligned}
&a_{11} = 2b_{11,i}\left(\frac{\alpha_c}{q}\right)_{i+1/2,j+1/2}; \quad b_{11,i} = \frac{\beta_{1,i+1}}{W_{i+1}}M_i^+ - \frac{\beta_{0,i}}{W_i}M_{i+1}^-;\\
&M_i^+ = X1_i^+ + 2m_{i+1/2,j+1/2}Y1_i^+; \quad M_{i+1}^- = X1_{i+1}^- + 2m_{i+1/2,j+1/2}Y1_{i+1}^-;\\
&a_{12} = \frac{2b_{11,i}}{(q\Delta V)_{i+1/2,j+1/2}}; \quad a_{13} = \frac{2M_j b_{12,i}}{(q_2\Delta S)_{i+1/2,j+1/2}}; \quad b_{12,i} = \frac{\beta_{1,i+1}}{W_{i+1}}A_i^+ + \frac{\beta_{0,i}}{W_i}A_{i+1}^-;\\
&W_i = \alpha_{0,i}Y_i^- + \beta_{0,i}X_i^-; \quad W_{i+1} = \alpha_{1,i+1}Y_{1,i+1}^+ + \beta_{1,i+1}X_{1,i+1}^+;\\
&A_i^+ = 2a_i X1_i^+ + Y1_i^+; \quad A_{i+1}^- = 2a_{i+1}X1_{i+1}^- + Y1_{i+1}^-;\\
&a_i = \delta_{i+1/2} + \frac{r_i}{(q\Delta V)_{i+1/2,j+1/2}}; \quad a_{i+1} = \delta_{i+1/2} + \frac{r_{i+1}}{(q\Delta V)_{i+1/2,j+1/2}};\\
&a_{14} = \frac{2}{c\tau}b_{11,i}\left(\frac{\rho^{n+1}}{\rho^n q}U^n\right)_{i+1/2,j+1/2} + \frac{2\beta}{c\tau}b_{12,i}\left(\frac{\rho^{n+1}}{\rho^n q_2}S_1^n\right)_{i+1/2,j+1/2} + R_1^\nu;\\
&R_1^\nu = \frac{\beta_{1,i+1}}{W_{i+1}}Z1_i^+\left(4a_i m_{i+1/2} - 1\right) - \frac{\beta_{0,i}}{W_i}Z1_{i+1}^-\left(4a_{i+1}m_{i+1/2} - 1\right) + \frac{\varphi_{1,i+1}^\nu}{W_{i+1}}Y_{1,i+1}^+ - \frac{\varphi_{0,i}^\nu}{W_i}Y_{0,i}^-;\\
&a_{21} = 2b_{21,i}\left(\frac{\alpha_c}{q}\right)_{i+1/2,j+1/2}; \quad b_{21,i} = \left(\frac{r\alpha_1}{W}\right)_{i+1}M_i^+ + \left(\frac{r\alpha_0}{W}\right)_i M_{i+1}^-;\\
&a_{22} = \frac{2b_{21,i}}{(q\Delta V)_{i+1/2,j+1/2}}; \quad a_{23} = \frac{2M_j b_{22,i}}{(q_2\Delta S)_{i+1/2,j+1/2}}; \quad b_{22,i} = \left(\frac{r\alpha_1}{W}\right)_{i+1}A_i^+ - \left(\frac{r\alpha_0}{W}\right)_i A_{i+1}^-;
\end{aligned}
$$

$$a_{24} = \frac{2}{c\tau} b_{21,i} \left( \frac{\rho^{n+1}}{\rho^n q} U^n \right)_{i+1/2,j+1/2} + \frac{2\beta}{c\tau} b_{22,i} \left( \frac{\rho^{n+1}}{\rho^n q_2} S^n \right)_{i+1/2,j+1/2} + R_2^\nu;$$

$$R_2^\nu = \left( \frac{r\alpha_1}{W} \right)_{i+1} Z1_i^+ \left( 4a_i m_{i+1/2} - 1 \right) + \left( \frac{r\alpha_0}{W} \right)_i Z1_{i+1}^- \left( 4a_{i+1} m_{i+1/2} - 1 \right) - \left( \frac{r\varphi_1^\nu}{W} \right)_{i+1} X_{i+1}^+ - \left( \frac{r\varphi_0^\nu}{W} \right)_i X_i^-;$$

$a_{31}$ и т. д. определяются аналогично, с заменой индексов $i$ индексами $j$.

Из системы (26) можно получить соотношения

$$\begin{aligned} a_i \Delta_i \left( rS_1 \right) &= b_i B_{i+1/2,j+1/2} + f_i; \\ a_j \Delta_j \left( rS_2 \right) &= b_j B_{i+1/2,j+1/2} + f_j, \end{aligned} \tag{27}$$

где

$$a_i = 1 - a_{22}a_{42} + a_{23}a_{32} - R_i(a_{12}a_{42} - a_{13}a_{32}); \quad b_i = a_{21} - a_{22}a_{41} + a_{23}a_{31} + R_i(a_{11} - a_{12}a_{41} + a_{13}a_{31});$$

$$f_i = a_{24} - a_{22}a_{44} + a_{23}a_{34} + R_i \left( a_{14} - a_{12}a_{44} + a_{13}a_{34} \right); \quad R_i = \frac{-a_{22}a_{43} + a_{23}a_{33}}{1 + a_{12}a_{43} - a_{13}a_{33}};$$

$$a_j = 1 - a_{42}a_{22} + a_{43}a_{12} - R_j(a_{32}a_{22} - a_{33}a_{12}); \quad b_j = a_{41} - a_{42}a_{21} + a_{43}a_{11} + R_j(a_{31} - a_{32}a_{21} + a_{33}a_{11});$$

$$f_j = a_{44} - a_{42}a_{24} + a_{43}a_{14} + R_j \left( a_{34} - a_{32}a_{24} + a_{33}a_{14} \right); \quad R_j = \frac{-a_{42}a_{23} + a_{43}a_{13}}{1 + a_{32}a_{23} - a_{33}a_{13}}.$$

Подставляя соотношения (27) в первое уравнение системы (18), получаем явную формулу для плотности излучения:

$$U^{n+1} = \frac{1}{q} \left[ \frac{1}{c\tau} U^n + \left( \alpha_c - \frac{b_i}{a_i \Delta V} - \frac{b_j}{a_j \Delta V} \right) B^{n+1} - \frac{f_i}{a_i \Delta V} - \frac{f_j}{a_j \Delta V} \right], \tag{28}$$

где $q = \dfrac{1}{c\tau} + \alpha_c + \dfrac{1}{3c} \mathrm{div}_h \vec{u}$. Величины $\varphi_{i,i+1}^\nu$, $\varphi_{j,j+1}^\nu$ входят в $f_i$, $f_j$ соответственно.

Таким образом, исходя из заданных значений $\varphi^\nu$ на гранях данной ячейки получена формула связи $U$ с $B$ непосредственно на основании разностных формул схемы РОМБ.

Используя выражение (28) в линеаризованном уравнении энергии, получаем формулу для определения температуры вида (17), где

$$U^k = \frac{1}{q} \left[ \frac{1}{c\tau} U^n + \left( \alpha_c - \frac{b_i}{a_i \Delta V} - \frac{b_j}{a_j \Delta V} \right) B^k - \frac{f_i}{a_i \Delta V} - \frac{f_j}{a_j \Delta V} \right]; \quad b = \frac{1}{c\tau q} + \frac{b_i}{q a_i \Delta V} + \frac{b_j}{q a_j \Delta V}.$$

## 3. Численные расчеты

Отработка нового итерационного метода проводилась на задаче, построенной по аналогии со второй задачей Флека [9].

На внутреннюю поверхность сферического слоя толщиной 4 см (радиус внутренней сферы 100 см, внешней — 104 см) падает планковский поток излучения, соответствующий температуре вещества $T = 1$. Слой состоит из трех физических областей: область 1 — $100 < r < 102$; область 2 — $102 < r < 102,4$; область 3 — $102,4 < r < 104$.

Спектральные граничные условия на верхней границе имеют вид $\dfrac{1}{4} U_g - \dfrac{1}{2} S_g = 0$. На нижней границе $\dfrac{1}{4} U_g + \dfrac{1}{2} S_g = \dfrac{1}{4} B_g$ ($T = 1$). На боковых границах областей, которые лежат на оси симметрии, задаются теплоизолированные стенки: $S_g = 0$. Коэффициент поглощения вычисляется по формуле $\alpha_c = \chi \left( 1 - e^{-\varepsilon/T} \right) / \varepsilon^3$, $\chi = 27$ в областях 1, 3, $\chi = 10\,000$ в области 2. Коэффициент рассеяния $\alpha_s = 0$.

Начальная температура в областях $T_{1,2,3} = 0{,}00001$; уравнение состояния вещества $E_{1,2,3} = 0{,}81T$; плотность вещества $\rho_{1,2,3} = 1$.

По энергетической переменной расчеты выполнены на сетке $\varepsilon_g = 15{,}0$; 12,0; 10,0; 8,0; 7,0; 6,0; 5,5; 5,0; 4,5; 4,0; 3,5; 3,0; 2,6; 2,2; 1,8; 1,4; 1,0; 0,7; 0,5; 0,4; 0,3; 0,2; 0,15; 0,1; 0,08; 0,06; 0,04; 0,02; 0,0 (число групп 28). Пространственная сетка — равномерная в каждой области: по радиусу — 28, 16, 24 интервала соответственно в областях 1, 2, 3, по углу — 80 интервалов для всех областей. Шаг по времени $\tau = 0{,}0002$. Итерационный пересчет решения на каждом временном шаге проводился до вычисления температуры вещества с точностью 0,001 % ($\varepsilon_{\text{сх}} = 0{,}00001$).

Расчеты проводились по схемам 1-го и 2-го порядков аппроксимации. Схема 1-го порядка считалась с параметрами $\delta = \sqrt{z}/2$; $\theta = 1/(2\sqrt{z})$; $z = 3/\Delta s$, где $\Delta s$ — площадь разностной ячейки (в одномерном случае $\Delta s$ заменяется на 1). Схема 2-го порядка считалась с параметрами $\delta = 1/(4m)$; $\theta = 0$, где $m = \theta + M/q_2$; $q_2 = \beta/(c\tau) + \alpha_c + \alpha_s$; $M = M_{i+1/2}$ на 1-м этапе ИМСП, $M = L_{i+1/2}$ на 2-м этапе ИМСП (в одномерном случае $M = 1/3h$).

Если после обсчета текущей ячейки на 1-м этапе пересчитывать входящие в соседние ячейки комбинации, то получатся итерации типа Зейделя, скорость которых выше. В таблице приведено среднее число внешних итераций $\nu$ и время счета $t$ за 20 первых временных шагов по вариантам метода ВДМ с пересчетом входящих комбинаций по Зейделю.

**Среднее число внешних итераций $\nu$ и время счета $t$ ($\varepsilon_{\text{сх}} = 0{,}00001$)**

| Метод | $\tau = 0{,}0002$ | | $\tau = 0{,}002$ | | $\tau = 0{,}02$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\nu$ | $t$ | $\nu$ | $t$ | $\nu$ | $t$ |
| ВДЭ из работы [5] | 11 | 0,11 | 52 | 0,69 | 27 | 0,60 |
| ВДМ, 1-й вариант ($U/4 \pm S/2$) | 15 | 0,19 | 61 | 0,87 | 45 | 0,65 |
| ВДМ, 2-й вариант ($U/\sqrt{3} \pm S$) | 16 | 0,19 | 63 | 0,80 | 46 | 0,68 |
| ВДМ, 3-й вариант ($X^+U + Y^+S$, $X^-U - Y^-S$) | 11 | 0,11 | 19 | 0,16 | 25 | 0,30 |

Из таблицы видно, что наилучшие результаты дает 3-й вариант метода ВДМ.

## Список литературы


1. *Михалас Д.* Звездные атмосферы. М.: Мир, 1982.

2. *Зуев А. И., Карлыханов Н. Г.* Метод решения уравнений радиационно-кондуктивного теплопереноса // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 1983. Т. 23, № 4. С. 910—921.

3. *Гусев В. Ю., Козманов М. Ю., Рачилов Е. Б.* Метод решения неявных разностных уравнений, аппроксимирующих системы уравнений переноса и диффузии излучения // Там же. 1984. Т. 24, № 12. С. 1842—1849.

4. *Гаджиев А. Д., Писарев В. Н.* Неявный конечно-разностный метод РОМБ для численного решения уравнений газовой динамики с теплопроводностью // Там же. 1979. Т. 19. С. 1288—1303.

5. *Гаджиев А. Д., Шестаков А. А.* Двумерная методика РОМБ для численного решения уравнений переноса излучения в многогрупповом $P_1$-приближении // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1990. Вып. 1. С. 41—47.

6. *Шестаков А. А.* Об одном варианте метода выделения диагонального элемента // Там же. Вып. 2. С. 71—75.

7. *Гаджиев А. Д., Гаджиева В. В., Лебедев С. Н. и др.* Комплекс программ ФЕНИКС для математического моделирования динамики сплошных сред и кинетических процессов и его применение для исследования развития одномодового геометрического дефекта в мишенях ЛТС // Там же. 1999. Вып. 2. С. 41—52.

8. *Гаджиев А. Д., Писарев В. Н., Шестаков А. А.* Метод расчета двумерных задач теплопроводности на неортогональных сетках // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 1982. Т. 22, № 2. С. 339—347.
9. *Fleck J. A., Jr. and Cummings J. D.* An implicit Monte-Carlo scheme for calculating time and frequency dependent nonlinear radiation transport // J. Comp. Phys. 1971. Vol. 8(3). P. 313—342.

Статья поступила в редакцию 9.11.05.